



# ***FÍSICA***

**PARA ESTUDIANTES DESESPERADOS**

**Volumen 1**

**Lautaro Vergara**



Copyright © 2019 Lautaro Vergara

Licensed under CC BY-NC-SA 3.0. The Legrand Orange Book. This template was downloaded from: <http://www.LaTeXTemplates.com>. Original author: Mathias Legrand (legrand.mathias@gmail.com) with modifications by: Vel (vel@latextemplates.com)

Fotos de portada:

1) Carina Nebula, NASA, ESA and the Hubble SM4 ERO Team

2) Autor no encontrado.

*First printing, May 2019*



# Índice general

<b>1</b>	<b>PREFACIO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>VECTORES Y COORDENADAS</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistema de Coordenadas</b>	<b>17</b>
2.1.1	Sistema de coordenadas cartesiano (u ortogonal)	17
2.1.2	Sistema de coordenadas polares planas	18
<b>2.2</b>	<b>Escalares y Vectores</b>	<b>19</b>
2.2.1	Cantidad escalar	19
2.2.2	Cantidad vectorial	20
2.2.3	Representación tipográfica de un vector	20
2.2.4	Representación gráfica de un vector	21
2.2.5	Representación de un vector en coordenadas cartesianas	21
<b>2.3</b>	<b>Álgebra Vectorial</b>	<b>23</b>
2.3.1	Multiplicación por escalar	23
2.3.2	Adición de vectores	24
2.3.3	Sustracción de vectores	26
<b>2.4</b>	<b>Multiplicación de vectores</b>	<b>26</b>
2.4.1	Producto escalar	27
<b>2.5</b>	<b>Representación de un vector en coordenadas polares planas</b>	<b>29</b>
<b>2.6</b>	<b>Interpretación geométrica del producto interior</b>	<b>30</b>
2.6.1	Ejercicios	32

<b>3</b>	<b>NOTACIÓN CIENTÍFICA Y APROXIMACIONES</b>	<b>37</b>
3.0.1	Unidades y Prefijos	37
3.0.2	Cambiando unidades	38
3.0.3	Ejercicios	40
3.0.4	Notación Científica	41
3.0.5	Ejercicios	43
3.0.6	Cifras Significativas	43
3.0.7	Ejercicios	45
3.0.8	Dígitos para el número $\pi$	46
<b>4</b>	<b>ANÁLISIS DIMENSIONAL</b>	<b>47</b>
4.0.1	Ejercicios	49
<b>5</b>	<b>CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN</b>	<b>51</b>
<b>5.1</b>	<b>Cinemática en una dimensión</b>	<b>51</b>
5.1.1	Desplazamiento	52
5.1.2	Velocidad y rapidez medias	54
5.1.3	Ejercicios	56
5.1.4	Velocidad instantánea	58
5.1.5	Aceleración media y aceleración instantánea	61
5.1.6	Movimiento con aceleración constante	64
5.1.7	Ejercicios	68
5.1.8	Problemas de encuentro	73
5.1.9	Ejercicios	76
5.1.10	Caída libre	78
<b>6</b>	<b>CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES</b>	<b>87</b>
<b>6.1</b>	<b>Movimiento parabólico</b>	<b>87</b>
6.1.1	Ejercicios	94
<b>6.2</b>	<b>Movimiento circular</b>	<b>98</b>
6.2.1	Velocidad angular media	100
6.2.2	Aceleración angular media e instantánea	102
6.2.3	Movimiento circular uniforme	102
6.2.4	Movimiento circular con aceleración angular constante	104
6.2.5	Movimiento circular con aceleración variable	107
6.2.6	Ejercicios	109
<b>6.3</b>	<b>Movimiento relativo y relatividad de Galileo</b>	<b>115</b>
6.3.1	Transformaciones de Galileo	117
6.3.2	Velocidad Relativa	119
6.3.3	Ejercicios	122
<b>7</b>	<b>DINÁMICA DE LA PARTÍCULA</b>	<b>127</b>
<b>7.1</b>	<b>Leyes de Newton</b>	<b>127</b>



<b>7.2</b>	<b>Tipos de Fuerzas</b>	<b>130</b>
7.2.1	Fuerza de fricción	130
7.2.2	Fuerza elástica que satisface la Ley de Hooke	133
<b>7.3</b>	<b>Diagrama de cuerpo libre</b>	<b>134</b>
<b>7.4</b>	<b>Pares acción y reacción</b>	<b>137</b>
<b>7.5</b>	<b>Estática</b>	<b>140</b>
7.5.1	Resortes en serie	140
7.5.2	Resortes en paralelo	142
7.5.3	Ejercicios	145
<b>7.6</b>	<b>Dinámica</b>	<b>151</b>
7.6.1	Ejercicios	158
<b>7.7</b>	<b>Fuerzas en Movimiento Circular</b>	<b>168</b>
7.7.1	Ejercicios	172
<b>8</b>	<b>TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA</b>	<b>181</b>
8.0.1	Formas de energía	182
<b>8.1</b>	<b>Trabajo</b>	<b>183</b>
8.1.1	Trabajo debido a una fuerza constante	184
8.1.2	Trabajo debido a fuerza de Hooke	187
<b>8.2</b>	<b>Fuerzas conservativas y no-conservativas</b>	<b>188</b>
<b>8.3</b>	<b>Energía Potencial, <math>U</math></b>	<b>189</b>
<b>8.4</b>	<b>Teorema Trabajo-Energía</b>	<b>193</b>
8.4.1	Conservación de la Energía	194
8.4.2	Potencia	195
8.4.3	Ejercicios	203
<b>9</b>	<b>CENTRO DE MASA</b>	<b>213</b>
<b>9.1</b>	<b>Definición del centro de masa</b>	<b>213</b>
<b>9.2</b>	<b>Centro de gravedad</b>	<b>221</b>
<b>9.3</b>	<b>Movimiento del centro de masa</b>	<b>221</b>
<b>9.4</b>	<b>Baricentro: un ejemplo desde la astronomía</b>	<b>223</b>
9.4.1	Ejercicios	224
<b>10</b>	<b>MOMENTUM LINEAL E IMPULSO</b>	<b>229</b>
<b>10.1</b>	<b>Colisiones</b>	<b>231</b>
10.1.1	Sistemas de referencia de centro de masa y de laboratorio	231
10.1.2	Colisión de dos partículas en 1 dimensión	232
10.1.3	Colisión vista desde marco de referencia en movimiento	233
10.1.4	Marco de referencia del centro de masa	235
10.1.5	Coeficiente de restitución	236
10.1.6	Definición general para el coeficiente de restitución	240
10.1.7	Colisiones en 2 dimensiones	241

<b>10.2</b>	<b>Impulso</b>	<b>244</b>
10.2.1	Ejercicios .....	249
<b>11</b>	<b>SISTEMAS CON MASA VARIABLE .....</b>	<b>257</b>
<b>11.1</b>	<b>Pérdida discreta de masa: Saturno V y los elefantes</b>	<b>259</b>
<b>11.2</b>	<b>Pérdida continua de masa</b>	<b>260</b>
11.2.1	Ejercicios .....	264
<b>12</b>	<b>DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO .....</b>	<b>269</b>
<b>12.1</b>	<b>Producto vectorial</b>	<b>269</b>
<b>12.2</b>	<b>Torque</b>	<b>272</b>
12.2.1	Ejercicios .....	274
<b>12.3</b>	<b>Momentum Angular</b>	<b>278</b>
12.3.1	Ejercicios .....	280
<b>12.4</b>	<b>Momento de inercia</b>	<b>281</b>
12.4.1	Teorema de Steiner .....	283
12.4.2	Ejercicios .....	284
<b>12.5</b>	<b>Ecuaciones de Newton para el cuerpo rígido</b>	<b>287</b>
<b>12.6</b>	<b>Momentum angular alrededor de un eje fijo</b>	<b>288</b>
<b>12.7</b>	<b>Estática del cuerpo rígido</b>	<b>289</b>
12.7.1	Ejercicios .....	297
<b>12.8</b>	<b>Rodadura sin deslizamiento</b>	<b>305</b>
12.8.1	Ejercicios .....	317
<b>12.9</b>	<b>Teorema Trabajo-Energía</b>	<b>324</b>
12.9.1	Ejercicios .....	332
<b>12.10</b>	<b>Conservación del momentun angular</b>	<b>340</b>
<b>12.11</b>	<b>El giróscopo</b>	<b>346</b>
12.11.1	Ejercicios .....	348
<b>13</b>	<b>GRAVITACIÓN .....</b>	<b>355</b>
<b>13.1</b>	<b>Curvas cónicas</b>	<b>356</b>
<b>13.2</b>	<b>Leyes de Kepler</b>	<b>358</b>
<b>13.3</b>	<b>Ley de Gravitación Universal de Newton</b>	<b>359</b>
<b>13.4</b>	<b>Teorema del cascarón esférico</b>	<b>362</b>
<b>13.5</b>	<b>Aceleración de gravedad y campo gravitatorio</b>	<b>364</b>
<b>13.6</b>	<b>Líneas de campo gravitatorio</b>	<b>366</b>
<b>13.7</b>	<b>Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio</b>	<b>367</b>
<b>13.8</b>	<b>Superficies equipotenciales</b>	<b>372</b>
<b>13.9</b>	<b>Intensidad del campo gravitatorio terrestre</b>	<b>373</b>

<b>13.10 Leyes de Kepler desde la perspectiva de Newton</b>	<b>374</b>
13.10.1 Segunda ley de Kepler y momentum angular . . . . .	374
13.10.2 Tercera ley de Kepler . . . . .	375
<b>13.11 Energía total en interacción gravitacional y órbitas</b>	<b>376</b>
<b>13.12 Velocidad de escape</b>	<b>378</b>
<b>13.13 Fuerzas de Marea</b>	<b>387</b>
<b>13.14 Masa gravitacional y masa inercial: Principio de Equivalencia</b>	<b>389</b>
<b>13.15 Orbitando en cuatro dimensiones</b>	<b>390</b>
<b>13.16 Ejercicios</b>	<b>391</b>
<b>14 SISTEMAS NO INERCIALES . . . . .</b>	<b>401</b>
<b>14.1 Traslación de sistemas acelerados</b>	<b>402</b>
<b>14.2 Análisis general de sistemas no inerciales</b>	<b>405</b>
14.2.1 Velocidad en el sistema de referencia no inercial . . . . .	408
14.2.2 Teorema de Coriolis: aceleración en sistemas no inerciales . . . . .	409
14.2.3 Ejercicios . . . . .	413
<b>15 OSCILACIONES . . . . .</b>	<b>417</b>
<b>15.1 Oscilador Armónico Simple</b>	<b>417</b>
15.1.1 Sistema masa-resorte: una masa más un resorte . . . . .	417
15.1.2 Energía en el Oscilador Armónico . . . . .	420
15.1.3 Velocidad y aceleración . . . . .	422
15.1.4 Oscilador armónico en circuitos eléctricos . . . . .	422
15.1.5 Péndulo simple . . . . .	423
<b>15.2 Oscilador armónico amortiguado</b>	<b>425</b>
15.2.1 Energía en un oscilador amortiguado . . . . .	429
15.2.2 Factor Q . . . . .	430
<b>15.3 Oscilador forzado</b>	<b>432</b>
15.3.1 Energía del oscilador forzado . . . . .	435
15.3.2 Oscilador forzado en circuitos eléctricos . . . . .	437
15.3.3 El puente de Tacoma . . . . .	438
<b>15.4 Sistema masa-resorte vertical</b>	<b>439</b>
<b>15.5 Péndulo físico</b>	<b>440</b>
<b>15.6 Péndulo de torsión</b>	<b>441</b>
<b>15.7 Ejercicios</b>	<b>442</b>
<b>16 ONDAS EN UNA DIMENSIÓN . . . . .</b>	<b>455</b>
<b>16.1 Forma general de una onda viajera</b>	<b>455</b>
16.1.1 Pulsos . . . . .	456
<b>16.2 Superposición e interferencia de pulsos</b>	<b>457</b>
16.2.1 Ejercicios . . . . .	459



<b>16.3 Ondas viajera sinusoidales</b>	<b>461</b>
16.3.1 Pausa matemática	463
<b>16.4 Superposición e interferencia de ondas sinusoidales</b>	<b>463</b>
16.4.1 El problema de la energía	466
16.4.2 Aplicación de interferencia: audífonos con cancelación de ruido	466
16.4.3 Ejercicios	467
<b>16.5 Ecuación de onda</b>	<b>470</b>
16.5.1 Ejercicios	474
<b>16.6 Energía en una onda</b>	<b>478</b>
16.6.1 Ejercicios	482
<b>16.7 Comportamiento de ondas en interfaces</b>	<b>484</b>
16.7.1 Ejercicios	487
<b>16.8 Ondas estacionarias en cuerdas tensas</b>	<b>487</b>
16.8.1 Ejercicios	491
<b>16.9 Ondas de sonido</b>	<b>495</b>
16.9.1 Compresión y rarefacción	496
16.9.2 Funciones de onda para ondas de sonido	498
16.9.3 Ejercicios	499
16.9.4 Ondas de sonido estacionarias	501
16.9.5 Ejercicios	505
16.9.6 Interferencia en el tiempo: batido de onda	507
<b>16.10 Ejercicios</b>	<b>508</b>
<b>16.11 Intensidad de ondas de sonido</b>	<b>510</b>
16.11.1 Decibeles	513
<b>16.12 Ejercicios</b>	<b>515</b>
<b>16.13 Ondas de compresión y de corte en sólidos</b>	<b>518</b>
16.13.1 Aplicaciones de ondas sísmicas	519
<b>16.14 Velocidad de fase y velocidad de grupo</b>	<b>519</b>
<b>16.15 Ondas no lineales</b>	<b>523</b>
<b>17 ONDAS EN DOS DIMENSIONES</b>	<b>527</b>
<b>17.1 Frente de onda: ondas planas y ondas esféricas</b>	<b>527</b>
17.1.1 Ondas planas	528
17.1.2 Pausa matemática	529
17.1.3 Ondas con simetría esférica	530
<b>17.2 Efecto Doppler</b>	<b>531</b>
17.2.1 Observador estacionario respecto de una fuente	532
17.2.2 Observador en movimiento respecto de una fuente	533
17.2.3 Observador y fuente en movimiento	534
17.2.4 Efecto Doppler con observador en un ángulo	534
17.2.5 Aplicaciones del efecto Doppler	536
17.2.6 Ondas de Choque	540

17.2.7	Nota importante .....	542
17.2.8	Ejercicios .....	542
<b>17.3</b>	<b>Principio de Huygens</b>	<b>548</b>
<b>17.4</b>	<b>Ley de reflexión</b>	<b>549</b>
<b>17.5</b>	<b>Ley de refracción</b>	<b>551</b>
<b>17.6</b>	<b>Interferencia</b>	<b>553</b>
17.6.1	Interferencia por fuentes coherentes distintas .....	556
17.6.2	Ejercicios .....	559
<b>17.7</b>	<b>Difracción</b>	<b>563</b>
17.7.1	Difracción por una apertura .....	565
17.7.2	Ejercicios .....	573
<b>17.8</b>	<b>Revisión del experimento de doble rendija de Young</b>	<b>575</b>
17.8.1	Cálculo con diagrama de fasores .....	576
17.8.2	Ejercicios .....	579
<b>17.9</b>	<b>Ondas estacionarias bidimensionales</b>	<b>580</b>
<b>Index</b>	<b>.....</b>	<b>583</b>





A Patricia y Matías,  
con quienes camino por esta vida,  
agradecido de ser amado y amarlos.  
Gracias por vuestra comprensión  
por todas estas horas, días y meses de trabajo.



# 1. PREFACIO

No debemos preocuparnos si los estudiantes no lo saben todo, pero solo si lo saben todo mal.

Pyotr L. Kapitsa  
Premio Nobel de Física, 1978

Desde el año 2016 que he estado dictando un curso de física para estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería Física, en el Departamento de Física de la Universidad de Santiago de Chile. Es un curso de dos semestres de duración, que he diseñado en la modalidad de clases activas.

Los estudiantes tienen una preparación muy variada cuando llegan a estudiar esta carrera, algo muy usual porque el nivel de la educación en Chile es deficiente. Así también, estudiantes que ingresan a la Universidad de Santiago de Chile provienen en su mayor parte de estrato social medio y medio-bajo, lo que es una desventaja mayor.

Este libro ha sido basado en esas clases, donde se parte de la base de que los estudiantes no manejan muchos conceptos ni técnicas matemáticas avanzadas. Eso no significa que algunos pocos de ellos sí las manejen.

No todos los temas tratados en este libro son estudiados durante el curso mencionado. Este libro no es solo para estudiantes de Ingeniería Física o Licenciatura en Física, sino para estudiantes de ingeniería, en general. El estudiante no se debe amedrentar por tópicos que están un poco alejados de los libros estándar. Esos tópicos no tienen ejercicios asociados. Están pensados para que el estudiante busque y vaya más allá. Por supuesto recomiendo su lectura, pero quizás no la primera vez que revisa la materia.



Aunque el estudiante encuentre que las Pausas Matemáticas son difíciles de digerir, sugiero que haga un intento de comprenderlas. Algunos tópicos extra los he incorporado porque algunos de mis estudiantes me han preguntado acerca de esos temas. Otros, como ondas no lineales, porque estoy seguro que con los conceptos aprendidos ellos pueden comprender lo básico de este tópico tan importante.

Uno de los problemas que he observado en los alumnos en mis 36 años de experiencia como profesor universitario, que yo mismo tuve como alumno de primer año, es la insistencia en postergar la incorporación de vectores en los temas de física, creyendo que hacer cursos basados en álgebra le harán la vida más fácil a los alumnos. Resulta que es usual encontrar lo contrario: uno de los problemas recurrentes por parte de los alumnos es escribir correctamente los signos en las ecuaciones que describen fenómenos físicos, descritas por leyes y cantidades vectoriales. Por eso la insistencia en el uso de vectores. Sin embargo, durante casi todo este libro nos enfocamos en vectores en máximo dos dimensiones, excepto cuando estudiamos sólido rígido.

Postergar la incorporación de vectores hace que los alumnos sufran en el curso de electromagnetismo, donde el uso de vectores es intensivo. Por eso, además, en este libro se introducen conceptos que son utilizados en electromagnetismo, cuando vemos la teoría de gravitación de Newton.

Otra de los aspectos que se encuentra en libros de física universitaria es la incorporación de cálculos avanzados, principalmente integrales en dos y tres dimensiones, algo que se evita en este libro, debido a que está pensado en alumnos que no necesariamente saben suficiente (o mejor, prácticamente nada de) cálculo diferencial e integral. El foco está principalmente en conceptos, más que en cálculos complicados.

Este libro intenta mantener un nivel intermedio, en donde la matemática necesaria para que el estudiante vaya aprendiendo y profundizando en los conceptos se va introduciendo de a poco, pero sin profundizar en cálculos matemáticos muy complicados. Y si parecen, se les informa a los estudiantes que no es estrictamente necesario que sepan seguirlos en detalle. Aún así, lentamente se van introduciendo elementos matemáticos adicionales que hacen que este libro sea en gran medida autoconsistente y una ayuda para futuros cursos.

A los lectores más críticos, les agradeceré hacerme ver cualquier error en que haya caído. También, cualquier observación será bienvenida. Mi correo electrónico personal, [lautarovergara@gmail.com](mailto:lautarovergara@gmail.com)

Por último, este libro fue inicialmente pensado para una audiencia reducida, más bien local, por eso no me he preocupado de dar información completa acerca del origen de dibujos y fotos. Mi falta y me disculpo. Si alguien me ayuda con eso, le estaré muy agradecido, porque después de 10 meses de intenso trabajo, fueron demasiadas fuentes que consulté para estos efectos y simplemente la mayoría no recuerdo de dónde han salido. Si alguien se siente pasado a llevar con el uso de estas imágenes, le solicito me lo diga. Agradeceré, sí, que me permita usarlas, ya que este libro está pensado en la modalidad Open Source. En versiones posteriores de este libro iré agregando esa información. Con respecto a los problemas y ejercicios, pasa algo similar: muchos provienen de distintas fuentes de internet. A esta altura es imposible rastrearlas todas.

Lautaro Vergara  
Profesor Asociado  
Departamento de Física

---

Universidad de Santiago de Chile  
Marzo, 2020.







## 2. VECTORES Y COORDENADAS

### 2.1 Sistema de Coordenadas

En Física necesitamos considerar un observador que realice mediciones de los fenómenos naturales. Para ello ese observador u observadores necesitan poder comunicar la información de modo objetivo. Con ese fin se necesita especificar posiciones en el espacio, lo que se logra definiendo un **sistema coordenado** asociado al observador.

Un sistema coordenado consta de:

- a) Un punto de referencia fijo,  $O$ , denominado origen,
- b) Un conjunto de direcciones o ejes especificados, con una escala y unas etiquetas apropiadas sobre sus ejes,
- c) Instrucciones que indican cómo etiquetar un punto  $P$  en el espacio con respecto del origen y de los ejes.

Existen diferentes sistemas coordenados que se utilizan en Física, pero en este libro solo usaremos sistemas coordenados cartesianos y polares planos.<sup>1</sup>

#### 2.1.1 Sistema de coordenadas cartesiano (u ortogonal)

En un **sistema de coordenadas cartesiano** los ejes coordenados son perpendiculares entre sí.

Por ejemplo, en dos dimensiones:

Un punto arbitrario se define mediante las coordenadas  $(x, y)$ , como muestra la Fig. 2.1. En el sistema coordenado,

y positivas hacia arriba,

---

<sup>1</sup>Haremos muy al pasar un guiño a las coordenadas esféricas

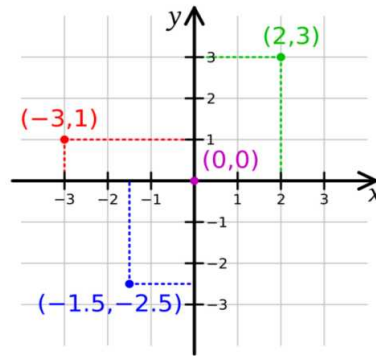


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cartesiano

$x$  positivas hacia la derecha.

### 2.1.2 Sistema de coordenadas polares planas

Así como podemos localizar un punto en el plano dando sus coordenadas cartesianas, también podemos localizar el mismo punto mediante las **coordenadas polares planas** ( $r$ ;  $\theta$ ). Es lo hacemos, sin pensar, cuando apuntamos a un objeto y nuestro cerebro hace una estimación de la distancia y elevación en que se encuentra.

La coordenada  $r$  es la longitud de la línea que une el origen con el punto  $P$ , como se muestra en la Fig. 2.2

$\theta$  es el ángulo, llamado **ángulo polar**, entre la dirección  $r$  y el **eje polar**. El ángulo polar se considera positivo si se mide según un movimiento antihorario desde el eje polar.

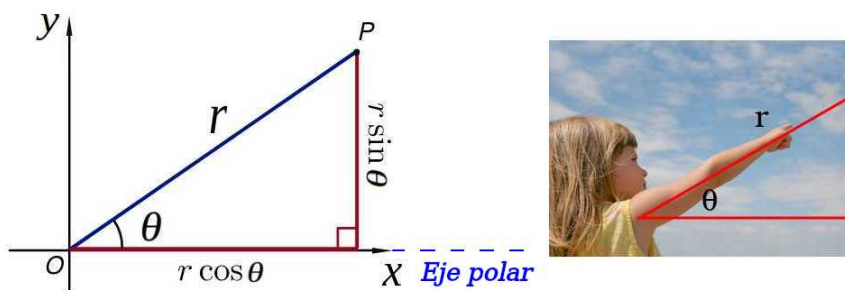


Figura 2.2: Sistema de coordenadas polares planas

Notar que en la figura, el eje polar coincide con el eje coordenado  $x$ , sin embargo la existencia del sistema coordenado polar es independiente del sistema coordenado cartesiano (u otro sistema coordenado).

Por supuesto, en la misma figura se observa la relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares planas:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Técnicamente, esta relación entre las coordenadas se denomina **transformación de coordenadas**. Es una función que toma un par de coordenadas  $(r, \theta)$  y las transforma en el par  $(x, y)$ .

Es importante tener en cuenta que **una transformación de coordenadas no puede cambiar el contenido de la información física**.

De la figura observamos que las coordenadas  $r, x, y$  forman un triángulo rectángulo, entonces, de acuerdo al Teorema de Pitágoras

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}. \quad (2.2)$$

Además, el ángulo  $\theta$  se puede encontrar por medio de la ecuación (2.1), ya que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (2.3)$$

Muchas veces la información se da en grados de inclinación, pero en física, acostúmbrate a utilizar los ángulos medidos en **radianes**. Si resulta que necesitas la información en grados, solo haz la transformación.

Un radian se define según muestra la Fig. 2.3. De este modo, circunferencia completa tiene una apertura angular de  $2\pi$  radianes, que en grados es  $360^\circ$ .

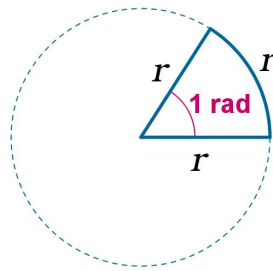


Figura 2.3: Definición de radian

## 2.2 Escalares y Vectores

Para los efectos de este curso, existen dos tipos de magnitudes físicas importantes: cantidades escalares y cantidades vectoriales.

### 2.2.1 Cantidad escalar

Una cantidad escalar es aquella que queda definida dando una serie de números. Por ejemplo, cuando mides la longitud de un objeto usando una regla, el valor de esa longitud es un número, es decir un escalar. Otros ejemplos más interesantes son la temperatura en un determinado punto del espacio o la densidad de un objeto.

El valor de una magnitud escalar puede depender de la posición, descrita por una **función escalar**. Esto queda claro en la foto térmica cuerpos humanos, Fig. 2.4, donde los diferentes colores corresponden a distintas temperaturas. En ese caso, podemos escribir la temperatura como la función  $T(x, y, z)$ .

El conjunto de todos los valores de esta magnitud escalar se llama **campo escalar**.



Figura 2.4: Mapa de calor de dos personas

### 2.2.2 Cantidad vectorial

Una cantidad vectorial es aquella que queda descrita dando su magnitud, dirección y sentido.

Ejemplos de cantidades vectoriales son la velocidad de partículas en un flujo de aire (como en la Fig. 2.5), la posición de cada una de esas partículas, su desplazamiento desde un punto a otro, o la fuerza aplicada sobre un objeto. El valor de una magnitud vectorial puede depender de la posición, descrita por una función vectorial. Esto queda claro en la figura, donde podríamos indicar esta información como  $\vec{v}(x, y, z)$

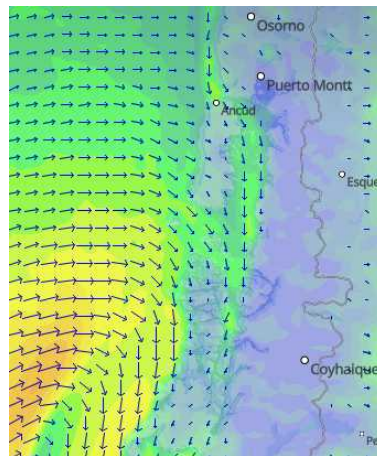


Figura 2.5: Mapa de viento sobre la costa sur de Chile

Al conjunto de todos los valores de esta magnitud vectorial se le llama **campo vectorial**.

### 2.2.3 Representación tipográfica de un vector

Para representar un vector en un texto se utilizan diferentes formas en la literatura.

#### Representación de un vector

- a) Letras en negrita, mayúscula o minúscula: **A**, **a**.
- b) Flecha encima del símbolo:  $\vec{A}$ ,  $\vec{a}$ .

#### Representación de la magnitud de un vector

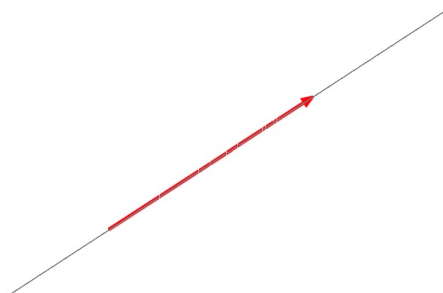


Figura 2.6: Representación gráfica de un vector

- a) Letras en formato normal:  $A$ ,  $a$ .
- b) Barras rodeando a la magnitud vectorial (usual en Física):  $|\vec{A}|$ ,  $|\vec{a}|$ ,  $|\mathbf{A}|$ ,  $|\mathbf{a}|$ .
- c) Doble barra rodeando a la cantidad vectorial (notación usual en Matemática):  $\|\vec{A}\|$ ,  $\|\vec{a}\|$ ,  $\|\mathbf{A}\|$ ,  $\|\mathbf{a}\|$ .

**El módulo o longitud de un vector siempre es positivo o cero**, y especifica las unidades de la magnitud que el vector representa (cuántos metros me he desplazado, por ejemplo).

En Matemática, un vector es un elemento de un espacio con propiedades bien definidas, llamado **espacio vectorial**,<sup>2</sup>. Todo objeto matemático que satisface esas propiedades se llama **vector**. Por lo tanto, se debe tener claro que los vectores con los que trabajaremos son elementos de un espacio vectorial muy particular llamado  $\mathbb{R}^3$  (erre tres), para vectores en tres dimensiones;  $\mathbb{R}^2$  (erre dos), para vectores en dos dimensiones;  $\mathbb{R}$  (erre), para vectores en una dimensión. Pero también debemos tener claro que no todos los vectores son como los que utilizamos en este libro y menos llevan “flechita” como notación.

### 2.2.4 Representación gráfica de un vector

Un vector en  $\mathbb{R}^3$ , en general, se denota por un trazo recto que termina en una flecha, como se muestra en la Fig. 2.6. El largo del trazo es el **módulo o magnitud** del vector. La dirección de la flecha describe el **sentido del vector**, mientras que la línea que se muestra en la figura se denomina es la **dirección del vector**.

### 2.2.5 Representación de un vector en coordenadas cartesianas

Vamos a ubicar ahora a estos vectores en un sistema coordenado. Por simplicidad, trabajaremos en dos dimensiones. Cada eje coordenado tiene una dirección y un sentido y está definido por los llamados **vectores unitarios**, porque su longitud es igual a 1. En la Fig. 2.7 se denotan por vectores de color rojo y matemáticamente como

$\hat{x}$  (“x tongo”), para el vector unitario en el sentido  $x$ ,

$\hat{y}$  (“y tongo”), para el vector unitario en el sentido  $y$ .

Una observación importante es que **todo vector  $\vec{V}$  se puede escribir como el módulo del vector,  $|\vec{V}|$ , por un vector unitario que define su sentido y dirección,  $\hat{V}$** . Es decir,

$$\vec{V} = |\vec{V}| \hat{V}. \quad (2.4)$$

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Vector\\_space](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space)

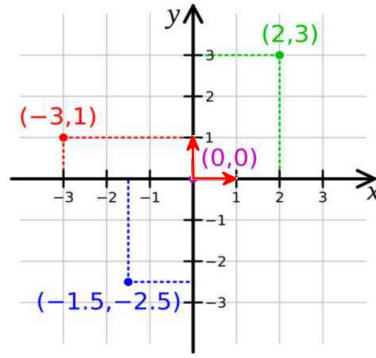


Figura 2.7: Sistema coordenado y vectores unitarios cartesianos

Esta ecuación también se puede considerar una definición del vector unitario,  $\hat{V}$  y por lo tanto podemos escribir

$$\hat{V} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}. \quad (2.5)$$

Observa que si tomamos el largo de este vector da 1, porque el módulo de un número positivo,  $|\vec{V}|$ , es el mismo número, y el largo del vector  $\vec{V}$ , es  $|\vec{V}|$ . Luego, tenemos

$$|\hat{V}| = \frac{|\vec{V}|}{|\vec{V}|} = 1. \quad (2.6)$$

Lo que debes tener claro es nunca en la vida dividir por un vector de  $\mathbb{R}^3$ , porque es **una operación que no está definida**.

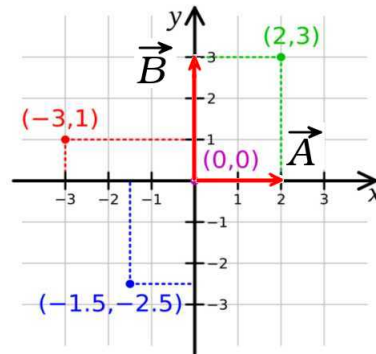


Figura 2.8: Dos vectores a lo largo de los ejes coordenados

Consideremos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  en rojo en la Fig. 2.8. Según nuestra regla, podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{A} &= |\vec{A}| \hat{x} \quad \text{y} \\ \vec{B} &= |\vec{B}| \hat{y} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Notar que dado que el módulo de un vector es siempre positivo o cero, los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son paralelos a los vectores  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ , respectivamente (algo que queda aún más claro al observar la figura).

Más precisamente, de la figura conocemos los módulos de ambos vectores, así que podemos escribir

$$\begin{aligned}\vec{A} &= 2\hat{x}, \\ \vec{B} &= 3\hat{y}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

## 2.3 Álgebra Vectorial

### 2.3.1 Multiplicación por escalar

Los resultados anteriores demuestran que un vector puede ser multiplicado por un **número real**,  $\lambda$  (letra griega lambda). Esta operación se denomina **multiplicación por escalar**:

$$\vec{B} = \lambda \vec{A}.\tag{2.9}$$

Al vector  $\vec{B}$  que se obtiene después de una operación sobre un vector, en este caso  $\vec{A}$ , se le denomina **vector resultante**.

Notar que la expresión de la Ec. (2.4) es un caso particular de esta ecuación.

**Importante:** Debes aprender cuanto puedas del alfabeto griego, ya que nuestro alfabeto no tiene letras suficientes para las notaciones.

Consideremos que el vector original lo dibujamos en color rojo. Si el número  $\lambda$  es positivo y menor que 1, entonces el vector resultante se acorta, como indica la Fig. 2.9 a). Si el número es positivo y mayor que 1, entonces el vector resultante se alarga, como indica la figura central y es **paralelo** al vector original. En esta Fig. 2.9 b) se ha ubicado el vector resultante paralelo al vector original, sólo para efectos de visualización.

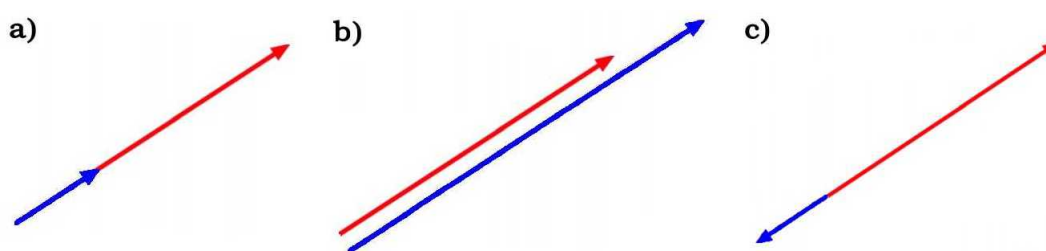


Figura 2.9: a) Resultado de multiplicación por escalar  $0 < \lambda < 1$ ; b) Resultado de multiplicación por escalar  $\lambda > 1$ ; c) Resultado de multiplicación por escalar  $-1 < \lambda < 0$

Si el escalar es un número negativo, pero dentro del intervalo abierto<sup>3</sup>  $(-1,0)$ , entonces el vector resultante se acorta, pero el sentido cambia como indica la Fig. 2.9 c). Se dice que el vector en azul es **anti-paralelo** al vector en rojo.

**Observación:** Notar que estos vectores no están asociados a un sistema coordenado.

<sup>3</sup>Es decir, un intervalo en el cual no se consideran sus extremos.



### 2.3.2 Adición de vectores

Ahora que sabemos que se puede multiplicar un vector por un escalar, veremos de inmediato que los vectores se pueden sumar entre sí (en el sentido amplio del concepto; es decir se pueden sumar y/o restar). La operación se llama **adición de vectores** y se denota

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (2.10)$$

Como puedes ver, ésta es una **operación conmutativa**: no importa el orden en que se realice, el vector resultante  $\vec{C}$  es el mismo dado los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ .

#### Ejemplo 1

Veamos en más detalle la operación adición con ayuda de las siguientes figuras.

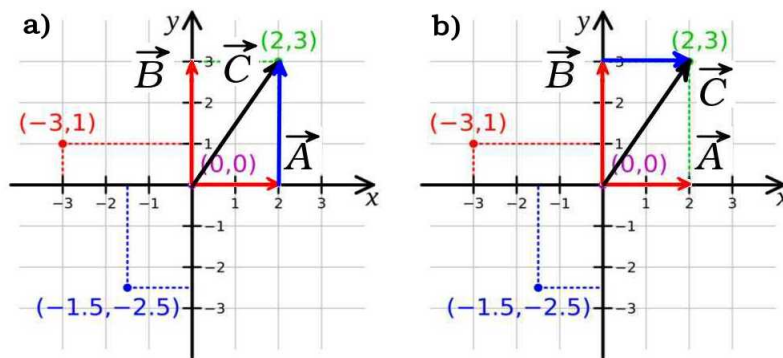


Figura 2.10: a) Suma de vectores:  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ ; b) Suma de vectores:  $\vec{C} = \vec{B} + \vec{A}$

Para sumar dos vectores debemos **desplazar de forma paralela** un vector hasta que su origen coincida con la flecha del otro vector. En la Fig. 2.10 a) hemos realizado un **desplazamiento paralelo** del vector  $\vec{B}$  hasta el origen del segmento que pertenece al vector  $\vec{A}$ , y le hemos cambiado su color para efectos de visualización. Sin embargo, debe quedar claro que ese desplazamiento paralelo no cambia al vector. Al unir el comienzo del vector  $\vec{A}$  con el final del vector  $\vec{B}$ , obtenemos el vector resultante  $\vec{C}$ . Como en esta operación primero se encuentra el vector  $\vec{A}$  y luego el vector  $\vec{B}$ , esta operación corresponde a

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

Del mismo modo, en la Fig. 2.10 b) hemos realizado un **desplazamiento paralelo** del vector  $\vec{A}$  hasta el origen del segmento que pertenece al vector  $\vec{B}$ . Al unir el comienzo del vector  $\vec{B}$  con el final del vector  $\vec{A}$ , obtenemos nuevamente el vector resultante  $\vec{C}$ . Como en esta operación primero se encuentra el vector  $\vec{B}$  y luego el vector  $\vec{A}$ , esta operación corresponde a

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A}.$$

Por supuesto, este tipo de operación gráfica se puede realizar con vectores que no están ligados a un sistema coordenado.

Por lo tanto, usando la Ec. (2.8) obtenemos

$$\vec{C} = 2\hat{x} + 3\hat{y} = 3\hat{y} + 2\hat{x}, \quad (2.11)$$



lo que ratifica el resultado gráfico.

**Ejercicio:** ¿Cómo se escribe este vector en la forma general, es decir, un módulo por un vector unitario?

En la figura aparecen las coordenadas (2,3) del punto donde termina el vector  $\vec{C}$ ; este vector da la **posición** de ese punto en el plano. De la Ec. (2.11), vemos que los mismos números 2 y 3 aparecen acompañando a los vectores unitarios  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$ . Esos números se denominan las **componentes** del vector  $\vec{C}$ .

Más general, para un vector en  $\mathbb{R}^2$  escribimos

$$\vec{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y}, \quad (2.12)$$

con  $C_x$  la componente  $x$  y  $C_y$  la componente  $y$ .

Para un vector en  $\mathbb{R}^3$  será

$$\vec{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}. \quad (2.13)$$

Vemos que **todo** vector en  $\mathbb{R}^3$  se puede escribir en términos del conjunto de vectores  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ , conjunto que se denomina la **base ortonormal canónica** de  $\mathbb{R}^3$ . Los matemáticos afirman entonces que esta base ortonormal **genera**  $\mathbb{R}^3$ .

**El vector cero o nulo**  $\vec{0}$  se escribe del mismo modo que el vector  $\vec{C}$  en Ec. (2.12). Es decir,

$$\vec{0} = 0\hat{x} + 0\hat{y}.$$

Puede ocurrir por cierto que la suma de varios vectores sea el vector cero,  $\vec{0}$ .

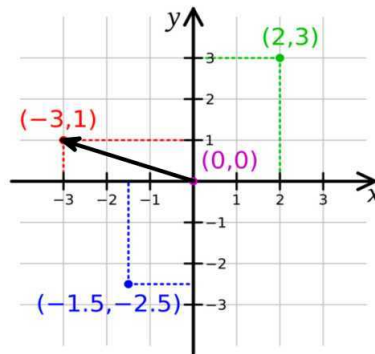


Figura 2.11: Vector con coordenadas (-3,1)

### Ejemplo 2

Veamos otro ejemplo: en la Fig. 2.11 aparece un vector que termina en las coordenadas (-3,1). Por lo tanto, escribimos

$$\vec{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z} \quad (2.14)$$

Como este vector está en el plano  $(x, y)$  su componente  $z$  es cero. Luego, leyendo las componentes directamente del gráfico

$$\vec{C} = -3\hat{x} + 1\hat{y}. \quad (2.15)$$

Nota que la componente  $x$  del vector  $\vec{C}$  es  $\vec{C}_x = -3\hat{x}$ . Observamos que aún con el signo negativo, este vector se puede escribir con en la Ec. (2.4), esto es, como un módulo (siempre positivo) por **un** vector unitario:

$$\vec{C}_x = 3(-\hat{x}) \quad (2.16)$$

Es decir, en este caso el vector unitario correspondiente es  $-\hat{x}$ .

### 2.3.3 Sustracción de vectores

Ya sabemos como sumar vectores, pero ¿cómo hacemos para restar vectores?

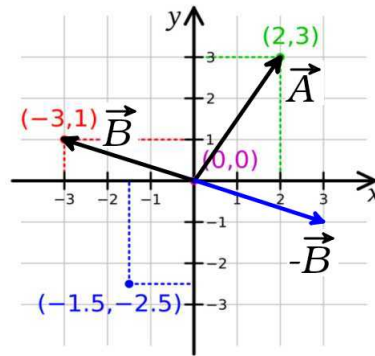


Figura 2.12: Sustracción de vectores

Consideremos la operación  $\vec{A} - \vec{B}$  y veamos cómo se procede de modo gráfico. Notemos que  $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ . Esto nos da la pista para hacer la operación gráficamente: lo que debemos hacer es encontrar el vector  $-\vec{B}$  y seguir el procedimiento de traslación paralela para hacer la suma de los dos vectores  $\vec{A}$  y  $-\vec{B}$ . El vector  $-\vec{B}$  es un vector **antiparalelo** al vector  $\vec{B}$  y se muestra en color azul.

#### Ejemplo 3

Igual de importante es saber hacerlo de modo analítico:

Tenemos que  $\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$  y  $\vec{B} = -3\hat{x} + 1\hat{y}$ . Luego,  $-\vec{B} = 3\hat{x} - 1\hat{y}$  y entonces

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (2\hat{x} + 3\hat{y}) + (3\hat{x} - 1\hat{y}) = (2 + 3)\hat{x} + (3 - 1)\hat{y}. \quad (2.17)$$

Por lo tanto,

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = 5\hat{x} + 2\hat{y}. \quad (2.18)$$

## 2.4 Multiplicación de vectores

Los vectores se pueden multiplicar de dos maneras diferentes:

- Producto escalar:** el resultado es un escalar,
- Producto vectorial:** el resultado es un vector

### 2.4.1 Producto escalar

Dados dos vectores cualesquiera  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , definimos <sup>4</sup> el **producto escalar** como

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta, \quad (2.19)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre las direcciones positivas de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , con  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

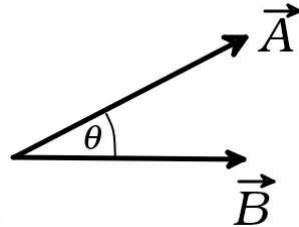


Figura 2.13: Producto escalar de vectores

Dado que se debe poner un punto entre los vectores para denotar su multiplicación, a este producto también se le llama **producto punto**.

El producto escalar posee las buenas propiedades de un producto normal, pero **no puede ser asociativo** ya que sólo está definido entre dos vectores.

Notar que el producto punto es un número real que puede **ser positivo, cero o negativo**. Como es un número, **el resultado no puede depender del sistema coordenado** (esto es lo que se llama un **invariante bajo transformaciones de coordenadas**, un tema que resulta muy importante por ejemplo en Relatividad General).

**Observación:** Recuerda que un vector es un elemento de un espacio vectorial y que existen múltiples diferentes tipos de vectores. Para esos vectores existe una generalización del producto punto, y en ese caso ya no se usa el nombre producto punto sino que **producto interior**.

¡Por supuesto, el producto punto es un producto interior!

De la definición, es claro que si  $\theta = 0^\circ$  y ambos vectores son iguales, entonces

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2, \quad (2.20)$$

es decir, el producto punto de un vector consigo mismo es igual al cuadrado de su longitud. Luego, ¡esta es una forma de conocer la longitud de un vector!

#### Ejemplo 4

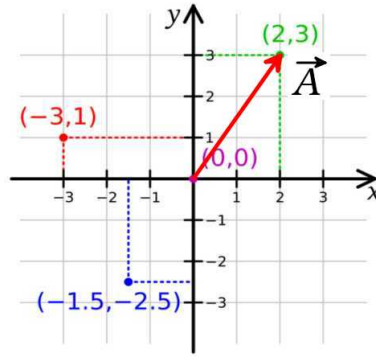
Veamos de inmediato un ejemplo. Consideremos el vector  $\vec{A}$  de la figura siguiente. Ya sabemos cómo expresarlo en sus componentes cartesianas,

$$\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y}.$$

Hacemos el producto punto consigo mismo y obtenemos

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = (2\hat{x} + 3\hat{y}) \cdot (2\hat{x} + 3\hat{y}) = 2^2\hat{x} \cdot \hat{x} + 3^2\hat{y} \cdot \hat{y} = 2^2 + 3^2. \quad (2.21)$$

<sup>4</sup>En matemáticas es un teorema.



Notar que el producto cruzado es cero, es decir

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = 0, \quad (2.22)$$

porque ambos vectores son ortogonales.

De la ecuación (2.21)

$$|\vec{A}| = \sqrt{(2^2 + 3^2)}. \quad (2.23)$$

Se ha dejado esta forma a propósito, para que compares esta expresión particular con el resultado de la Ec. (2.2).

Y si usamos la Ec. (2.3), podemos determinar el ángulo que forma el vector  $\vec{A}$  con el eje  $x$ , esto es,  $\tan \theta = 3/2$ . Es decir,  $\theta = \arctan(1,5) = 0,983$  rad (radianes). En grados,  $\theta = 56,3^\circ$ .

Más general, en dos dimensiones (¡extiende este análisis a tres dimensiones!), sea  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y}$  un vector cualquiera. Luego,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2 = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y}) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y}) = A_x^2 + A_y^2, \quad (2.24)$$

o bien

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x^2 + A_y^2)}. \quad (2.25)$$

Notar, además, que las componentes del vector se determinan haciendo el producto punto con los respectivos vectores unitarios

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \hat{x} &= A_x, \\ \vec{A} \cdot \hat{y} &= A_y. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Esto nos permite, usando la definición de producto punto, conocer además los ángulos que forma el vector  $\vec{A}$  con el eje  $x$  y el eje  $y$ , respectivamente. De este modo se puede definir los **cosenos directores** de un vector respecto de un sistema de coordenadas ortogonales.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{A_x}{|\vec{A}|}, \\ \cos \beta &= \frac{A_y}{|\vec{A}|}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

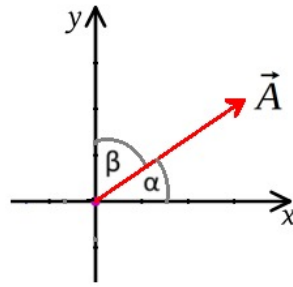


Figura 2.14: Cosenos directores

Como vemos de la Fig. 2.14, estos son los cosenos de los ángulos que forma el vector con el sentido positivo de cada uno de los ejes coordenados. Los ángulos se toman entre 0 y  $\pi$ , de modo que los cosenos directores pueden ser positivos o negativos.

**Ejercicio:** Comprueba que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1. \quad (2.28)$$

Por supuesto, existe la versión tridimensional de ellos, en donde el tercer ángulo,  $\gamma$ , es aquel que el vector correspondiente forma con el eje  $z$ . En ese caso, se cumple que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (2.29)$$

¡Atrévete y demuéstralo!

Ahora que tenemos la igualdad de Ec. (2.26), podemos escribir el vector  $\vec{A}$  como

$$\vec{A} = A \cdot \hat{x} + A \cdot \hat{y}. \quad (2.30)$$

## 2.5 Representación de un vector en coordenadas polares planas

En la Fig. 2.15 se ha superpuesto el sistema de coordenadas polares planas, con coordenadas  $(r, \theta)$ , sobre un sistema de coordenadas cartesianas, con coordenadas  $(x, y)$ . Esto no es necesario, pero como hemos visto nos permite conocer la relación entre las coordenadas cartesianas y estas coordenadas.

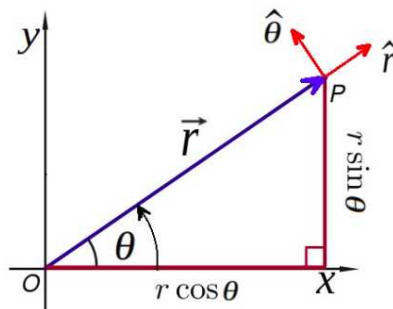


Figura 2.15: Coordenadas polares planas: vectores radial y unitarios

Recordemos que todo vector  $\vec{V}$  se puede escribir como el módulo del vector,  $|\vec{V}|$  por un vector unitario que define su sentido y dirección,  $\hat{V}$ . En esta caso, podemos escribir el vector de posición  $\vec{r}$  como

$$\vec{r} = |\vec{r}|\hat{r}. \quad (2.31)$$

Vemos que el vector unitario polar  $\hat{\theta}$  sigue el sentido en que el ángulo polar está creciendo con valor positivo. Del mismo modo como sucede en el caso cartesiano, los vectores unitarios polares forman una base para el espacio  $\mathbb{R}^2$ , ya que cualquier vector en el plano puede representarse en términos de ellos. Cómo debe ocurrir para una base vectorial, los vectores unitarios polares son ortogonales. Esto implica que son **linealmente independientes** entre sí.

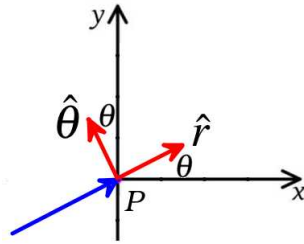


Figura 2.16: Zoom de Fig. (2.15)

Notar que el ángulo polar se repite como se muestra en el zoom de la figura anterior (ver Fig. 2.16). Luego, podemos expresar los vectores unitarios polares en función de los vectores unitarios cartesianos como

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad (2.32)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta. \quad (2.33)$$

Por lo tanto, el vector  $\vec{r}$  se escribe como

$$\vec{r} = |\vec{r}|\hat{r} = \hat{x}r \cos \theta + \hat{y}r \sin \theta = x\hat{x} + y\hat{y}, \quad (2.34)$$

donde en la última igualdad hemos usado la transformación de coordenadas, Ec. (2.1).

## 2.6 Interpretación geométrica del producto interior

Consideremos la figura adjunta, Fig. 2.17. En ella hay dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  que forman un ángulo  $\theta$  entre ellos. Junto a ello, he incluido dos longitudes  $A_{\perp}$  y  $B_{\perp}$  que representan las **proyecciones ortogonales** de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  sobre el opuesto, respectivamente. Es claro de la figura que

$$\begin{aligned} A_{\perp} &= |\vec{A}| \cos \theta, \\ B_{\perp} &= |\vec{B}| \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Notar que se ha agregado un trazo en la dirección del vector  $\vec{A}$  para que la proyección de  $\vec{B}$  se vea de manera clara.

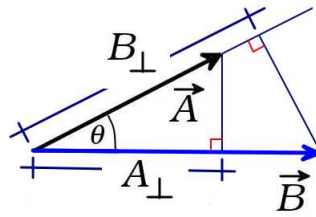


Figura 2.17: Proyecciones ortogonales de dos vectores

Llamemos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  a los vectores unitarios en las direcciones correspondientes. Luego, la proyección sobre la dirección  $\hat{B}$  es

$$\vec{A} \cdot \hat{B} = |\vec{A}| |\hat{B}| \cos \theta = |\vec{A}| \cos \theta \quad (2.36)$$

y aquella para la dirección  $\hat{A}$

$$\vec{B} \cdot \hat{A} = |\vec{B}| |\hat{A}| \cos \theta = |\vec{B}| \cos \theta. \quad (2.37)$$

Lo que obtenemos es exactamente el resultado anterior, correspondiente a las proyecciones ortogonales de los vectores respectivos y por lo tanto hemos demostrado que

$$\begin{aligned} A_{\perp} &= \vec{A} \cdot \hat{B}, \\ B_{\perp} &= \vec{B} \cdot \hat{A}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Concluimos que **el producto punto es esencialmente una proyección**.

El **producto vectorial** lo estudiaremos más adelante, para no tardar tanto en ver sus aplicaciones.

Para terminar esta sección, una observación importante.

La definición con la que comenzamos el tema de vectores: *una cantidad vectorial es aquella que queda descrita dando su magnitud, dirección y sentido* **no es una buena definición de un vector**, la verdad. Es útil, pero no es correcta. Un ejemplo muy bueno del libro de David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, da cuenta de esto. Consideremos la cantidad

$$\vec{N} = N_x \hat{x} + N_y \hat{y} + N_z \hat{z}, \quad (2.39)$$

donde  $N_x$  es número de peras,  $N_y$  manzanas y  $N_z$  bananas. Parece un vector, ¿verdad? Y además se puede sumar con el objeto

$$\vec{M} = M_x \hat{x} + M_y \hat{y} + M_z \hat{z}, \quad (2.40)$$

que también representa peras, manzanas y bananas en las componentes (?)  $x, y, z$ . Todo luce como si fuesen vectores y adición de vectores usuales, etc. Pero no lo son. Porque **un vector en el espacio, para ser vector, debe transformar de un modo muy particular bajo transformaciones de coordenadas**. Estos “vectores” claramente no satisfacen esa condición.

## 2.6.1 Ejercicios

1.
  - a) Encuentra el producto punto de los vectores  $\vec{u} = 3\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}$  y  $\vec{v} = 5\hat{x} + 2\hat{y} - 6\hat{z}$
  - b) Encuentra el ángulo que forman ambos vectores.
2. Empiezas a caminar desde el origen de un sistema coordenado cartesiano en la dirección definida por el vector  $\vec{u} = 3\hat{x} + \hat{y}$ , con la intención de terminar en el punto  $(7, 1)$ . Se te permite un giro en ángulo recto.
  - a) Encuentra el punto en el que realiza este giro.
  - b) ¿Qué tan lejos has caminado a lo largo de la dirección de  $\vec{u}$ ?
  - c) ¿Qué tan lejos has debido caminar en el tramo ortogonal a la dirección de  $\vec{u}$ ?
3. Determina si los siguientes vectores son paralelos, ortogonales u otra cosa
  - a)  $\vec{u} = 6\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z}$ ,  $\vec{v} = 2\hat{x} + 5\hat{y} + 2\hat{z}$
  - b)  $\vec{u} = 2\hat{x} - \hat{y}$ ,  $\vec{v} = -\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}\hat{y}$
 Ayuda: primero dibújalos
4. Considera tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , mostrados en la figura 2.18.

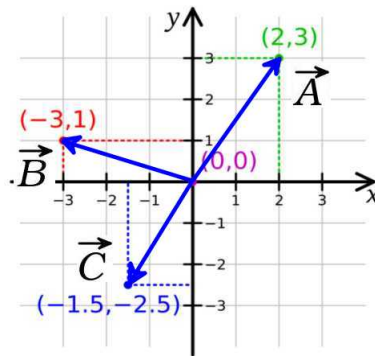


Figura 2.18: Tres vectores en el plano

- A) Realiza las siguientes operaciones **gráficamente**:  
 Haz un esquema muy bien hecho en st cuaderno cuadriculado, usando una regla. Utiliza distintos colores.
- a)  $\vec{C} - \vec{A}$
  - b)  $\vec{A} - \vec{B}$
  - c)  $-\vec{C} + \vec{B}$
  - d)  $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$
  - e)  $\vec{A} - 2\vec{B}$
- B) Realiza las mismas operaciones anteriores de **modo analítico**, es decir, del modo que hemos trabajado para obtener la Ec. (2.18).
5. Considera tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$ , mostrados en la Fig. 2.18.
 

A) Realiza las siguientes operaciones **de modo gráfico**:  
 Haz un esquema muy bien hecho en tu cuaderno cuadriculado, usando una regla. Utiliza distintos colores.

    - a)  $\vec{C} + \vec{A}$
    - b)  $\vec{A} + \vec{B}$



c)  $\vec{C} + \vec{B}$

d)  $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ . Realiza este cálculo de tres formas distintas, reagrupando de a dos a los elementos de la adición. ¿Qué concluyes?

Eso que has demostrado gráficamente se denomina **propiedad asociativa de la adición de vectores**.

e)  $\vec{A} + 2\vec{B}$

B) Realiza las mismas operaciones anteriores de forma analítica.

C) ¿Yacen los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{C}$  sobre la misma dirección? ¿De qué formas distintas puedes demostrar esto?

6.

a) Halla gráfica y analíticamente la resultante  $\vec{D}$  de los siguientes desplazamientos:  $\vec{A}$ : 10 m hacia el Noroeste,  $\vec{B}$ : 20 m Este  $30^\circ$  Norte y  $\vec{C}$ : 35 m Sur.

b) Determina el módulo del vector

c) Determina el ángulo que forman los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{C}$ .

d) Si el Norte y Este coinciden con los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente, encuentra la resultante en terminos de los vectores unitarios cartesianos

7. La Fig. 2.19 muestra una pelota que rebota en un piso. Si el ángulo del vector velocidad respecto a un eje perpendicular al plano de rebote es el mismo con el que incide,

a) obtén gráficamente el vector velocidad de la pelota después del segundo rebote en la pared vertical.

b) ¿Cómo es el vector  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ ?, donde  $\vec{v}_2$  es la velocidad con que rebota de la superficie vertical.

c) ¿Cómo se comparan los ángulos de incidencia inicial y de rebote final?

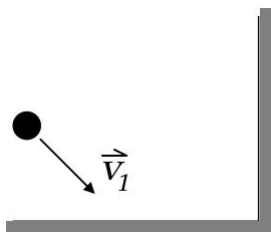


Figura 2.19: Partícula rebotando sobre superficie

8. Dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tienen módulos de 10 y 15 unidades, respectivamente. Si la resultante de la suma de los vectores tiene una magnitud de 20 unidades, determina el ángulo entre los vectores.

9. Un automóvil recorre 3 km hacia el Norte y luego 5 km hacia el Norte  $40^\circ$  Este.

a) Representa estos desplazamientos y halla el desplazamiento resultante gráficamente

b) Determina el módulo del vector resultante.

c) Determina el ángulo que forman los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{C}$ .

d) Si el Norte y Este coinciden con los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente, encuentra la resultante en terminos de los vectores unitarios cartesianos

10. Halla el ángulo formado por los vectores  $\vec{A} = 2\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$  y  $\vec{B} = 6\hat{x} - 3\hat{y} + 2\hat{z}$ .

11. En la Fig. 2.20 se muestran tres vectores, dos de los cuales tiene magnitudes de 40 y 20 unidades, respectivamente. La suma de los tres vectores es el vector nulo. Determina la magnitud y dirección del vector  $\vec{A}$ .

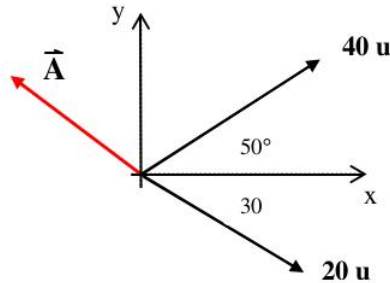


Figura 2.20: Tres vectores

12. En la Fig. 2.21 se muestran dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Dibuja

- a)  $2\vec{u} - \vec{v}$
- b)  $-\vec{u} + \vec{v}$ , y
- c)  $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

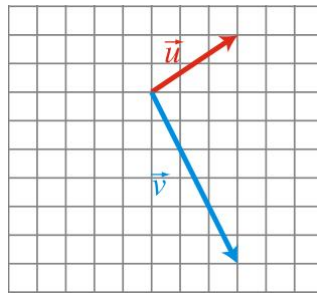


Figura 2.21: The two vectors of Exercise 12

13. Dados los vectores  $\vec{A} = \hat{x} + \hat{y} + 2\hat{z}$  y  $\vec{B} = \hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}$  calcula:

- a) el producto escalar de ambos vectores,
- b) el ángulo que forman,
- c) la proyección del vector  $\vec{B}$  sobre el vector  $\vec{A}$ .

14. Considera los vectores  $\vec{A} = 2\hat{x} - \hat{y} + 3\hat{z}$  y  $\vec{B} = 4\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}$ .

- a) Determina el ángulo que forma el vector  $\vec{A} + \vec{B}$  con el eje positivo de las  $x$ .
- b) Determina el ángulo que forma el vector  $\vec{A} - \vec{B}$  con el eje positivo de las  $x$ .

15. Sean los vectores  $\vec{A} = 5\hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$  y  $\vec{B} = 2\hat{x} + 5\hat{y} + 6\hat{z}$ . Determina la proyección del vector  $\vec{A}$  sobre el vector  $\vec{B}$ .

16. Considera los vectores  $\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 5\hat{z}$ ,  $\vec{B} = 4\hat{x} - 5\hat{y} - 6\hat{z}$  y  $\vec{C} = -2\hat{x} + 6\hat{y} - 3\hat{z}$ . Obtén el resultado de la operación  $(\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{C}$

17. La Fig. 2.22 muestra una parte del plano de la ciudad de Chillán, Chile. En él se han marcado 6 puntos de color azul. Si suponemos que cada cuadra mide 125 m, determina

- a) los vectores de posición de cada uno de esos puntos,

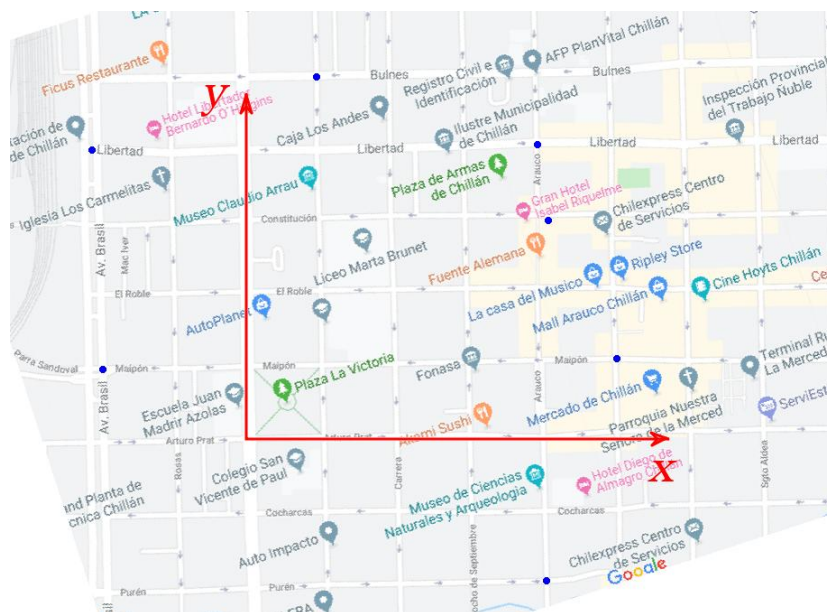


Figura 2.22: Plano de Chillán

- b) el ángulo que forma cada uno con el eje  $x$ ,  
 c) el módulo de cada vector.

18. Las coordenadas cartesianas de dos vectores son  $(2, -3)$  y  $(-\frac{1}{2}, 2)$ . Obtén las componentes cartesianas de los siguientes vectores

- a)  $-3\vec{A} + 2\vec{B}$ ,  
 b)  $-\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$ ,  
 c)  $\frac{1}{3}(\vec{A} - \vec{B})$ .

19. En la Fig. 2.23 se muestran dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Dibuja

- a)  $\vec{u} - \vec{v}$   
 b)  $-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ , y  
 c)  $2\vec{u} + 3\vec{v}$

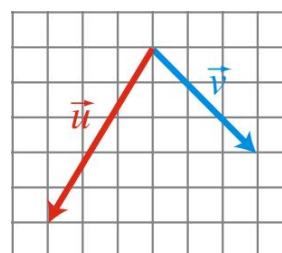
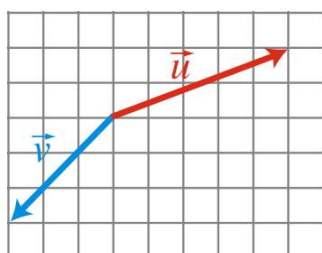


Figura 2.23: Dos vectores del ejercicio 18.      Figura 2.24: Dos vectores del ejercicio 19.

20. En la Fig. 2.24 se muestran dos vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ . Dibuja

- a)  $-\vec{u} + 2\vec{v}$   
 b)  $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ , y

c)  $\vec{u} - 3\vec{v}$

21. Escribe el vector  $\vec{A} = 17\hat{y}$  como combinación lineal de los vectores  $\vec{B} = \frac{1}{5}\hat{x} + 3\hat{y}$  y  $\vec{C} = -\hat{x} + 2\hat{y}$ .

22. Dados los vectores  $\vec{A} = 5\hat{x} - 4\hat{y}$ ,  $\vec{B} = 3\hat{x} + 2\hat{y}$  y  $\vec{C} = \hat{x} + K\hat{y}$ ,

a) Halla el valor de  $K$  para que los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{C}$  formen un ángulo de  $\pi/2$ .

b) Halla un vector unitario con la misma dirección y el mismo sentido que el vector  $\vec{A}$ .

23. Dados los vectores  $\vec{A} = \hat{x} - 3\hat{y}$  y  $\vec{B} = M\hat{x} + 2\hat{y}$

a) Halla el valor de  $M$  para que estos vectores sean perpendiculares.

b) Encuentra el ángulo entre los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{C}$ , donde  $\vec{C} = 4\hat{x} + 2\hat{y}$ .



### 3. NOTACIÓN CIENTÍFICA Y APROXIMACIONES

La Física, a diferencia de la Matemática, trabaja con cantidades que tienen dimensiones. Por supuesto existen cantidades adimensionales que son muy importantes también.

Debería ser claro para tí, por sólo vivir en este mundo, que no es lo mismo decir o escribir 1, que 1 metro o 1 segundo. Es por esto que **es muy importante que siempre recuerdes informar a qué tipo de cantidad física te estás refiriendo y eso se logra agregando las dimensiones de tal cantidad.** ¡Si no lo haces nadie sabrá de qué estás hablando!

Es muy importante ponerse de acuerdo en el nombre de las cosas. Para el caso de magnitudes físicas, existe el **Sistema Internacional de Unidades, SI**. Muchas de esas unidades las irás aprendiendo a medida que vayas avanzando en tus estudios, así que no las enumeraremos todas porque no tiene sentido. Las que más utilizaremos por un tiempo son las **dimensiones** de longitud ( $L$ ), tiempo ( $T$ ) y masa ( $M$ ).

#### 3.0.1 Unidades y Prefijos

Existen **unidades fundamentales** y otras que se obtienen de ellas y que se denominan **unidades derivadas**.

Las unidades fundamentales en el SI para longitud, tiempo y masa son:

- metro, m;
- segundo, s; y
- kilogramo, kg,

respectivamente.

Notar que el símbolo para segundo no es *seg* ni *sec*, y aquel para gramo no se escribe *gr*.

Unidades derivadas son por ejemplo kilómetro (km), año-luz (9.460.730.472.580,8 km), milisegundo (ms), microgramo ( $\mu\text{g}$ ), tonelada (t), fermi (fm).

¡En esta última frase hay mucha información que usted debe aprender para comunicar y comunicarse mejor con otros científicos e ingenieros!



Figura 3.1: Punta de Choros queda, según este cartel, a 20 kelvin mega

El **prefijo kilo**, cuyo **símbolo** es *k* y significa mil. A pesar de que un editor de texto, el software o la persona que escribe, pueda “decidir” que se debe escribir con una *K* mayúscula, se debe **siempre** escribir con una *k* minúscula.

Resulta que en física existe una medida de temperatura absoluta que se ha denominado kelvin, en honor a Lord Kelvin<sup>1</sup>. El símbolo para kelvin es *K*. **¡Así es que no da lo mismo escribir *K* o *k* !**

El símbolo para *metro*, como hemos visto, se escribe también con *m* minúscula. ¡Si se escribe *M* entonces quiere decir otra cosa! *M* es el símbolo para el **prefijo mega**, que significa *millón*. Curiosamente entonces, en la foto de la Fig. 3.1 se informa que Punta de Choros se encuentra a 20 kelvin mega hacia la izquierda. Lo correcto habría sido escribir km, ¿verdad?

Por último, no se debe poner un punto, . , después de km, ya que no es la abreviación de kilómetro en el sentido de la gramática castellana.

En el caso de milisegundo, ms, el prefijo *mili* significa un milésimo, es decir la 1/1.000 parte de. Notar que también se escribe con *m* minúscula. Estamos hablando de una medida de tiempo; no hay forma de confundirse y pensar que es metro multiplicado por segundo.

El símbolo para microgramo se denota  $\mu\text{g}$ . La letra griega  $\mu$  (“mu”), significa una millonésima, es decir la 1/1.000.000 parte de, y denota el prefijo *micro*.

A veces, como en el caso de tonelada, el símbolo tiene su propio nombre. Una tonelada son mil kilogramos, luego y según lo que ya hemos aprendido, podríamos escribir kkg, pero no se usa (además que no suena muy bien). El fermi es una unidad muy pequeña, pero no la más pequeña, y también tiene nombre propio. Se ha nombrado así en honor al gran físico italiano Enrico Fermi. fm se lee fermi o femto metro. Un *femto* corresponde a un milbillonésimo, es decir a la 1/1.000.000.000.000.000 parte de.

### 3.0.2 Cambiando unidades

Hemos visto que en física necesitamos unidades para dar cuenta correctamente de lo que medimos y cómo lo vamos a informar a otros. A veces, sin embargo, se expresan las

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/William\\_Thomson,\\_1st\\_Baron\\_Kelvin](https://en.wikipedia.org/wiki/William_Thomson,_1st_Baron_Kelvin)

cantidades medidas o calculadas en unidades distintas a las que uno le gustaría o necesitaría tener. Para ello se debe hacer cambio de unidades.

También resulta que a veces hacemos operaciones con números que tiene unidades. En tales cálculos, las unidades en las que se miden las cantidades deben tratarse matemáticamente al igual que las partes numéricas de las cantidades. Por ejemplo, al multiplicar 1,2 cm por 2,0 cm, se deben realizar dos cálculos separados. Primero, es necesario multiplicar los dos números:  $1,2 \times 2,0 = 2,4$  y luego se debe multiplicar las unidades, es decir,  $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$ , en este caso. Por lo tanto, la respuesta de la operación matemática es  $2,4 \text{ cm}^2$ .

Aún así, puede resultar que igual tengamos la necesidad de cambiar de unidades. Para ello podemos hacer un uso de un **factor de conversión**. Éste es una fracción en la que el numerador y el denominador representan la misma medida, y por tanto su valor es 1. Por ejemplo, la fracción

$$\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 1. \quad (3.1)$$

Es decir, la clave es insertar unos en las expresiones, que por definición no la cambian.

Veamos algunos ejemplos que ilustran el uso de factores unitarios para resolver problemas mediante análisis dimensional.

### Ejemplos

1. Convierte 45,6 cm a su medida equivalente en mm.

#### Solución:

Debemos seleccionar un factor de conversión que convierta la unidad “cm” en la unidad “mm”. Por supuesto, el factor de conversión apropiado es:

$$\frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} = 1. \quad (3.2)$$

Luego, insertamos este 1 en la cantidad que queremos convertir:

$$45,6 \text{ cm} \left( \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} \right) = 456 \text{ mm} \quad (3.3)$$

2. Cambia una velocidad de 83,4 kilómetros por hora a su equivalente en metros por segundo.

#### Solución:

En este ejemplo, se necesitan dos factores de conversión, un factor para cambiar kilómetros a metros y otro para cambiar horas a segundos

$$83,4 \text{ km/h} \left( \frac{1.000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left( \frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}} \right) = 23,2 \text{ m/s}. \quad (3.4)$$

3. La densidad del mercurio (Hg) es de 13,6 g/ml. ¿Cuál es la masa en kilogramos de un matraz comercial de mercurio de capacidad 2 l?

#### Solución:

$$13,6 \text{ g/ml} \left( \frac{1 \text{ kg}}{1.000 \text{ g}} \right) \left( \frac{1.000 \text{ ml}}{1 \text{ L}} \right) 2 \text{ L} = 27,2 \text{ kg} \quad (3.5)$$



### 3.0.3 Ejercicios

1. Completa las siguientes conversiones entre unidades del SI:

- a)  $612 \text{ g} = ? \text{ mg}$
- b)  $8,160 \text{ m} = ? \text{ cm}$
- c)  $3779 \mu\text{g} = ? \text{ g}$
- d)  $781 \text{ mL} = ? \text{ L}$
- e)  $4,18 \text{ kg} = ? \text{ g}$
- f)  $27,8 \text{ m} = ? \text{ km}$
- g)  $0,13 \text{ mL} = ? \text{ L}$
- h)  $1738 \text{ km} = ? \text{ m}$
- i)  $1,9 \text{ Gg} = ? \text{ g}$

2. Mientras el instructor se prepara para un experimento, necesita 225 g de ácido fosfórico. El único recipiente fácilmente disponible es un matraz Erlenmeyer de 150 ml. ¿Es lo suficientemente grande como para contener el ácido, cuya densidad es de 1,83 g/mL?

3. En un Gran Premio de Fórmula 1 reciente, el ganador completó la carrera con una velocidad promedio de 229,8 km/h. ¿Cuál fue la velocidad en metros por segundo?

4. Calcula estas masas:

- a) ¿Cuál es la masa de 6,00 cm<sup>3</sup> de mercurio (densidad = 13,5939 g/cm<sup>3</sup>)?
- b) ¿cuál es la masa de 25,0 mL de octano (densidad = 0,702 g/cm<sup>3</sup>)?
- c) ¿cuál es la masa de 4,00 cm<sup>3</sup> de sodio (densidad = 0,97 g/cm<sup>3</sup>)?
- d) ¿Cuál es la masa de 125 ml de cloro gaseoso (densidad = 3,16 g/L)?

5. Calcula los siguientes volúmenes:

- a) ¿Cuál es el volumen de 25 g de yodo (densidad = 4,93 g/cm<sup>3</sup>)?
- b) ¿Cuál es el volumen de 3,28 g de hidrógeno gaseoso (densidad = 0,089 g/L)?
- c) ¿Cuál es el volumen de 11,3 g de grafito (densidad = 2,25 g/cm<sup>3</sup>)?
- d) ¿Cuál es el volumen de 39,657 g de bromo (densidad = 2,928 g/cm<sup>3</sup>)?

6. Utiliza el análisis dimensional para resolver cada uno de los siguientes problemas.

Convierte

- a) 14 mm a su equivalente en m.
- b) 35 kg a su equivalente en g.
- c) 57 ml a su equivalente en L.
- d) una densidad de 9,45 g/L a su equivalente en g/mL.
- e) una velocidad de 88 m/s a su equivalente en cm/s.

7. Utiliza el análisis dimensional para resolver cada uno de los siguientes problemas:

a) La densidad del mercurio metálico es de 13,6 g/ml. ¿Cuál es la masa de 3,55 mL del metal?

b) La densidad del plomo es 11,3 g / mL. ¿Cuál es la masa de 45 ml de metal?

c) La densidad de la sal de mesa, NaCl (Cloruro de sodio), es 2,16 g/ml. ¿Cuál es la masa de 100,0 mL de este sólido?

d) Una partícula se mueve a través de un gas a una velocidad de 15 km/s. ¿Qué tan lejos se moverá en 5,5 s?

e) Una solución de nitrato de bario contiene 61,2 g por litro de solución. ¿Cuántos gramos de nitrato de bario hay en 2,75 L de esta solución?



f) Una muestra de agua de mar contiene 0,000245 g de cloruro de sodio por ml de solución. ¿Cuánto cloruro de sodio contiene 50,0 mL de esta solución?

8. Utiliza el análisis dimensional para resolver cada uno de los siguientes problemas. Convierte

- a) 15,9 mm a su equivalente en km.
- b) 0,0982 hg a su equivalente en cg.
- c) 13,455 g a su equivalente en kg.
- d) una velocidad de 73,5 km/h a su equivalente en m/s.
- e) una densidad de 4,52 g/mL a su equivalente en kg/L.

9. Utiliza el análisis dimensional para resolver cada uno de los siguientes problemas.

- a) La densidad del hierro es 7,86 g/mL. ¿Qué volumen de hierro tendrá una masa de 50,00 g?
- b) La densidad del gas helio es 0,178 g/L. ¿Cuál sería la masa de 375,0 mL de este gas?
- c) Una partícula que se mueve a través de un gas a una velocidad de 45,8 m/s golpea una pared del contenedor, rebota y golpea la otra pared a 25,0 cm de distancia. ¿Cuánto tiempo llevó pasar de una pared a otra?
- d) Una muestra de agua de mar contiene 6,277 g de cloruro de sodio por litro de solución. ¿Cuántos mg de cloruro de sodio estarían contenidos en 15,0 mL de esta solución?

### 3.0.4 Notación Científica

Vemos ahora la unidad de longitud año-luz que es igual 9.460.730.472.580,8 km. Esta es la distancia recorrida por la luz durante un año, en el vacío, a una rapidez de 299.792.458 m/s.

En la últimas cuatro líneas de texto hay tres cantidades cuyo valor contienen muchos dígitos. Si bien podemos expresar todos esos dígitos, no es cómodo ni eficiente hacerlo siempre. Para hacernos la vida más fácil se ha inventado la **notación científica**.

La notación científica es la forma de expresar cantidades en potencias de 10.

Por ejemplo,

$$1/1.000 = 1.000^{-1} = (10^3)^{-1} = 10^{-3} \quad (\text{i})$$

$$1/1.000.000 = 1.000.000^{-1} = (10^6)^{-1} = 10^{-6} \quad (\text{i})$$

$$1/1.000.000.000.000.000 = 1.000.000.000.000.000^{-1} = (10^{15})^{-1} = 10^{-15} \quad (\text{iii})$$

$$9.460.730.472.580,8 = 9,4607304725808 \times 10^{12} \quad (\text{iv})$$

$$299.792.458,0 = 2,99792458 \times 10^8 \quad (\text{v})$$

Si bien en las primeras tres cantidades efectivamente el número de dígitos a escribir se reduce enormemente, en las dos últimas no es así. ¿Y entonces, qué hacemos? Muy simple:

**cuando podamos, aproximamos.**

Un profesor mío decía que hacer aproximaciones es un arte. Lo cual puede asustar a primera vista. Pero como todo arte, ¡se puede aprender! Pero para eso, se debe practicar.

Veamos cómo podemos aproximar distintos valores:

a)

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 9,460730472581 \times 10^{12} \quad (13 \text{ cifras numéricas})$$

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 9,460730473 \times 10^{12} \quad (10 \text{ cifras numéricas})$$

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 9,4607305 \times 10^{12} \quad (8 \text{ cifras numéricas})$$

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 9,4607 \times 10^{12} \quad (5 \text{ cifras numéricas})$$

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 9,461 \times 10^{12} \quad (4 \text{ cifras numéricas})$$

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 9,5 \times 10^{12} \quad (2 \text{ cifras numéricas})$$

$$9,4607304725808 \times 10^{12} \approx 10 \times 10^{12} = 10^{13} \quad (\text{potencia de } 10)$$

b)

$$299.792.458,0 \approx 2,9979246 \times 10^8$$

$$299.792.4580 \approx 2,99792 \times 10^8$$

$$299.792.458,0 \approx 2,998 \times 10^8$$

$$299.792.458,0 \approx 3,0 \times 10^8$$

$$299.792.458,0 \approx 10^8$$

c)

$$0,0000004830505 = 4,830505 \times 10^{-7}$$

$$4,831505 \times 10^{-7} \approx 4,83150 \times 10^{-7}$$

$$4,831505 \times 10^{-7} \approx 4,832 \times 10^{-7}$$

$$4,831505 \times 10^{-7} \approx 4,8 \times 10^{-7}$$

$$4,831505 \times 10^{-7} \approx 10^{-7}$$

La última línea en los tres ejemplos corresponde a lo que se denomina **orden de magnitud**. Da cuenta de la potencia de 10 asociada a la cantidad en estudio. Es muy importante, aunque parezca “sólo una aproximación más”. Tiene sentido cuando se desea tener una “sensación” acerca del valor numérico de la cantidad que se está evaluando, sin tener que calcular toda la cifra por completo. Esa “sensación” nos permite ubicarnos en el rango de valores correctos.

Hemos realizado las aproximaciones usando notación científica, pero no es necesario. **Las mismas reglas se aplican si el número se escribe sin esa notación.**

**Ejercicio:** Descubre las reglas para hacer aproximaciones estudiando cada una de las que se han realizado más arriba.

En la Fig. 3.2 aparece el visor de una calculadora antigua. El número mostrado es una aproximación del número  $\pi$  a diez cifras (¿ve que necesitas conocer el alfabeto griego?).

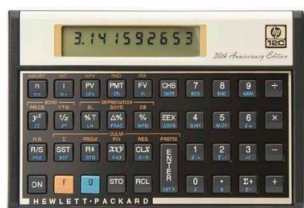
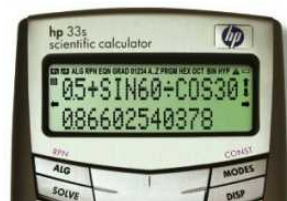
Figura 3.2: El número  $\pi$  en una calculadora

Figura 3.3: ¿Cuántas cifras utilizar?

### 3.0.5 Ejercicios

1. Escribe los siguientes números en notación científica.

- a) 1.001
- b) 0,13592
- c) 53
- d) -0,0038
- e) 6.926.300.000
- f) 0,00000013
- g) -392
- h) -0,567
- i) 0,00361

2. Convierte desde la notación científica a la notación decimal. a)  $1,92 \times 10^3$

- b)  $1,03 \times 10^{-2}$
- c)  $3,051 \times 10^1$
- d)  $8,862 \times 10^{-1}$
- e)  $-4,29 \times 10^2$
- f)  $9,512 \times 10^{-8}$
- g)  $6,251 \times 10^9$
- h)  $-6,5 \times 10^{-3}$
- i)  $8,317 \times 10^6$
- j)  $3,159 \times 10^2$

3. Usa la notación científica (¡y solo la notación científica!) para encontrar la respuesta a las siguientes multiplicaciones, divisiones, adiciones.

- a)  $(4,1357 \times 10^{-15}) \times (5,4 \times 10^2) = ?$
- b)  $\frac{1,695 \times 10^4}{1,395 \times 10^{15}} = ?$
- c)  $(4,367 \times 10^5) \times (1,96 \times 10^{11}) = ?$
- d)  $(6,97 \times 10^3) \times (2,34 \times 10^{-6}) + 3,2 \times 10^{-2} = ?$
- e)  $\frac{5,16 \times 10^{-4}}{8,65 \times 10^{-8}} + 9,68 \times 10^4 = ?$

### 3.0.6 Cifras Significativas

En la Fig. 3.3 aparece el valor de  $\sin 60^\circ$ , para una calculadora con un visor que permite 12 cifras.

**¿Cuántas cifras debemos utilizar para expresar un resultado físico?**

Esas cifras se llaman **cifras significativas** y son aquellas que dan información acerca de cuán confiable es una **medición**. Son los dígitos que tienen sentido, de acuerdo a los datos a partir de los cuales se han obtenido. Esto implica que desviaciones posibles de este número deben estar dentro de los límites de la desviación del último dígito.

### Ejemplos:

0,00682 : posee 3 cifras significativas, 6, 8 y 2. La última cifra es incierta.

Notar que los ceros decimales en esa ubicación no cuenta como significativos. Esto es así porque, en notación científica,

$$0,00682 = 6,82 \times 10^{-3}.$$

1,072 : todas las cifras son significativas. La última cifra es incierta.

### Observa que sí existen ceros que son significativos:

0,006820 : posee 4 cifras significativas, 6, 8, 2 y 0. La última cifra es incierta.

Pero no se confunda, ya que

300 : ¡tiene sólo una cifra significativa!, ya que en notación científica

$$300 = 3 \times 10^2.$$

Sin embargo, si tenemos esta **otra cifra**

300, : tiene 3 cifras significativas, ya que en notación científica

$$300, = 3,00 \times 10^2.$$

Y, finalmente

300,0 : tiene 4 cifras significativas, ya que en notación científica

$$300,0 = 3,000 \times 10^2.$$

Existen algunas reglas que se deben cumplir para escribir el resultado de operaciones matemáticas con números que tienen distintas cifras significativas. Para nosotros, nos bastan por ahora.

### Regla 1

En una suma o una resta el número de dígitos del resultado viene marcado por la posición del menor dígito común de todos los números que se suman o se restan.

### Regla 2

En un producto o una división el resultado debe redondearse de manera que contenga el mismo número de dígitos significativos que el número de origen que posea menor número de dígitos significativos.

### 3.0.7 Ejercicios

1. Aproxima el número 64.492

- a) 1 cifra significativa,
- b) 2 cifras significativas,
- c) 3 cifras significativas,
- d) 4 cifras significativas,
- e) 5 cifras significativas.

2. Aproxima el número 0,0046753 a

- a) 1 cifra significativa,
- b) 2 cifras significativas,
- c) 4 cifras significativas.

3. Identifica el número de cifras significativas

- a) 3,0800
- b) 0,00418
- c)  $7,09 \times 10^5$
- d) 91.600
- e) 0,003005
- f)  $3,200 \times 10^9$
- g) 250
- h) 780.000.000
- i) 0,0101
- j) 0,00800

4. Para lo siguiente, escribe cada uno con el número correcto de cifras significativas.

- a)  $(2,38617954 \times 10^{-1}) \times (1,15197705 \times 10^6)$
- b)  $3,0001 \times 5$
- c)  $(1,12 \times 10^5) \times (6,06 \times 10^5)$
- d)  $(2,27513 \times 10^3) \times (1,9376 \times 10^2)$
- e)  $(2 \times 10^1) \times (3,0 \times 10^1)$
- f)  $\frac{5,567 \times 10^8}{2,215 \times 10^8}$
- g)  $(2,775 \times 10^{-4}) \times (4,775 \times 10^4)$
- h)  $\frac{5}{8,14 \times 10^2}$
- g)  $\frac{4,7192 \times 10^2}{3,862 \times 10^{-4}}$

Como regla general,

**no podemos pretender obtener, haciendo un cálculo, un número con más cifras significativas que las que tienen los números medidos.**

**Importante:** para recalcar que, aún cuando tu calculadora tenga un visor que muestra muchos dígitos, no siempre es necesario considerar **todos** esos dígitos.

### 3.0.8 Dígitos para el número $\pi$

Según la NASA <sup>2</sup>, para realizar sus cálculos más precisos –aquellos que tienen que ver con vuelos interplanetarios– los científicos utilizan 15 decimales de  $\pi$ . En la gran mayoría de los problemas físicos este valor es más que suficiente para describir correctamente la realidad: 3,141592653589793. No es perfecto, pero está muy cerca.

Los expertos dan dos ejemplos que nos pueden ayudar a entender dicha elección:

1. *Cuando se calcula la circunferencia del círculo hipotético con radio igual a la distancia de la nave Voyager 1 a la Tierra (la más lejana de nuestro planeta), el error que se produce al usar sólo 15 decimales de  $\pi$  es de 3,81 centímetros. Este valor es despreciable si lo comparamos con la gran magnitud de dicha circunferencia.*
2. *Asimismo, el error al calcular la circunferencia de la Tierra con este valor del  $\pi$  resulta 10.000 veces más pequeño que el diámetro de un cabello.*

**Para nuestras aplicaciones, la mayoría de las veces 3,14 será una buena aproximación.**

Como regla general, entonces:

**¡No copies todos los dígitos que aparecen en tu calculadora y los des como tu resultado!**

---

<sup>2</sup><https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need>



## 4. ANÁLISIS DIMENSIONAL

Los físicos, ingenieros y matemáticos aplicados usan diferentes técnicas para resolver problemas, aplicados o no. Por supuesto, el uso de computadores es extremadamente importante porque acelera los cálculos y permite hacer algunos que no se podrían hacer de modo manual. Sin embargo, es vital verificar estas respuestas. El primer “control de calidad” es confirmar que la solución tiene el orden de magnitud correcto. El físico y premio Nobel Enrico Fermi <sup>1</sup> fue brillante en los cálculos de orden de magnitud; podía estimar el orden de magnitud con unos simples cálculos.

Otra comprobación esencial es garantizar que las fórmulas tengan las dimensiones físicas correctas. Las tres dimensiones fundamentales en mecánica son longitud, masa y tiempo. Otras cantidades son combinaciones de estos. Por supuesto, en otras áreas de la física hay dimensiones fundamentales dimensionales.

Cada fórmula física debe ser dimensionalmente consistente. Si una longitud se expresa como una combinación de cantidades, la dimensión de esa combinación debe ser una longitud. Pero el análisis dimensional es mucho más potente que esto. Un ejemplo histórico de ello es el siguiente:

Sir Geoffrey Ingram Taylor <sup>2</sup>, un famoso físico británico, experto en mecánica de fluidos vió las fotos de la primera explosión nuclear, en las cuales alguien puso más información de la que debía, y que mostraban la explosión en varios instantes. La información de la potencia liberada por la explosión era secreta, pero no contaban con G.I. Taylor.

Mediante una brillante aplicación de análisis dimensional, Taylor estimó la energía explosiva de la primera explosión atómica, la Prueba Trinity Como eres una persona curiosa, puedes leer el paper *Estimate of the energy released in the first Atomic Bomb explosion* <sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico\\_Fermi](https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi)

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/G.\\_I.\\_Taylor](https://en.wikipedia.org/wiki/G._I._Taylor)

<sup>3</sup>[https://piazza.com/class\\_profile/get\\_resource/j5ou5nnxbv478o/](https://piazza.com/class_profile/get_resource/j5ou5nnxbv478o/)

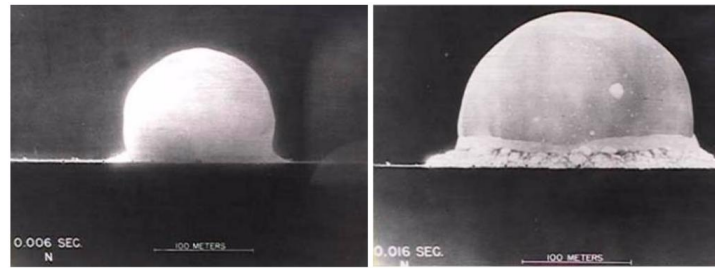


Figura 4.1: Primera explosión nuclear, Trinity

Pero no solo sirve para analizar situaciones más complicadas, sino también para analizar por ejemplo, la caída de un objeto desde un edificio. Nos podemos preguntar por el tiempo de caída. Lo que debemos hacer es preguntarnos cuáles son los parámetros relevantes en el problema. Los parámetros relevantes para este problema son la masa del objeto, la altura del edificio y la aceleración de la gravedad. Para producir una cantidad con dimensiones de tiempo, dividimos la altura por la aceleración de la gravedad y tomamos la raíz cuadrada. Esto da una estimación del tiempo de caída del ladrillo. ¡Entretiénete y hazlo!

Ahora bien, tampoco se puede esperar más del análisis dimensional de lo que puede dar: el análisis dimensional no podrá decirnos si nos ha faltado un factor 2 o  $4\pi$ .

Por regla general, debemos utilizar esa antigua máxima griega: **en una ecuación nunca mezcles peras con manzanas**, lo que significa que en una ecuación donde hay términos que se suman, todos deben tener las mismas dimensiones. En lenguaje técnico, se dice que la ecuación es **dimensionalmente homogénea**.

**Importante también tener en cuenta que el argumento de una función, cualquier función, no tiene dimensiones, es decir, el argumento es adimensional.**

Hemos dicho que las dimensiones que más utilizaremos por un tiempo son las dimensiones de longitud ( $L$ ), tiempo ( $T$ ) y masa ( $M$ ). Algunos ejemplos:

Área, superficie :  $L^2$

Volumen :  $L^3$

Velocidad, rapidez :  $LT^{-1}$

Aceleración :  $LT^{-2}$

Fuerza :  $LMT^{-2}$

Trabajo, Energía y Calor :  $L^2MT^{-2}$

Presión :  $L^{-1}MT^{-2}$

Período :  $T$

Frecuencia :  $T^{-1}$

No olvides:

**debes indicar las unidades de sus resultados. Si no lo hace, no estará informado correctamente lo que está haciendo.**

Para un cálculo más largo, debes chequear que tu resultado final tiene las dimensiones correctas:

**Si está calculando papas, al final debe obtener papas, no naranjas.**



Este es otro ejemplo, menos espectacular que el de G.I. Taylor, del poder del análisis dimensional.

Vemos de la Fig. 4.2 que un péndulo simple consta de una soga de largo  $l$  y una masa  $m$  que cuelga en un campo gravitacional de intensidad  $g$ . Esas son los únicos parámetros con dimensiones (el ángulo  $\phi$  no tiene dimensiones físicas). Eso significa que para determinar el período de oscilación del péndulo, que sabemos tiene dimensión  $T$ , debemos poder combinar  $L$ ,  $M$ , y la cantidad derivada  $LT^{-2}$ , para formar  $T$ .

Por supuesto, como ya hemos recalcado, el factor  $2\pi$  no podrá ser determinado sólo usando análisis dimensional. Uno podría tender a pensar que eso es negativo, ya que no se obtiene la fórmula completa para el período. Pero lo que debes comprender es que, esencialmente desde la ignorancia casi completa, sin saber casi nada de física, podrás encontrar la forma funcional del período de oscilación, esto es, cómo depende de los parámetros del sistema péndulo simple. ¡Eso es potentísimo!

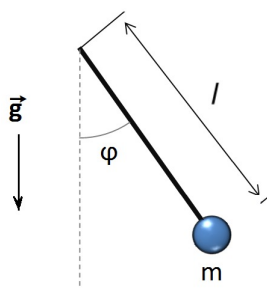


Figura 4.2: Péndulo simple

### 4.0.1 Ejercicios

1. Aplicando las reglas del análisis dimensional, responde lo siguiente:

- a)  $L + L + \dots = L$
- b)  $T - T = \dots$
- c)  $(\dots) - (LT^{-1}) = LT^{-1}$
- d)  $(LMT^{-2}) + (\dots) = (\dots)(LMT^{-2})$

2. Para denotar que estamos solo interesados en las dimensiones de una cantidad o expresión, usamos un paréntesis cuadrado que la encierre. Aplicando las reglas del análisis dimensional, responde lo siguiente:

- a)  $[\pi] = \dots$
- b)  $[\text{Sen}(ab)] = \dots$
- c)  $[\log x] = \dots$
- d) En la función  $e^{-\alpha m/s}$ , donde  $m$  es metros y  $s$ , segundos, ¿qué dimensiones tiene la constante  $\alpha$ ?

3. Determina  $x$ ,  $y$  y  $z$  en las siguientes expresiones:

- a)  $LT^{-2} = L^x T^y$
- b)  $T^{-1} = L^x T^y$
- c)  $LT^{-2} = L^{2x} M^{x+y} T^z$

d) La fórmula física del período del **péndulo simple** está dada por:

$T = 2\pi l^x g^y$ , donde  $T$  = período,  $l$  la longitud del péndulo y  $g$  la aceleración de gravedad (en  $m/s^2$ ). Halla  $x$  y  $y$ .

4. La energía cinética se escribe

$$K = \frac{1}{2} m^x v^y,$$

donde  $m$  es masa y  $v$  rapidez. Usando análisis dimensional encuentra  $x + y$ .

5. Encuentra la dimensión de  $R$  definido por

$$R = (k - t)(K^2 + a)(a - b),$$

donde  $t$  tiene unidades de tiempo.

6. En la siguiente fórmula física

$$X = A^{3kf},$$

donde  $f$  es frecuencia y por tanto tiene unidades de  $1/s$ , encuentra la dimensión de  $k$ ,

7. Encuentra la ecuación dimensional, es decir una expresión de la forma  $L^a T^b M^c$ , en la siguiente fórmula física

$$\frac{V^2 A}{t} = -sa + Q,$$

donde  $V$  es velocidad,  $A$  es área,  $t$  es tiempo y  $a$  es aceleración.

8. Considera las cantidades físicas  $x$ ,  $v$ ,  $a$  y  $t$  con dimensiones  $[x] = L$ ,  $[v] = LT^{-1}$ ,  $[a] = LT^{-2}$  y  $[t] = T$ . Determina si cada una de las siguientes ecuaciones es dimensionalmente consistente:

a)  $x = vt + 0,5at^2$ .

b)  $x = vt^2 + 0,5at$ .

c)  $v = \sin\left(\frac{at^2}{x}\right)$



## 5. CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

Cinemática proviene del griego antiguo  $\kappa\iota\nu\eta\mu\alpha$  (kínēma) que significa movimiento. Luego a partir de ahora comenzamos a estudiar el movimiento y cómo describirlo correctamente desde el punto de vista de la física, con las herramientas que hemos estudiado hasta ahora y con otras que iremos aprendiendo en el camino.

La cinemática se ocupa sólo del movimiento, no de lo que lo origina. De eso nos preocuparemos más adelante, cuando estudiemos **dinámica**.

Tal como dice el título, nos enfocaremos en el estudio del movimiento en una dimensión, es decir, a lo largo de una línea recta. Móviles como botes, cohetes, automóviles, etc. serán **descritos por puntos sin dimensiones**.

Para describir el movimiento de un punto (botes, cohetes, automóviles, etc) debemos primero poder ubicarlo en el espacio de un modo claro. Para ello deben existir observadores, quienes quedan representados por sistemas de referencia. De los posibles sistemas de referencia, sólo consideraremos aquellos que están en **reposo relativo o moviéndose con velocidad constante respecto de otro**. Este tipo de sistema de referencia se denomina **sistema de referencia inercial**.

Asociado a un sistema de referencia está un **sistema coordenado**. No son lo mismo. Ya hemos visto que podemos representar las coordenadas de un punto en el plano en dos sistemas coordenados, cartesiano y polar plano, ¡pero en general hay muchos sistemas coordenados distintos!

### 5.1 Cinemática en una dimensión

El movimiento en línea recta y solo en línea recta, para atrás y para adelante, puede ser fastidioso, pero es un punto de partida importante para comenzar a aprender algunos conceptos en física.

### 5.1.1 Desplazamiento

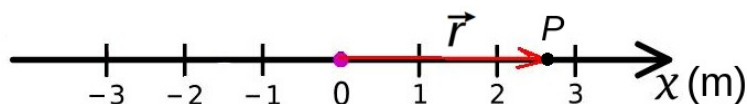
Para poder describir el movimiento de cualquier objeto debemos lograr ubicarlo en el espacio, en algún instante. Para ello utilizamos un sistema coordenado y un vector de posición, que denotamos en general como  $\vec{r}$ . Para caracterizar un movimiento en una dimensión nos basta una coordenada espacial. Supongamos que el movimiento ocurre sobre el eje  $x$ . Luego, podemos escribir

$$\vec{r} = \vec{x} = x\hat{x}. \quad (5.1)$$

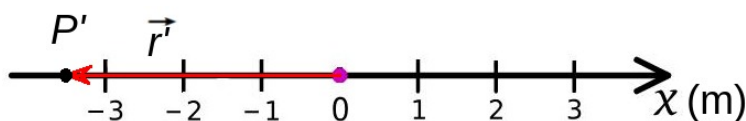
es importante tener en mente que **en esta expresión para el vector de posición  $x$  no es el módulo del vector  $\vec{x}$** .

Por ejemplo, en la siguiente figura muestra el sistema cartesiano unidimensional, en donde en color rojo se muestra el vector de posición. Aquí,

$$\vec{x} = 2,6\hat{x}m. \quad (5.2)$$



En cambio, en esta otra figura



el vector de posición está dado por

$$\vec{x}' = -3,5\hat{x}m. \quad (5.3)$$

Observa que ahora a la expresión para el vector le hemos añadido la dimensión  $m$ , porque el eje coordenado indica que estamos midiendo en metros.

**Observación:** Algunos autores utilizan una notación levemente diferente, ubicando la dimensión al lado de la componente

$$\vec{x} = 2,6m\hat{x}. \quad (5.4)$$

Si pensamos que las figuras anteriores son fotos de la posición del mismo móvil en tiempos distintos,  $t$  y  $t'$ , entonces tiene sentido preguntarse cuánto **se desplazó** el móvil en ese **intervalo de tiempo**,  $\Delta t = t' - t$  (“delta  $t$ ”; esta delta es letra griega mayúscula).

El **desplazamiento es un vector**. Lo denotamos en general como  $\Delta\vec{r}$  (“delta  $r$  vector”). En el caso particular de una dimensión, podemos escribir  $\Delta\vec{x}$ .

De la Fig. 5.1 vemos que está representando una suma de dos vectores. En efecto, siguiendo las reglas ya aprendidas tenemos que

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}', \quad (5.5)$$

es decir, el vector desplazamiento desde el punto  $P$  al punto  $P'$  es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}' - \vec{r}, \text{ o bien en 1 dimensión,} \\ \Delta\vec{x} &= \vec{x}' - \vec{x}.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Notar que “delta algo” significa “algo final” menos “algo inicial”.

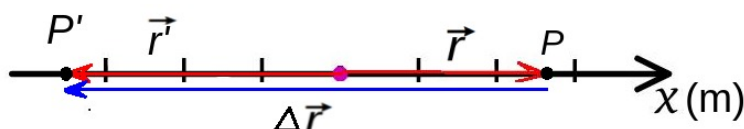


Figura 5.1: Vector desplazamiento

Por lo tanto, tenemos que el desplazamiento total es

$$\Delta\vec{x} = -3,5\hat{x} - 2,6\hat{x} = -6,1\hat{x}\text{m.} \quad (5.7)$$

Observa que sólo ponemos las unidades al final del cálculo.

**Camino recorrido en una dimensión** se define como la suma de cada uno de los módulos de los desplazamientos intermedios, que llevan desde un punto inicial hasta un punto final.

**Notar que camino recorrido en una dimensión no siempre es igual al módulo del vector desplazamiento desde un punto inicial hasta un punto final.**

**Ejercicio:** Considera los vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  y  $\vec{r}''$  mostrados en las Figs. 5.1 y 5.2,

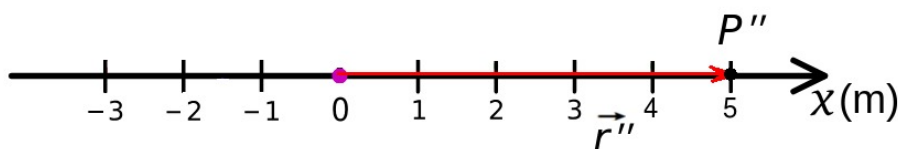


Figura 5.2:

a) Supón que un móvil se encuentra en la posición  $P''$  en el instante  $t''$ , luego en  $P'$  en el instante  $t'$  y finalmente en  $P$  en el instante  $t$ .

Calcula el desplazamiento total. Haz tu cálculo por partes, calculando los desplazamientos intermedios. Determina además el camino total recorrido.

b) Si ahora el móvil se encuentra en la posición  $P$  en el instante  $t$ , luego en  $P''$  en el instante  $t''$  y finalmente en  $P'$  en el instante  $t'$

Calcula el desplazamiento total. Haz tu cálculo por partes calculando los desplazamientos intermedios. Determina además el camino total recorrido.

c) Si ahora el móvil se encuentra en la posición  $P$  en el instante  $t$ , luego en  $P'$  en el instante  $t'$  y finalmente en  $P''$  en el instante  $t''$

Calcula el desplazamiento total. Haz tu cálculo por partes, calculando los desplazamientos intermedios. Determina además el camino total recorrido.

Notar que hasta ahora, si bien hemos hablado de tiempo y de intervalo de tiempo, no ha aparecido en el análisis, excepto para ordenar los **eventos**.

**Observación:** En la teoría de la relatividad de Einstein, un **evento** es la situación física instantánea asociada con un punto en el espacio-tiempo (es decir, un lugar y un tiempo específicos).

### 5.1.2 Velocidad y rapidez medias

Cuando sabemos que un móvil se ha desplazado desde un punto  $P$  a un punto  $P'$  durante un intervalo  $\Delta t = t' - t$  dado, podemos agregar más información que sólo el desplazamiento entre esos dos puntos.

**La velocidad es el cambio de posición durante un intervalo de tiempo.** Como el cambio de posición está definido a través del vector desplazamiento, entonces podemos definir un vector velocidad por medio de

$$\vec{v}_m = \frac{(\vec{r}_f - \vec{r}_i)}{(t_f - t_i)} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (5.8)$$

Las cantidades involucradas en esta definición están definidas en la Fig. 5.3. Por supuesto, en Sistema Internacional la velocidad se mide en m/s.

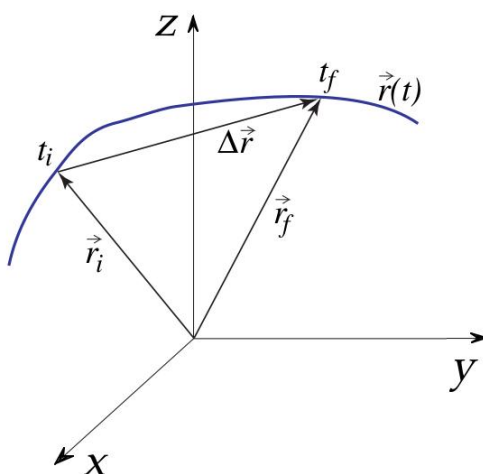


Figura 5.3: Desplazamiento en el espacio

Hemos agregado el subíndice  $m$  para denotar *media* o *promedio*. ¿Por qué promedio? Porque sólo tenemos información acerca de los eventos inicial y final. No tenemos información de lo que ha sucedido entre los eventos. Pudiese haber ocurrido que el móvil viajó hacia adelante, después hacia atrás, o se detuvo durante un tiempo. No sabemos. Ante eso, lo único posible es tener una información promedio.

Notar que dado que  $\Delta t = t' - t > 0$ ,  $t'$  es un instante posterior a  $t$ , la Ec. (5.8) se puede escribir

$$\vec{v}_m = \lambda \Delta \vec{r}, \quad (5.9)$$

donde  $\lambda$  es real y positivo, con unidades de inverso de tiempo. Pero el punto importante es lo que hemos aprendido en el capítulo de vectores: **dado que ambos vectores son proporcionales, con constante de proporcionalidad positiva, deben ser paralelos entre sí.** Así,  $\vec{v}_m$  podrá ser un vector más largo, más corto o de igual longitud que  $\Delta\vec{r}$ , pero siempre será paralelo a este último.

Si definimos la versión escalar de la Ec. (5.8), que también denominamos velocidad media, pero es sólo su componente en la dirección correspondiente ( $x$ , por ejemplo)

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (5.10)$$

entonces el vector velocidad media se puede escribir como

$$\vec{v}_m = v_m \hat{x}. \quad (5.11)$$

Nota que, nuevamente,  $v_m$  puede ser una cantidad mayor, menor o igual a cero,

**Observación:** Definimos **rapidez media** como

$$\text{rapidez}_m = \frac{\text{distancia recorrida}}{\Delta t}. \quad (5.12)$$

Observa que esta cantidad es siempre positiva.

Volvamos a la Ec. (5.10). La escribiremos de una forma distinta:

$$\begin{aligned} \Delta x &= v_m \Delta t, \text{ o bien,} \\ x_f - x_i &= v_m(t_f - t_i) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Supongamos que el instante inicial está dado  $t_i = t_0$  y que el instante final puede ser arbitrario. Luego, en vez de utilizar  $t_f$ , notación que utilizaremos para cuando su valor está dado, usaremos simplemente  $t$ . Usando el mismo argumento que para el tiempo, podemos escribir para la coordenada

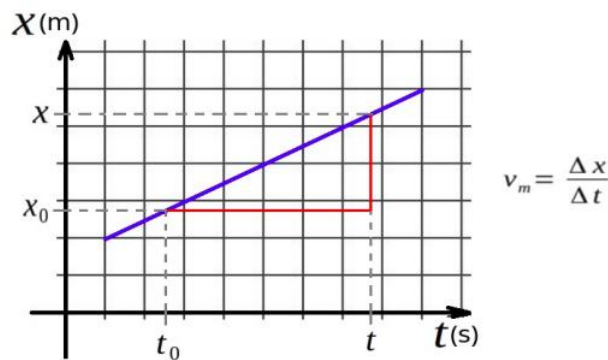


Figura 5.4: Gráfico posición versus tiempo

$$x(t) - x_0 = v_m(t - t_0). \quad (5.14)$$

¡Notar que esta es la **ecuación de la recta**!:

$$y(x) - y_0 = m(x - x_0), \quad (5.15)$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta, es decir, su inclinación respecto del eje horizontal cartesiano.

Por lo tanto, en un gráfico  $x$  vs  $t$  la pendiente de una recta es la componente de la velocidad media,  $v_m$ , como se muestra en la Fig. 5.4.

### 5.1.3 Ejercicios

1. Observa bien las cifras significativas de los datos y siga las reglas para dar tu resultado final. Los puntos  $P, P'$  y  $P''$  son los mismo que aquellos dados anteriormente. Escriba los vectores del modo que ya ha aprendido. ¡No olvides las unidades!

a) Supón que un móvil se encuentra en la posición  $P''$  en el instante  $t'' = 0,5$  s, luego en  $P'$  en el instante  $t' = 2,5$  s y finalmente en  $P$  en el instante  $t = 0,52$  s.

a1) Calcula las velocidades media parciales, en cada intervalo

a2) Calcula la velocidad media total, entre los puntos final e inicial.

a3) Calcula las rapidez media parciales, en cada intervalo. Gráficelas en función del tiempo.

a4) Calcula la rapidez media entre los instantes final e inicial.

Observa. Analiza.

b) Si ahora el móvil se encuentra en la posición  $P$  en el instante  $t = 0,8$  s, luego en  $P''$  en el instante  $t'' = 4,50$  s y finalmente en  $P'$  en el instante  $t' = 8,0$  s,

b1) Calcula las velocidades media parciales, en cada intervalo

b2) Calcula la velocidad media total, entre los puntos final e inicial.

b3) Calcula las rapidez media parciales, en cada intervalo. Gráficelas en función del tiempo.

b4) Calcula la rapidez media entre los instantes final e inicial.

Observa. Analiza.

c) Si ahora el móvil se encuentra en la posición  $P$  en el instante  $t = 2,5$  s, luego en  $P'$  en el instante  $t' = 3,1$  s y finalmente en  $P''$  en el instante  $t'' = 4,7$  s,

c1) Calcula las velocidades media parciales, en cada intervalo

c2) Calcula la velocidad media total, entre los puntos final e inicial.

c3) Calcula las rapidez media parciales, en cada intervalo. Gráficelas en función del tiempo.

c4) Calcula la rapidez media entre los instantes final e inicial.

Observa. Analiza.

2. En el Tour de Francia los ciclistas tienen que ir por paisajes con subidas y bajadas pronunciadas. Es un viaje duro. Supón que un ciclista lleva una velocidad constante de 5 km/h, mientras que en las bajadas va a 45 km/h constantes (debido al freno). Calcula

a) su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud.

b) su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas.



c) su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas.

3. Considremos el mismo ciclista del problema anterior. Supón que realiza el primer tramo de una etapa desde la ciudad  $A$  a la  $B$  con una velocidad de 25 km/h en 3 horas, un segundo tramo desde  $B$  a  $C$  con una velocidad de 40 km/h en 3 horas y el último desde la ciudad  $C$  a la  $B$  30 km/h en 4h. (Considera todas las etapas se alcanzan sobre la misma recta y desprecia el tiempo empleado en cambiar de velocidad). Calcula

- el desplazamiento del ciclista;
- cuántos kilómetros anduvo el ciclista
- la velocidad media correspondiente a la totalidad del recorrido;
- la rapidez promedio a la que se desplazó el ciclista.

4. ¿Cuál es el desplazamiento de un vehículo que viaja por una carretera recta a una velocidad media de 40 km/h hacia el norte durante 22 minutos?

5. Se usa un cronómetro para tomar el tiempo de un automóvil en movimiento sobre una pista rectilínea y horizontal. En el tiempo  $t = 12$  s, el automóvil está en la posición  $x = 50$  m. En  $t = 15$  s, el automóvil está en  $x = 5$  m. ¿Cuál es la velocidad media y cuál es la rapidez media del automóvil?

6. Una mujer conduce desde el lugar  $A$  hasta el lugar  $B$  por un camino recto. Durante los primeros 75 min conduce a una rapidez media de 90 km/h. Para, entonces, durante 15 min. Continúa su viaje conduciendo a una rapidez de 75 km/h durante 45 min. A continuación conduce a 105 km/h durante 2,25 h y llega a su destino. Calcula la velocidad media entre  $A$  y  $B$ .

7. 61 Cygni es una estrella binaria en la constelación del Cisne. ¿A qué distancia se encuentra la estrella binaria si su luz necesita 11 años para llegar a la Tierra?

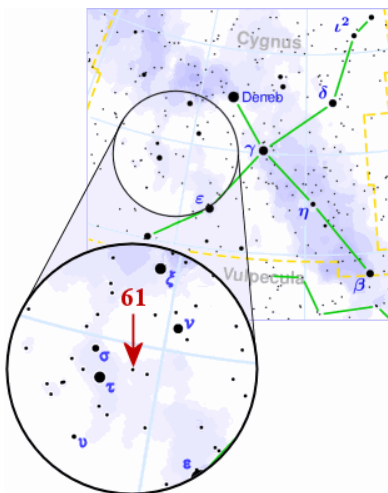


Figura 5.5: 61 Cygni (via Wikimedia Commons)

8. Un alumno de Introducción a la Física, cronómetro en mano y ubicado en un tramo rectilíneo de una ruta, estudia el movimiento de los coches que circulan por la misma con velocidad constante. A su derecha, y a 40 m de él hay un árbol, y más lejos un cartel. En cierto instante ve que un automóvil se le acerca por la izquierda, y dispara el cronómetro

cuando lo tiene a 100 m; el auto pasa frente a él 5 s después. Utilizando como origen la posición de Juan, y los tiempos que indica el cronómetro:

- Encuentra el vector velocidad del auto, y la indicación de su velocímetro en km/h.
- Halla en qué instante pasará el auto frente al árbol.
- Si cuando el cronómetro indica 30 s el auto pasa frente al cartel, ¿cuántos metros hay entre éste y el árbol?

9. Un ciclista recorre el primer tramo de un camino recto con una velocidad 25 km/h durante 3 horas y el segundo tramo con una velocidad de 40 km/h durante 2 horas. Puedes despreciar el tiempo empleado en cambiar de velocidad.

- Calcula la distancia total recorrida.
- Halla la velocidad media correspondiente a la totalidad del recorrido.

10. Un perro corre 120 m alejándose de su amo en línea recta en 8,4 s. Luego corre de regreso la mitad de la distancia en la tercera parte del tiempo. Calcula

- la rapidez promedio;
- la velocidad media para todo el recorrido.

11. Un excursionista realiza un viaje de dos días. Primero camina 25 km hacia el SE desde el lugar donde ha estacionado su auto. Se detiene, instala su tienda de campaña y pasa la noche. El segundo día camina 40 km en dirección  $60^\circ$  al NE donde encuentra la torre de vigilancia del guardabosques. Calcula magnitud y dirección del desplazamiento del excursionista durante los dos días.

12. Un avión de pasajeros parte de un aeropuerto y realiza la siguiente ruta: primero viaja a la ciudad A, localizada a 175 km en una dirección  $30^\circ$  al norte del Este. Luego se dirige a la ciudad B, a 150 km en la dirección  $20^\circ$  al oeste del Norte. Por último, vuela 190 km al oeste hasta la ciudad C. Calcula magnitud y dirección del desplazamiento del avión.

#### 5.1.4 Velocidad instantánea

Tener información sobre la velocidad promedio muchas veces no basta. Necesitamos tener información acerca del valor de la velocidad de un móvil en cada punto de una trayectoria. Para ello debemos poder definir, entonces, su **velocidad instantánea**,  $\vec{v}(t)$ .

La velocidad instantánea se puede obtener a partir de la velocidad media al hacer que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se haga cada vez más pequeño, en la definición de velocidad media. En la figura adjunta se muestra lo que se denomina un **proceso de límite**; lo que hacemos es mover el punto final del intervalo, indicado por las secuencias  $(x_1, t_1)$ ,  $(x_2, t_2)$ ,  $(x_3, t_3)$ , dejando el punto inicial, con coordenadas  $(x, t)$ , fijo. Este proceso sigue hasta que obtenemos una recta, color marrón, que es **tangente a la curva** de la función  $x(t)$ . La inclinación de esta recta tangente, es decir su pendiente, da la componente de la velocidad instantánea.

Matemáticamente, el proceso de límite se denota como

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (5.16)$$

donde  $\vec{r}(t)$  es el **vector de posición** del móvil. La expresión de la derecha se denomina **derivada de  $\vec{r}$  respecto a  $t$** . Lo que cuantifica es la variación de la función respectiva alrededor del punto donde se evalúa la derivada.

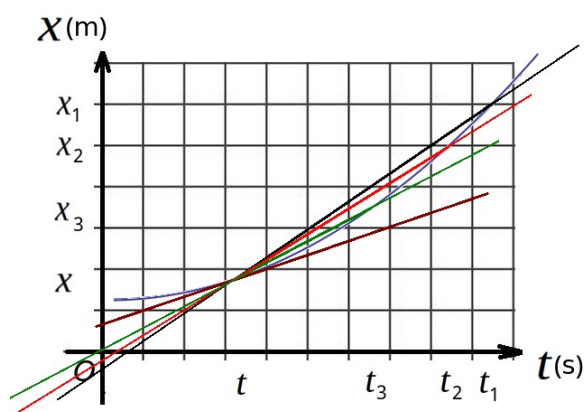


Figura 5.6: Proceso de límite para definir la velocidad instantánea

**Nota:** ¡No se debe leer ni interpretar como si  $d\vec{r}(t)$  estuviese dividido por  $dt$  !

Por supuesto, la tangente a una curva arbitraria puede ser mayor que cero, como en el caso de la figura, igual a cero, o menor que cero.

Para mayor precisión, la **definición de derivada de  $y(x)$**  es

$$\frac{dy(x)}{dt} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \quad (5.17)$$

Esto es lo que se denomina una **derivada total**.

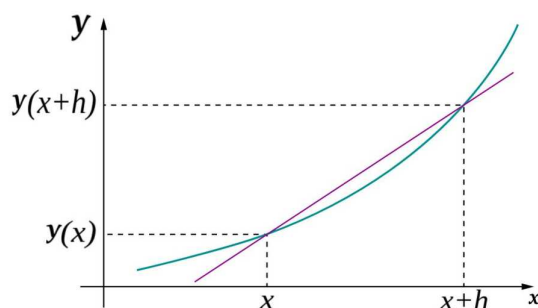


Figura 5.7: Definición de derivada

### Ejercicio:

Como ejercicio, en el gráfico de la Fig. 5.8 se muestra la posición en función del tiempo para un movimiento en una dimensión.

La función descrita es:  $x(t) = 5 + t^2 - 0,3t^3 + \sin^2(t)$ . Es una función inventada, por supuesto. Elije un software y gráficala. **Debe comenzar desde ya a aprender a utilizar herramientas de cálculo.**

a) Elije cinco instantes donde la pendiente de la curva sea cero, mayor que cero o menor que cero.

b) Con una regla, traza una recta tangente a la curva en esos puntos y determina la pendiente. Interpreta lo que has medido.

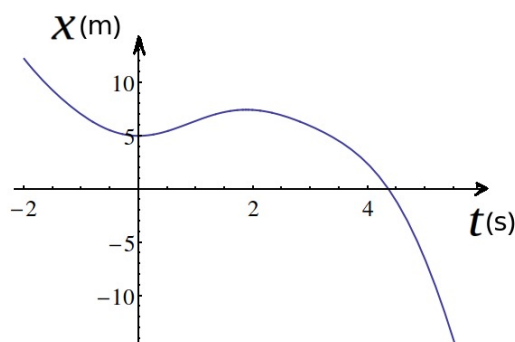


Figura 5.8: Posición en función de tiempo para función más general

**Nota:** Hay una forma más fácil de hacerlo. Se llama derivada y si aprendes a usar un software como Matlab, Mathematica o Maple, es una función que viene incluida en el programa. ¡Atrévete y te harás la vida más fácil!

c) Escribe el vector velocidad instantánea en cada caso.

### Pausa matemática

Derivar:

Como ya he explicado, la derivada se define a través de un proceso de límite que conduce a una recta tangente a la curva en un punto: la pendiente de la curva en ese punto. Para no andar por la vida trazando siempre tangentes (hay que hacerlo, pero no siempre), se puede definir el **operador derivada**, que actúa sobre funciones.

Dado que este libro considera que no sabes suficiente matemática, podemos utilizar por ahora algunas ayudas nemotécnicas, sin demostración (éstas las puedes encontrar en tu libro de Cálculo), para conocer cómo derivar un pequeño conjunto de funciones.

i) Consideremos una función potencia, es decir una definida por  $f(t) = At^\alpha$ , donde  $A \in \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ , un número real distinto de cero. Luego, la derivada respecto de  $t$  es

$$\frac{dAt^\alpha}{dt} = \frac{dA}{dt} \times t^\alpha + A \times \frac{dt^\alpha}{dt} = 0 + A\alpha t^{\alpha-1}. \quad (5.18)$$

La primera igualdad indica cómo se deriva un producto de funciones, en este caso la función constante  $A$  y la función  $t^\alpha$ ; se llama la **Regla de Leibniz para el producto**<sup>1</sup>: *se deriva el primer factor y se deja el segundo sin derivar. A eso se le agrega el primer factor que multiplica a la derivada del segundo factor, en ese orden.*

En la segunda igualdad, el cero corresponde a derivar la función constante; si es constante, no varía:  $\frac{dA}{dt} = 0$ . La derivada de una potencia reduce en 1 el valor de esa potencia y el valor de la potencia multiplica al resultado final.

ii) la función seno,  $f(t) = \sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  es una constante:

$$\frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \left(\frac{\omega}{\omega}\right) \frac{d \sin(\omega t)}{dt} = \omega \frac{d \sin(\omega t)}{d(\omega t)} = \omega \frac{d \sin(\tau)}{d(\tau)} = \omega \cos(\tau) = \omega \cos(\omega t). \quad (5.19)$$

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried\\_Wilhelm\\_Leibniz](https://en.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz)

Notar que hemos agregado un factor 1. Esta técnica de insertar un 1 es muy útil y aparece recurrentemente en física. Después se ha definido una nueva variable,  $\tau = \omega t$  y hemos derivado la función seno respecto de esa variable. Lo que aprendemos es que la derivada de la función seno es la función coseno.

iii) la función coseno,  $f(t) = \cos(\omega t)$ , donde  $\omega$  es una constante:

$$\frac{d \cos(\omega t)}{dt} = \left(\frac{\omega}{\omega}\right) \frac{d \cos(\omega t)}{d(\omega t)} = \omega \frac{d \cos(\omega t)}{d(\omega t)} = \omega \frac{d \cos(\tau)}{d(\tau)} = -\omega \sin(\tau) = -\omega \sin(\omega t). \quad (5.20)$$

Lo que aprendemos que la derivada de la función coseno es igual a menos la función seno.

Derivemos nuestra función del ejercicio:

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0 + 2t^{(2-1)} - 3 \times 0,3t^{(3-1)} + 2 \sin^{(2-1)}(t) \cos(t).$$

Es decir,

$$\frac{dx(t)}{dt} = 2t - 0,9t^2 + 2 \sin(t) \cos(t).$$

¿Te has dado cuenta cuál es la regla para la derivada del último término? Si no, no es tan importante por ahora. Lo aprenderás bien en tu libro de Cálculo.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

### 5.1.5 Aceleración media y aceleración instantánea

Cuando viajas en el Metro (o en un bus) y el tren se debe detener en una estación, sientes que te vas hacia adelante y debes sujetarte fuerte si vas de pie. Cuando parte nuevamente, sientes que te vas hacia atrás y debes sujetarte fuerte nuevamente.

Esto ocurre porque el tren cambia su **estado de movimiento**, pasando de tener una velocidad distinta de cero a una con velocidad cero, para luego cambiar su estado de movimiento desde el reposo a una velocidad distinta de cero. En ambos casos decimos que el tren ha **acelerado**.

En principio, la información de que disponemos es de la velocidad en un instante inicial,  $\vec{v}(t_0)$ , y en otro final,  $\vec{v}(t)$ . No tenemos información de qué sucede con el móvil en los instantes intermedios. Definimos la **aceleración media como el cambio de la velocidad instantánea en el tiempo**, esto es

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}. \quad (5.21)$$

Si usamos análisis dimensional, vemos que las unidad de aceleración en Sistema Internacional es  $\text{m/s}^2$ . En una dimensión escribimos

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}, \quad (5.22)$$

tal que

$$\vec{a}_m = a_m \hat{x}. \quad (5.23)$$

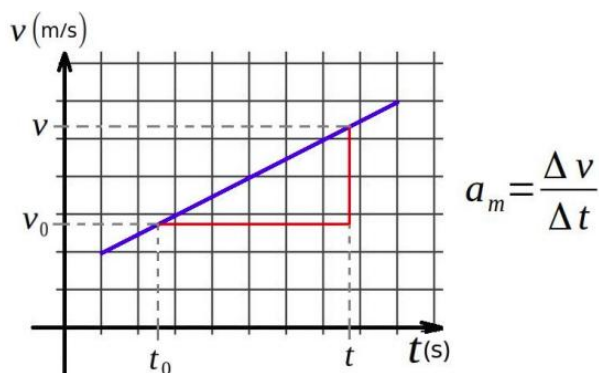


Figura 5.9: Gráfico velocidad versus tiempo

Notar que  $a_m$  puede **ser negativa, positiva o cero**. Si es positiva, la velocidad final es mayor que la inicial y luego el móvil está acelerando. Si es negativa, la velocidad final es menor que la inicial y entonces el móvil desacelera.

Su interpretación gráfica es nuevamente una recta, pero esta vez en un gráfico velocidad versus tiempo. La pendiente la recta es la aceleración media.

Si tenemos información acerca de cuál es el estado de movimiento del móvil en todo instante dentro de un intervalo, podemos definir la aceleración instantánea.

La aceleración instantánea se puede obtener a partir de la aceleración media al hacer que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  sea cada vez más pequeño, en la definición de aceleración media. En la figura adjunta se muestra lo que se denomina un **proceso de límite**; lo que hacemos es mover el punto final del intervalo, indicado por las secuencias  $(v_1, t_1)$ ,  $(v_2, t_2)$ ,  $(v_3, t_3)$ , dejando el punto inicial, con coordenadas  $(v, t)$ , fijo. Este proceso sigue hasta que obtenemos una recta, color marrón, que es tangente a la curva de la función  $v(t)$  en el instante  $t$ . La inclinación de esta recta tangente, su pendiente, da la componente de la velocidad instantánea.

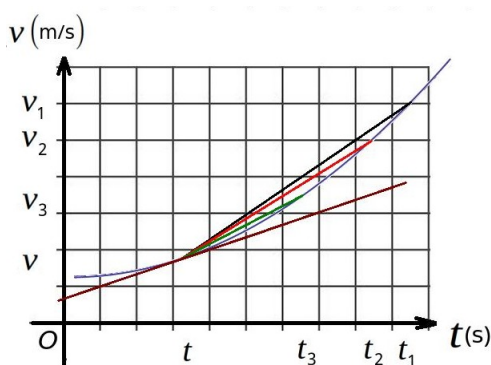


Figura 5.10: Obtención de aceleración instantánea

Matemáticamente, el proceso de límite se denota de modo general, en cualquier dimensión, como

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (5.24)$$

donde  $\vec{v}(t)$  es el **vector de velocidad instantánea** del móvil. Para obtener el último término hemos hecho uso de la Ec. (5.16). Un término de esta forma se denomina **segunda derivada**. Luego, la **aceleración es igual a la segunda derivada de la posición**.

### Ejercicio:

Como ejercicio, en el gráfico adjunto se muestra la posición en función del tiempo para un movimiento en una dimensión.

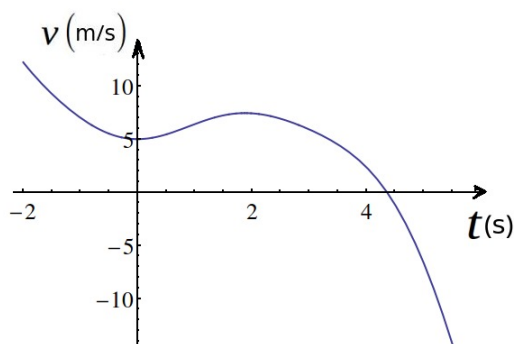


Figura 5.11: Velocidad en función del tiempo para función más general

La función descrita es:  $v(t) = 5 + t^2 - 0,3t^3 + \sin^2(t)$ . Elije un software y gráficala. **Debes comenzar desde ya a aprender a utilizar herramientas de cálculo.**

- Elije cinco instantes donde la pendiente de la curva sea cero, mayor que cero o menor que cero. Elije puntos distintos a los que usaste en el ejercicio anterior.
- Con una regla, traza una recta tangente a la curva en esos puntos y determina la pendiente. Interpreta lo que ha medido.
- Escriba el vector aceleración instantánea en cada caso.

Se debe recalcar que la **aceleración es el cambio de velocidad**, no es la velocidad en sí. Muchas veces se cree que porque un móvil está detenido en un instante, piense en el lanzamiento de una pelota hacia arriba, entonces no tiene aceleración.

Veamos otro aspecto de este mismo problema. En la Fig. 5.12 se muestran en color **rojo** los vectores aceleración y en color **azul** los vectores velocidad. El tamaño de los vectores es sólo cualitativo. Observa que, dependiendo de la posición en gráfico, es decir, el instante, los vectores tienen distintos sentidos y módulos. Para cuando es el vector cero, simplemente se ha escrito  $\vec{0}$ .

Nuevamente, la función es inventada y es  $v(t) = 5 - t^2 + 0,3t^3 - 6\sin^2(t)$ . La específico para que, con ayuda de un software, aprendas a graficarla y obtener la aceleración por medio de la derivada.

Este ejemplo muestra un movimiento donde la aceleración cambia con el tiempo. ¡Sí, existe ese tipo de movimiento! A la variación de la aceleración en el tiempo se le denomina Jerk,<sup>2</sup>. Y no sólo eso, existen también derivadas superiores.

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk\\_\(physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jerk_(physics))

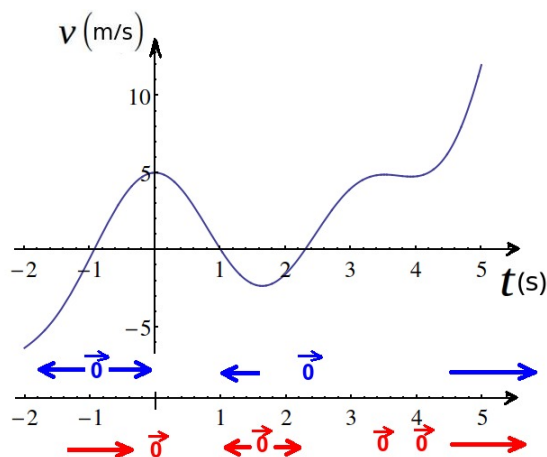


Figura 5.12: Comportamiento de la aceleración y velocidad

### 5.1.6 Movimiento con aceleración constante

En nuestra vida diaria existe un movimiento muy importante que ocurre con aceleración constante: el movimiento de objetos cerca de la superficie terrestre.

Cuando la aceleración instantánea es constante, es decir un sólo valor de la pendiente en un gráfico  $v$  vs  $t$ , entonces la aceleración media es igual a la aceleración instantánea. Luego, podemos escribir **en este caso** que

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)}{t - t_0}, \quad (5.25)$$

o bien

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \vec{a} \cdot (t - t_0). \quad (5.26)$$

**Esta expresión es general. No es exclusiva para movimiento en una dimensión, ya que la hemos obtenido de la definición del vector aceleración.**

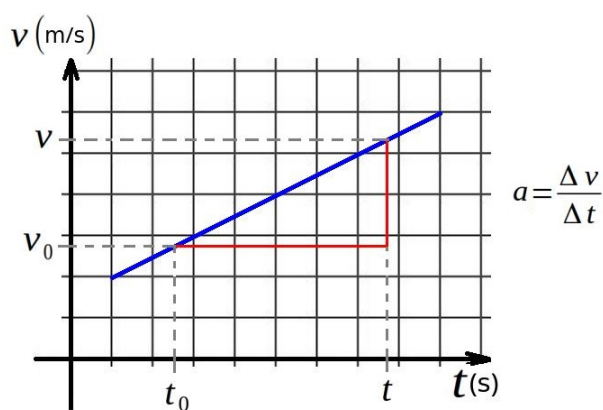


Figura 5.13: Aceleración constante en gráfico velocidad versus tiempo

En general, en una dimensión  $\vec{v}(t) = v(t)\hat{x}$  y  $\vec{a}(t) = a(t)\hat{x}$ , donde  $v(t)$  y  $a(t)$  pueden ser positivos, negativos o cero. Por lo tanto, para aceleración constante la Ec. (5.26) se



escribe

$$v(t) = v(t_0) + a \cdot (t - t_0) \quad (5.27)$$

y está representada por el gráfico de la Fig. 5.13.

¿Cómo podemos obtener la expresión para la posición en función del tiempo a partir de esta ecuación?

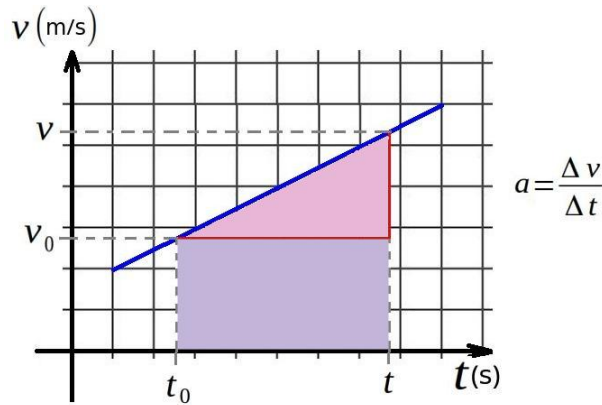


Figura 5.14: Área bajo la curva en gráfico velocidad versus tiempo

Consideremos la Fig. 5.14. En ella hemos coloreado dos áreas, una rectangular y otra triangular. Su suma corresponde al área bajo la recta entre los instantes  $t_0$  y  $t$ . Es claro que el área rectangular tiene un área  $A_1$  igual a

$$A_1 = v_0 \cdot (t - t_0)$$

y que el área del triángulo es

$$A_2 = \frac{1}{2} (v - v_0) \cdot (t - t_0).$$

**¡Notar que ambas cantidades tienen las dimensiones de posición!,** luego no hay problema en sumarlas.

El área total es, entonces

$$\begin{aligned} A &= v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} (v - v_0) \cdot (t - t_0) \\ &= v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0) \cdot (t - t_0) \\ &= v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde hemos usado el hecho que  $v(t) - v(t_0) = a \cdot (t - t_0)$ . Sabemos además, para un movimiento con velocidad constante, que

$$x(t) - x_0 = v_m(t - t_0) = v(t - t_0).$$

Si comparamos esta expresión con la Ec. (5.28), para  $a = 0$ , no podemos sino concluir que el lado izquierdo de la igualdad es  $x(t) - x_0$ . Por lo tanto,

$$x(t) - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2, \quad (5.29)$$

o bien

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}a \cdot (t - t_0)^2. \quad (5.30)$$

Notar que hemos usado indistintamente la notación  $x(t_0) = x_0$ ,  $v(t_0) = v_0$ .

Personalmente creo que es más útil utilizar la forma de función evaluada en un instante inicial, ya que de ese modo queda claro a qué instante inicial específico nos referimos, lo que a su vez reduce la posibilidad de equivocarse en las aplicaciones.

Las dos cantidades  $x(t_0)$  y  $v(t_0)$  se denominan **condiciones iniciales** del problema. Su valor numérico queda fijado por el observador y depende de la elección del sistema de referencia. Una vez fijadas, la evolución del sistema es única. Esto quiere decir que todo móvil que se mueva con aceleración constante, ¡incluida en este caso  $a = 0$ !, y que posea los mismos valores de  $x(t_0)$  y  $v(t_0)$ , se moverá exactamente de la misma manera en tiempos posteriores.

Otra forma de decirlo es que **el movimiento de un móvil en tiempos posteriores queda completamente especificado por las condiciones iniciales del problema**.

Este es un resultado general en Mecánica y da cuenta de que **esta teoría es determinista**.<sup>3</sup>

Notemos que la ecuación vectorial correspondiente, de donde se obtiene la Ec. (5.30) es

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot (t - t_0)^2. \quad (5.31)$$

Lo interesante de esta ecuación es que es general, siempre y cuando  $\vec{a} = c\vec{e}$ ; no se reduce al movimiento en una dimensión.

En el gráfico de la Fig. 5.15 se ha graficado una función que tiene la forma de la Ec. (5.30), que describe la posición de un móvil en función del tiempo, para un movimiento en una dimensión con aceleración constante  $a = 12 \text{ m/s}^2$ .

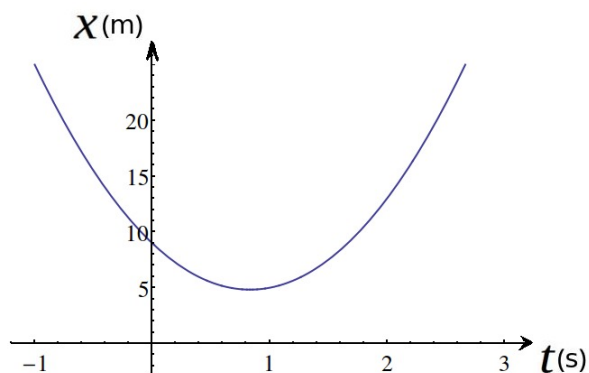


Figura 5.15: Gráfico posición versus tiempo para movimiento con aceleración constante

Esta función es una **parábola**, cuya función más general es

$$y(x) = a + bx + cx^2. \quad (5.32)$$

Para la curva de la Fig. 5.15 los parámetros son:

<sup>3</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Determinism>

Instante inicial:  $t_0 = 1$  s,  
 Posición inicial:  $x(t_0) = 5$  m,  
 Velocidad inicial:  $v(t_0) = 2$  m/s .

Nuevamente, ve y elije un software y aprende cómo graficar una función. Usa el mismo software para calcular las derivadas de la función. Si hacemos uso de las reglas para derivar potencias, obtenemos

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=1} = 2 \text{ m/s}, \text{ y}$$

$$\left. \frac{d^2x(t)}{dt^2} \right|_{t=1} = 12 \text{ m/s}^2.$$

La barra vertical al costado derecho de la derivada significa, evalúa allí, en ese punto.

Notar que esos valores coinciden (no puede ser de otro modo) con los valores elegidos para graficar la función.

¿En qué instante  $\tau$  la velocidad se hace cero? Sabemos que eso significa una pendiente cero, es decir, una recta paralela al eje de abscisas. Para determinar ese instante debemos encontrar la solución de la ecuación

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=\tau} = 0 = 2 + 12(\tau - 1).$$

Es decir,

$$\tau = \frac{12 - 2}{12} = 10/12 \simeq 0,83 \text{ s}.$$

**Ejercicio:** Usando un software, realiza un análisis similar para

a)  $a = 3 \text{ m/s}^2$

Instante inicial:  $t_0 = 1$  s ,  
 Posición inicial:  $x(t_0) = 10$  m ,  
 Velocidad inicial:  $v(t_0) = -4$  m/s

Medita acerca del significado del signo menos en la velocidad inicial.

b)  $a = -9,8 \text{ m/s}^2$

Instante inicial:  $t_0 = 0$  s ,  
 Posición inicial:  $x(t_0) = 5$  m ,  
 Velocidad inicial:  $v(t_0) = 2$  m/s

### Pausa matemática

El matemático Bernhard Riemann <sup>4</sup> resolvió en 1854 la pregunta de cómo encuentra el “área bajo la curva” de una función cualquiera, definida en un intervalo dado. Para ello, lo que hizo fue realizar una partición del intervalo y aproximar cada subintervalo por un rectángulo de ancho  $\Delta x_i$  <sup>5</sup>. Es ingenioso, porque sí sabemos cómo calcular fácilmente el área de un rectángulo: es el producto de la base, es decir  $\Delta x_i$  , por altura, que es el valor

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard\\_Riemann](https://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann)

<sup>5</sup>No es necesario que sea un rectángulo; puede ser otro paralelogramo

de la función evaluada en ese intervalo,  $f(x_i)$ , donde  $x_i$  es algún punto en el intervalo de definición.

Esto, que parece una observación obvia, es realmente una expresión del **Teorema del valor medio del cálculo integral**.<sup>6</sup>

Si esos rectángulos son cada vez más pequeños tenemos la esperanza de que la aproximación sea cada vez mejor.

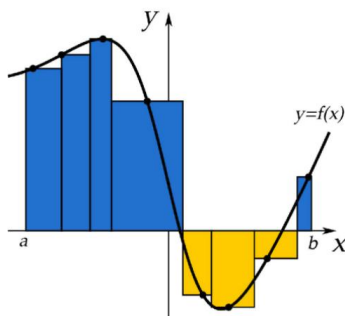


Figura 5.16: Discretización de Riemann de una función

Consideremos la función  $y = f(x)$ , definida en el intervalo  $[a, b]$ , que ha sido graficada y se muestra en la Fig. 5.16. Allí también se observan rectángulos que aproximan el área bajo la curva. Notar que “área bajo la curva” significa realmente área que la curva forma con el eje horizontal, la abscisa. Luego, puede ser negativa, positiva o cero.

Por lo tanto, el área total bajo la curva es la suma de cada uno de los rectángulos, cuando los rectángulos son cada vez más pequeños; esa suma se llama **suma de Riemann**. El límite del que hablamos se muestra en la Fig. 5.17. Matemáticamente, esto se escribe así

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(x_i)\Delta x_i. \quad (5.33)$$

El lado izquierdo de la igualdad se lee “integral de la función  $f(x)$  entre  $a$  y  $b$ ”. El símbolo de integral,  $\int$ , representa una letra S, de suma, que ha sido estirada.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

### 5.1.7 Ejercicios

1. A una de tus amigas le gusta hacer skateboard y ha buscado una calle con una buena pendiente, constante, desde donde lanzarse (usando casco y protecciones de seguridad an rodillas y codos, por supuesto). Tu amiga parte del reposo descendiendo por la ladera con una aceleración constante de  $a = 2 \text{ m/s}^2$  (¡Ah! ¿Se imagina cómo puede suceder que baje con aceleración constante?).

Elige un sistema de referencia paralelo a la calle, con el eje positivo hacia abajo.

- ¿Qué velocidad lleva después de 5 s?
- ¿Qué distancia habrá recorrido en el instante 5 s?
- ¿Cuál es la velocidad media durante los primeros 5 s?
- ¿Qué distancia ha recorrido hasta el instante en que su velocidad alcanza los 15 m/s?

<sup>6</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_del\\_valor\\_medio](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_valor_medio)

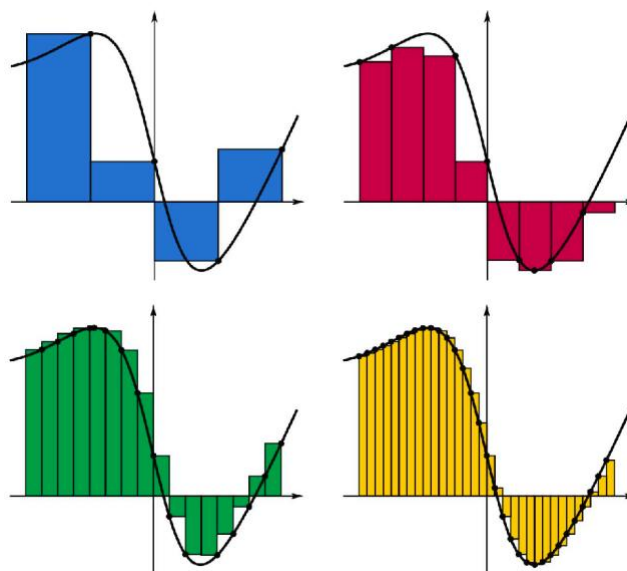


Figura 5.17: Discretización de Riemann de una función y límite con intervalo a cero

e) Grafica  $a$ ,  $v$  y  $x$  en función del tiempo.

2. Un auto que inicialmente se mueve con velocidad constante acelera a razón de  $1 \text{ m/s}^2$  durante  $12 \text{ s}$ . Si en ese tiempo recorre  $190 \text{ m}$ , ¿cuál era la lectura en el velocímetro cuando comenzó a acelerar?

3. Un tren del Metro de Santiago parte del reposo de una estación y acelera durante  $1$  minuto con una aceleración constante de  $12 \text{ m/s}^2$ . Después marcha a velocidad constante durante  $2$  minutos y luego desacelera a razón de  $2,4 \text{ m/s}^2$  hasta que se detiene en la estación siguiente.

a) Calcula la distancia total recorrida por el tren.

b) Grafica  $a$ ,  $v$  y  $x$  en función del tiempo.

4. Una partícula se mueve a lo largo del eje  $x$  de acuerdo con la ecuación,  $x(t) = 2t^3 + 5t^2 + 5$ . Determina

a) La velocidad y aceleración instantáneas.

b) La posición, velocidad y aceleración en  $t = 2 \text{ s}$ .

c) Velocidad y aceleración medias entre  $t = 2 \text{ s}$  y  $t = 3 \text{ s}$ .

5. Cada uno de los siguientes cambios de velocidad tienen lugar en un intervalo de tiempo de  $10 \text{ s}$  y mientras la partícula en movimiento se desplaza sobre un eje horizontal. Determina la dirección, el sentido y el valor de la aceleración media para cada intervalo, recuerda que se trata de una magnitud vectorial. Indica en cada caso si el movimiento es acelerado o desacelerado.

a) Al comienzo del intervalo se mueve hacia la derecha con velocidad inicial  $v_0 = 150 \text{ cm/s}$  y al final del mismo la velocidad es  $v = 600 \text{ cm/s}$  hacia la derecha.

b) Al comienzo hacia la derecha con  $v_0 = 600 \text{ cm/s}$  y al final hacia la derecha con  $v = 150 \text{ cm/s}$ .

c) Al comienzo hacia la izquierda con  $v_0 = 600 \text{ cm/s}$  y al final hacia la izquierda con  $v = 150 \text{ cm/s}$ .

6. Se diseña un aeropuerto para aviones pequeños. El tipo de avión que usaría este aeropuerto puede acelerar  $2 \text{ m/s}^2$  y debe alcanzar una rapidez, antes de despegar, de por lo menos  $100 \text{ km/h}$ .

a) Si la pista tiene  $150 \text{ m}$  de longitud ¿Podría este avión alcanzar la mínima rapidez que se requiere para despegar?

b) En caso negativo ¿Qué longitud debería tener la pista?

7. Un disco de jockey que se desliza sobre un lago congelado, se detiene después de recorrer  $200 \text{ m}$ . Si su rapidez inicial es de  $3 \text{ m/s}$ .

a) ¿Cuál es su aceleración si ésta se considera constante?

b) ¿Cuánto dura el movimiento?

c) ¿Cuál es su velocidad después de recorrer  $150 \text{ m}$ ?

8. Una persona debidamente sujeta por su cinturón de seguridad tiene una buena oportunidad de sobrevivir a un choque automovilístico, si la desaceleración no excede los  $30g$  ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Suponiendo una desaceleración uniforme con este valor, calcular la distancia que puede colapsarse la parte delantera del automóvil en un choque que lleva al auto desde una rapidez de  $100 \text{ km/h}$  hasta el reposo.

9. Un jumbo de propulsión a chorro necesita alcanzar una velocidad de  $360 \text{ km/h}$  para despegar. Suponiendo su aceleración constante y una pista de  $1,8 \text{ km}$  de longitud, ¿qué aceleración mínima se requiere partiendo del reposo?

10. Un auto de  $3,5 \text{ m}$  viaja con rapidez constante de  $18 \text{ m/s}$  y se acerca al cruce de  $20 \text{ m}$  de ancho. El semáforo se pone en amarillo cuando la parte delantera del auto está a  $50 \text{ m}$  del cruce. Si el conductor pisa el freno el auto se frena a razón de  $3,8 \text{ m/s}^2$ ; si pisa el acelerador, el auto acelerará a  $3,2 \text{ m/s}^2$ . El semáforo está en amarillo  $3,0 \text{ s}$ . Supón que el conductor reacciona instantáneamente. ¿Deberá éste, para no estar en el cruce con el semáforo en rojo, pisar el freno o el acelerador?

11. Considera la gráfica de la Fig. 5.18 que describe el movimiento de una partícula en una dimensión.  $v(t)$  representa la velocidad de la partícula. En  $t = 0 \text{ s}$ , la ésta se encuentra en el origen de coordenadas.

a) Grafica la aceleración en función del tiempo.

b) Calcular el desplazamiento total de la partícula en  $8 \text{ s}$ .

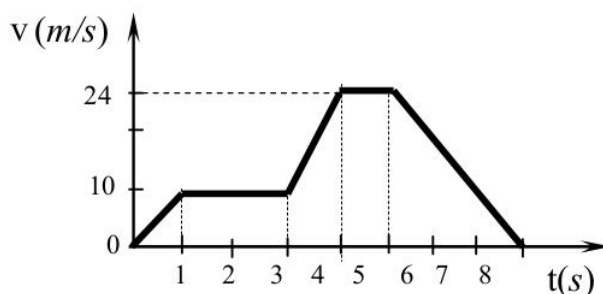


Figura 5.18: Velocidad en función del tiempo

12. La figura muestra una gráfica de la aceleración de una locomotora de juguete que se mueve en el eje  $x$ .

- a) graficar velocidad en función del tiempo.  
 b) grafica posición en función del tiempo, considerando que  $x_0 = 10$  m y  $v_0 = 0$  m/s, cuando  $t = 0$  s.

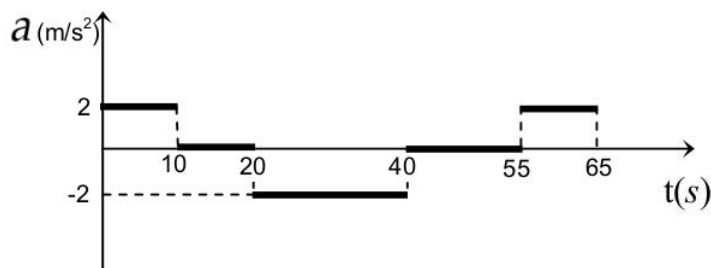


Figura 5.19: Aceleración en función del tiempo

13. En el instante en que un semáforo se pone en luz verde, un auto que esperaba en el cruce arranca con aceleración constante de  $3,2 \text{ m/s}^2$ . En el mismo instante, un camión que viaja con rapidez constante de  $20 \text{ m/s}$  alcanza y pasa al auto.

- a) ¿A qué distancia de su punto de partida, el auto alcanza al camión?  
 b) ¿Qué rapidez tiene el auto en ese momento?  
 c) Dibujar una gráfica  $x$  vs  $t$  del movimiento de los dos vehículos, tomando  $x = 0$  en el cruce.  
 d) Dibujar una gráfica  $v$  vs  $t$  del movimiento de los dos vehículos,

14. La nave transbordadora Discovery lleva una velocidad de  $720 \text{ km/h}$  en el momento del aterrizaje. Cuando entra en contacto con el suelo, despliega los paracaídas de frenado, que junto con los propios frenos de la nave hacen que esta se detenga totalmente en  $20 \text{ s}$ .

- a) ¿Cuál ha sido la aceleración de frenado, suponiéndola constante?  
 b) ¿Qué distancia ha recorrido la nave durante el frenado?

15. Un ciclista desciende por una carretera recta boscosa a una velocidad de  $54 \text{ km/h}$  cuando observa una vaca cruzando la carretera a  $25 \text{ m}$  por delante de él. Si al aplicar ambos frenos logra una desaceleración de  $5 \text{ m/s}^2$ :

- a) ¿Cómo acaba la historia?  
 b) ¿Acabaría de igual manera si el ciclista tardara  $0,7 \text{ s}$  en reaccionar antes de aplicar los frenos?

16. Un protón con una velocidad inicial de  $2,3 \times 10^7 \text{ m/s}$  entra en una zona donde sufre una aceleración contraria constante de  $1,3 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$ . ¿Qué distancia recorre hasta que se detiene?

17. Un corredor de Fórmula 1 que parte del reposo alcanza una velocidad de  $180 \text{ km/h}$  en  $6,75 \text{ s}$  a lo largo de una pista recta.

- a) ¿Cuál es la aceleración del corredor?  
 b) Considerando que la aceleración es constante, ¿cuál es el módulo de la velocidad media del corredor?

18. Supón que una locomotora acelera uniformemente desde el reposo a razón de  $5,25 \text{ m/s}^2$  a lo largo de unas vías rectas.

- a) Escribe una expresión de la velocidad de la locomotora en función del tiempo?

- b) ¿Cuál es la velocidad 7 s después de la partida?
- c) Escribe una expresión de la posición de la locomotora en función del tiempo.
- d) ¿Cuál es la distancia recorrida por la locomotora en esos 7 s?

19. Usain Bolt está practicando en la pista atlética. Parte del reposo y acelera durante 4 segundos con una aceleración constante de  $3,5 \text{ m/s}^2$  hasta alcanzar su velocidad máxima.

- a) Encuentra esa velocidad.
- b) Calcula cuánto se desplaza durante el primer segundo, y cuánto durante el último.
- c) El mismo velocista, que viene moviéndose a la velocidad máxima alcanzada, frena con aceleración constante hasta detenerse en 8 segundos. Halla su desplazamiento durante el primer y durante el último segundo de su frenado.

20. Un barco navega con una velocidad de  $6,3 \text{ m/s}$  en el instante en que sobrepasa una boya. Justo en ese momento comienza a aumentar su velocidad con una aceleración constante igual a  $0,2 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuál será la distancia entre la boya y el barco cuando la velocidad de éste sea  $8,6 \text{ m/s}$ ?

21. Un automóvil parte del reposo moviéndose con una aceleración constante de  $1 \text{ m/s}^2$  durante un minuto. El conductor en ese instante suelta un poco el acelerador de modo que ahora se mueve con velocidad constante durante otro minuto. Finalmente clava los frenos desacelerándose a razón de  $2 \text{ m/s}^2$  hasta detenerse.

- a) Calcula a cuántos metros del lugar de partida se detiene.
- b) Grafica la posición del automóvil en función del tiempo, desde el punto de partida hasta el instante en que el automóvil se detiene, es decir para los tres tramos del recorrido.
- c) Grafica la velocidad y la aceleración del automóvil en función del tiempo para esos mismos tramos.

22. Una partícula tiene un movimiento rectilíneo en la dirección positiva del eje  $x$ , cuya curva de rapidez contra tiempo se representa en la Fig. 5.20, teniendo en cuenta las características mostradas, determina la curva de la aceleración contra tiempo para el movimiento

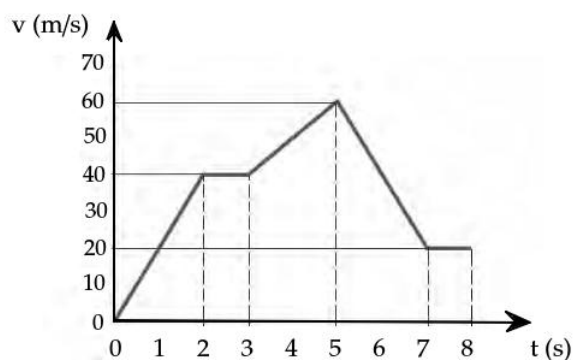


Figura 5.20: Velocidad en función del tiempo

23. Con este problema, puedes practicar las derivadas de funciones seno y coseno que hemos visto anteriormente. La ecuación de posición de un objeto que se mueve en línea recta en dirección de las  $x$  está dada por la ecuación



$$\vec{x}(t) = 2 \cos(3t + \pi) \hat{x}$$

donde la distancia en centímetros y el tiempo en segundos.

- Encuentra las ecuaciones de velocidad y aceleración para esta partícula.
- Obtén las presentaciones gráficas de las tres ecuaciones. Usa un software.

### 5.1.8 Problemas de encuentro

Los problemas de encuentro son aquellos donde dos o más móviles logran o buscan encontrarse en un punto del espacio. Ejemplos de estos son un policía persiguiendo a un delincuente, una jugadora intentando alcanzar la pelota en un partido de baby fútbol o un murciélago tratando de cazar una polilla. En cualquier caso, lo que sucede físicamente es que en un instante  $t'$  los móviles deben tener la misma coordenada espacial,  $\vec{r}(t')$ .

Veamos dos ejemplos, uno con velocidad constante, y otro dónde hay aceleración constante.

#### Ejemplo 1

La gráfica muestra dos rectas que representan el movimiento de los móviles A y B. Ambos móviles llevan una velocidad distinta de cero en el instante  $t_0 = 0$  s.

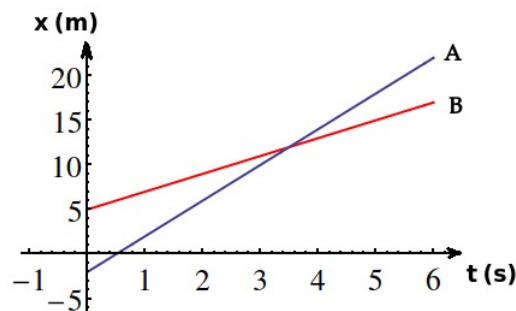


Figura 5.21: Posición versus tiempo para dos móviles que se mueven a velocidad constante

Analicemos el movimiento: el móvil A se mueve hacia la derecha con  $\vec{v}_A = 4\hat{x}$  m/s, partiendo desde la posición  $\vec{x}_A = -2\hat{x}$  m.

El móvil B se mueve todo el tiempo a velocidad constante  $\vec{v}_B = 2\hat{x}$  m/s, partiendo desde la posición  $\vec{x}_B = 5\hat{x}$  m.

En la gráfica tenemos dos rectas, así que debemos recordar la ecuación de la recta. Así podemos escribirlas ecuaciones vectoriales para ambos móviles como

$$\vec{x}_A(t) = (-2 + 4t)\hat{x}$$

y

$$\vec{x}_B(t) = (5 + 2t)\hat{x}.$$

Notar que se ha elegido, para ambos móviles, comenzar a contar el tiempo desde el instante inicial  $t = 0$  s. Por supuesto podemos escribir ambas ecuaciones usando sólo sus componentes:

$$x_A(t) = -2 + 4t \text{ y } x_B(t) = 5 + 2t. \text{ ¿Qué paso(s) hemos seguido?}$$

Para obtener el instante en que ambos móviles se encuentran debe ocurrir que en un instante  $t'$

$$x_A(t') = x_B(t') \implies -2 + 4t' = 4 + 2t'$$

Esta ecuación tiene como solución  $t' = 3,5$  s.

Por supuesto, la gráfica indica que después de encontrarse, ambos prosiguen su camino. Obviamente no han chocado, pues **sólo consideramos móviles puntuales**.

### Ejemplo 2

En la siguiente gráfica tenemos los mismos móviles anteriores, pero ahora el móvil A tiene una aceleración constante. **Por eso la función que representa su movimiento es una parábola.**

La ecuación vectorial que representa su movimiento está dada por

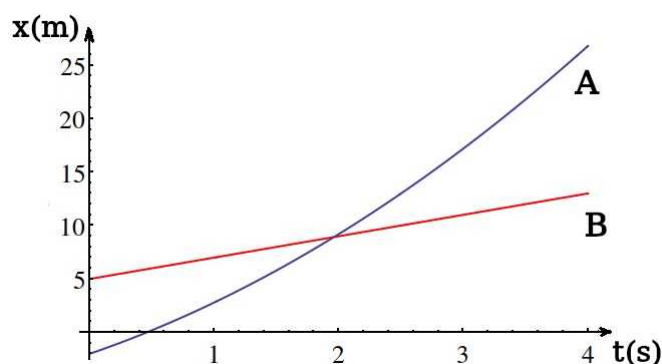


Figura 5.22: Posición versus tiempo para dos móviles, uno con  $v = \text{cte.}$  y otro con  $a = \text{cte.}$

$$\vec{x}_A(t) = (-2 + 4t + 0,8t^2)\hat{x},$$

o bien, expresada en su componente,

$$x_A(t) = -2 + 4t + 0,8t^2.$$

a) ¿Cuál es la aceleración del móvil A?

De la Ec. (5.31) leemos que el factor delante del término cuadrático es la mitad de la aceleración, luego la aceleración del móvil A es  $a = 1,6 \text{ m/s}^2$

b) Obtén el instante en que ocurre el encuentro entre los móviles. ¿Qué concluyes?

Para obtener el instante en que ambos móviles se encuentran debe ocurrir que en un instante  $t'$

$$x_A(t') = x_B(t') \implies -2 + 4t' + 0,8t'^2 = 5 + 2t'.$$

Esta es una ecuación cuadrática

$$0,8t'^2 + 2t' - 7 = 0$$

cuyas soluciones están dadas por

$$t_{\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{26,4}}{1,6}.$$

Esto es,

$$t_+ = 1,96 \text{ s}$$

y

$$t_- = -4,46 \text{ s}$$

Claramente deducimos que la segunda solución no es una solución física. Observa la gráfica.

c) ¿Cómo luce la gráfica velocidad versus tiempo? Tarea para la casa.

Hasta ahora hemos visto ejemplos dónde el movimiento de ambos observadores es medido desde el instante  $t_0 = 0 \text{ s}$ , tal que un observador mide un sólo tiempo, es decir hay un solo cronómetro. Pero sabemos que la expresión más general para la posición de un móvil en función de tiempo es

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2,$$

con  $t_0$  un instante inicial dado.

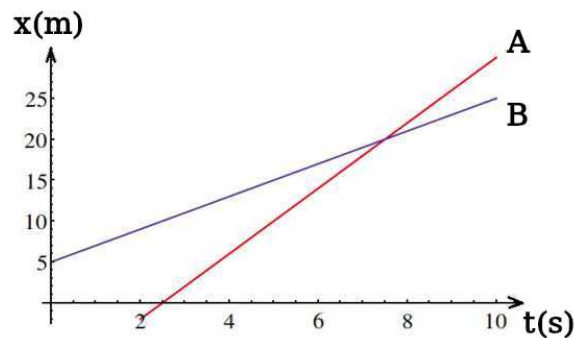


Figura 5.23: Posición versus tiempo para dos móviles que se mueven a velocidad constante

Consideremos el problema de dos móviles, cuyo movimiento está descrito en la gráfica de la Fig. 5.23. De ésta observamos que

$$\vec{x}_B(t) = [5 + 2(t - t_{B0})] \hat{x},$$

donde  $t_{B0} = 0 \text{ s}$ . El movimiento del móvil A queda descrito por la ecuación

$$\vec{x}_A(t) = [-2 + 4(t - t_{A0})] \hat{x}.$$

Claramente  $t_{A0}$  no puede ser cero, porque hay un solo cronómetro y éste ya comenzó a contar en  $t = 0$ . De hecho, resulta que  $t_{A0} = 2 \text{ s}$ , como indica la figura.

Esto se puede interpretar del siguiente modo:

Un observador ubicado en el origen del sistema coordenado echa a andar el reloj en el mismo instante en que B parte con velocidad  $\vec{v}_B = 2\hat{x} \text{ m/s}$ . Esto significa que el instante inicial para este observador es  $t_{B0} = 0 \text{ s}$ . El observador A parte con velocidad  $\vec{v}_A = 4\hat{x} \text{ m/s}$  dos segundos después de que el móvil B ha avanzado, cuando el móvil B pasa por la posición  $\vec{x}_B(t) = 9\hat{x} \text{ m}$ . Analiza esto. Debes asegurarte de comprenderlo.

¿Habrá otra forma de interpretar lo anterior? Medita y discute con compañeros.

## 5.1.9 Ejercicios

1. Este problema es la continuación de los ejemplos anteriores. Ahora ambos móviles tienen aceleración constante, como muestra la Fig. 5.24. Esta vez el movimiento del móvil *B* está descrito por

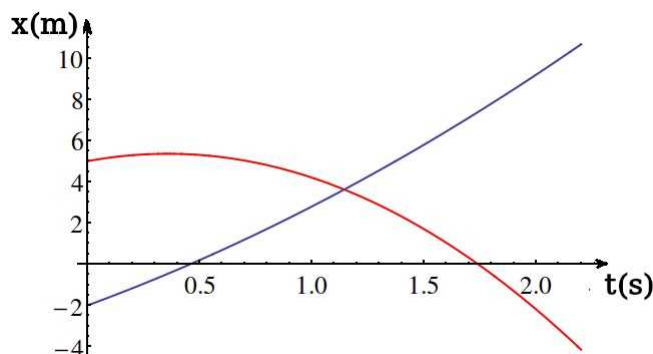


Figura 5.24: Posición versus tiempo para dos móviles acelerados uniformemente.

$$\vec{x}_B(t) = (5 + 2t - 2,8t^2)\hat{x},$$

o bien,

$$x_B(t) = 5 + 2t - 2,8t^2.$$

- ¿Qué aceleración tiene el móvil *B*?
  - Determina el instante en que ambos móviles se encuentran. Da un ejemplo de la vida real.
  - ¿Cómo luce la gráfica velocidad versus tiempo?
2. Dos corredores corren en sentidos opuestos sobre una pista recta; tienen velocidades constantes de 4.5 m/s y 3.5 m/s, respectivamente, cuando están separados por 100 m.
- Escribe las ecuaciones itinerario, es decir la función  $x(t)$ , del movimiento de cada corredor.
  - Halla en qué instante se encuentran.
  - Determina en qué posición ocurre el encuentro.
  - Representa gráficamente la posición versus el tiempo de cada corredor.
3. Un tren parte de Santiago a Chillán (Chile) a una velocidad constante de 80 km/h. Una hora más tarde, un segundo tren parte, desde el mismo lugar y con el mismo destino, a una velocidad constante de 100 km/h.
- ¿Cuánto tiempo tardará el segundo tren en alcanzar al primero?
  - ¿A qué distancia de Santiago se encuentran?
  - Representa gráficamente la posición versus el tiempo de cada tren.
4. En un tramo recto de una carretera un automóvil va a 70 km/h. Detrás de éste y a 35 km de distancia otro automóvil avanza con velocidad uniforme de 110 km/h. ¿En cuánto tiempo alcanza éste al primero, suponiendo que mantienen el movimiento rectilíneo y uniforme? Además de encontrar el resultado analíticamente, realiza los gráficos posición-tiempo de ambos móviles.

5. Dos vehículos  $A$  y  $B$  parten uno al encuentro de otro desde dos localidades que distan entre sí 400 km. El vehículo  $A$  viaja a 100 km/h, mientras que el  $B$ , que se pone en marcha un cuarto de hora después, lo hace a 120 km/h.

- a) ¿Cuánto tiempo pasa desde que parte  $A$  hasta que se produce el encuentro?
- b) ¿Qué distancia ha recorrido el vehículo  $A$ ?
- c) Representa el movimiento de ambos vehículos en una misma gráfica  $x$  vs  $t$ .

6. Las ecuaciones de movimiento de dos vehículos,  $A$  y  $B$ , son  $x_A = 5t$  m y  $x_B = 140 - 2t$  m. Determina:

- a) ¿Qué distancia los separa inicialmente?
- b) ¿En qué sentidos relativos se mueven uno respecto del otro?
- c) ¿En qué instante se cruzan?
- d) Representa el movimiento de ambos vehículos en una misma gráfica  $x$  vs  $t$ .

7. Dos vehículos salen al encuentro desde dos ciudades separadas por una carretera recta por 300 km, con velocidades de 60 km/h y 40 km/h, respectivamente. Si el que circula a 40 km/h sale dos horas más tarde, responde a las siguientes preguntas:

- a) El tiempo que tardan en encontrarse.
- b) La posición donde se encuentran

8. Un móvil sale de una localidad  $A$  hacia  $B$  con una velocidad de 80 km/h, en el mismo instante sale de la localidad  $B$  hacia  $A$  otro móvil a 60 km/h,  $A$  y  $B$  se encuentran a 600 km. Haz un trabajo gráfico y otro analítico.

- a) ¿A qué distancia de  $A$  se encontrarán?
- b) ¿En qué instante se encontrarán?

9. Dos puntos  $A$  y  $B$  están separados por una distancia de 180 m. En un mismo momento pasan dos móviles, uno desde  $A$  hacia  $B$  y el otro desde  $B$  hacia  $A$ , con velocidades de 10 m/s y 20 m/s respectivamente. Halla analíticamente y gráficamente:

- a) ¿A qué distancia de  $A$  se encontrarán?
- b) El instante del encuentro

10. Dos automóviles que marchan en el mismo sentido, se encuentran, en un momento dado, a una distancia de 126 km. Si el más lento va a 42 km/h, calcula la velocidad del más rápido, sabiendo que le alcanza en seis horas.

11. Javiera sale de su casa en bici a las seis de la mañana. Al llegar a un cierto lugar, se le estropea la bici y ha de volver andando. Calcula a qué distancia ocurrió el percance sabiendo que las velocidades de desplazamiento han sido de 30 km/h en bici y 6 km/h caminando y que llegó a su casa a la una del mediodía.

12. Un observador se halla a 510 m de una pared. Entre el observador y la pared, y a igual distancia de ambos, se realiza un disparo. ¿Al cabo de cuántos segundos percibirá el observador:

- a) el sonido directo?
- b) el eco?

Supón que velocidad del sonido es 340 m/s.

13. Un ladrón roba una bicicleta y huye con ella a 20 km/h. Una ciclista que lo ve, sale detrás del ladrón tres minutos más tarde a 22 km/h. ¿Al cabo de cuánto tiempo lo alcanzará?

14. Calcula la longitud de un tren cuya velocidad es de 72 km/h y que ha pasado por un puente de 720 m de largo, si desde que penetró la máquina hasta que salió el último vagón han pasado  $\frac{3}{4}$  de minuto.

15. En un instante pasa por el punto A un auto con movimiento rectilíneo y a una velocidad de 20 m/s. Cinco segundos después, pasa en su persecución, por el mismo punto A otro vehículo con velocidad 30 m/s. Encuentra analítica y gráficamente cuándo y dónde lo alcanzará.

16. Dos móviles pasan simultáneamente por dos posiciones A y B distantes entre sí 3 km, con velocidades  $v_a = 54$  km/h y  $v_b = 36$  km/h, paralelas al segmento AB y en el mismo sentido. Encuentra analítica y gráficamente:

- a) La posición del encuentro.
- b) El instante del encuentro.

17. Un móvil sale de una localidad A hacia B con una velocidad de 80 km/h, 90 minutos después sale desde el mismo lugar y en su persecución otro móvil a 27,78 m/s. Calcula

- a) ¿A qué distancia de A lo alcanzará?
- b) ¿En qué instante lo alcanzará?

18. Dos vehículos A y B situados a 2 km de distancia salen simultáneamente uno en persecución del otro con movimiento acelerado ambos, siendo la aceleración del más lento, el B, de  $32 \text{ cm/s}^2$ . Deben encontrarse a 3.025 km de distancia del punto de partida del B. Calcula

- a) tiempo que tardan en encontrarse,
- b) aceleración de A,
- c) sus velocidades en el momento del encuentro.

19. Dos móviles se dirigen a su encuentro, con aceleración constante, desde dos puntos distantes entre sí 180 km. Si se encuentran a los 9 s de salir y las distancias recorridas por los móviles están en relación de 4 a 5, calcula sus aceleraciones respectivas.

20. Una motociclista esta parada en un semáforo que da acceso a una carretera. En el instante en el que el semáforo cambia a luz verde, le sobrepasa un automóvil que circula a una velocidad de 25 m/s. La motorista arranca con una aceleración constante de  $4 \text{ m/s}^2$ .

- a) ¿Cuánto tarda la motocicleta en alcanzar al coche?
- b) ¿Qué distancia han recorrido?

21. Un auto de policía está detenido y en ese momento le adelanta un auto robado que circula con una velocidad constante de 90 km/h. La policía se pone en marcha y sale a por ellos con una aceleración de  $4,5 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuándo y dónde la policía alcanza al ladrón?

22. Compiten un auto y un avión. El auto va lanzado a una velocidad constante de 150 km/h. El avión está detenido y arranca cuando el auto pasa a su lado con una aceleración constante de  $1,5 \text{ m/s}^2$ . Calcula cuándo y dónde adelantará el avión al automóvil.

### 5.1.10 Caída libre

Casi toda nuestra vida ocurre muy cerca de la superficie terrestre, aún cuando volemos a otro país. Cerca de la superficie terrestre la fuerza gravitatoria tiene un valor constante (¿Dije fuerza? ¡Oops!). Eso implica, como veremos mas adelante, que todos los cuerpos

con masa caen de la misma forma, con la misma aceleración. Este resultado no trivial fue descrito por Galileo Galilei, explicado por Isaac Newton, y profundizado por Albert Einstein. ¡Oh, pero detengámonos aquí en esta maravillosa historia! Ya tendrás tiempo para aprender más acerca de esto.

La aceleración que adquiere un cuerpo al moverse sobre la superficie terrestre la llamamos **aceleración de gravedad** y se denota como  $\vec{g}$  y **apunta verticalmente hacia abajo**. El valor que utilizaremos es  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Se origina porque la Tierra tiene masa, pero no profundizaremos aún al respecto.

Dado que su valor es constante, cualquier movimiento vertical será un movimiento en una dimensión con aceleración constante. A ese tipo de movimiento le denominamos **caída libre**. Por supuesto, este movimiento incluye dejar caer un objeto, partiendo del reposo, lanzar un objeto verticalmente hacia arriba o hacia abajo, con velocidad distinta de cero.

Consideremos dos sistemas de referencia,  $S$  y  $S'$ , para describir tal movimiento, como se muestra en la Fig. 5.25.

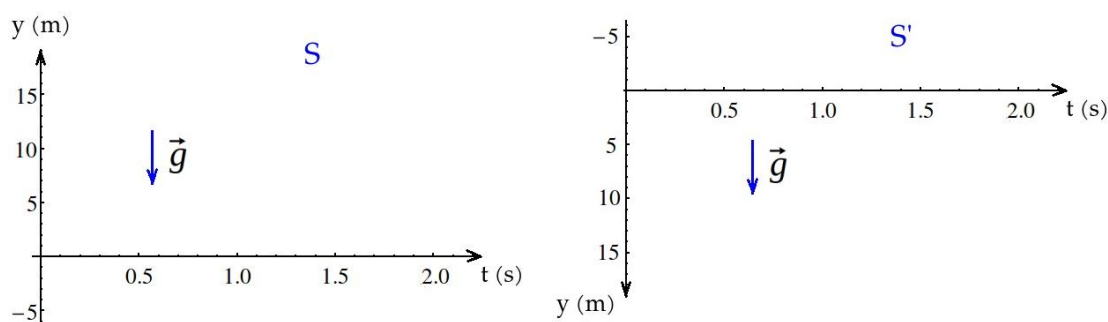


Figura 5.25: Dos sistemas de referencia para un movimiento cerca de la superficie terrestre

En el sistema  $S$ , el eje vertical apunta hacia arriba y en el  $S'$ , apunta hacia abajo. Ahora bien, no importa cual de los dos sistemas utilices (debe saber utilizar ambos), siempre indica explícitamente el vector aceleración de gravedad,  $\vec{g}$ .

De la Ec. (5.31), tenemos que **la expresión vectorial general** para el movimiento vertical se escribe

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (t - t_0)^2,$$

sin importar el sistema de referencia. Ahora, ¿cómo se ve esta ecuación en los sistemas  $S$  y  $S'$ ? Hacemos lo que sabemos: expresar los vectores de posición, velocidad y aceleración según lo indique el problema, en términos de los vectores unitarios. Para el sistema  $S$  escribimos  $\vec{g} = -g\hat{y}$ , mientras que para el sistema  $S'$  debemos escribir  $\vec{g} = g\hat{y}$ .

### Ejemplo:

Quieres comenzar a aprender a hacer malabarismo con pelotas para malabares. Para eso debes comenzar entrenando la lanzada con una mano y después repetir con la otra, hasta que te sientas seguro que el lanzamiento es el correcto. El siguiente paso es entrenar lanzando dos y así.

Como es un principiante, supón que estás en el primer ejercicio.

Lanzas la pelota para malabar desde su mano, a 1,10 metros del suelo, con una velocidad de 5,00 m/s (por supuesto, alguien ha medido esto para ti).

- ¿A qué altura ha llegado, para después comenzar a bajar?
- ¿Cuánta distancia recorrió en 0,80 s?
- ¿Con qué velocidad iba en aquel instante?
- ¿Cuánto demoró el movimiento completo?
- ¿Con qué velocidad terminó el movimiento, suponiendo que usted atrapó la pelota para malabar a la altura inicial?

### Solución

a) Siempre nuestro punto de partida son las leyes de la Física, adecuadas para el problema en estudio.

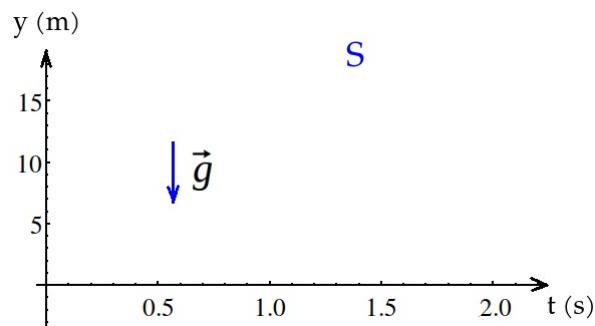


Figura 5.26:

Tenemos que,

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (t - t_0)^2. \quad (5.34)$$

Luego, decidimos cómo describir el fenómeno o fenómenos descrito por esas ecuaciones. Para ello elegimos nuestro sistema de referencia. Consideremos uno que está fijo en el suelo y apunta hacia arriba. Luego, el vector aceleración de gravedad se escribe en este sistema como

$$\vec{g} = -g\hat{y}.$$

La velocidad inicial es un vector que apunta hacia y positivo. Luego se escribe  $\vec{v}(t_0 = 0) = 5,00\hat{y}$  m/s, donde hemos elegido que el instante inicial sea  $t_0 = 0$  s.

El vector de posición inicial es  $\vec{y}(t_0 = 0) = 1,10\hat{y}$  m/s. Ahora podemos reemplazar la expresiones anteriores en la Ec. (5.34) y obtenemos

$$y(t) = 1,10 + 5,00t - \frac{1}{2}9,80t^2.$$

Para saber a qué altura ha llegado, debemos encontrar el instante en que la velocidad es cero. ¡Esa es la **condición para altura máxima**!

La ecuación para la velocidad es la ecuación,  $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{g} \cdot (t - t_0)$ . Es decir,

$$v(t) = 5,00 - 9,80t$$



Para  $t = t'$ ,

$$v(t') = 5,00 - 9,80t' = 0.$$

Esto significa que

$$t' = 5,00/9,80 = 0,51 \text{ s.}$$

Recuerda que para tu resultado final no puedes tener más cifras significativas que las que tenías originalmente. Es decir, no puede tener más información que la que inicialmente tenías.

La altura máxima se obtiene de

$$y(0,51) = 1,10 + 5,00 \cdot 0,51 - \frac{1}{2}9,80 \cdot 0,51^2 = 2,37551 \simeq 2,38 \text{ m.}$$

Es decir,  $y(0,51) \simeq 2,38 \text{ m}$ . Notar la aproximación hecha.

b) Ahora veremos cuánta distancia recorrió en 0,80 s. Evaluemos

$$y(0,80) = 1,10 + 5,00 \cdot 0,80 - \frac{1}{2}9,80 \cdot 0,80^2 = 1,964 \simeq 1,96 \text{ m.}$$

Es decir,  $y(0,80) \simeq 1,96 \text{ m}$ . Notar la aproximación hecha.

¡Cuidado, este valor no es la distancia recorrida! Es la altura a la que está la pelota para malabar en ese instante. Pero ya sabemos la altura máxima a la que llegó: 2,38 m. También sabemos desde qué altura partió: 1,10 m. También conocemos cuánto recorrió desde la altura máxima, hasta la altura final, en  $t = 0,80 \text{ s}$ : (2,38-1,96). Así, hasta ese instante la pelota para malabar ha recorrido

$$(2,38 - 1,10) + (2,38 - 1,96) = 1,70 \text{ m,}$$

aproximadamente.

c) La velocidad que tenía en el instante 0,80 s se obtiene evaluando

$$v(0,80) = 5,00 - 9,80 \cdot 0,80 = -2,84 \text{ m/s.}$$

Es decir,  $\vec{v}(0,80) = -2,84 \hat{y} \text{ m/s}$ , como debe ser, porque la pelota para malabar va bajando y el vector velocidad apunta hacia abajo.

d) Para ver cuánto ha demorado el movimiento completo, desde que la pelota para malabar fue lanzada hasta que volvió a su mano, hay dos opciones

i) resolvemos la ecuación cuadrática

$$y(t^*) = 1,10 + 5,00 \cdot t^* - \frac{1}{2}9,80 \cdot t^{*2} = 1,10.$$

Es decir,  $5,00 - \frac{1}{2}9,80 \cdot t^* = 0$ . Por lo tanto,

$$t^* = 2 \cdot \frac{5,00}{9,80} = 2 \cdot t' \simeq 1,02 \text{ s.}$$

Notar que hemos demostrado, de paso, que **el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada**. Bueno, esta es la forma ii) para contestar la pregunta.

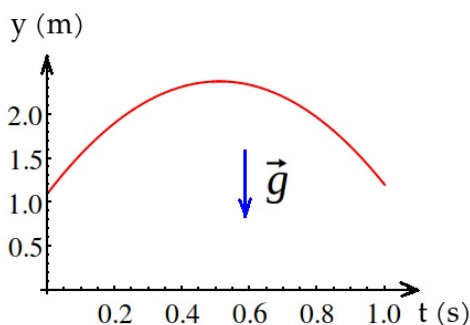


Figura 5.27: Gráfico posición versus tiempo para este ejemplo

e) La velocidad final se obtiene de evaluar

$$v(t^*) = 5,00 - 9,80 \cdot t^* = -4,996 = -5,00 \text{ m/s.}$$

Es decir,

$$\vec{v}(t^*) = -5,00 \hat{y} \text{ m/s.}$$

Con esto hemos demostrado, además, que en un lanzamiento vertical hacia arriba, el módulo de la velocidad de lanzamiento es igual al de la velocidad final al regresar a la posición inicial.

#### Observación:

Es importante darle nombre a las variables cuando estas adquieren un valor dado. Eso sirve para aclarar qué es lo que se está calculando. Si llama  $t$  a todos los instantes sería un enredo mayúsculo. El nombre  $t$  se usa para la variable, normalmente, no para sus valores dados.

#### Ejercicio:

Ahora te toca a tí. Haz el mismo ejercicio usando

- a) un sistema de referencia hacia con  $y$  positivo hacia abajo, con origen en tu mano,
- b) un sistema de referencia con  $y$  positivo hacia abajo, con origen a 3,00 m sobre el suelo,
- c) un sistema de referencia con  $y$  positivo hacia arriba, con origen en tu mano.

¿Cuál es la idea de repetir el mismo ejercicio utilizando diferentes sistemas de referencia? La misma razón cuando quieres conocer por ejemplo, un objeto; lo miras desde distintos ángulos. ¡Esa es la mejor manera de conocer!

#### Ejercicios:

1. Observa la siguiente contradicción: un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s se encontrará a 15 m al cabo de 3 s. Si ahora deseamos que alcance la misma altura, pero en la mitad de tiempo, nuestro sentido común nos dirá que lo lancemos con mayor velocidad. Calcula cuál debe ser esa velocidad. ¿No te sugiere el resultado obtenido que “quien va despacio llega lejos”? ¿Nos engañan las ecuaciones?

2. Una pelota se deja caer desde 10 m de altura y, tras rebotar en el suelo, asciende hasta 6,5 m. Determina con qué velocidad llega al suelo y con cuál sale tras el primer rebote.

3. Un individuo situado a 60 m sobre el suelo ve subir (y pasar por delante de él) un cuerpo lanzado desde abajo, y 8 s después lo ve bajar. ¿Con qué velocidad fue lanzado?

4. Una pelota que se deja caer desde cierta altura, tarda 0,3 s en recorrer los 1,40 m de altura de una ventana. Si el alféizar de la ventana se encuentra a 10 m del suelo, ¿desde qué altura se dejó caer la pelota?

5. Desde igual altura y al mismo tiempo, se lanzan dos pelotas rebotadoras con idéntica velocidad inicial: uno hacia arriba y otro hacia abajo. Si el primero tarda 5 s más en llegar al suelo, ¿con qué velocidad fueron lanzados?

6. ¿Cuál es la profundidad de un pozo si el impacto de una piedra se escucha al cabo de 1,5 s después de haberla dejado caer? Dato: Supón que la velocidad del sonido es  $v = 340$  m/s.

7. Si lanzas una pelota verticalmente hacia arriba estando tu mano a 1,4 m de altura en el instante en que la pelota despegue, y cae al suelo al cabo de 4,5 s:

- ¿Qué velocidad comunicaste a la pelota?
- ¿A qué altura ascendió?

8. Supón que pasas a la siguiente etapa en un práctica de malabarismo y usa dos pelotas para malabares, de modo de practicar la sincronía del lanzamiento. Inténtalo en casa; el malabarismo es entretenido y vale como terapia.

Lanzas una pelota para malabar,  $P_1$  desde tu mano izquierda, a 1,10 metros del suelo, con una velocidad de 5,00 m/s y 0,3 s después lanzas con la mano derecha la segunda pelota,  $P_2$ , desde 1,00 m, a velocidad 4,00 m/s (está aprendiendo, por eso no le sale a la misma velocidad. Paciencia).

¿Cuál es la altura en que las pelotas se encuentran?

Esto no debe pasar en la vida real, porque perderás el juego.

Resuelve el problema utilizando

- un sistema de referencia con y positivo hacia arriba, con origen en tu mano derecha.
- un sistema de referencia con y positivo hacia abajo, con origen en tu mano izquierda
- un sistema de referencia con y positivo hacia arriba, con origen en el suelo.

9. Consideremos el siguiente problema de encuentro.

Supón que después de practicar malabarismo, se pone a hacer experimentos de física con las dos pelotas para malabares. Sube al tercer piso y deja caer  $P_1$  desde 7,00 metros de altura.

Usa un sistema de referencia hacia a abajo, ubicado a 7 m de altura.

a) ¿Cómo se ve el movimiento de ambas pelotas en un gráfico en el plano  $y$  vs  $t$ ? Analiza. Interpreta.

b) ¿Cómo se ve el movimiento de ambas pelotas en un gráfico en el plano  $v$  vs  $t$ ? Analiza. Interpreta.

Supón que lanza la segunda pelota  $P_2$  a una velocidad de 3,00 m/s, 0,12 segundos después, para que alcance  $P_1$ .

- ¿Cuánto tiempo tardó  $P_2$  en alcanzar  $P_1$ ?
- ¿A qué altura ocurre la coincidencia espacial?

10. Una persona lanza una pelota hacia arriba con una rapidez de 15 m/s. Si no se tiene en cuenta la resistencia del aire. Calcula

- ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota y en qué instante?

- b) ¿Cuánto tiempo permanece en el aire antes de regresar a la mano?
- c) ¿En qué tiempo alcanzará una altura de 8 m por encima de su posición de partida?
- d) ¿Cuál es la velocidad de la pelota a esa altura de la mano?

11. Si das una patada a un balón de fútbol a 1 m de altura del suelo, sale despedido verticalmente. Al cabo de 5 s, la pelota llega al suelo. Calcula:

- a) ¿Cuál fue la velocidad con qué salió disparado el balón?
- b) ¿Hasta qué altura ascendió?
- c) ¿Al cabo de cuánto tiempo volvió a pasar por la altura inicial de 1 m?

12. Para superar los 2,30 m de altura, un atleta salta con una velocidad de 5,1 m/s y un ángulo de  $75^\circ$ . Si su centro de gravedad está a 1,1 m del suelo, ¿se dan las condiciones para que pueda batir la marca?

13. Un globo aerostático asciende con una velocidad constante de 5 m/s. Se deja caer un objeto desde el globo cuando su altura sobre el suelo es de 40 m. Si no se tiene en cuenta la resistencia del aire, calcula:

- a) La posición y velocidad del objeto 0,25 s y 1 s después de soltarlo.
- b) ¿Cuánto tardará el objeto en chocar con el suelo.
- c) ¿Con qué rapidez chocará?

14. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 15 m/s. Representa sus gráficas de movimiento (en las gráficas posición-tiempo y velocidad-tiempo, especifica al menos los tres puntos característicos: salida, altura máxima y aterrizaje).

15. ¿Cuál de las siguientes gráficas en la Fig. 5.28 puede representar mejor el módulo de la velocidad de una piedra que se lanza verticalmente hacia arriba y cae cuando alcanza su altura máxima?

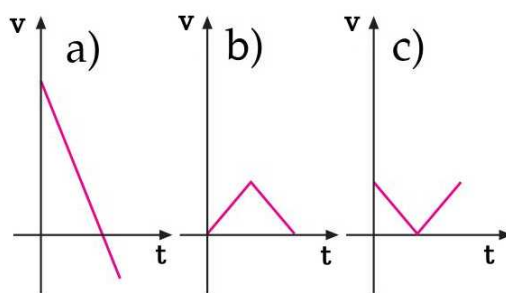


Figura 5.28: Gráficos velocidad versus tiempo para el problema 15.

16. Una piedra se deja caer desde un globo que desciende con una velocidad uniforme de 15 m/s.

- a) Calcula la velocidad y la distancia recorrida por la piedra después de 10 s.
- b) Resuelve el mismo problema para el caso en que el globo se eleva con una velocidad constante de 15 m/s.

17. Se lanza verticalmente una pelota hacia arriba con una velocidad de 12 m/s desde la cima de un edificio, inclinado el lanzador sobre el borde de modo tal que la pelota no

choque con el edificio en su viaje de regreso. La pelota llega al piso 6,4 s después de haber sido lanzada.

- a) Halla la altura máxima que alcanza la pelota.
- b) Encuentra la altura del edificio.
- c) Calcula la velocidad de la pelota en el instante en que llega al piso.

18. Se deja caer un objeto al mismo tiempo que otro es lanzado hacia abajo con una velocidad de 2 m/s. ¿Cuánto tiempo pasará para que la distancia entre ellos sea de 18 metros?

19. Un paracaidista que desciende en caída libre (antes de abrir su paracaídas), pasa por los puntos  $A$  y  $B$  de su trayectoria vertical con velocidades  $v_A = 10$  m/s y  $v_B = 60$  m/s. Halla la distancia  $AB$  que recorrió.

20. Se deja caer una piedra en el pozo de un aljibe. El sonido de la piedra al golpear el agua se escucha 6,5 s después. Si la velocidad del sonido es de 340 m/s, calcula la profundidad del pozo.

21. Desde una altura de 3 m sobre la superficie de un estanque con agua se arroja una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 2 m/s. Una vez que ha llegado al agua la piedra sigue con un movimiento acelerado con  $a = g/2$  debido al roce, y llega al fondo del estanque 2 s después de haber tocado la superficie del agua.

Considera  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. Calcula:

- a) el tiempo de caída en el aire.
- b) la velocidad con que la piedra llegó a la superficie del agua.
- c) la profundidad del estanque.
- d) la velocidad con que la piedra llegó al fondo del estanque.





## 6. CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

Existen movimientos importantes en la naturaleza que ocurren en dos dimensiones. Uno que veremos pronto es el movimiento planetario. Una versión de ese movimiento es el movimiento seguido por un proyectil cerca de la superficie terrestre. Por supuesto, también puede simplemente ocurrir que un cuerpo está constreñido a moverse sobre un plano, como una bolita sobre un piso.

### 6.1 Movimiento parabólico

El movimiento en dos dimensiones puede ocurrir con aceleración constante o variable. Nunca puede ocurrir con velocidad constante porque la velocidad es un vector; que sea constante significa que no cambia de sentido y eso significa 1 dimensión.

Primero veremos el movimiento con aceleración constante. El ejemplo principal es el movimiento de una partícula en el campo gravitatorio terrestre. Esto es lo que se denomina **lanzamiento de proyectil o movimiento parabólico**, porque la **trayectoria** es una parábola, como demostraremos matemáticamente.

En la Fig. 6.1 se muestran varias secuencias de movimientos de una pelota. Éstas fueron sacadas y editadas del video <https://www.youtube.com/watch?v=2xCQ-MKRzlw>. En la secuencia inferior se aparece el movimiento con velocidad constante, indicada con flechas, de una pelota que rueda por una mesa horizontal. Las secuencias laterales corresponden al movimiento vertical de la misma pelota que se hace rebotar. Ahora el vector velocidad cambia su módulo durante su movimiento hacia arriba, se hace cero cuando llega a la altura máxima y revierte su sentido cuando el movimiento es hacia abajo. Observa que la magnitud de los vectores para el movimiento vertical hacia arriba y hacia abajo son iguales, es decir hay una simetría en este movimiento.

En la foto central aparece la secuencia del movimiento parabólico, donde en negro se muestra el vector velocidad, tangente a la trayectoria en línea segmentada azul. También se

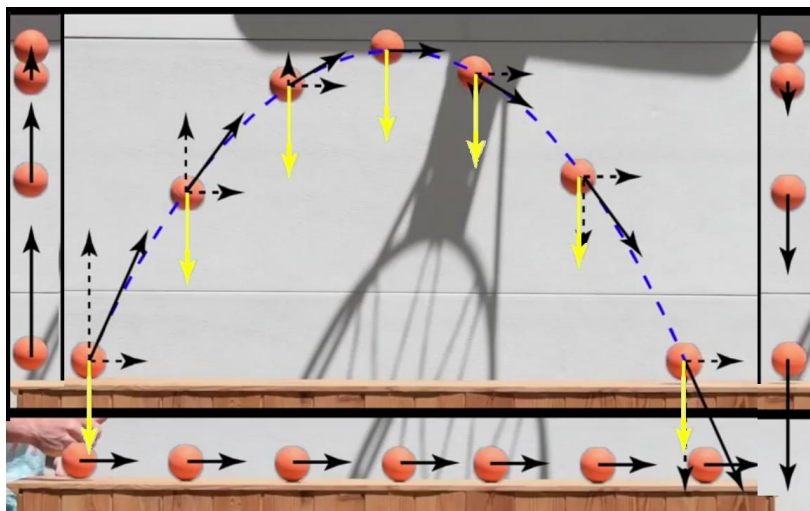


Figura 6.1: Secuencia de un movimiento parabólico

ha incorporado la información de las componentes de la velocidad en los ejes horizontal y vertical, con vectores en línea segmentada. Observa que aquí también la componente de la magnitud de los vectores para el movimiento vertical hacia arriba y hacia abajo son iguales. La simetría del movimiento se aprecia mejor aún, ya que la pelota llega a su máximo justo en el punto simétrico de la parábola invertida.

La aceleración durante el movimiento se ha marcado con vectores de color amarillo. Observa que todos los vectores apuntan hacia donde mismo y tienen la misma longitud.

Por supuesto, el roce de la pelota con el aire se desprecia en esta descripción.

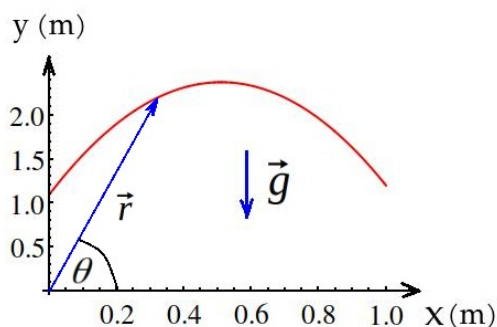


Figura 6.2: Movimiento parabólico

En la Fig. 6.2 se muestra la trayectoria de un proyectil que se mueve cerca de la superficie de un planeta, para nosotros, normalmente la Tierra. Para posicionar la partícula, usamos un vector de posición. En dos dimensiones es el vector se puede escribir en términos de las coordenadas cartesianas o bien en función de las coordenadas polares planas:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = r(t)\cos[\theta(t)]\hat{x} + r(t)\sin[\theta(t)]\hat{y}. \quad (6.1)$$

Observa que en la segunda igualdad, las coordenadas polares naturalmente dependen del tiempo.



Como ya lo hemos visto en la Fig. 6.1, el movimiento se descompone naturalmente en dos componentes, una a lo largo del eje horizontal y otra a lo largo del eje vertical. En general, podríamos escribir

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_x(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_x \cdot (t - t_0)^2, \quad (6.2)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}_y(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}_y \cdot (t - t_0)^2. \quad (6.3)$$

pero esto es mucho más de lo que, normalmente<sup>1</sup>, necesitamos aquí.

Resulta que la única aceleración que existe en este tipo de movimiento es en la dirección vertical, es decir la aceleración de gravedad,  $\vec{g}$ , indicada en amarillo en la Fig. 6.1. Eso significa que el movimiento en la dirección  $x$  ocurre con velocidad constante.

Luego, ambas ecuaciones se escriben

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_x(t_0) \cdot (t - t_0), \quad (6.4)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}_y(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (t - t_0)^2. \quad (6.5)$$

Este es el punto de partida para describir la cinemática de una partícula en un campo gravitatorio constante. Notar que se obtiene la ecuación general

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot (t - t_0)^2. \quad (6.6)$$

En la Fig. 6.3 mostramos nuevamente el lanzamiento de un proyectil, pero hemos agregado el vector velocidad inicial, que forma un ángulo  $\varphi$  con la vertical (no confundir con el ángulo polar,  $\theta$ ). Este vector se compone en sus componentes cartesianas

$$\vec{v}(t_0) = v_x(t_0) \hat{x} + v_y(t_0) \hat{y} = v(t_0) \cos \varphi \hat{x} + v(t_0) \sin \varphi \hat{y}. \quad (6.7)$$

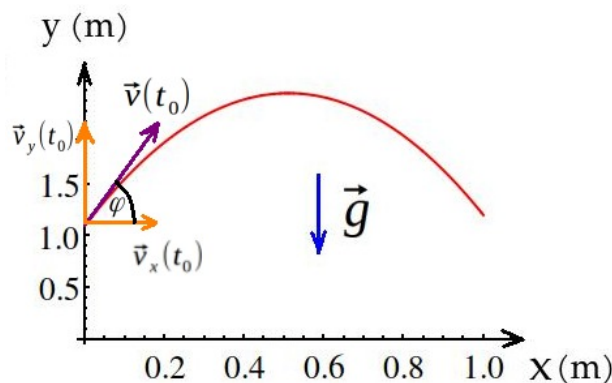


Figura 6.3: Velocidad inicial en movimiento parabólico

<sup>1</sup>Normalmente, porque podríamos elegir un sistema de referencia girado respecto de la horizontal. Esto implica que la aceleración de gravedad tendría componentes no nulas a lo largo de ambos ejes coordenados

Por lo tanto, podemos escribir las Ec. (6.4) y (6.5) en sus componentes, **en el sistema de referencia indicado**

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0) \cos \varphi \cdot (t - t_0), \quad (6.8)$$

$$y(t) = y(t_0) + v(t_0) \sin \varphi \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g \cdot (t - t_0)^2. \quad (6.9)$$

En estas ecuaciones, la condiciones iniciales pueden tomar valores positivos o negativos.

Si el eje  $y$  del sistema coordenado apunta hacia abajo, el vector aceleración de gravedad se escribe  $\vec{g} = g\hat{y}$  y, por lo tanto,

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0) \cos(\varphi) \cdot (t - t_0), \quad (6.10)$$

$$y(t) = y(t_0) + v(t_0) \sin \varphi \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} g \cdot (t - t_0)^2 \quad (6.11)$$

Es importante que aprendas cómo escribir las Ecs. (6.4) y (6.5) en distintos sistemas coordenados. Recuerda que los sistema coordenados están asociados a observadores y que puede haber más de un observador.

### Ec. de la trayectoria

Consideremos el par de ecuaciones que definen el movimiento parabólico, para el caso de un sistema de referencia con  $+y$  hacia arriba (claramente, el procedimiento siguiente es independiente de esta elección. ¡Chequéala!):

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0) \cos(\varphi) \cdot (t - t_0), \quad (6.12)$$

$$y(t) = y(t_0) + v(t_0) \sin \varphi \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} g \cdot (t - t_0)^2. \quad (6.13)$$

Veamos por qué se denomina parabólico al movimiento de un objeto cerca de la superficie de un planeta, por ejemplo.

De la Ec. (6.12), obtenemos

$$(t - t_0) = \frac{x(t) - x(t_0)}{v(t_0) \cos \varphi}, \quad (6.14)$$

(¡no hay peligro con  $\varphi = \pi/2$ !) y reemplazamos, sin pensar mucho, en la Ec. (6.13):

$$y(t) = y(t_0) + v(t_0) \frac{\sin \varphi \cdot [x(t) - x(t_0)]}{v(t_0) \cos \varphi} - \frac{1}{2} g \cdot \left[ \frac{x(t) - x(t_0)}{v(t_0) \cos \varphi} \right]^2. \quad (6.15)$$

Ahora pensemos: en el primer paso hemos despejado el tiempo y reemplazado en la segunda expresión. Luego, no es correcto mantener la **variable tiempo**,  $t$ , en esta ecuación. Sin embargo, no hay nada errado en mantener el instante  $t_0$  ya que es un valor constante, no una variable. Lo que debemos escribir, de modo correcto, es entonces:

$$y = y(t_0) + v(t_0) \frac{\sin \varphi \cdot (x - x(t_0))}{v(t_0) \cos(\varphi)} - \frac{1}{2} g \left[ \frac{x - x(t_0)}{v(t_0) \cos(\varphi)} \right]^2 \quad (6.16)$$

que es la **ecuación de una parábola** porque tiene la forma general.

$$y = A + Bx + Cx^2.$$

De hecho, puedes hacer algo mejor, calcular la forma que tienen las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$ . ¡Házlo!

### Ejemplo:

Anita y Eric salieron a hacer trekking al cerro. Al llegar a una salida se ponen a jugar a lanzar piedras desde un cerro, cuidando de que no hubiese alguien, y así hacer mediciones para después chequear si lo que han aprendido en su libro de física está en lo correcto. Andrea lanza una piedra horizontalmente a una velocidad de 25 m/s desde una altura de 60 metros. Calcula:

- El tiempo que tarda en llegar al suelo.
- El valor de la velocidad que lleva a los 2 segundos.
- La distancia horizontal a la que cae la piedra, a partir del punto desde donde fue arrojada.
- El vector velocidad justo antes de tocar el suelo.

### Solución:

Nuestro punto de partida siempre son la ecuaciones de la cinemática escritas en forma vectorial

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \vec{x}(t_0) + \vec{v}_x(t_0) \cdot (t - t_0), \\ \vec{y}(t) &= \vec{y}(t_0) + \vec{v}_y(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g} \cdot (t - t_0)^2,\end{aligned}$$

junto con la elección de nuestro sistema de referencia.

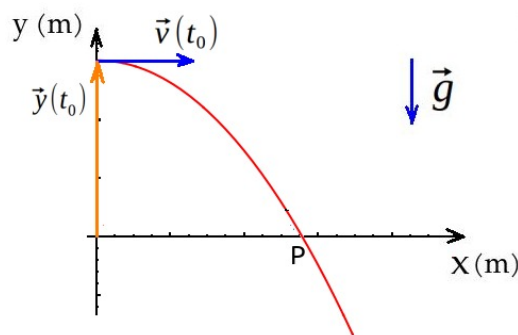


Figura 6.4: Movimiento parabólico de una piedra

En la Fig. 6.4 se ha dibujado la trayectoria, un punto  $P$  donde caerá la piedra, la velocidad inicial y el vector posición inicial de la piedra,  $\vec{y}(t_0)$ . De la figura observamos que  $\vec{g} = -g\hat{y}$ . Luego, la velocidad y posición iniciales se escriben

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_0) &= v_x(t_0)\hat{x} + 0\hat{y}, \\ \vec{x}(t_0) &= 0\hat{x}, \\ \vec{y}(t_0) &= y(t_0)\hat{y}.\end{aligned}$$

Reemplazamos en la ecuaciones anteriores:

$$x(t) = v_x(t_0) \cdot (t - t_0),$$

$$y(t) = y(t_0) - \frac{1}{2}g \cdot (t - t_0)^2.$$

**Observación importante:**

Notar que hasta aquí no se han reemplazado valores. Un error común entre los estudiantes es comenzar a ingresar números en su calculadora antes de tiempo. En un cálculo simple, es aceptable, sin embargo en cálculos más largos, no lo es. Esperar y hacer un trabajo algebraico es muy conveniente porque evita arrastrar cálculos numéricos y factores a lo largo de varias líneas, lo que no normalmente trae aparejado el hecho de que se confunden las cifras y se olvidan factores, y más importante aún: **trabajar algebraicamente permite revisar de modo fácil dónde se ha cometido un error.**

Ahora procedemos dando valores y repondemos la preguntas. Sin perder generalidad podemos elegir  $t_0 = 0s$ .

a) Calculemos el tiempo que tarda en llegar la piedra al suelo. Tenemos,

$$x(t) = 25 \cdot t$$

$$y(t) = 60 - \frac{1}{2}9,8 \cdot t^2.$$

Indicamos por la letra griega  $\tau$  el tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo. Llegar al suelo significa, en nuestro sistema de referencia, que

$$y(\tau) = 60 - \frac{1}{2}9,8 \cdot \tau^2 = 0$$

Ésta tiene como solución física  $\tau = 3,5$  s.

b) Ahora calculamos el vector velocidad dos segundos después.

Como muestra la Fig. 6.5 el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria.

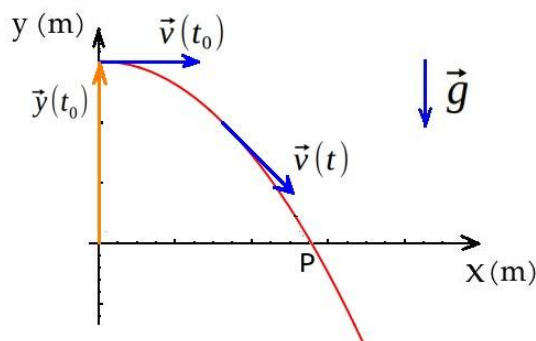


Figura 6.5: Movimiento parabólico de una piedra. Vector tangente a la trayectoria

¡Nuestro punto de partida no ha cambiado! Derivando las ecuaciones

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{v}_x(t_0) \cdot (t - t_0)$$

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \vec{v}_y(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} \cdot (t - t_0)^2$$

con respecto a  $t$ . Recomendando que revises este cálculo escribiendo primero este par de ecuaciones en término de sus componente. Luego, obtenemos

$$\vec{v}_x(t) = v_x(t_0) \hat{x},$$

$$\vec{v}_y(t) = 0 \hat{y} - 9,8(t - t_0) \hat{y}.$$

Notar que hasta aquí no se habían dado valores. Reescribimos,

$$v_x(t) = v_x(0) = 25$$

$$v_y(t) = -9,8 \cdot t$$

Evaluamos en  $t^* = 2,0 \text{ s}$ . Luego,

$$v_y(2) = -19,6 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, dado que la velocidad en el eje  $x$  no cambia, el vector velocidad es

$$\vec{v}(2) = 25,0 \hat{x} - 19,6 \hat{y} \text{ m/s}.$$

c) La distancia horizontal a la que cae la piedra, a partir del punto desde donde fue arrojada.

Ya sabemos que la piedra toca el suelo a los 3,5 segundos de ser disparada. También sabemos que la velocidad en la dirección horizontal es constante. Por lo tanto, la piedra habrá caído a

$$x(3,5) = 25 \cdot 3,5 = 87,5 \text{ m}$$

del punto original (horizontal).

d) Tarea para la casa.

#### **Observación:**

Es usual observar en libros de texto la inclusión de fórmulas variadas, una para la altura máxima, otra para el alcance máximo, etc. En este texto he preferido el trabajo deductivo más que la acumulación de fórmulas que el alumno necesita memorizar. La memoria es frágil y es mejor enseñar a pensar.

Por supuesto, puedes deducir las expresiones nombradas partiendo de las ecuaciones de la cinemática. Como ejercicio está bien y es útil.

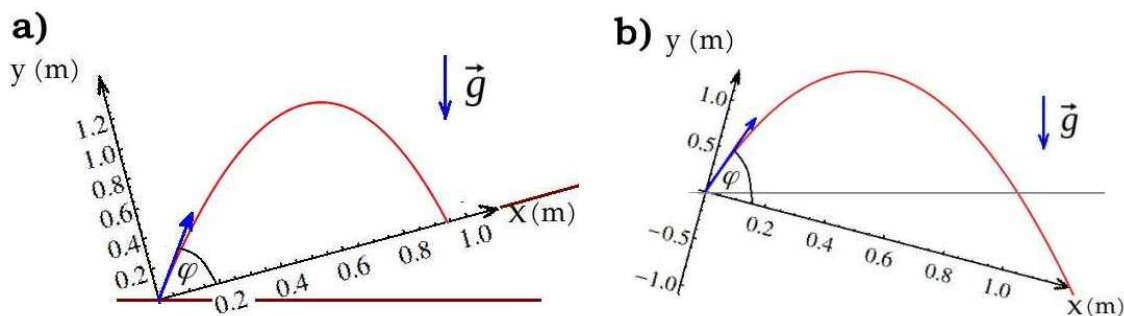


Figura 6.6: Sistemas coordenados inclinados

### 6.1.1 Ejercicios

1. Los sistemas coordenados mostrados en la Fig. 6.6 a) y b) se han dibujado paralelos a un plano inclinado en un ángulo  $\alpha$  (no mostrado) con respecto a la horizontal.

Escribe las ecuaciones (6.4) y (6.5) en este sistema coordenado.

2. Un proyectil es lanzado desde el nivel de la tierra, con una velocidad inicial de 200 m/s.

Si se desea que dé en un blanco localizado a 2.500 m, en el mismo nivel, calcula:

- El ángulo con el cual debe ser lanzado.
- El tiempo que tarda en llegar al blanco.

3. Una pelota es lanzada horizontalmente desde una ventana con una velocidad inicial de 10,0 m/s y cae al suelo después de 5,0 segundos. Calcula:

- ¿A qué altura se encuentra la ventana?
- ¿A qué distancia cae la pelota de la base del edificio?

4. Consideremos el viaje espacial de una astronauta. La nave sube verticalmente con aceleración constante,  $6g$ . Cuando lleva 7,0 km de altura un trozo de protección térmica se suelta y con el roce de la atmósfera sale disparado con velocidad con componente horizontal de 70,0 m/s.

¿Cómo respondería la astronauta a las siguientes preguntas, si después de despegarse el trozo, el roce con la atmósfera se deprecia?

a) ¿Cuánto tiempo estará el trozo térmico en el aire, comparado con una situación en que simplemente se deja caer un bulto desde la misma altura de 7,0 km?

b) ¿Hasta qué altura llegó el trozo de protección térmica?

c) ¿Cuánto tiempo tardó en llegar allí?

d) ¿Dónde habría caído el trozo térmico, desde la posición de lanzamiento del cohete?

e) ¿Cuánto tiempo estuvo ese trozo en vuelo?

5. Hay una película muy famosa, **Rápidos y Curiosos** que sirve para aprender física. Uno de los personajes de la película, Mallory, un tipo malicioso, va a 145 km/h por un túnel recto, horizontal. Por arriba, en un cerro recto con pendiente  $15^\circ$  sobre la horizontal, van Bob y Alice en un auto. Ella conduce. Van persiguiendo a Mallory justo sobre el camino que lleva Mallory. En el instante en que salen disparados de un acantilado de 15 m de altura, donde termina el cerro, Mallory le lleva 15 m de ventaja.

Qué velocidad deben calcular que debe tener su auto para que, cuando llegue al suelo, caiga justo sobre el auto de Mallory y lo ... bueno, ustedes ya saben. Supón que Mallory sigue a velocidad constante (porque miró hacia atrás y pensó que estaba a salvo).

6. Ya sabemos que en las películas se hacen tomas distintas y después los editores hacen su trabajo delicado de copy & paste.

Imaginemos ahora una escena de la película **Rápidos y Curiosos**. Uno de los personajes de la película, Mallory, va a 145 km/h por un túnel recto, horizontal. Por arriba, en un cerro recto con pendiente  $15^\circ$  bajo la horizontal, van Bob y Alice en un auto. Ella conduce. Van persiguiendo a Mallory justo sobre el camino que lleva Mallory, en el instante en que salen disparados de un acantilado de 15 m de altura, donde termina el cerro, Mallory le lleva 15 m de ventaja.

Qué velocidad deben calcular que debe tener su auto para que, cuando llegue al suelo, caiga justo sobre el auto de Mallory y lo ... bueno, ustedes ya saben. Supón que Mallory sigue a velocidad constante (porque miró hacia atrás y pensó que estaba a salvo).

7. Un esquiador sale de la rampa con una velocidad de 96 km/h con una inclinación de  $10^\circ$  por sobre la horizontal, como se muestra en la Fig. 6.7. En base a esto, determina, usando los tres sistemas de referencia mostrados en la figura, sólo uno a la vez:

- Altura máxima que alcanzará por sobre el extremo de la rampa.
- Tiempo de vuelo de su salto.
- Alcance a lo largo de la pendiente, cuando llega al punto  $P$ .

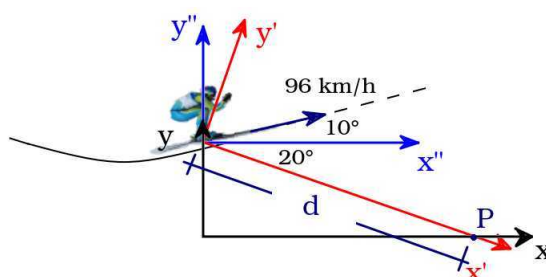


Figura 6.7: A esquiar

8. Un jugador patea una pelota de fútbol con un ángulo de  $37^\circ$  con el suelo, con una rapidez de 20 m/s. Calcula:

- la altura máxima que alcanza la pelota.
- el tiempo transcurrido hasta que la pelota golpee el suelo;
- la distancia a donde golpea el suelo;
- la velocidad en el punto de altura máxima

9. En un bar local, un cliente hace deslizar un jarro vacío de cerveza sobre la barra para que vuelvan a llenarlo. El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el jarro, el cual cae de la barra y golpea el piso a 1,4 m de la base de la misma. Si la altura de la barra es 0,86 m.

- ¿Cuál es el tiempo que permanece en el aire?
- ¿Con qué velocidad abandonó el jarro la barra?
- ¿Cuál es la velocidad del jarro justo antes de chocar con el piso?

10. Un proyectil se dispara horizontalmente desde un cañón ubicado a 45m sobre un plano horizontal con una velocidad en la boca del cañón, de 250 m/s.

- ¿Cuál es el tiempo que permanece en el aire?
- ¿A qué distancia horizontal golpea el suelo?
- ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de su velocidad al golpear el suelo?

11. Un policía persigue a un conocido ladrón de joyas a través de los tejados de una ciudad. Ambos están corriendo con una rapidez de 5 m/s cuando llegan a un espacio vacío entre dos edificios que tienen 4 m de ancho y un desnivel de 3 m hacia abajo. El ladrón, que tenía algunos conocimientos de física, salta a 5 m/s con una inclinación de  $45^\circ$  y salva el hueco con facilidad. El policía piensa que lo mejor sería saltar con el máximo de rapidez en forma horizontal, de modo que salta a 5 m/s horizontalmente.

- ¿Conseguirá el policía salvar el obstáculo?
- ¿A qué distancia del borde del segundo edificio llegará el ladrón?

12. Una pelota de tenis es sacada horizontalmente desde 2,20 m de altura a una velocidad de 140 km/h. ¿A qué distancia horizontal caerá? ¿Qué velocidad llevará al tocar el suelo?

13. Leo Messi se dispone a ejecutar un tiro libre por una falta desde una distancia de 20 m con respecto a la portería. La barrera de jugadores contrarios está a 9 m y su altura media es de 1,80 m. La velocidad de salida del balón en dirección a la portería, que forma  $15^\circ$  con el suelo, es de 90 km/h.

- ¿Será gol?
- ¿Y si los jugadores de la barrera, temiendo el balonazo, se agachan?

14. Dos equipos de baloncesto están empatados a 98 puntos; instantes antes de que finalice el partido y, de repente, un jugador lanza el balón a canasta con una velocidad inicial de 8 m/s y formando un ángulo con la horizontal de  $30^\circ$ . La canasta está a 3 m de altura sobre un punto que dista del jugador 5 m. Indica si su equipo ha ganado el partido sabiendo que el jugador, con los brazos estirados, lanzó el balón desde una altura de 2,71 m.

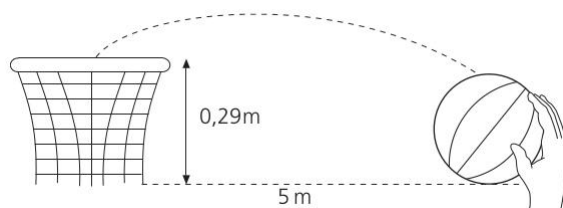


Figura 6.8: A jugar basketball

15. Se dispara un proyectil con un rifle desde lo alto de una colina. El proyectil parte con una velocidad de 50 m/s, en una dirección que forma un ángulo de  $37^\circ$  sobre la horizontal.

- Halla la posición del proyectil a los 2 s, 5 s y 9 s después de haber partido. Representar la trayectoria en un diagrama  $x - y$ .
- Calcula el vector desplazamiento entre  $t = 2$  s y  $t = 5$  s, y entre  $t = 5$  s y  $t = 9$  s.



c) Determina las componentes de los vectores de velocidad en los instantes mencionados. Representar dichos vectores en el diagrama anterior.

d) Calcula el vector velocidad media entre  $t = 2$  s y  $t = 5$  s, y entre  $t = 5$  s y  $t = 9$  s.

e) Encuentra en qué instante se encuentra al mismo nivel que el de partida, qué posición ocupa y cuál es su velocidad en ese instante.

f) Sin hacer cuentas, justifica entre qué instantes de los especificados cree usted que el proyectil alcanzará la máxima altura. ¿Qué velocidad tendrá allí? Calcúlos ahora y verifique tu hipótesis.

g) Con toda la información anterior, dibujar la trayectoria del proyectil. Escribir la ecuación de la misma.

16. Con referencia al problema anterior, otro proyectil es disparado desde el mismo punto a 50 m/s, pero formando un ángulo de  $53^\circ$  con la horizontal. Desarrolla las mismas preguntas, haciendo los diagramas en la misma escala. Compara ambos diagramas. Si ambos proyectiles hubieran partido simultáneamente, ¿se encontrarían nuevamente? ¿Dónde?

17. Desde una de las torres de una fortaleza de altura desconocida, una catapulta lanza continuamente grandes piedras con una velocidad de salida de 20 m/s y con una inclinación hacia arriba de  $37^\circ$  con la horizontal. Si cada piedra tarda 5 s en caer.

a) ¿Cuál es la altura de la torre?

b) ¿A qué distancia horizontal del lanzamiento caen al piso?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzan las piedras?

d) ¿Con qué velocidad caen las piedras al piso?

18. Gabriela arroja horizontalmente una pelota desde la ventana de su dormitorio que da a la calle en los altos de un edificio, y Felipe lo recibe a 1,8 m de altura sobre el piso, 1,2 segundos después. Sabiendo que Felipe se encuentra a 6 m del frente del departamento de Gabriela, halla:

a) Desde qué altura del piso partió la pelota

b) Con qué velocidad llegó a las manos de Felipe

c)Cuál es la ecuación de la trayectoria de la pelota

19. Roger Federer se encuentra a 8 m de la red, e inicia el juego lanzando la pelota con una velocidad inicial horizontal, desde una altura de 2,15 m. Es tan hábil que logra que la pelota pase justo por el borde superior de la red que tiene 0,90 m de altura.

a) Haz un esquema de la situación y halla el tiempo que dura el vuelo de la pelota desde que es lanzada por el tenista hasta que pasa justo por encima de la red.

b) Encuentra la velocidad inicial de la pelota.

c) ¿A qué distancia de la red la pelota toca el suelo?

20. Un avión de rescate en Alaska deja caer un paquete de provisiones a un grupo de exploradores extraviados. Si el avión viaja horizontalmente a 40 m/s, y a una altura de 100 m sobre el suelo.

a) ¿Dónde cae el paquete en relación con el punto en que se soltó?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?

c) ¿Con qué velocidad llega al suelo?

21. Carlos está en la parte inferior de la colina, mientras que Franco se encuentra 30 m arriba de la misma. Elegimos a Carlos como origen del sistema de coordenadas y la línea

que sigue la pendiente de la colina está dada por la ecuación  $y = 0,4x$ . Si Carlos lanza una manzana a Franco con un ángulo de  $50^\circ$  sobre la horizontal ¿Con qué velocidad debe lanzar la manzana para que pueda llegar a Franco?

## 6.2 Movimiento circular

Existen movimientos importantes en la Naturaleza que ocurren en forma de movimiento circular, o bien, aproximadamente circular. Por ejemplo, el movimiento de una partícula cargada que penetra en una zona con campo magnético uniforme; la trayectoria de ciertos cuerpos celestes, como la misma Tierra alrededor del Sol.

Otros movimientos realizan trozos, **arcos**, de circunferencia, como es el caso de el movimiento de un péndulo.

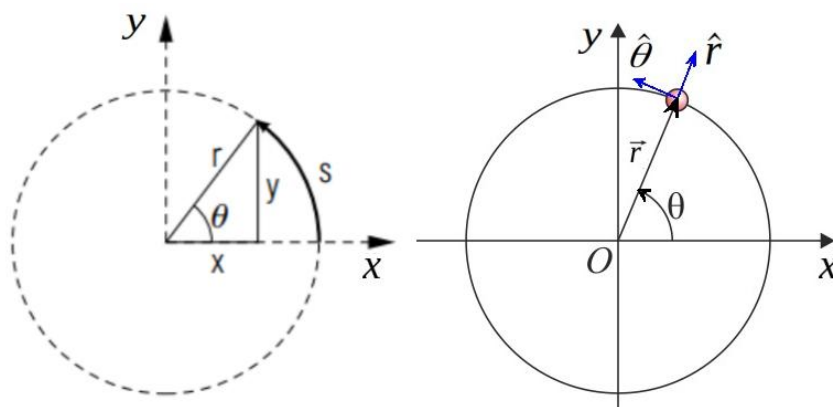


Figura 6.9: Longitud de arco y vectores polares unitarios

Los últimos dos ejemplos concretos los veremos más adelante en este curso. Por ahora, estudiaremos la cinemática de este movimiento.

Las coordenadas polares planas están especialmente diseñadas para un movimiento de este tipo. ¡No las desprecie orqu si las parende a usar bien te harán más fácil vida! En la Fig. 6.9 se ha muestra la **longitud de arco**, que se denota por una letra ese,  $s$ . La longitud de arco es una medida de la distancia que se recorre a lo largo de la circunferencia de radio  $r$ , que subtiende un ángulo  $\theta$ ,

$$s = r\theta. \quad (6.17)$$

Dado que el ángulo polar se mide desde el eje polar, que hacemos coincidir en la figura con el eje  $x$ , entonces  $s > 0$  cuando el movimiento es contrario a las manecillas del reloj. Notar que para una circunferencia,  $r = cte$ , la variación instantánea de la longitud de arco en el tiempo es

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}. \quad (6.18)$$

En la Fig. 6.9 también se muestran los vectores unitarios polares  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$ . Ya sabemos cómo expresar estos vectores unitarios en términos de los vectores unitarios cartesianos. Éstos están dados en las Ecs. (2.32) y (2.33). En esas ecuaciones el tiempo no apareció porque no estábamos interesados en el movimiento. Pero ahora, la partícula se mueve

describiendo una trayectoria circular, luego ambos vectores unitarios deben cambiar con el tiempo. Esto implica que el ángulo polar cambia en el tiempo. Por lo tanto, aquellas expresiones se deben generalizar a las siguientes

$$\hat{r}(t) = \hat{x} \cos \theta(t) + \hat{y} \sin \theta(t), \quad (6.19)$$

$$\hat{\theta}(t) = -\hat{x} \sin \theta(t) + \hat{y} \cos \theta(t). \quad (6.20)$$

Es importante recalcar que estas expresiones son generales, sin importar cómo se han obtenido.

Notar que los vectores unitarios cartesianos no dependen del tiempo. Esto es así porque **estamos suponiendo que el sistema cartesiano no está rotando**.

Así, para un movimiento circular podemos escribir el vector de posición como

$$\vec{r}(t) = |\vec{r}| \hat{r}(t) = \hat{x} r \cos \theta(t) + \hat{y} r \sin \theta(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y}. \quad (6.21)$$

Notar que para un movimiento circular, el módulo del vector de posición es constante. Un caso importante, para el cual la longitud del vector de posición varía en el tiempo, es el movimiento planetario; este caso lo estudiaremos más adelante.

Dado que los vectores unitarios cambian en el tiempo, es interesante determinar esa dependencia. Como ya sabemos derivar (un poco), es muy simple (si esto le complica, no te preocupes; ya sabrás derivar mejor. Los resultados en las Ecs. (6.24) y (6.25) son los importantes):

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{x} \frac{d \cos \theta(t)}{dt} + \hat{y} \frac{d \sin \theta(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \{-\hat{x} \sin \theta(t) + \hat{y} \cos \theta(t)\}, \quad (6.22)$$

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\hat{x} \frac{d \sin \theta(t)}{dt} + \hat{y} \frac{d \cos \theta(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \cdot \{-\hat{x} \cos \theta(t) - \hat{y} \sin \theta(t)\}. \quad (6.23)$$

Notar que hemos demostrado que

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \hat{\theta}(t) \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (6.24)$$

y

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\hat{r}(t) \cdot \frac{d\theta(t)}{dt}. \quad (6.25)$$

Estas son ecuaciones importantes. Compréndelas y manténlas en mente.

Por lo tanto, el vector **velocidad tangencial** se escribe, usando Ec. (6.24),

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d \{r \hat{r}(t)\}}{dt} = r \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\theta}(t) \quad (6.26)$$

o bien,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = r \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\theta}(t) = \frac{ds}{dt} \hat{\theta}(t) = v(t) \hat{\theta}(t) \quad (6.27)$$

donde hemos usado la ecuación (6.18). Esta última ecuación refuerza el hecho que **el vector velocidad tangencial tiene la dirección del vector unitario  $\hat{\theta}$** . Observamos que el módulo de la velocidad tangencial queda definido, en general, por

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt}. \quad (6.28)$$

**Observación:** En la Ec. (6.27) el vector representa la velocidad tangencial solo porque hemos considerado  $r = cte$ . Esto es así porque si permitimos que  $r$  varíe en el tiempo, entonces **la expresión general para el vector velocidad** es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\{r\hat{r}(t)\}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r}(t) + r\frac{d\theta(t)}{dt}\hat{\theta}(t). \quad (6.29)$$

**Observación:** El período,  $T$ , se define como el intervalo de tiempo que toma un móvil en dar una vuelta completa. Ahora, la frecuencia  $f$  (también denotada  $\nu$ ) es el inverso del período  $f = 1/T$  y se mide en hertz, denotada  $Hz$ , en honor a Heinrich Hertz<sup>2</sup>, quien descubrió las ondas electromagnéticas.

Además, la frecuencia angular se relaciona con la frecuencia y con el período, entonces, como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.30)$$

### 6.2.1 Velocidad angular media

En la Fig. 6.10 se muestra el movimiento de un objeto, con la posiciones angulares en los instantes inicial y final. **Es importante recalcar que los ángulos deben expresarse en radianes (rad).**

Podemos definir la **velocidad angular media**, que se mide en rad/s,

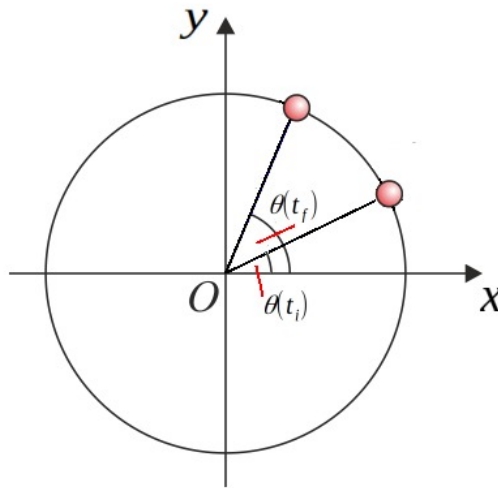


Figura 6.10: Partícula en movimiento circular, en dos posiciones distintas

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich\\_Hertz](https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz)

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta(t_f) - \theta(t_i)}{t_f - t_i}, \quad (6.31)$$

que **no es un vector** y es una expresión válida para todo tipo de movimiento, sin importar si el módulo de la velocidad es constante o no. Se mide en radianes por segundo, rad/s. Esta cantidad,  $\omega_m$  también se denomina **frecuencia angular** (media).

Ya hemos visto una expresión similar para la velocidad promedio, su versión escalar. Luego, ya sabemos lo que debemos hacer y cómo reescribir esta expresión. Es decir,

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \omega_m \cdot (t - t_0). \quad (6.32)$$

Como ya conocemos la definición de la derivada, podemos escribir para la **frecuencia angular instantánea**

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d}{dt}\theta(t), \quad (6.33)$$

que obviamente **es la expresión más general**.

Ahora podemos retornar a las Ecs. (6.24), (6.25) y (6.27), para escribirlas en su forma más compacta:

$$\frac{d\hat{r}(t)}{dt} = \omega(t)\hat{\theta}(t), \quad (6.34)$$

$$\frac{d\hat{\theta}(t)}{dt} = -\omega(t)\hat{r}(t) \quad (6.35)$$

y

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \omega(t)r\hat{\theta}(t) = v(t)\hat{\theta}. \quad (6.36)$$

Como esta velocidad tiene la dirección del vector unitario  $\hat{\theta}$ , que es un vector tangente a la circunferencia, se denomina **velocidad tangencial**.

Podríamos haber obtenido la expresión  $v = \omega r$  de otro modo: Para el caso de un movimiento circular, usando la Ec. (6.17), obtenemos

$$\omega(t) = \frac{1}{r} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{v(t)}{r}. \quad (6.37)$$

**Observación:** Debe tener cuidado y **nunca escribir**  $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\hat{\theta}(t)$ . Veremos más adelante que el vector  $\omega(t)$  es el **módulo de un vector que es perpendicular al plano** donde ocurre el movimiento circular.

Nada impide que tomemos la derivada temporal de la velocidad tangencial. Ésta se denomina **aceleración tangencial** y se define como

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (6.38)$$

donde hemos usado Ec. (6.28). Para un movimiento circular se cumple, con  $v = \omega r$ ,

$$a_t = r \frac{d\omega}{dt} = r \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (6.39)$$

### 6.2.2 Aceleración angular media e instantánea

Como ya tenemos la definición de velocidad angular, podemos seguir con lo que ya sabemos, es decir, definir una **aceleración angular media**

$$\alpha_m = \frac{\omega(t_f) - \omega(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (6.40)$$

Obviamente podemos definir ahora la **aceleración angular instantánea**

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (6.41)$$

Notar que en general ésta depende del tiempo.

Usando la Ec. (6.39) encontramos la relación entre la aceleración tangencial y la aceleración angular

$$a_t = r\alpha. \quad (6.42)$$

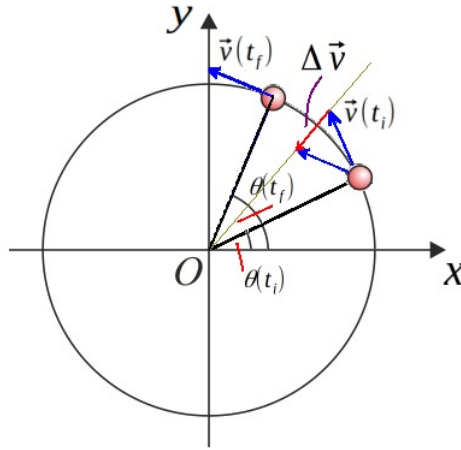


Figura 6.11: Comparación de vectores velocidad tangencial en instante inicial

### 6.2.3 Movimiento circular uniforme

Consideraremos un movimiento circular con aceleración uniforme, que ocurre cuando el **módulo de la velocidad** no cambia. Es un error común pensar que cuando no cambia el módulo de la velocidad, entonces no hay aceleración. No cometas ese error.

En la Fig. 6.11 se muestran dos vectores velocidad, en instantes distintos. Si hacemos **desplazamiento paralelo** (¿recuerdas?) para comparar ambos vectores, como se muestra en la Fig. 6.12, notamos que el vector diferencia de velocidad apunta justo en la dirección radial, apuntando hacia el origen de la circunferencia. Esto ocurre durante todo el movimiento.

Podemos entonces definir el vector **aceleración media**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad (6.43)$$

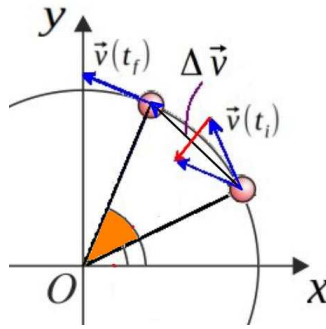


Figura 6.12: Detalle de Fig. 6.11

lo que significa que este vector apunta, en este movimiento, siempre hacia el centro de la circunferencia, como indica a Fig. 6.11. Luego, podemos escribir

$$\vec{a}_m = \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| (-\hat{r}) = -a_m \hat{r}. \quad (6.44)$$

Claramente esto sucede en todo instante, para el movimiento en estudio. Luego, para este movimiento, el módulo de la aceleración instantánea es constante y el vector aceleración lo podemos escribir como

$$\vec{a} = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| (-\hat{r}) = -a_c \hat{r}. \quad (6.45)$$

Notar que aquí el valor absoluto y la mantención de la notación vectorial es crucial. Si sólo escribiéramos el módulo de  $\vec{v}$ , obtendríamos un cero, porque sería la diferencia de dos cantidades iguales.

Este vector aceleración que siempre apunta hacia el centro de la trayectoria (en general, **centro de curvatura de la curva**) se llama **aceleración centrípeta**,  $a_c$ .

Veamos cómo podemos relacionar el módulo de este vector con el módulo de la velocidad. En la Fig. 6.12 observamos que tenemos dos triángulos semejantes, cuyo ángulo de apertura ha sido marcado con color anaranjado. Por lo tanto, se cumple que

$$\frac{|\Delta \vec{r}|}{r} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{v}. \quad (6.46)$$

Reemplazamos ésta expresión en la definición del módulo de la aceleración media y obtenemos

$$a_m = \left| \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right| = \frac{v}{r} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right|. \quad (6.47)$$

Si hacemos tender  $\Delta t \rightarrow 0$ , el segundo término en la segunda igualdad se convierte en la velocidad instantánea,  $v$ . Por lo tanto, hemos demostrado que la aceleración centrípeta se escribe en términos del módulo de la velocidad tangencial como

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (6.48)$$

En el caso que estamos considerando, donde el módulo de la velocidad es constante, lo que ocurre es que el móvil recorre la **misma distancia angular** en el mismo intervalo

de tiempo. Es decir, **la frecuencia angular es constante**,  $\omega$ . Podemos entonces escribir, para el caso de un movimiento circular uniforme

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \omega \cdot (t - t_0), \quad (6.49)$$

que representa una recta con pendiente  $\omega$  en un gráfico  $\theta$  vs  $t$ .

**Observación:** Notar que teniendo presente la definición de longitud de arco, es decir  $s = r\theta$ , podemos multiplicar la Ec. (6.49) por  $r$  y obtener

$$s(t) - s(t_0) = v \cdot (t - t_0), \quad (6.50)$$

que tiene semejanza con la ecuación correspondiente para el movimiento en una dimensión con velocidad constante que hemos estudiado anteriormente.

#### 6.2.4 Movimiento circular con aceleración angular constante

Sistemas para los cuales la velocidad angular es (aproximadamente) constante existen en la ingeniería, como disco de corte, engranajes, y en general en motores eléctricos. Sin embargo, cuando a estos sistemas se les hace partir o se les apaga, ocurre una variación constante de la frecuencia angular, es decir, la aceleración angular es constante. Por supuesto, esto ocurre después de un cierto intervalo, normalmente corto, llamado usualmente un **transiente**.

En un gráfico  $\omega$  vs  $t$ , esto se ve como muestra la Fig. 6.13, donde  $\alpha$  es la pendiente, de acuerdo a la Ec. (6.40), ya que  $\alpha$  es constante

Al igual como lo hemos hecho anteriormente para el movimiento en una dimensión, podemos calcular el área bajo la curva (recta). Te sugiero lo hagas, para que practiques.

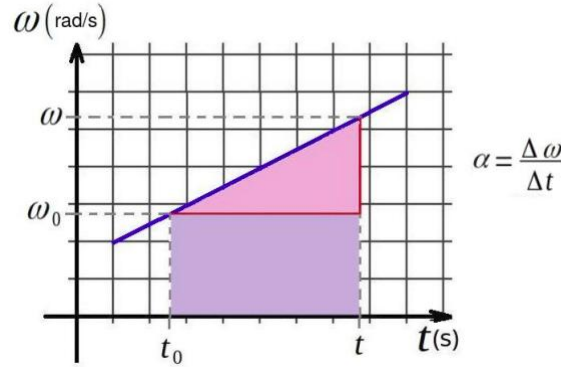


Figura 6.13: Gráfico frecuencia angular versus tiempo para movimiento con aceleración angular constante. Área bajo la curva.

El resultado es:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \omega(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2. \quad (6.51)$$

Al derivar esta ecuación respecto del tiempo obtenemos

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \alpha \cdot (t - t_0), \quad (6.52)$$



resultado que obtendríamos directamente de la Ec. (6.40).

En este caso podemos nuevamente multiplicar por  $r$  ambas ecuaciones y obtener

$$s(t) - s(t_0) = v(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a_t \cdot (t - t_0)^2 \quad (6.53)$$

y

$$v(t) = v(t_0) + a_t \cdot (t - t_0), \quad (6.54)$$

que son las ecuaciones equivalentes a las que obtuvimos, por ejemplo, al estudiar el movimiento parabólico.

### Ejemplo 1

1. Dos partículas  $A$  y  $B$  describen movimientos circulares de radio  $R = 1$  m, como lo muestra la Fig. 6.14. La partícula  $A$  parte desde punto situado en la intersección del diámetro y la circunferencia con rapidez angular  $\omega = 10$  rad/s constante, en sentido antihorario, y la partícula  $B$  lo hace desde el reposo del mismo punto, en sentido horario y con aceleración tangencial constante de  $2 \text{ m/s}^2$ . Determina cuándo y dónde se cruzan ambas partículas.

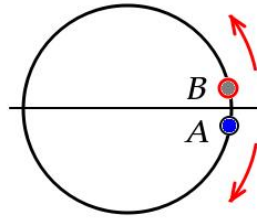


Figura 6.14: Dos partículas se mueven en sentidos opuestos sobre circunferencia

**Solución** Nuevamente nos enfrentamos a un problema de encuentro.

De la Ec. (6.49) tenemos que

$$\theta_A(t) = \theta_A(0) + \omega \cdot (t - 0) \implies \theta_A(t) = -\omega_A t = -10t. \quad (6.55)$$

El signo menos ocurre debido a que estamos usando coordenadas polares planas, y debemos recordar las convenciones: el ángulo polar es positivo si crece de modo antihorario y negativo si crece en sentido horario.

Dado que conocemos la aceleración tangencial, podemos conocer la aceleración angular

$$\alpha = \frac{a_t}{R} \implies \alpha = 2 \text{ rad/s}^2 \quad (6.56)$$

De la Ec. (6.51), eligiendo que  $\theta(t_0 = 0) = 0$  y considerando que  $\omega_B = 0$  tenemos que

$$\theta_B(t) = -\frac{1}{2} \alpha t^2 = 2t^2. \quad (6.57)$$

Ahora, los ángulos deben satisfacer que cada vez que las partículas se encuentran, su suma, tomada en valor positivo, debe ser  $2\pi$ . Es decir,  $|\theta_A| + |\theta_B| = 2\pi$ . Luego, en el instante de encuentro,  $t^*$ , debe ocurrir que

$$\theta_B(t^*) + 2\pi = \theta_A(t^*) \implies 2t^{*2} + 2\pi = -10t^*, \quad (6.58)$$

cuyas soluciones son  $t_1^* = 0,59$  s y  $t_2^* = -10,59$  s. Luego, tomando la solución física  $t_1$  obtenemos que el ángulo para el cual ocurre el encuentro es  $\theta_b(0,59) = 0,696$  rad o bien  $\theta_B(0,59) = 39,9^\circ$ .

### Ejemplo 2

Al realizar un movimiento circular uniformemente acelerado un objeto describe un radio de 0,8 m y efectúa una vuelta completa en 0,2 segundos para este instante, calcula:

- velocidad angular,
- velocidad tangencial,
- aceleración tangencial,
- aceleración centrípeta,
- aceleración resultante.

### Solución

- a) Tenemos que el período es  $T = 0,2$  s. Con

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.59)$$

obtenemos  $\omega = 31,4$  rad/s.

- b) La velocidad tangencial es  $v = \omega r = 25,1$  m/s.

c) Para determinar la aceleración tangencial,  $a_t$  debemos primero conocer la aceleración angular. Ésta está dada por la Ec. (6.52).

$$\alpha = \omega(t)/t = \omega(0,2)/0,2 = 157 \text{ rad/s}^2. \quad (6.60)$$

Podemos usar la Ec. (6.42). Obtenemos  $a_t = \alpha r = 157 \cdot 0,8 = 125,6$  m/s<sup>2</sup>.

- d) La aceleración centrípeta es  $a_c = v^2/r = 790$  m/s<sup>2</sup>.

e) El módulo de la aceleración resultante es  $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 800$  m/s<sup>2</sup>.

### Ejemplo 3

Determina la magnitud de la velocidad angular de una llanta de automóvil a los 0,3 min, si tenía una velocidad angular inicial cuya magnitud es de 8 rad/s y adquiere una aceleración angular cuya magnitud es de 4 rad/s<sup>2</sup>.

### Solución

Usamos la ecuación (6.52). Para ello,  $\omega(t_0 = 0) = 8$  rad/s y  $\alpha = 4$  rad/s<sup>2</sup>. Luego, usando que 0,3 min = 80 s, tenemos

$$\omega(80) = 8 + 4 \cdot 80 = 80 \text{ rad/s} \quad (6.61)$$

### Ejemplo 4

Una rueda de bicicleta de 80 cm de radio gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 23,4 rad/s experimentando una aceleración angular cuya magnitud es de 6 rad/s<sup>2</sup> que dura 11 segundos, calcula:

- la magnitud de desplazamiento angular a los 11 s,
- la magnitud de velocidad angular a los 11 s
- la distancia recorrida por un punto en el borde de la rueda después de 11 s.

**Solución**

a) Recordemos la Ec. (6.51)

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \omega(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha \cdot (t - t_0)^2.$$

Suponemos que  $\theta(t_0) = 0$ ,  $t_0 = 0$  s. Luego, con  $\omega(0) = 23,4$  rad/s y  $\alpha = 6$  rad/s<sup>2</sup>, obtenemos

$$\theta(11) = 23,4 \cdot 11 + \frac{1}{2} 6 \cdot 11^2 = 620,4 \text{ rad}.$$

b) Para determinar la velocidad angular, usamos la Ec. (6.52). Es decir,

$$\omega(11) = 6 \cdot 11 = 66 \text{ rad/s}.$$

c) Para contestar esta pregunta usamos el resultado para  $\theta(11)$  y su relación con la longitud de arco  $s$ :  $s(t) = r\theta(t) = 0,8 \cdot 620,4 = 496,3$  m. ¡Wow!

### 6.2.5 Movimiento circular con aceleración variable

Ya sabemos que para movimientos lineales, la aceleración no necesita ser constante; hay ejemplos de la vida real donde existe la variación de la aceleración. Lo mismo ocurre en el caso de movimiento en una trayectoria circular.

Tenemos los elementos para analizar el movimiento circular más general, aquel con aceleración variable, como el mostrado en la Fig. 6.15. En éstos, el vector velocidad cambia su magnitud durante el movimiento.

Aún podemos definir valores medios como la velocidad y aceleración angulares medias, así como la aceleración angular instantánea. También podemos definir el vector aceleración media

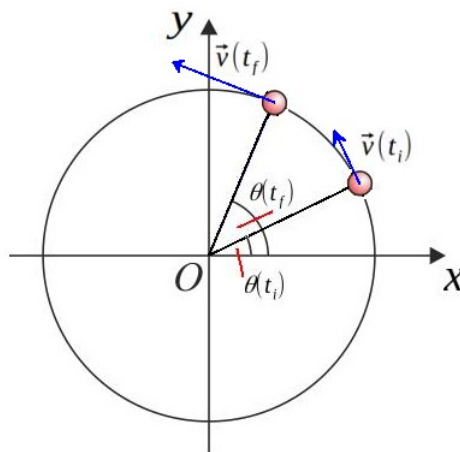


Figura 6.15: Movimiento circular con aceleración variable

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (6.62)$$

Notamos de la Fig. 6.16 que este vector ya no apunta hacia el centro, como en el caso con aceleración constante. Podemos naturalmente descomponerlo en sus **componentes normal y tangencial**. Normal se refiere a perpendicular o normal a la trayectoria. Es lo que anteriormente hemos denominado aceleración centrípeta. Tangencial se refiere a tangencial a la trayectoria. La aceleración que apunta en la dirección tangencial se denomina **aceleración tangencial**.

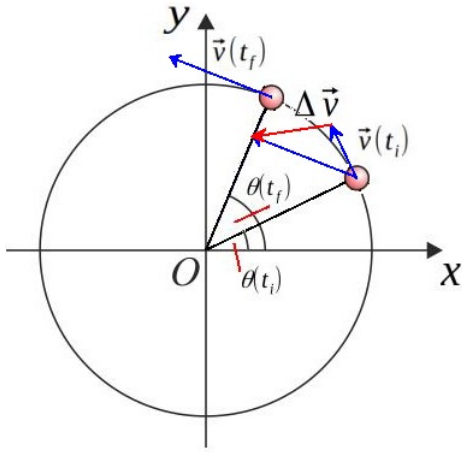


Figura 6.16: Variación del vector velocidad

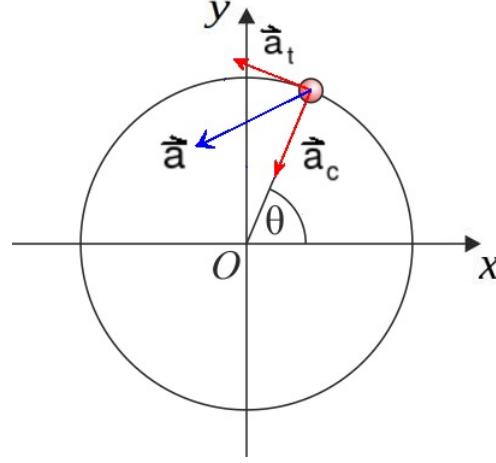


Figura 6.17: Vectores aceleración centrípeta, aceleración tangencial y aceleración total

Luego, usando la Ec. (6.46) y la versión en diferencias de la Ec. (6.39)

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v}{r} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| (-\hat{r}) + \frac{\Delta v}{\Delta t} \hat{\theta}. \quad (6.63)$$

En el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  ésta se convierte en

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} (-\hat{r}) + \frac{dv}{dt} \hat{\theta} = -a_c \hat{r} + a_t \hat{\theta}. \quad (6.64)$$

Notar que gracias a la Ec. (6.28) ahora sabemos que

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2}, \quad (6.65)$$

que es la definición más general para la aceleración tangencial.

Si usamos la definición de longitud de arco, para un movimiento circular, es decir, con  $r$  fijo, podemos escribir una expresión para la aceleración angular en términos de la aceleración tangencial,  $a_t$ .

La expresión para la aceleración total no está relacionada con el hecho de que la trayectoria sea una circunferencia. Basta con que sea una trayectoria curva, pues sobre cada trayectoria curva es posible definir una circunferencia, llamada **circunferencia o círculo osculatriz, o círculo osculador**, que conicida con la curva en un solo punto.

¿De dónde proviene este nombre? Resulta que **ósculo** es un vocablo poco usado para **beso** y esta circunferencia “besa” la curva en un punto. En cada punto sobre una curva

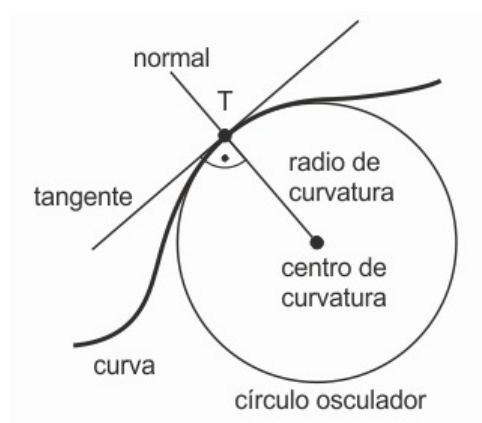


Figura 6.18: Círculo osculatriz

continua arbitraria se puede hacer eso, por supuesto con circunferencias osculatrizes de distinto radio de curvatura, Mientras más recta es la curva, mayor es el radio de curvatura y viceversa.

### Ejemplo 1

Un objeto se mueve en el plano  $x - y$  con las siguientes aceleraciones:  $a_x = 2 \text{ m/s}^2$ ,  $a_y = -10 \text{ m/s}^2$ . Si en el instante inicial parte del origen con velocidad inicial  $v_x = 0$  y  $v_y = 20 \text{ m/s}$ , calcula las componentes tangencial y normal de la aceleración, y el radio de curvatura en el instante  $t = 2 \text{ s}$ .

### Solución

Tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$  las aceleraciones son constantes, luego las componentes de la velocidad satisfacen

$$\begin{aligned} v_x &= 2t \\ v_y &= 20 - 10t \end{aligned} \quad (6.66)$$

### 6.2.6 Ejercicios

1. Dos vehículos describen la misma trayectoria circular de radio  $0,75 \text{ m}$ . El primero está animado de un movimiento uniforme cuya velocidad angular es de  $60 \text{ rpm}$  y sale de la posición  $A$  cuando se empieza a contar el tiempo. El segundo móvil se mueve con un movimiento uniformemente acelerado cuya aceleración angular es  $\omega_A = \pi/6 \text{ rad/s}^2$ , pasa por la posición  $B$  dos segundos más tarde, llevando una velocidad angular de  $120 \text{ rpm}$ .

- Escribe las ecuaciones del movimiento de cada uno de los móviles.
- Halla el instante y la posición de encuentro por primera vez de ambos móviles.
- Determina la velocidad tangencial, la velocidad angular, las componentes tangencial y normal de la aceleración de cada uno de los móviles en el instante de encuentro.
- Haz un esquema en el que se especifique los vectores velocidad, aceleración, en el instante de encuentro.

2. Un avión llega a la terminal y los motores se apagan. El rotor de uno de los motores tiene una velocidad angular inicial en sentido horario de  $2.000 \text{ rad/s}$ . La rotación del motor se ralentiza con una aceleración angular de magnitud  $80 \text{ rad/s}^2$ .

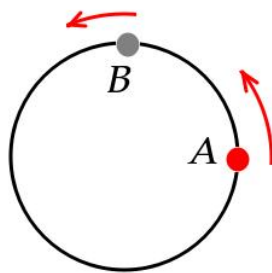


Figura 6.19: Dos vehículos sobre un pista circular

- a) Determina la velocidad angular después de 10 s.
  - b) ¿Cuánto tiempo tarda el rotor en detenerse?
3. Una rueda giratoria requiere 3 s para rotar 37 revoluciones. Su velocidad angular al final del intervalo de 3 s es 98 rad/s. ¿Cuál es la aceleración angular constante de la rueda?
  4. Un motor eléctrico incrementó la magnitud de su velocidad angular en 50 rad/s a 220 rad/s en 0,9 segundos. Calcula
    - a) la magnitud de su aceleración media,
    - b) ¿Cuál fue la magnitud de su desplazamiento angular en ese tiempo?.
  5. Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una velocidad de 22 m/s en 9 s Si el diámetro de un neumático es de 58 cm, encuentra
    - a) el número de revoluciones que hace el neumático durante este movimiento, suponiendo que no se deslice, y
    - b) la velocidad de rotación final del neumático en revoluciones por segundo.
  6. Si las ruedas de un automóvil se reemplazan por ruedas de mayor diámetro, ¿cambiará la lectura del velocímetro? ¡Explica!
  7. Una pieza metálica sujeta a una cuerda, describe un movimiento circular con radio de 0,35 m y tarda 0,40 segundos en dar una vuelta completa, ¿qué aceleración centrípeta representa?
  8. Una rueda de bicicleta gira con una magnitud de velocidad angular inicial de 23,4 rad/s experimentando una aceleración angular cuya magnitud es de  $6 \text{ rad/s}^2$  que dura 11 segundos, calcula
    - a) la magnitud de desplazamiento angular tiene a los 11 s,
    - b) la magnitud de velocidad angular lleva a los 11 segundos
  9. Determina la velocidad lineal o tangencial de una partícula que tiene una velocidad angular cuya magnitud es de 71 rad/s y su radio de giro es de 0,8 m.
  10. Una partícula describe un movimiento circular uniforme sobre un radio de 10 m. Si su posición inicial forma un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la dirección positiva del eje  $x$  y su velocidad es de  $3\pi \text{ m/s}$ , determina:
    - a) La posición (ángulo en grados) y el espacio recorrido a los 2 segundos.
    - b) El tiempo que tardará en dar 3 vueltas.
    - c) El número de vueltas que dará en 30 segundos.
    - d) El período y la frecuencia.

11. La rueda de un automóvil tarda 20 s en recorrer 500 m. Su radio es de 40 cm. encuentra el número de vueltas que dará al recorrer los 500 m y las revoluciones por minuto, rpm, con que gira.

12. El minuterio y horario de un reloj están superpuestos a las 12 horas.

a) ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que se encuentran en ángulo recto?

b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que se encuentran diametralmente opuestos?

13. El radio terrestre es 6.371 km.

a) ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra en el movimiento de rotación alrededor de su eje?

b) ¿Cuál es la velocidad, en m/s, de un punto situado sobre la línea ecuatorial?

c) ¿Cuál es la velocidad, en m/s, de un punto situado sobre Temuco, Chile?

14. La Estación Espacial Internacional orbita con velocidad angular constante alrededor de la Tierra cada 90 minutos en una órbita a 300 km de altura sobre la superficie terrestre

a) Calcula la velocidad angular

b) Calcula la velocidad tangencial

c) ¿Tiene aceleración? En caso afirmativo, indicar sus características y, en caso negativo, explica las razones de que no exista.

15. Teniendo en cuenta que la Tierra gira alrededor del Sol en 365,25 días y que el radio de giro medio es de  $1,5 \times 10^8$  m, calcula (suponiendo que se mueve en un movimiento circular uniforme):

a) El módulo de la velocidad angular en rad/día.

b) El módulo de la velocidad a que viaja alrededor del Sol.

c) El ángulo que recorrerá en 30 días. Expresa ese ángulo en grados, minutos y segundos.

d) El módulo de la aceleración centrípeta provocada por el Sol.

16. Un CD-ROM, que tiene un radio de 6 cm, gira a una velocidad de 2.500 rpm. Calcula:

a) El módulo de la velocidad angular en rad/s

b) El módulo de la velocidad lineal de su borde.

c) Su frecuencia.

17. Un piloto de avión bien entrenado aguanta aceleraciones de hasta 8 veces la de la gravedad, durante tiempos breves, sin perder el conocimiento. Para un avión que vuela a 2.300 km/h, ¿cuál será el radio de giro mínimo que puede soportar?

18. Es un día caluroso y haz encendido tu ventilador. Al salir de tu habitación lo apagas por error y su velocidad angular disminuye uniformemente de  $\omega_1 = 510$  rev/min a  $\omega_2 = 160$  rev/min en un intervalo de tiempo  $\Delta t = 3,9$  s.

a) Encuentra la aceleración angular en (rev)/s<sup>2</sup>.

b) Determina el número de revoluciones realizadas por el motor en ese tiempo.

c) ¿Cuántos segundos más se requieren para que el ventilador se detenga si la aceleración angular permanece constante al valor calculado en la parte a)?

19. La Fig. 6.20 muestra dos discos giratorios, cada uno con un punto visible. La figura muestra una foto del sistema. El disco de la izquierda tiene una velocidad angular

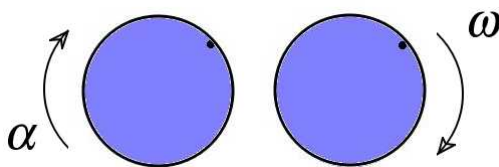


Figura 6.20: Dos discos girando

inicial cero y una aceleración angular de  $\alpha = 120 \text{ rad/s}^2$ . El disco de la derecha tiene una velocidad angular constante de  $\omega = 18,0 \text{ rad/s}$ .

- ¿Cuándo habrán girado los dos discos en el mismo ángulo total?
  - ¿Cuántas revoluciones habrá tomado esto para cada disco?
  - Si los discos tuvieran radios diferentes, ¿habría algún cambio en tus respuestas?
- Ayuda: Puedes enfrentar este problema como uno de encuentro.

20. Una rueda de 60 cm de diámetro gira con una aceleración angular constante de  $4 \text{ rad/s}^2$ . Comienza desde el reposo en  $t = 0$ , y una línea de tiza dibujada a un punto  $P$  en el borde de la rueda forma un ángulo de  $57,3^\circ$  con la horizontal en este momento. En el instante  $t = 2 \text{ s}$ , encuentra

- la velocidad angular de la rueda,
- la velocidad lineal y la aceleración tangencial de  $P$ , y
- la posición de  $P$ .

21. Catalina tiene una bici nueva. Supón que el engranaje del pedal tiene un radio de 12,0 cm, el engranaje de la rueda trasera tiene un radio de 3,5 cm y la rueda trasera tiene un radio de 38,0 cm.

Hoy ella tomó su bici para ir a la Universidad y se da cuenta que salió atrasada. Para no llegar tarde a su clase, aumenta uniformemente su pedaleo de 20 rev/min a 40 rev/min en 5,0 s. Para ese intervalo de tiempo, determina:

- la aceleración lineal de la bicicleta,
- la velocidad lineal final de la bicicleta y
- la distancia recorrida por la bicicleta.

22. Vas al casino a jugar a la ruleta y observas el movimiento de la bolita para ver si puedes darle al número que estás jugando. Inicialmente, la bolita tiene una velocidad angular de  $5,0 \text{ rad/s}$  en sentido antihorario. Algún tiempo después, después de girar en un ángulo total de  $5,5 \text{ rad}$ , la bolita se devuelve por el borde con una velocidad angular de  $1,5 \text{ rad/s}$  en sentido horario. ¿Te imaginas por qué podría ocurrir esto?

- ¿Cuál es la aceleración angular?
- ¿Cuál es la velocidad angular promedio?
- ¿Cuánto tiempo tomó esto?
- En algún momento la velocidad angular de la bolita tenía que haber sido cero. ¿A qué ángulo desde su orientación inicial ocurrió esto y cuánto tiempo tomó?

Ayuda: Haz un bosquejo bien etiquetado para aclarar el problema

23. En la cocina del Departamento de Física finalmente se ha podido reemplazar unos viejos hornos de microondas, para que los usen los alumnos. A las 13 horas, Scarlett decide usar uno de los hornos de microondas para recalentar su almuerzo. En el proceso, una mosca vuela accidentalmente al microondas y aterriza en el borde exterior del plato



giratorio y permanece allí. Si el plato del horno de microondas tiene un radio de 0,15 m y gira a 6,0 rpm, calcula la distancia total recorrida por la mosca durante los 2,0 min que Scarlettte mantuvo su comida allí (sin darse cuenta de que había una mosca).

24. El conductor de un automóvil que viaja a 30,0 m/s aplica los frenos y sufre una aceleración negativa constante de  $2,0 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuántas revoluciones hace cada neumático antes de que el automóvil se detenga, suponiendo que el automóvil no patina y que los neumáticos tienen radios de 0,3 m?

25. El movimiento descendente de un ascensor es controlado por un cable que se desenrolla de un cilindro de radio 0,2 m. ¿Cuál es la velocidad angular del cilindro cuando la velocidad de descenso del elevador es 1,2 m/s?

26. Pablo tiene un nuevo hobby, la pesca en aguas profundas. La primera vez que sale a pescar tiene suerte y engancha un gran pez que nada lejos del bote y tira del hilo de pescar de su carrete. Todo el sistema está inicialmente en reposo y la línea de pesca se desenrolla del carrete en un radio de 4,5 cm desde su eje de rotación. El carrete recibe una aceleración angular de  $110 \text{ rad/s}^2$  durante 2 s.

- a) ¿Cuál es la velocidad angular final del carrete?
- b) ¿A qué velocidad sale el hilo de pescar del carrete después de transcurridos 2 s?
- c) ¿Cuántas revoluciones hace el carrete?
- d) ¿Cuántos metros de hilo de pescar salen del carrete en este momento?

27. La segunda vez que Pablo tira el anzuelo ya tiene algo más de experiencia y ha aprendido a poner el freno en el carrete de pesca. Supongamos que logra una aceleración angular de  $\alpha = -300 \text{ rad/s}^2$ . ¿Cuánto tiempo tarda el carrete en detenerse?

28. Una centrífuga en un laboratorio médico está girando a una velocidad angular de 3.600 rev/min. Cuando se apaga, la centrífuga aún gira 5 veces antes de detenerse. Encuentra la desaceleración angular constante de la centrífuga.

29. Un avión llega a la terminal y el piloto apaga las turbinas. El rotor de uno de los motores tiene una velocidad angular inicial en sentido horario de 2.000 rad/s. La rotación del motor se ralentiza con una aceleración angular de magnitud  $80 \text{ rad/s}^2$ .

- a) Determina la velocidad angular después de 10 s.
- b) ¿Cuánto tiempo tarda el rotor en detenerse?

30. Un plato giratorio eléctrico de 0,80 de diámetro gira alrededor de un eje fijo con una velocidad angular inicial de 0,230 rad/s. La aceleración angular es  $0,905 \text{ rad/s}^2$

- a) Calcula la velocidad angular después de un tiempo de 0,21 s
- b) ¿Cuántas revoluciones ha girado la cuchilla en este intervalo de tiempo?
- c) ¿Cuál es la velocidad tangencial de un punto en la punta de la cuchilla en 0,21 s?
- d) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración resultante de un punto en la punta de la cuchilla en 0,21 s?

31. Mi amiga Rosanna está feliz porque aprendió a hacer girar una pelota de basketball con un solo dedo como eje. La pelota comienza con una velocidad de rotación de 10 rad/s y se detiene en 4,5 segundos.

- a) Encuentra el ángulo en que ha girado la pelota.
- b) Encuentra la velocidad lineal inicial del borde de la pelota si el diámetro es de 26 cm.

32. Una varilla rígida y delgada gira con una aceleración angular  $\alpha$  alrededor de un eje que pasa perpendicularmente a través de uno de sus extremos. En un instante, el vector de aceleración total (radial más tangencial) en el otro extremo de la barra forma un ángulo de  $60,0^\circ$  con respecto a la barra y tiene una magnitud de  $15,0 \text{ m/s}^2$ . La barra tiene una velocidad angular de  $2,0 \text{ rad/s}$  en este instante. ¿Cuál es la longitud de la barra?

33. La Fig. 6.21 a) muestra una partícula en el punto  $P$  se mueve en sentido horario, con una velocidad creciente. Dibuja sus vectores de velocidad y aceleración.

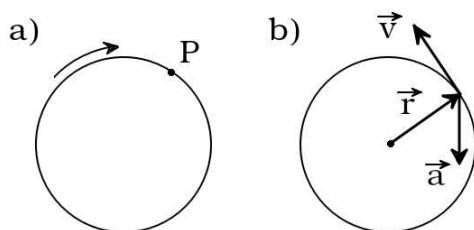


Figura 6.21: Figuras para problemas 33 y 34

34. En la Fig. 6.21 b) se muestran los vectores de posición, velocidad y aceleración para la partícula que ejecuta el movimiento circular.

a) ¿La partícula viaja en sentido horario (en sentido horario) o en sentido antihorario (en sentido antihorario)?

b) ¿Su velocidad aumenta, disminuye o es constante? Explica

35. Una rueda de  $1,65 \text{ m}$  de diámetro se encuentra en un plano vertical y gira alrededor de su eje central con una aceleración angular constante de  $3,70 \text{ rad/s}^2$ . La rueda comienza en reposo en  $t = 0$ , y el vector de posición radial de cierto punto  $P$  en el borde hace un ángulo de  $57,3^\circ$  con la horizontal en este momento. En  $t = 2,0 \text{ s}$ , encuentra lo siguiente:

a) la velocidad angular de la rueda.

b) la velocidad tangencial del punto  $P$ .

c) la aceleración total del punto  $P$ .

d) la posición angular de la punto  $P$ .

36. Calcula cuánto tiempo pasa entre dos momentos en que Marte y Júpiter estén sobre el mismo radio de sus órbitas (suponiendo que ambos se mueven con un movimiento circular uniforme).

Marte tiene un período orbital alrededor del Sol de  $687,0$  días, mientras que el de Júpiter es de  $11,86$  año.

Usa las ecuaciones de la cinemática circular.

37. Una partícula se mueve en un círculo de radio de  $20 \text{ cm}$  a una velocidad que aumenta uniformemente. Si la velocidad cambia de  $5 \text{ m/s}$  a  $6 \text{ m/s}$  en  $2 \text{ s}$ , encuentra la aceleración angular.

38. Un ventilador se mueve con una velocidad angular de  $10\pi \text{ rad/s}$ . Ahora está apagado y se produce un retardo angular de  $2\pi \text{ rad/s}^2$ . Encuentra el número de rotaciones hechas por el ventilador antes de que se detenga.

39. Una partícula comienza a moverse en un círculo de  $1 \text{ m}$  de radio con una aceleración angular dependiente del tiempo  $\alpha = 2t^2$  ( $\alpha$  y  $t$  están en unidades SI). Encuentra la magnitud de la aceleración resultante en el tiempo  $t = 1 \text{ s}$ .

Ayuda:  $\int_0^x u^2 du = \frac{1}{3}x^3$

40. Supón que la velocidad angular,  $\omega$  de una partícula depende de su posición angular  $\theta$ , medida con respecto a una determinada línea de referencia, según la regla  $\omega = 2\sqrt{\theta}$ . Encuentra la aceleración angular  $\alpha$  en función de  $\theta$ .

41. Una partícula se está moviendo en una trayectoria circular con una velocidad de 1 m/s. Esta velocidad aumenta a una velocidad constante de 2 m/s cada segundo. Suponiendo que el radio del círculo descrito es de 25 m, encuentra la aceleración total de la partícula después de 2 segundos.

42. Un motor eléctrico incrementó la magnitud de su velocidad angular en 50 rad/s a 220 rad/s en 0,9 segundos. Calcula,

a) la magnitud de su aceleración media,

b) ¿Cuál fue la magnitud de su desplazamiento angular en ese tiempo?

43. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por

$$\vec{v} = (3t - 2)\hat{x} + (6t^2 - 5)\hat{y} \text{ m/s} \quad (6.67)$$

Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración y el radio de curvatura en el instante  $t = 2$  s.

## 6.3 Movimiento relativo y relatividad de Galileo

Galileo Galilei <sup>3</sup> fue un revolucionario, al ser clave en el desarrollo de la ciencia moderna.

Entre las muchos avances que realizó, desafió las concepciones comunes sobre nuestro lugar en el cosmo al apoyar la propuesta de Nicolás Copérnico de que la Tierra y demás cuerpos celestes conocidos en la época se movían alrededor de un sol inmóvil, el modelo heliocéntrico. Por supuesto, esto además le trajo desdicha al ser acusado ante la Santa Inquisición, siendo obligado a retractarse, a riesgo de morir.



Figura 6.22: Retrato de Galileo Galilei por Domenico Cresti

<sup>3</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei](https://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei)

La idea de que Tierra se mueve parece contradecir nuestra observación directa que realizamos día a día: que el Sol y demás cuerpos celestes se mueve rotando alrededor de la Tierra. Ideas y concepciones arraigadas son siempre difíciles de cambiar.

Entonces a Galileo se le ocurrió un **experimento pensado**<sup>4</sup> para demostrar que no había inconsistencia, dejando constancia de él en su libro **Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo**.

Dejemos que Galileo nos cuente su experimento:

*Enciértrate con un amigo en la cabina principal debajo de las cubiertas en un barco grande, y lleva contigo algunas moscas, mariposas y otros pequeños animales voladores. Toma un tazón grande de agua con un poco de pescado; cuelga una botella que se vacía gota a gota en un recipiente ancho debajo de ella. Con el barco parado, observa cuidadosamente cómo los pequeños animales vuelan a igual velocidad a todos los lados de la cabina. Los peces nadan indiferentemente en todas las direcciones; las gotas caen justo abajo sobre el recipiente; y al arrojarle algo a tu amigo, no debes arrojarlo con más fuerza en una dirección que en otra si las distancias son iguales; saltando con los pies juntos, recorres espaciamientos iguales en todas las direcciones. Cuando haya observado todas estas cosas cuidadosamente (aunque no hay duda de que cuando el barco está parado todo debe pasar de esta manera), haga que el barco avance con la velocidad que desee, siempre que el movimiento sea uniforme y no fluctúe de ninguna manera. Descubrirá que no cambia lo más mínimo en todos los efectos nombrados, ni podría decir por la observación de ninguno de ellos si la nave se estaba moviendo o estaba detenida.*

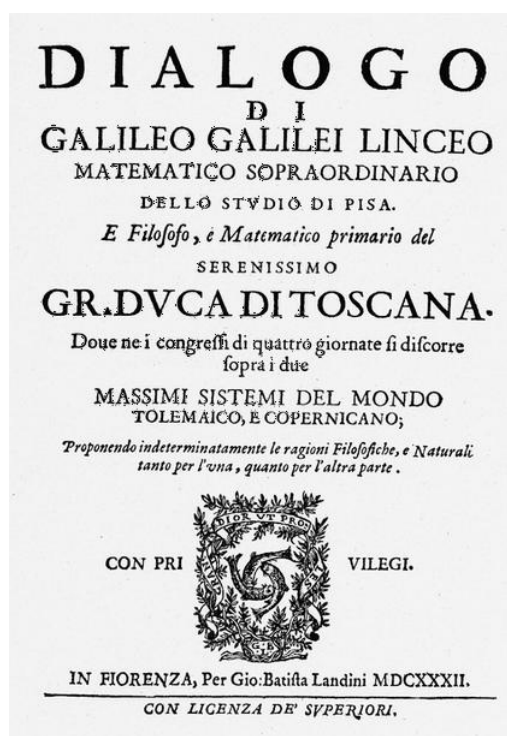


Figura 6.23: Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo

Galileo usó este experimento para demostrar que la Tierra podía, de hecho, moverse

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Thought\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Thought_experiment)

sin entrar en conflicto con nuestro sentido cotidiano del mundo. Incluso si la Tierra se moviera, todo en su superficie se movería a la misma velocidad.

Un sistema de referencia que se mueve a velocidad constante respecto de otro se denomina **sistema inercial de referencia**<sup>5</sup>

Galileo había tropezado con un tipo de relatividad que ahora lleva su propio nombre, el

### Principio de Relatividad de Galileo.

En su forma moderna lo podemos expresar como

**Ningún experimento mecánico, que satisface las Leyes de Newton y realizado dentro de un sistema inercial, puede revelar su estado de movimiento o de reposo.**

#### 6.3.1 Transformaciones de Galileo

El video en este link <https://www.youtube.com/watch?v=AuCAhbpsiEI> muestra claramente la perspectiva de observadores que se mueven a velocidad constante mientras observan un movimiento acelerado.

Considera dos sistemas de coordenadas  $S$  y  $S'$  que se mueven uno relativo al otro en la dirección  $+x$ . Específicamente, el sistema de coordenadas  $S'$  se mueve hacia la derecha en la dirección  $+x$  a velocidad constante  $v'$  relativo a  $S$ . Es decir,  $\vec{v} = v' \hat{x}$ . Consideremos un fenómeno que ocurre en una posición dada en un instante dado, medido por cada observador. Permitimos que este evento puede estar en movimiento arbitrario. Eso es lo que se denomina un **evento**.<sup>6</sup>

Llamemos  $P$  al lugar físico donde ocurre el evento. En el sistema  $S$  tiene coordenadas  $(x, y, z)$  y en  $S'$ , coordenadas  $(x', y', z')$ , como muestra la Fig. 14.2.

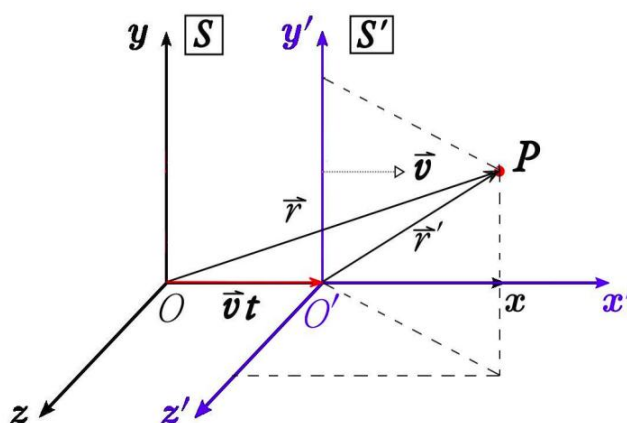


Figura 6.24: Movimiento relativo uniforme entre dos sistemas de referencia

Suponemos que los orígenes de los sistemas coinciden, es decir  $x = x' = 0$ ,  $y = y' = 0$ , y  $z = z' = 0$  en un instante  $t = 0$ , medido en  $S$  y en el instante  $t' = 0$ , medido en  $S'$ . En la

<sup>5</sup>Este término no se acuñó hasta el siglo XIX.

<sup>6</sup>El término evento se usa en relatividad especial y general e indica un fenómeno físico que ocurre en el espacio-tiempo.

teoría de Newton el tiempo es único para todos los observadores, independiente de sus estado de movimiento, luego  $t = t'$  en general.<sup>7</sup>

De la figura, por simple suma de vectores, vemos que se cumple

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t. \quad (6.68)$$

Escrita en coordenadas, esta ecuación corresponde a

$$\begin{aligned} x' &= x - vt, \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (6.69)$$

y agregamos

$$t' = t. \quad (6.70)$$

Este conjunto de transformaciones de coordenadas y tiempo se denomina **transformaciones de Galileo**.

Observa que la transformación es simétrica. Es decir, no hay nada especial en el marco  $S'$  en relación con el marco  $S$ . Además, la **transformación inversa**, que se encuentra resolviendo lo anterior para  $t, x, y$  y  $z$ . Esto es,

$$\begin{aligned} x &= x' + vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Observa que la transformación inversa es la misma que las transformaciones directa, excepto con el reemplazo de  $v$  con  $-v$ . Esto significa mientras el marco de referencia  $S'$  se mueve con  $\vec{v} = v\hat{x}$  respecto de  $S$ , el marco  $S$  se mueve con  $\vec{v} = -v\hat{x}$  respecto de  $S'$ .

A partir de la Ec. (6.68) podemos obtener las transformaciones que relacionan las velocidad del evento  $P$  medido respecto de los marcos de referencia  $S$  y  $S'$ . Para ello basta derivar esta ecuación. Definiendo<sup>8</sup>

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} \quad (6.72)$$

obtenemos

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \quad (6.73)$$

Escrita en coordenadas, esta ecuación corresponde a

$$\begin{aligned} u'_x &= u - v, \\ u'_y &= u_y, \\ u'_z &= u_z. \end{aligned} \quad (6.74)$$

<sup>7</sup>Este punto representa una diferencia crucial en la Relatividad Especial de Einstein, donde los tiempos medidos por cada observador ya no son iguales. Lo que es simultáneo en un sistema, no lo es en el otro.

<sup>8</sup>Para ser preciso, deberíamos escribir  $\vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$  porque  $\vec{u}'$  es la velocidad de  $P$  medida en el marco de referencia  $S'$  y luego deberíamos usar el tiempo medido en ese sistema. Aquí, debido a que  $t' = t$  en la mecánica de Newton, no hay problema. Sin embargo, en el ámbito de la Relatividad Especial, esto es crucial.

Este conjunto de transformaciones se denomina **ley de adición de velocidades**.

Por supuesto, si derivamos la Ec. (6.72) obtenemos la relación entre las aceleraciones de  $P$  en ambos marcos:

$$\vec{a}' = \vec{a}. \quad (6.75)$$

### 6.3.2 Velocidad Relativa

Las **corrientes en chorro** juegan un rol importante en el clima de la Tierra. Son corrientes de aire que fluyen por hasta unos 3.000 de kilómetros, en una franja de varios un par de ciento de kilómetros de ancho, en un rango de 4 km de altura. En su parte central, los vientos pueden alcanzar los 370 km/h y, por norma general, su dirección es de oeste a este.

La aviación comercial aprovecha las corrientes en chorro para poder recorrer largas distancias ya que permiten reducir significativamente la duración del trayecto y también el consumo de combustible. Se podría considerar como el equivalente de una autopista aérea. Por eso, los vuelos de América del Norte a Europa duran menos que los van en sentido contrario.

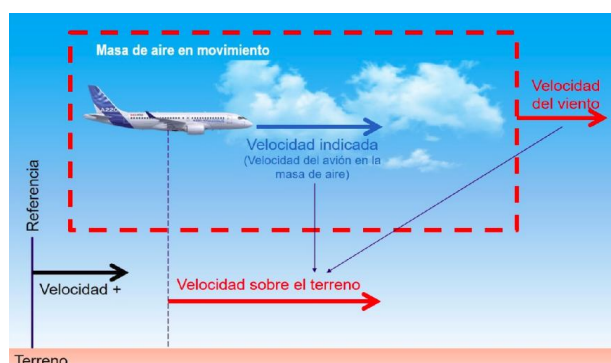


Figura 6.25: Velocidad relativa de un avión en corriente en chorro

En este caso, la magnitud de la velocidad del avión con respecto a un observador en tierra no será la misma que la lectura del velocímetro (anemómetro) del avión. Es decir, el velocímetro del avión podría mostrar 1.000 km/h, pero podría estarse moviendo en una corriente en chorro a 370 km/h, luego la velocidad medida por un observador en tierra, un **observador estacionario**, medirá una velocidad diferente al piloto del avión. Lo que necesitamos conocer es entonces la **velocidad relativa** del avión respecto de la tierra.

Ya hemos visto un ejemplo concreto de este tipo de problema: el resultado obtenido en la Ec. (6.72) es el resultado para las velocidades que diferentes observadores del mismo movimiento y es un ejemplo de velocidad relativa.

Por lo tanto, cuando queremos comprender cómo un observador se mueve respecto de otro debemos sumar o restar vectores velocidad.

#### Ejemplo 1

Profundicemos en el ejemplo del avión en la corriente en chorro. Supongamos los dos casos extremos: viento de cola y viento de frente. En ambos casos hablamos de un movimiento relativo en una dimensión. Denominamos  $+x$  la dirección hacia donde el avión

vuela con velocidad  $v_A$  respecto del suelo. El suelo es entonces el marco de referencia  $S$ . El aire en movimiento con velocidad  $\vec{v}_v = v_v \hat{x}$  (viento de cola) respecto del suelo es el sistema  $S'$ . Llamamos  $v'_A$  la velocidad del avión respecto del aire.

### Solución

Luego, para viento de cola,

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_v \implies v_A \hat{x} = v'_A \hat{x} + v_v \hat{x}, \quad (6.76)$$

luego

$$v_A = v'_A + v_v = 1.000 + 370 = 1.370 \text{ km/h.} \quad (6.77)$$

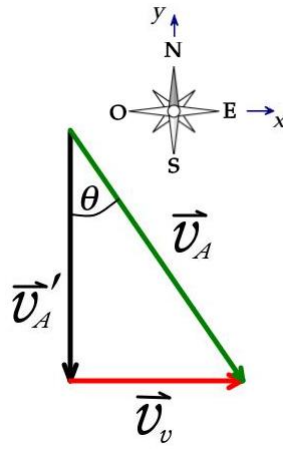


Figura 6.26: Velocidad relativa de un avión en corriente en chorro

En el caso del viento de frente,  $\vec{v}_v = -v_v \hat{x}$

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_v \implies v_A \hat{x} = v'_A \hat{x} - v_v \hat{x}, \quad (6.78)$$

luego

$$v_A = v'_A - v_v = 1.000 - 370 = 630 \text{ km/h.} \quad (6.79)$$

Por supuesto, esto tiene consecuencias sobre el tiempo de vuelo y también sobre el gasto o ahorro de combustible.

¿Y si el viento es lateral? Supongamos que el avión vuela de Norte a Sur y la corriente en chorro va de Oeste a Este

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_v \implies \vec{v}_A = -v'_{Ax} \hat{y} + v_v \hat{x}, \quad (6.80)$$

luego

$$\vec{v}_A = -1.000 \hat{y} + 370 \hat{x} \implies v_A = \sqrt{1000^2 + 370^2} = 1.066 \text{ km/h.} \quad (6.81)$$

De aquí incluso podemos conocer el ángulo  $\theta$  respecto de la dirección Sur que el hace el avión en su vuelo. Esto es,

$$\theta = \tan^{-1} \frac{370}{1.000} \approx 0,38 \text{ rad} \implies \theta = 22,2^\circ. \quad (6.82)$$



**Ejemplo 2**

Cuando no sopla viento, las gotas de lluvia caen verticalmente sobre el suelo alcanzando una velocidad constante  $v_g = 23$  km/h. Un automovilista circula horizontalmente con velocidad constante  $v = 90$  km/h. Determina:

- La ecuación de la trayectoria de las gotas de lluvia para el observador en el automóvil.
- La velocidad de una gota de lluvia según el conductor, sabiendo que se ha formado en un punto de coordenadas  $(x_g, y_g)$  respecto de unos ejes fijos en tierra.

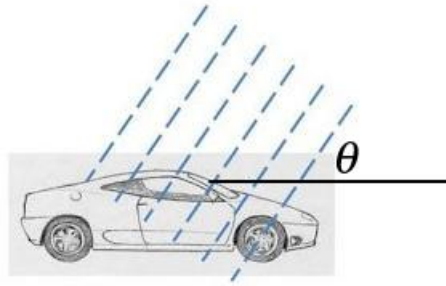


Figura 6.27: Velocidad relativa de la lluvia respecto de un automóvil

**Solución**

a) Tenemos dos sistemas de referencia,  $S$ , fijo en tierra y  $S'$ , fijo en el automóvil. Supongamos que en el instante  $t = 0$  ambos sistemas de referencia coinciden. En la Fig. 6.28 muestran ambos sistemas en un instante  $t$  posterior. El punto  $P$  representa una gota de lluvia con coordenadas  $(x_g, y_g)$

Entre los vectores de posición de la gota de lluvia respecto de los sistemas  $S$  y  $S'$  se cumple la relación vectorial

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t = \vec{r} - vt\hat{x}. \quad (6.83)$$

Por otro lado, el vector de posición de la gota de lluvia respecto del sistema  $S$  está dado por

$$\vec{r} = x_g\hat{x} + (y_g - v_g t)\hat{y}. \quad (6.84)$$

También, el vector de posición de la gota respecto del sistema  $S'$  es

$$\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y}. \quad (6.85)$$

Observa que en principio debimos haber usado los vectores unitarios primados, pero son iguales a los no primados en este caso. Por lo tanto, de las Ecs. (6.84) y (6.85)

$$x'\hat{x} + y'\hat{y} = x_g\hat{x} + (y_g - v_g t)\hat{y} - vt\hat{x} \quad (6.86)$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} x' &= x_g - vt \\ y' &= y_g - v_g t \end{aligned} \quad (6.87)$$

Ahora necesitamos conocer la ecuación de la trayectoria de la gota. Este debe tener la forma  $y(x)$  lo que significa que debemos despejar el tiempo de las ecuaciones anteriores. Obtenemos

$$y' = y_g - \frac{v_g x_g}{v} + \frac{v_g}{v} x' \quad (6.88)$$

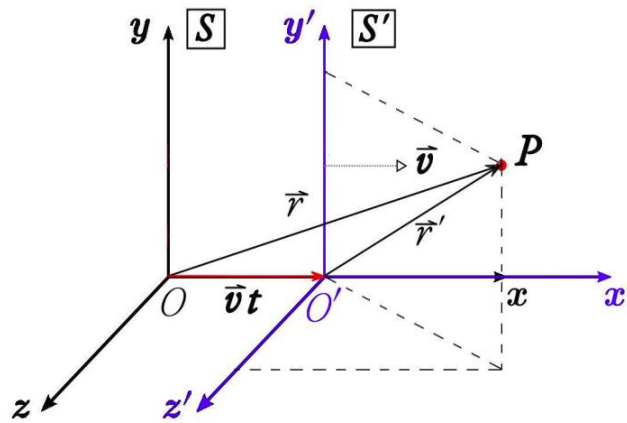


Figura 6.28: Sistemas de referencia

que tiene la forma  $y(x) = b + mx$ , es decir, la ecuación de una recta. La pendiente es  $m = \frac{v_g}{v}$ . Por lo tanto, el ángulo que forma la trayectoria de la gota con la superficie terrestre es

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{v_g}{v} \right]. \quad (6.89)$$

De aquí obtenemos el ángulo que forma la lluvia:  $\theta = 14,3^\circ$ .

b) La velocidad relativa se obtiene derivando la Ec. (6.83) respecto del tiempo:

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{v} = \vec{v}_g - v\hat{x} = -v_g\hat{y} - v\hat{x}. \quad (6.90)$$

Es decir,

$$\vec{v}' = -25\hat{x} - 6,4\hat{y} \text{ m/s}, \quad (6.91)$$

cuyo módulo es

$$v' = \sqrt{25^2 + 6,4^2} = 25,8 \text{ m/s}. \quad (6.92)$$

### 6.3.3 Ejercicios

1. Dos automovilistas  $A$  y  $B$  se desplazan por una carretera con las siguientes velocidades  $v_A = 120 \text{ km/h}$  y  $v_B = 100 \text{ km/h}$ . Determínese la velocidad relativa:

- a) cuando viajan en el mismo sentido y
- b) cuando lo hacen en sentidos contrarios

2. Un río fluye hacia el norte con velocidad de  $3 \text{ km/h}$ . Un bote se dirige al Este con velocidad relativa al agua de  $4 \text{ km/h}$ .

- a) Calcula la velocidad del bote respecto de tierra.
- b) Si el río tiene  $1 \text{ km}$  de anchura, calcular el tiempo necesario para cruzarlo. ¿Cuál es la desviación hacia el norte del bote cuando llega a la otra orilla del río?

3. Un avión vuela desde un punto  $A$  a otro  $B$  que se encuentra a  $3.000 \text{ km}$  de distancia en la dirección Este. El viento sopla en la dirección  $S 30^\circ E$  con velocidad de  $80 \text{ km/h}$ , y la velocidad del avión es de  $600 \text{ km/h}$ . Determina el tiempo de vuelo del avión entre las dos localidades.

4. Un río fluye hacia el este con velocidad de  $v = 3$  m/s. Un bote se dirige hacia la ribera de enfrente con velocidad relativa al agua de  $v_b = 4$  m/s, partiendo desde un punto  $O$ .

a) ¿Cómo debe ser dirigido el bote para que llegue a un punto  $P$  situado en la orilla opuesta enfrente de  $O$ ?

b) Calcula la velocidad  $\vec{V}$  del bote respecto de la orilla.

c) Calcula el tiempo que tarda el bote en desplazarse  $d = 100$  m hasta el punto  $P$  y regresar de nuevo al punto de partida  $O$ .

5. El piloto de un avión observa que la brújula indica que va dirigiéndose hacia el Oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. Si existiera un viento de 30 km/h hacia el norte, calcula la velocidad del avión respecto a la Tierra.

6. El piloto de un avión desea volar hacia el Oeste en presencia de un viento que sopla hacia el Sur a 50 km/h. Si la rapidez del avión cuando no sopla el viento es de 200 km/h,

a) ¿en qué dirección debe dirigirse el avión?

b) ¿cuál debe ser su rapidez respecto a la Tierra?

7. Un niño en peligro de ahogarse en un río está siendo llevado corriente abajo por una corriente que fluye uniformemente con una rapidez de 2,5 km/h. El niño está a 0,6 km de la orilla y a 0,8 km corriente arriba de un embarcadero cuando un bote de rescate se pone en camino.

a) Si el bote procede a su rapidez máxima de 20 km/h con respecto al agua, ¿cuál es la dirección, relativa a la orilla, que deberá tomar el conductor del bote?

b) ¿Cuál es el ángulo que hace la velocidad,  $v$ , del bote con respecto a la orilla?

c) ¿Cuánto tiempo le tomará al bote para alcanzar al niño?

8. El avión  $A$  vuela hacia el Norte con velocidad horizontal constante de 500 km/h. El avión  $B$  vuela hacia el Sudoeste a la misma altura con velocidad de 500 km/h, como muestra la Fig. 6.29 Tomando como sistema de referencia  $A$ , determina la magnitud  $v_r$  de la velocidad aparente o relativa de  $B$ . Hallar también la magnitud de la velocidad aparente  $v_a$  con que  $B$  parece moverse lateralmente o normal a la línea central de  $A$ .

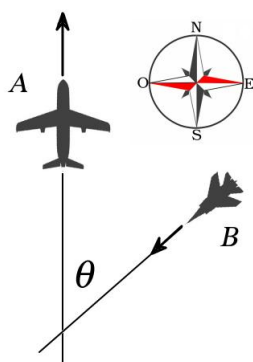
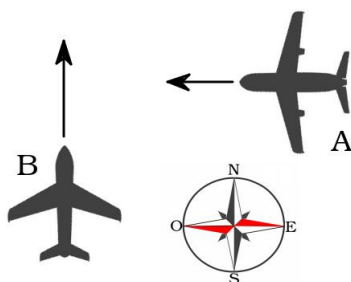


Figura 6.29: Dos aviones volando a  $45^\circ$

9. El avión  $A$  vuela hacia el Oeste con una velocidad  $v_A = 600$  km/h, mientras que el avión  $B$  vuela hacia el Norte con una velocidad  $v_B = 400$  km/h aproximadamente a la misma altura, como muestra la Fig. 6.30 Determina la magnitud y dirección que la velocidad que el avión  $A$  parece tener para un pasajero situado en el  $B$ .

Figura 6.30: Dos aviones volando a  $90^\circ$ 

10. Un bote de vela está bordeando a barlovento en dirección Nordeste con viento del Norte. La corredera registra una velocidad del casco de 6,5 nudos, como muestra la Fig. 6.31. El axiómetro (cordel ligero atado al aparejo) indica que la dirección aparente del viento forma  $35^\circ$  con el eje del bote. ¿Cuál es la verdadera velocidad del viento  $v_v$ ?

Ayuda: 1 nudo = 1.852 km/h.

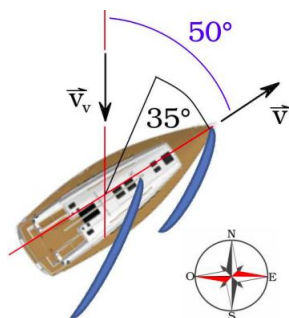


Figura 6.31: Barco a vela

11. Desde el techo del carro de un tren que está acelerando hacia el norte a una razón de  $2,5 \text{ m/s}^2$  se suelta y cae un perno. ¿Cuál es la aceleración del perno con respecto a:

- el carro del tren?
- la estación?

12. En un sueño, José Miguel, un estudiante del Departamento de Física, se pasea sobre el vagón de un tren que viaja a lo largo de una vía horizontal recta a una rapidez constante de  $v \text{ m/s}$ . José Miguel lanza una pelota al aire a lo largo de una trayectoria que inicialmente forma un ángulo de  $\theta$  con la horizontal y está en línea con la vía. El profesor del estudiante, que está parado cerca sobre la tierra, observa que la pelota sale verticalmente. ¿Qué altura subirá la pelota?

13. Un nadador recorre una piscina de 100 m en 2 min. Va a nadar en un río observando antes de lanzarse al agua, que un trozo de madera que flota en ella recorre 20 m en 1 minuto. Calcula el tiempo que tardará el nadador en recorrer 100 m en el río, según vaya a favor o en contra de la corriente.

14. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23,4 m.

- a) Calcular la velocidad del agua sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.  
b) Si la canoa marcha a lo largo del río, determina el camino recorrido en 1 minuto según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.

15. Durante la Segunda Guerra Mundial, el submarino alemán U-531<sup>9</sup> dispara un torpedo a un carguero en el Atlántico Norte. El torpedo viaja a 27 nudos al Noroeste. El carguero, por otro lado, viaja a 7 nudos 30° S del E. ¿Cuál es la velocidad del torpedo en relación con el carguero?

16. Un pez nada en un plano horizontal tienen una velocidad  $\vec{v} = (4\hat{x} + \hat{y})$  m/s en un punto en el océano cuyo vector de posición es  $\vec{r} = 10\hat{x} - 4\hat{y}$  relativo a una roca estacionaria en la orilla. Después de que el pez nada con aceleración constante durante 20,0s, su velocidad es  $\vec{v}' = (10\hat{x} - 5\hat{y})$  m/s.

- a) ¿Cuáles son los componentes de la aceleración?  
b) ¿Cuál es la dirección de la aceleración con respecto al eje fijo?  
c) ¿Dónde está el pez en  $t = 25$  y en qué dirección se está moviendo?

17. Un avión ligero alcanza una velocidad de 500 km/h. El piloto se dirige a un destino a 800 km hacia el Norte, pero descubre que el avión debe dirigirse a 20,0° al Este del Norte para volar allí directamente. El avión llega a las 2,00 h. ¿Cuál fue el vector de velocidad del viento?

18. Un tren pasa por una estación a 30 m/s. Una bola rueda sobre el piso del tren con velocidad de 15 m/s dirigida: a) en la dirección del movimiento del tren; b) en sentido opuesto al anterior; c) en dirección perpendicular a la del movimiento del tren. Encuentra en cada caso la velocidad de la bola respecto a un observador parado en el andén de la estación.

19. La cinta transportadora de viajeros de un aeropuerto tiene una longitud de 100 m y avanza a una velocidad de 1,5 m/s. Una persona se mueve sobre la cinta con una velocidad relativa a ella de 1,2 m/s. Determina el tiempo que estará la persona sobre la cinta cuando:

- a) camina en dirección del movimiento de la cinta;  
b) cuando camina en sentido opuesto.

20. Una persona sube por una escalera mecánica, que se encuentra parada, en 80 s. Cuando la escalera está en funcionamiento, puede subir a la persona en 50 s. ¿Cuánto tiempo emplearía en subir la persona caminando por la escalera en movimiento?

21. En la Fig. 6.32 se muestra un automóvil A que está tomando una curva de 60 m de radio con velocidad constante de 48 km/h. Cuando éste pasa por la posición indicada, un automóvil B está a 30 m del cruce y está acelerado hacia el Sur a razón de  $1,2 \text{ m/s}^2$ . Determina la aceleración que parece tener A cuando se observa desde B en ese instante.

22. El vehículo A da vuelta en una curva de radio 134 m con una velocidad de 48 km/h. En el instante indicado, el coche B se mueve a 72 km/h pero disminuye su velocidad a razón de  $3 \text{ m/s}^2$ . Determina la velocidad y aceleración del coche A observadas desde el coche B.

23. Un automóvil viaja con una velocidad de 54 km/h bajo la lluvia que cae verticalmente. Los pasajeros del automóvil observan que las gotas de lluvia dejan trazas en las

<sup>9</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/German\\_submarine\\_U-531](https://en.wikipedia.org/wiki/German_submarine_U-531)

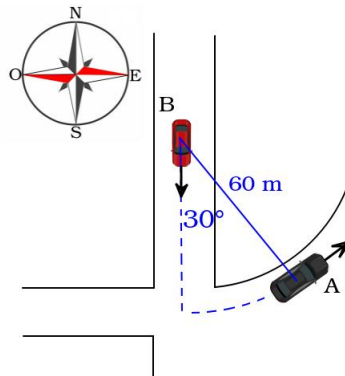


Figura 6.32: Dos vehículos

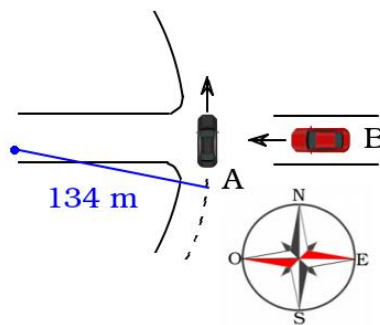


Figura 6.33: Dos vehículos

ventanas laterales formando un ángulo de  $50^\circ$  con la vertical. Calcula la velocidad de las gotas de lluvia con respecto al automóvil y con respecto a la Tierra.



## 7. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

El concepto de fuerza está muy metido en nuestras mentes porque es lo que usamos para mover objetos desde que llegamos a este mundo. Aún así, es un concepto lleno de concepciones equivocadas. Por ejemplo, de nuestra experiencia diaria normalmente creemos que los objetos se mueven sólo si existe una fuerza que los obliga a hacerlo.

Fuerza es un concepto fundamental de mecánica, la mecánica es básica en la física, por eso es importante saber qué es una fuerza, cómo se trabaja con fuerzas, como actúan las fuerzas, qué efectos producen, etc.

Pero no es un concepto fácil, a pesar de la cercanía que tenemos con él. Por ejemplo, un listado de errores comunes respecto de las fuerzas es el siguiente:

1. La fuerza está asociada con el cuerpo hasta que está en movimiento.
2. Cuando un cuerpo está en reposo, no hay fuerzas actuando sobre él.
3. La fuerza siempre está en la misma dirección que la velocidad del cuerpo.
4. Si la velocidad está cambiando, entonces la fuerza también está cambiando.
5. La fuerza centrípeta y la fuerza centrífuga actúan sobre un cuerpo moviéndose uniformemente en un círculo.
6. Las fuerzas de acción-reacción actúan sobre el mismo cuerpo.
7. Sólo las cosas animadas como las personas y los animales ejercen fuerzas; Los pasivos como las mesas, los pisos no ejercen fuerzas.
8. Los objetos más grandes ejercen, en todo evento, mayor fuerza que los objetos pequeños.

### 7.1 Leyes de Newton

Isaac Newton postuló sus tres leyes de la dinámica en 1687, en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios matemáticos de la filosofía natural). Con

ello cambió la forma de comprender el mundo. Fué una verdadera revolución, al dar la bases para construir mejores máquinas. Aún así, es curioso que su construcción se basa en términos fundamentales que no quedan definidos, es decir, fuerza, tiempo, posición y masa, pero que se da por sentado que se sabe lo que son.

En Principia, las leyes de la dinámica se plantean como axiomas matemáticos, donde un rol principal lo juegan los sistemas de referencia inerciales, que Galileo ya había considerado. Recuerda que un sistema de referencia inercial es un sistema que está en **reposo relativo o moviéndose con velocidad constante respecto de otro**.

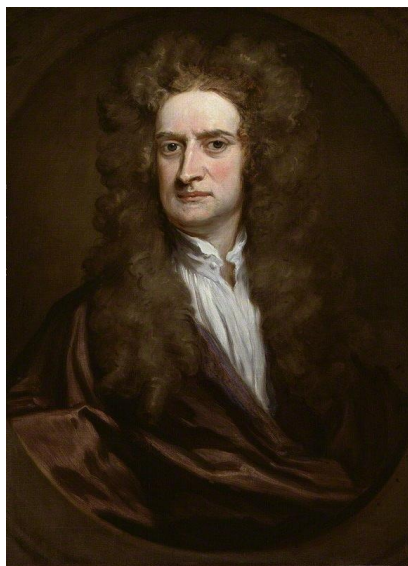


Figura 7.1: Retrato de Sir Isaac Newton, 1702.

### Primera Ley (ley de inercia):

En un sistema de referencia inercial, un objeto permanece en reposo o continúa moviéndose a una velocidad constante, a menos que actúe sobre él una fuerza.

De acuerdo a la Primera Ley una fuerza es lo que cambia el **estado de reposo** o **estado de movimiento** uniforme de un cuerpo.

Podemos repensar esta ley de un modo distinto: como la definición de un sistema inercial.

### Segunda Ley:

En un marco de referencia inercial, la suma vectorial de las **fuerzas externas** que actúan sobre un objeto, la denominada **fuerza neta**, es igual al cambio en el tiempo del **momentum lineal**,  $\vec{p}$ :

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (7.1)$$

donde el momentum lineal **se define** en la Mecánica de Newton como

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}. \quad (7.2)$$



En la segunda ley aparece la masa del objeto. Es un parámetro que da cuenta de la propiedad de **inercia**. Esta es la propiedad de un objeto que resiste los cambios en su movimiento. Por ejemplo, es difícil empujar un automóvil incluso en terreno plano y en ausencia de fricción; es igualmente difícil detenerlo una vez que se está moviendo.

**Observaciones importantes:**

a) En la definición de la ley de Newton hemos incluido sólo las fuerzas externas. Luego veremos por qué.

b) En esta ley los objetos sobre los que actúan las fuerzas deben considerarse puntuales, aunque estemos considerando un camión.

c) La definición de momentum lineal cambia en la Teoría de la Relatividad de Einstein. Sin embargo, la forma de la segunda ley de Newton no cambia.

A partir de la segunda ley podemos hacer uso de **análisis dimensional** para saber en qué unidades se mide la fuerza.

Dado que la dimensión del momentum lineal es  $[p] = \text{kg m/s}$  y en la Ec. (13.86) el momentum aparece “dividido” por el tiempo, tenemos que

$$[F] = \text{kg m/s}^2 \equiv \text{N} = \text{Newton}.$$

Así es la unidad SI de fuerza se ha denominado Newton, en honor a Sir Isaac Newton, y se denota por una  $N$  mayúscula. ¡No la confunda con la fuerza normal!

Como ya sabe derivar, nota que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\{m\vec{v}\}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (7.3)$$

Esto nos muestra que la segunda ley de Newton permite analizar la dinámica de fenómenos en donde la masa cambia en el tiempo (por ejemplo, el de un camión arenero al que se le va cayendo la carga).

Si la masa del sistema permanece constante en el tiempo, el primer término del lado derecho es cero y la segunda ley se convierte en

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (7.4)$$

Curiosamente, esta expresión **no aparece** en el Principia Mathematica.

**Tercera ley:** Cuando un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo cuerpo, el segundo cuerpo ejerce sobre el primero, **simultáneamente**, una fuerza igual en magnitud, en sentido contrario y sobre la misma línea de acción.

Notar que nada se dice de que los cuerpos deben estar en contacto para que se cumpla la tercera ley.

La simultaneidad es importante y está relacionada con la idea de Newton de que había un tiempo universal, absoluto, el mismo para todos los observadores. Para Newton, la transmisión de las fuerzas entre cuerpos ocurre de modo instantáneo. Por supuesto, todo esto cambió con la Teoría de la Relatividad de Einstein, donde el concepto de simultaneidad es relativo.

## 7.2 Tipos de Fuerzas

Existen muchos tipos de fuerzas. Aparte de fuerzas producidas por agentes externos como máquinas o personas, consideraremos cuatro tipos de fuerza:

a) **Fuerza de peso.** La fuerza de peso, o simplemente peso, denotada por  $\vec{P}$ , está definida como

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (7.5)$$

Ésta es la fuerza con la que la Tierra (o cuerpo celeste) ejerce sobre un objeto que se sitúa cerca de su superficie. Es una fuerza que apunta hacia el centro de la Tierra, pero que cerca de la superficie terrestre la observamos como una fuerza vertical, es decir, perpendicular a la superficie. Eso se debe a que **localmente** la Tierra es plana.

Cuando estudiemos la Ley de Gravitación Universal de Newton veremos esta fuerza más en detalle.

b) **Fuerza normal.** Es la **fuerza de reacción** que ejerce una superficie sobre un cuerpo que se encuentra apoyada sobre ella. Se denomina normal, porque esta reacción resulta perpendicular a la superficie de apoyo, **sin importar como esté ubicada esta superficie**. Se denota por  $\vec{N}$ .

c) **Fuerza de tensión** o simplemente, tensión. Es una fuerza que asociaremos a cuerdas tensas. Las cuerdas a considerar en este libro son **cuerdas ideales**, esto es, **cuerdas sin masa e inextensibles**. Se denota como  $\vec{T}$ .

d) **Fuerza de roce o fricción**, Es una fuerza que aparece cuando dos superficies están en contacto. La denotamos  $\vec{f}_r$ .

e) **Fuerza elástica que satisface la Ley de Hooke.** Es una fuerza que se origina en el desplazamiento de los átomos que forman la estructura de un determinado material. La denotamos  $\vec{F}_e$ .

Las últimas dos fuerzas son suficientemente importantes como para dedicarles atención especial.

### 7.2.1 Fuerza de fricción

La fricción es un fenómeno muy importante en la física aplicada e ingeniería, porque es vital para mover objetos, pero también porque produce desgaste de partes en sistemas móviles.

A pesar de haberse estudiado durante siglos, es una fuerza cuyo origen **aún no es completamente comprendido desde primeros principios**.

En las teorías actuales se supone que la fricción se origina ya sea por una dinámica de contacto o por procesos interfaciales a escala atómica dentro del área de contacto.

Las fuerzas de roce que consideraremos son:

a) **de deslizamiento**, cuando las superficies se mueven una respecto de la otra.

Al deslizar objetos sólidos, solo una parte muy pequeña del área de contacto aparente está en contacto. Los contactos se pueden ver en varias escalas, desde la escala de milimétrica hasta la dimensión atómica,

b) **de rodadura**, cuando un cuerpo, al menos, rueda sobre otro, sin deslizar, es decir, sin velocidad relativa entre ellos.

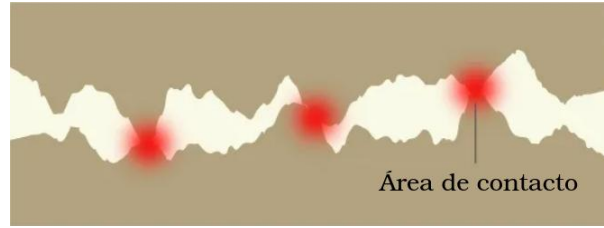


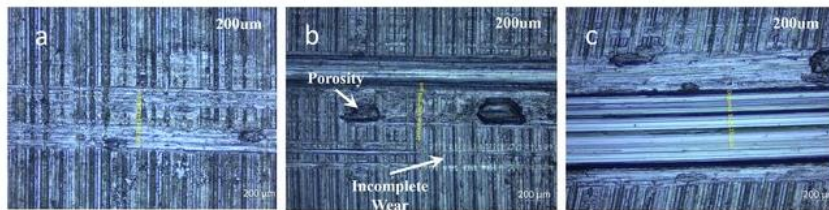
Figura 7.2: Esquema de los contactos entre dos superficies

La Fig. 7.2 muestra esquemáticamente los contactos que se producen entre dos superficies. Claramente no es un continuo.

En la Fig. 7.3 se muestran fotos del resultado del contacto entre dos superficies bajo diferentes fuerzas de compresión.<sup>1</sup>

Por ahora, sólo consideraremos situaciones donde hay deslizamiento. Cuando veamos el tema de dinámica de sólido rígido estudiaremos el caso de rodadura.

### Aluminio-Aluminio



### Aluminio-Cobre

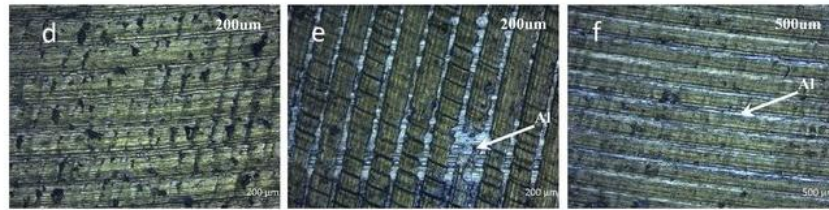


Figura 7.3: Topología de superficies Al-Al y Al-Cu para diferentes compresiones, de 5 N a 50 N

En la Fig. 7.4 se muestra el resultado de un experimento donde se aplica una fuerza externa  $\vec{F}$  sobre un cuerpo que está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. Existe un intervalo de tiempo durante el cual la fuerza aumenta. En esta etapa el cuerpo no se mueve. De acuerdo a la segunda ley de Newton, necesariamente debe ocurrir que la suma de todas fuerzas externas debe ser cero:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \vec{0}. \quad (7.6)$$

Es decir, si fijamos la atención por un momento sólo en las fuerzas que actúan a lo largo del eje  $x$ , horizontal

$$\vec{F} + \vec{f}_r^e = \vec{0}, \quad (7.7)$$

<sup>1</sup>Time and Load-Dependence of Triboelectric Effect, Pan et al, Scientific Reports 8, 2018

donde  $\vec{f}_r^e$  es la fuerza de roce estático. Esta ecuación nos indica que la **fuerza de roce es opuesta a la fuerza aplicada de modo paralelo a la superficie de contacto**.<sup>2</sup> Debemos notar, como muestra la figura, que la magnitud de esta fuerza depende del módulo de la fuerza aplicada; **no es constante**. Notamos también que esta fuerza alcanza un máximo y después su valor cae muy rápidamente. Este intervalo de tiempo es típicamente corto, así que en este libro no lo consideraremos. En todo el intervalo de tiempo mostrado, **el cuerpo no se ha movido** macroscópicamente.

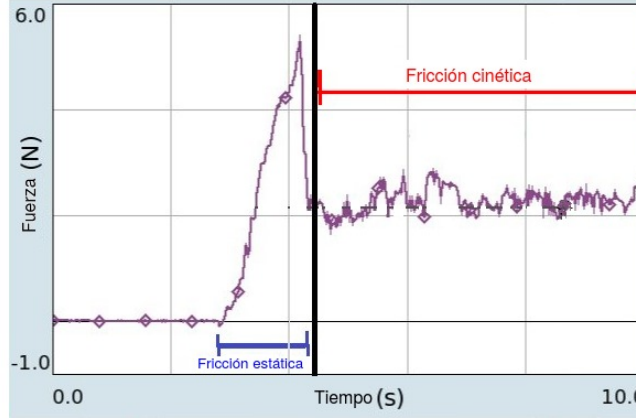


Figura 7.4: Experimento que muestra fuerza aplicada sobre un cuerpo en función del tiempo

Se demuestra experimentalmente que **el máximo del módulo** de esta fuerza de roce es proporcional al **módulo** de la normal,  $N$ ,

$$f_{rmax}^e = \mu_e N, \quad (7.8)$$

donde  $\mu_e$  se denomina **coeficiente de roce estático**. El coeficiente de roce estático es una medida macroscópica de lo que desconocemos a nivel microscópico y por lo tanto depende de las características de los materiales que se están tocando. En ese sentido, es una cantidad promediada.

De modo más general, como notamos observando la figura, tenemos que

$$f_r^e \leq \mu_e N. \quad (7.9)$$

Observamos que después de la caída en valor de la fuerza de roce estático, la fuerza de roce se mantiene, en promedio, constante. Experimentalmente se encuentra que el **módulo** de esta fuerza de roce es proporcional al **módulo** de la normal,  $N$ ,

$$f_r^k = \mu_k N, \quad (7.10)$$

donde  $\mu_k$  se denomina **coeficiente de roce cinético**.

Si el movimiento ocurre con velocidad constante, entonces se debe satisfacer, por la segunda ley de Newton, que

$$\vec{F} + \vec{f}_r^k = \vec{0}, \quad (7.11)$$

<sup>2</sup>En atención a las Figs. 7.2 y 7.3, esto claramente es un aproximación, ya que las fuerzas que originan la fricción no son paralelas a la superficie siempre

que indica que la fuerza de roce cinético es una fuerza opuesta a la fuerza paralela a la superficie de contacto.

### 7.2.2 Fuerza elástica que satisface la Ley de Hooke

Robert Hooke <sup>3</sup> fue un físico experimental inglés de gran talento, tanto que era contratado por sus pares para que creara y manejara instrumentación para sus experimentos.

En 1665 hizo público sus resultados experimentales que daban cuenta de que para deformaciones relativamente pequeñas de un objeto, el desplazamiento o tamaño de la deformación es directamente proporcional a la fuerza o carga de deformación. Esta ley de fuerza se conoce Ley de Hooke y es el primer ejemplo clásico de una explicación de la **elasticidad**, que es la propiedad de un sólido que hace que recupere su forma original, o parte de ella, después de ser deformado. Para cuerpos que satisfacen la ley de Hooke, el objeto vuelve a su forma y tamaño originales al retirar la carga. Este comportamiento elástico de los sólidos puede explicarse a nivel microscópico: resulta que pequeños desplazamientos de sus moléculas o átomos desde posiciones de equilibrio también son proporcionales a la fuerza que causa el desplazamiento.

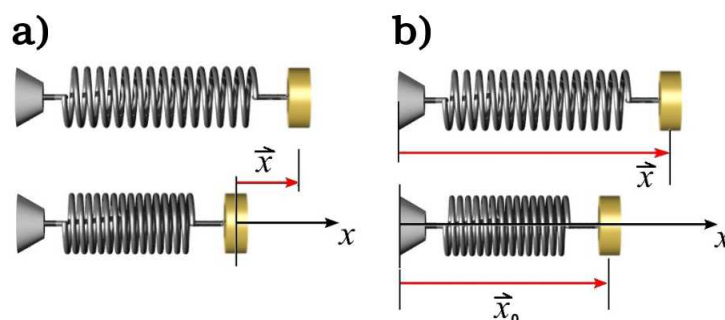


Figura 7.5: a) Resorte que se elonga, con sistema de referencia en el punto de equilibrio; b) Resorte que se elonga, con sistema de referencia en la base del resorte

Si bien esta fuerza no está asociada únicamente a resortes, es usual usar un resorte que se comprime o se expande para representarla, como muestra la Fig. 7.5.

La ley de Hooke se expresa matemáticamente como

$$\vec{F}_e = -k\vec{x}. \quad (7.12)$$

En esta expresión,  $\vec{x}$  es el **vector desplazamiento desde la posición de equilibrio**; esto significa que el sistema de referencia se ubica en la posición en que el cuerpo está en equilibrio.  $\vec{F}_e$  es una **fuerza restauradora**, lo que significa que apunta en sentido contrario al desplazamiento y con eso resulta que el objeto se mueve, o intenta moverse, hacia la posición de equilibrio. La constante  $k$  da cuenta de las propiedades elásticas del medio y se denomina **constante elástica o constante del resorte**.

Podríamos haber elegido otro sistema de referencia, no en la posición de equilibrio del cuerpo de interés, tal que en ese sistema de referencia la posición del cuerpo está definida

<sup>3</sup><https://makingscience.royalsociety.org/s/rs/people/fst00009590>

por el vector de posición  $\vec{x}_0$ , como muestra la Fig. 7.5 b). Entonces, la ley de Hooke se escribe

$$\vec{F}_e = -k(\vec{x} - \vec{x}_0), \quad (7.13)$$

donde ahora  $\vec{x} - \vec{x}_0$  es el vector desplazamiento desde la posición de equilibrio.

### 7.3 Diagrama de cuerpo libre

Diagrama de cuerpo libre es un diagrama que se utiliza para ubicar, y luego dibujar, todas las fuerzas externas que actúan sobre él o los cuerpos que componen el sistema en estudio. Sirve para ordenar el trabajo, previo a aplicar la segunda ley de Newton.

A continuación muestro algunos ejemplos de diagramas de cuerpo libre, para distintas situaciones usuales. La idea es que los comprendas y te sirvan de punto de partida para comprender y practicar cómo hacer distintos diagramas de cuerpo libre. **¡La intención no es que te los aprendas de memoria!**

#### 1) cuerpo que descansa sobre una superficie horizontal.

En la Fig. 7.6 aparece un círculo de color negro en el centro del cuerpo. Sin definirlo con precisión aún, cuando el cuerpo tiene una densidad uniforme, ese punto se denomina **centro de masa**. En ese punto **parece** concentrarse toda la masa del objeto. **La fuerza de peso actúa en el centro de masa.**

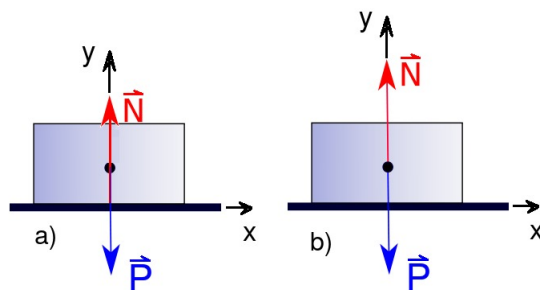


Figura 7.6: Diagrama de cuerpo libre para cuerpo que descansa sobre superficie horizontal

En esta figura aparece también la fuerza normal. Como ya se mencionó, esta fuerza representa la reacción de la superficie sobre el cuerpo que se apoya sobre ella. Por lo tanto, lo correcto es ubicar el origen del vector correspondiente en la zona de contacto, cuidando que la dirección del vector pase por el centro de masa, como se muestra en la figura a). ¿Por qué? Porque en ese punto **parece** concentrarse toda la masa del objeto.

En la figura b) aparece un esquema parecido, usual en algunos libros, en donde se ha supuesto que el vector fuerza normal es un vector libre y por tanto se puede mover a lo largo de la dirección en que se aplica. Si bien no es un diagrama incorrecto, **en este libro no trabajaremos de ese modo**, porque, entre otras cosas, pronto aprenderán dinámica de sólido rígido y es mejor acostumbrarse desde ya a ubicar correctamente las fuerzas.

#### 2) cuerpo en reposo sobre una superficie que forma un ángulo $\theta$ con la horizontal.

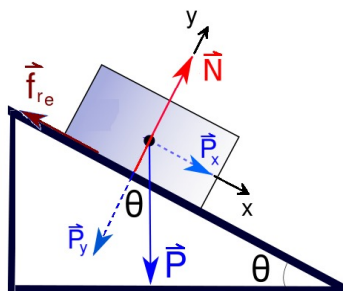


Figura 7.7: Diagrama de cuerpo libre para cuerpo que descansa sobre superficie inclinada

Este es el famoso plano inclinado, como muestra la Fig. 7.7. Famoso, porque fue Galileo Galilei quien tuvo la genial idea de utilizarlo para experimentar con la caída de objetos, en una época en que no existía la tecnología para medir tiempos cortos. En casa prueba con una bola pequeña y permite que ruede por un plano inclinado, con distintos ángulos de inclinación. Verás como puede manejar el tiempo de caída.

¿Cómo podríamos argumentar para afirmar, a partir del diagrama, que el cuerpo está en reposo? Piensa.

Observa que:

- i) la fuerza normal es **normal a la superficie de contacto**.
- ii) la fuerza de peso **actúa en el centro de masa** y es vertical. En la figura se muestra también la descomposición del vector peso, en sus componentes cartesianas. Este último paso no corresponde al diagrama de cuerpo libre, pero es útil de agregar, previendo los pasos posteriores.
- iii) la fuerza de roce actúa sobre el cuerpo, en la superficie de contacto. Notar que apunta en sentido contrario a la componente  $x$  del peso.
- iv) hemos elegido el sistema de referencia tal que su eje  $x$  es paralelo a la superficie del plano inclinado. Por supuesto, puedes elegir el sistema de referencia inercial que te plazca. La experiencia muestra que un sistema de referencia así elegido hace la vida más fácil. Por supuesto, para que ganes experiencia, es bueno enfrentar el problema dado de formas distintas y comparar los cálculos.
- v) algo en lo que debes poner atención y practicar hasta que lo comprendas muy bien es cómo el ángulo de elevación del plano inclinado se copia en distintas partes del diagrama de cuerpo libre.

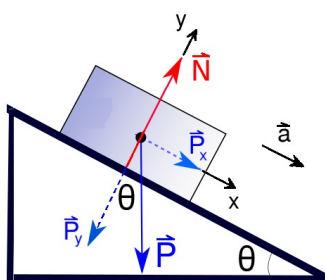


Figura 7.8: Cuerpo moviéndose aceleradamente sobre un plano inclinado sin roce



A propósito de plano inclinado, la siguiente es una cita del libro de R. Shankar, *Fundamentals of Physics*, Vol. 1:

*Now we are going to do the one problem that has sent more people away from physics than anything else. It is called the inclined plane. A lot of people who do not remember where they were during the Kennedy assassination say, I remember the day I saw the inclined plane; that's the day I decided I'm not going into physics. This is very bad publicity for our field. You come into a subject hearing about relativity and quantum mechanics, and we hit you with this. So why am I still doing this? Because this is the entry ticket into the business. It is inconceivable to me that you could understand more advanced topics without being able to understand this one. Go ahead and mock the inclined plane, but only after you can prove you have mastered it.*

¡Así que nada de andarse burlando del plano inclinado!

### 3) cuerpo sobre un plano inclinado, sin roce, moviéndose aceleradamente.

En la Fig. 7.8 se muestra el diagrama de cuerpo libre para esta situación. Observa que se ha puesto información adicional en el diagrama de cuerpo libre: el vector aceleración. Esta información no pertenece estrictamente al diagrama, pero es importante para ubicar correctamente las fuerzas.

¿Por qué crees que es útil? Piensa.

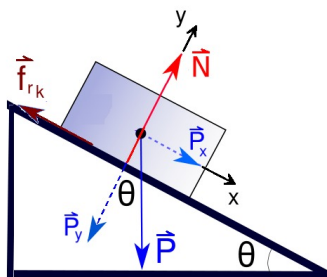


Figura 7.9: Cuerpo moviéndose de algún modo sobre un plano inclinado con roce

### 4) cuerpo sobre un plano inclinado, con roce, moviéndose de algún modo no especificado.

Esta situación se muestra en la Fig. 7.9. ¿Qué opciones ves para el movimiento?

### 5) dos cuerpos unidos por una cuerda ideal, tensa, que pasa por una polea. Uno de ellos cuelga y el otro yace sobre un plano inclinado, sin roce.

Esto se muestra en la Fig. 7.10.

Nota que no se ha indicado las opciones de movimiento del sistema.

¿Cuántas opciones de movimiento ves? Piensa.

**Es importante recalcar lo siguiente:** la elección del tipo de movimiento que ejecutan los cuerpos debe ser consistente. Esto significa en este caso que no se puede elegir, por ejemplo, que el cuerpo sobre el plano inclinado baja y al mismo tiempo, que el cuerpo que cuelga también baja. O que el cuerpo que cuelga baja con velocidad constante, mientras que el que se desliza por el plano lo hace aceleradamente.



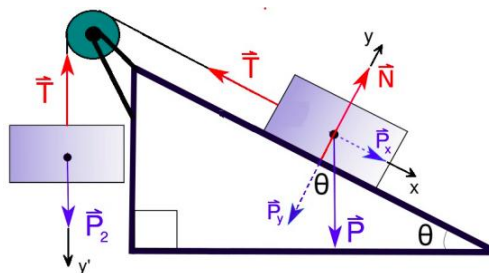


Figura 7.10: Cuerpos unidos por polea ideal

Por ahora, las poleas que utilizaremos son **poleas ideales**, es decir sin masa. Se puede demostrar, y lo haremos cuando estudiemos el tópico de dinámica de cuerpo rígido, que las **poleas ideales sólo transmiten la fuerza de tensión, cambiando su dirección, pero sin cambiar el módulo**, como se ejemplifica en la Fig. 7.10.

Recuerda que en un diagrama de cuerpo libre se deben poner todas las **fuerzas externas** actuando sobre el cuerpo de interés. En este caso tenemos dos cuerpos de interés. Si estuviésemos interesados, además, en la polea, deberíamos incorporar también las fuerzas externas que actúan sobre la polea.

Observa que ahora hemos elegido dos sistemas de referencia. Esto es lícito, ya que un sistema de referencia corresponde a un observador.

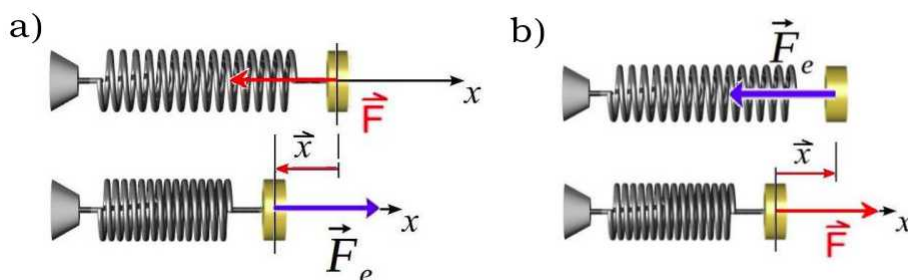


Figura 7.11: Cuerpo elástico comprimido, figura a), y elongado, b), por una fuerza externa

#### 6) cuerpo sobre un plano sin fricción, atado a un resorte elongado y comprimido.

Las Figs. 7.11 a) y 7.11 b) muestran el sentido de la fuerza elástica de Hooke para un sistema elástico comprimido y otro elongado, respectivamente. Claramente esta fuerza es restauradora. No se han indicado las fuerzas de peso y normal.

## 7.4 Pares acción y reacción

En la tercera ley de Newton los pares acción y reacción **actúan en cuerpos distintos, simultáneamente**, con fuerzas igual en magnitud, en sentido contrario y sobre la misma línea de acción.

Para aplicar la tercera ley de Newton a problemas concretos debemos aprender cómo identificar todas las fuerzas; las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo dado y aquellas que son la reacción a esas fuerzas externas, para que no las confunda y/o mezcle.

Para ello veremos cómo reconocerlas, analizando algunos ejemplos.

a) Cuerpo en reposo sobre superficie.

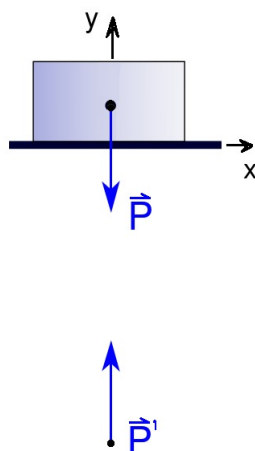


Figura 7.12: Pares acción y reacción correspondientes a la fuerza de peso

### i) Fuerza de peso

La fuerza de atracción gravitacional sobre un cuerpo que se ubica cerca de la superficie terrestre se denomina fuerza de peso, o simplemente peso. Actúa en el centro de masa del cuerpo, un lugar geométrico en el espacio donde parece que toda la masa se concentra. **La reacción a esta fuerza es una fuerza que actúa en el centro de la Tierra (planeta, cuerpo celeste),** marcado como el punto  $P'$  en la Fig. 7.12.

### ii) Fuerza normal

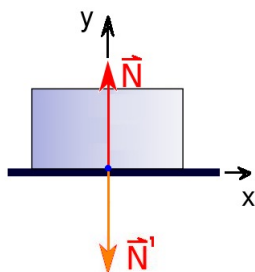


Figura 7.13: Para acción reacción de la fuerza normal

La fuerza normal es la fuerza que una superficie ejerce perpendicularmente sobre un cuerpo que descansa sobre ella.

La reacción  $\vec{N}'$  a esta fuerza es la fuerza que el cuerpo ejerce sobre la superficie.

**Observación:** Uno de los errores comunes que comenten los estudiantes es considerar a la fuerza de peso y la normal como fuerzas que son pares acción y reacción. ¿Por qué es un error? Porque ambas fuerzas actúan sobre el mismo cuerpo.

b) Dos cuerpos atados por una soga **ideal** que cuelgan debido a una fuerza que actúa sobre uno de ellos.

En la Fig. 7.14 se muestran los pares acción y reacción  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_1'$  y  $\vec{T}_2$ ,  $\vec{T}_2'$ .

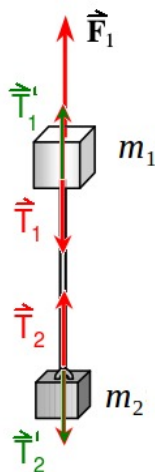


Figura 7.14: Pares acción y reacción de cuerdas tensas

Aquí,  $\vec{T}_1$  es la acción de la cuerda tensa sobre el bloque de masa  $m_1$ .  $\vec{T}_1'$  es la reacción a esta fuerza; es la fuerza que ejerce el bloque  $m_1$  sobre la cuerda.

$\vec{T}_2$  es la acción de la cuerda tensa sobre el bloque de masa  $m_2$ .  $\vec{T}_2'$  es la reacción a esta fuerza; es la fuerza que ejerce el bloques  $m_2$  sobre la cuerda.

Observa que  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$  a su vez son fuerzas que actúan sobre cuerpos diferentes, en la misma dirección y tienen sentidos opuestos. Es la misma cuerda la que ejecuta la acción, así que sus módulos son iguales. Estas tensiones también forman un par acción y reacción.

c) Fuerza de roce, sin importar si es estático o cinético.

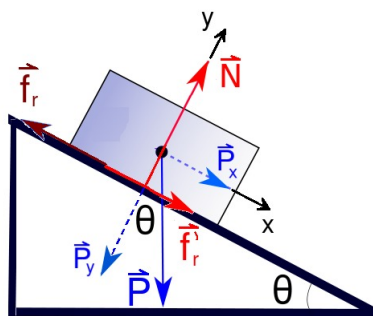


Figura 7.15: Cuerpo sobre plano inclinado

Si el cuerpo está en reposo o se mueve hacia abajo sobre el plano inclinado, entonces la fuerza de roce que actúa sobre el cuerpo, debido a la superficie donde yace, apunta hacia arriba del plano, y la reacción, es decir, la fuerza con la que el cuerpo actúa sobre el plano, apunta hacia abajo, como muestra la Fig. 7.15

d) cuerda que pasa por una polea

En la Fig. 7.16 se muestran las tensiones de una cuerda que pasa por una polea. En general, **para una polea con masa las tensiones son distintas a “ambos lados” de la polea.**

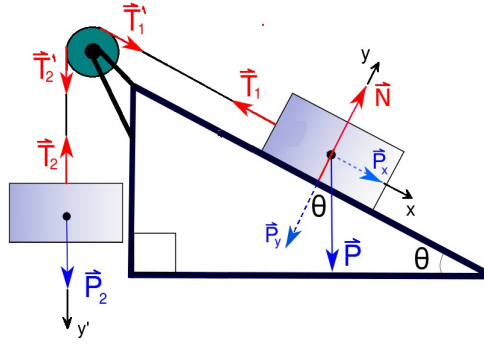


Figura 7.16: Cuerpos atados por cuerda tensa que pasa por polea

Cuando estudiemos dinámica de sólido rígido comprenderemos esta afirmación y demostraremos que cuando la polea no tiene masa, todas las tensiones tienen la misma magnitud.

## 7.5 Estática

Existen muchas aplicaciones de la ingeniería y de la vida diaria en que los cuerpos están en reposo en un sistema de referencia inercial. Este es el ámbito de la estática.

Las ecuaciones que definen la estática son

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \vec{0}. \quad (7.14)$$

Para enfrentar un problema de dinámica en general debemos:

- hacer un buen esquema que describa la situación a estudiar,
- elegir un sistema de referencia inercial,
- hacer un diagrama de cuerpo libre donde se ubican y dibujan todas las fuerzas externas que actúan sobre él o los cuerpos que componen el sistema en estudio.
- escribir las ecuaciones correspondientes, en su forma vectorial, para luego obtener las componentes.

Los dos casos siguientes podrían considerarse ejemplos, pero son de tal importancia, incluso para la dinámica, que prefiero incluirlos en una sección.

### 7.5.1 Resortes en serie

Consideremos dos resortes ideales distintos, con constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , unidos uno seguido del otro. Esto es lo que se llama **resortes en serie**. Suponemos que son elongados por una fuerza externa  $\vec{F}$ , como se muestra en la Fig. 7.17. Determinamos la constante elástica efectiva de este sistema.

Sobre el sistema de resortes hay una fuerza externa actuando y es la misma para ambos resortes. Luego, en equilibrio se satisface

$$\vec{F} + \vec{F}_e = \vec{0} \quad (7.15)$$

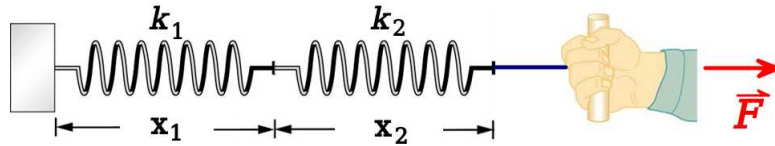


Figura 7.17: Dos resortes en serie, estirados por fuerza externa

para cada resorte. Esto es,

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2. \quad (7.16)$$

Pero resulta que la elongación total es  $x = x_1 + x_2$ . Luego,

$$x = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad (7.17)$$

Esta elongación se debe a una sola fuerza, la externa. Así que  $F = k_{ef}x$  y por lo tanto

$$\frac{F}{k_{ef}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad (7.18)$$

de donde concluimos que la constante efectiva del resorte está dada por

$$\frac{1}{k_{ef}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (7.19)$$

¿A qué se refiere esta constante efectiva?

En la Fig. 7.18 se muestran los dos sistemas, escondido dentro de una caja negra (que he dibujado semi-transparente para diferenciarlos). Lo único que un observador puede medir es la elongación y la fuerza con la que actúa sobre el sistema. Si esa toda la información que se puede recabar, entonces no hay forma de discriminar si hay un resorte con constante elástica  $k_{ef}$  dada por la Ec. (7.19) o has dos resortes con constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$  en el sistema.

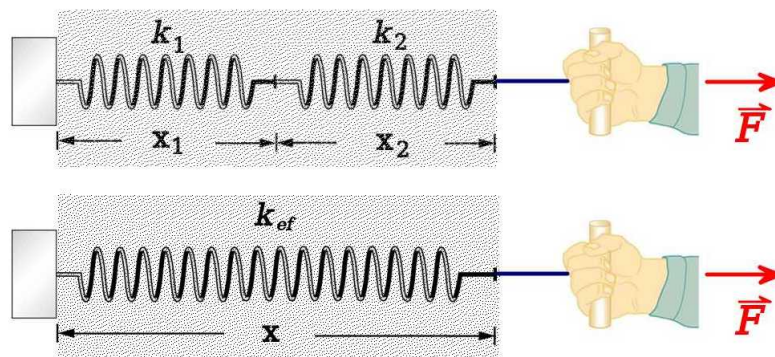


Figura 7.18: Dos resortes en serie, estirados por fuerza externa

### 7.5.2 Resortes en paralelo

Consideremos dos resortes ideales distintos, con constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , unidos uno al lado del otro, en forma paralela, como lo muestra la Fig. 7.19. Esto es lo se llama **resortes en paralelo**. Suponemos que son elongados por una fuerza externa  $\vec{F}$ . Determinamos la constante elástica efectiva de este sistema.

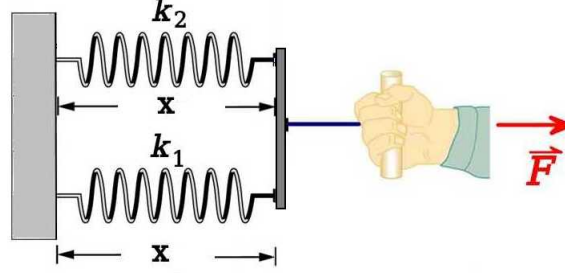


Figura 7.19: Dos resortes en paralelo, estirados por fuerza externa

Sobre el sistema de resortes hay una fuerza externa actuando y es la misma para ambos resortes. Luego, en equilibrio se satisface

$$\vec{F} + \vec{F}_{e,1} + \vec{F}_{e,2} = \vec{0} \quad (7.20)$$

Ambos resortes tiene la misma elongación,  $x$ , como se observa en la figura. Luego,

$$F_{e,1} = k_1 x \text{ y } F_{e,2} = k_2 x. \quad (7.21)$$

Para que la configuración mostrada sea equivalente a una con un solo resorte con constante elástica,  $k_{ef}$ , debe ocurrir que la fuerza

$$\vec{F} + \vec{F}_{e,ef} = \vec{0} \quad (7.22)$$

Es decir,  $F = k_{ef}x$ . Por lo tanto,

$$k_{ef}x = k_1x + k_2x. \quad (7.23)$$

Así, la constante elástica equivalente para un par de resortes dispuestos en paralelo es

$$k_{ef} = k_1 + k_2. \quad (7.24)$$

La interpretación de  $k_{ef}$  es la misma que dada antes: en una medición de solo fuerza y elongación (o compresión), no podríamos dirimir si dentro de una caja oscura hay una configuración de resortes en paralelo o una con  $k_{ef}$ , si esta constante satisface la Ec. (7.24).

Estos dos problemas tienen una prolongación más allá de la mecánica. Resulta, como veremos en el Vol. 2, que existen elementos eléctricos llamados **condensadores**, que sirven para almacenar energía en forma de campo eléctrico en un circuito, que satisfacen las mismas reglas que las constantes elásticas cuando se conectan en serie o en paralelo.

**Ejemplo 1:**

Consideremos un cuerpo de masa 5 kg que yace en reposo sobre un plano inclinado, con ángulo de inclinación igual a  $30^\circ$ . El plano es rugoso y el coeficiente de roce es  $\mu = 0,3$ . ¿Cuál es el valor de la fuerza de roce justo antes de que el cuerpo comience a deslizar?

Hacemos uso de la ventaja de que ya hemos realizado el diagrama de cuerpo libre.

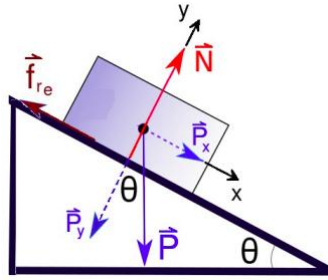


Figura 7.20: Cuerpo sobre plano inclinado, en reposo

**Solución:**

Ya hemos elegido el sistema de referencia. Como el cuerpo está en reposo, se debe satisfacer

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \vec{0}, \quad (7.25)$$

es decir,

$$\vec{N} + \vec{P} + \vec{f}_{re} = \vec{0}. \quad (7.26)$$

Observa que sólo es una suma de vectores; no hay signos menos, tampoco hay componentes.

Ahora escribimos cada uno de los vectores en términos de los vectores unitarios

$$N\hat{y} + P_x\hat{x} - P_y\hat{y} - f_{re}\hat{x} = 0\hat{x} + 0\hat{y}. \quad (7.27)$$

Agrupamos los vectores unitarios

$$\hat{y}(N - P_y) + \hat{x}(P_x - f_{re}) = 0\hat{x} + 0\hat{y}. \quad (7.28)$$

y usando el producto interior o la independencia lineal de los vectores unitarios (base) obtenemos las componentes

$$N - P_y = 0 \quad (7.29)$$

y

$$P_x - f_{re} = 0. \quad (7.30)$$

Dado que el instante en que el cuerpo comienza a moverse y el instante en que la fuerza de roce es máxima son muy cercanos (observa la Fig. 7.4), despreciamos ese intervalo de tiempo. Luego, la fuerza de fricción estática justo antes de que el cuerpo comience a deslizar alcanza el máximo valor. Esto es,

$$f_{re}^{max} = \mu_e N. \quad (7.31)$$

Por lo tanto,

$$f_{re}^{max} = \mu_e P_y. \quad (7.32)$$

Veamos ahora los valores numéricos. Del diagrama de cuerpo libre, tenemos que

$$P_y = P \cos \theta = mg \cos \theta = 5 \cdot 9,8 \cos(30^\circ) = 42,4 \text{ N}$$

y entonces,

$$f_{re}^{max} = \mu_e P_y = 0,3 \cdot 42,4 = 12,7 \text{ N}.$$

### Ejemplo 2:

Consideremos un cuerpo de masa  $M = 5 \text{ kg}$  que cuelga en reposo de dos cuerdas idénticas, como se muestra en la Fig. 7.21. Calcula las tensiones en todas las cuerdas

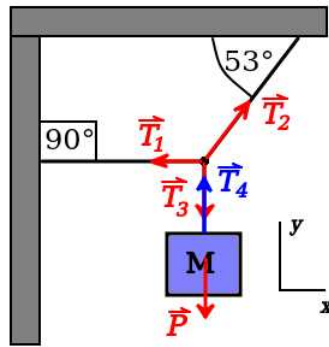


Figura 7.21: Cuerpo colgando de dos cuerdas

### Solución:

Dado que el cuerpo cuelga en reposo, se satisfacen las ecuaciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \vec{0}. \quad (7.33)$$

Aunque no lo parezca a primera vista, tenemos dos cuerpos a los cuales debemos aplicar estas ecuaciones. Uno es obvio: es la masa  $M$  que cuelga. El otro es el nudo donde se juntan las tres cuerdas. Este nudo lo podemos considerar como un cuerpo de masa  $m = 0 \text{ kg}$ .

Aplicando las Ecs . (7.33) obtenemos para el nudo:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0} \quad (7.34)$$

y para la masa,

$$\vec{T}_3 + \vec{P} = \vec{0}. \quad (7.35)$$

Escrita en términos de los vectores unitarios, para el nudo tenemos

$$-T_1 \hat{x} + T_2 \cos(53^\circ) \hat{x} + T_2 \sin(53^\circ) \hat{y} - T_3 \hat{y} = 0\hat{x} + 0\hat{y}, \quad (7.36)$$



mientras que para la masa  $M$

$$-P\hat{y} + T_4\hat{y} = 0\hat{y}. \quad (7.37)$$

Usando el producto interior o la independencia lineal de los vectores unitarios (base) obtenemos las componentes

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 \cos(53^\circ) &= 0 \\ T_2 \sin(53^\circ) - T_3 &= 0 \end{aligned} \quad (7.38)$$

y

$$P = T_4 \implies T_4 = 49 \text{ N} \quad (7.39)$$

Debido a que  $\vec{T}_3$  y  $\vec{T}_4$  forman un par acción y reacción,  $T_3 = 49 \text{ N}$ . Luego,

$$T_2 = \frac{T_3}{\sin(53^\circ)} \implies T_2 = 61,4 \text{ N} \quad (7.40)$$

y

$$T_1 = T_2 \cos(53^\circ) \implies T_1 = 102,0 \text{ N}. \quad (7.41)$$

### 7.5.3 Ejercicios

Para cada ejercicio,

- i) plantea la ecuaciones de la física en su forma vectorial,
- ii) haz un diagrama de cuerpo libre,
- iii) usa un sistema de referencia paralelo al plano inclinado, cuando corresponda.

1. Un bloque de 2 kg desliza a lo largo de un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. El coeficiente cinético es  $\mu_k = 0,9$ . Calcula y dibuja la fuerza paralela al plano inclinado que es necesario para mover el bloque con velocidad constante

- a) hacia arriba.
- b) hacia abajo.

¿Por qué este problema lo podemos considerar dentro de los problemas de estática? Piense.

2. Un bloque de masa  $m$  cae deslizando con velocidad constante a lo largo de un plano inclinado de  $30^\circ$ . Calcula el coeficiente cinético de rozamiento entre el plano inclinado y el bloque.

3. Una viga uniforme y horizontal, cuya longitud es de 6 m y pesa 100N tiene un pivote en la pared con su extremo alejado soportado por un cable que forma un ángulo de  $50^\circ$  con la horizontal. Si una persona que pesa 650 N se sitúa sobre la viga a 1.2 m de la pared. Determina:

- a) La tensión en el cable,
- b) La fuerza de reacción en el pivote.

4. Un bloque de masa  $m_2$  puede deslizar sin rozamiento sobre un plano horizontal. Se coloca un bloque de masa  $m_1$  sobre dicho bloque. El coeficiente estático entre los dos bloques es  $\mu_e$ . ¿Cuál será la máxima fuerza  $\vec{F}$  que podemos aplicar sobre el bloque inferior para que el otro bloque de masa  $m_1$  no deslice?

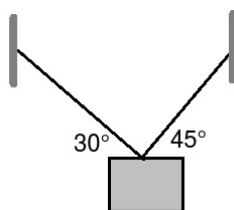


Figura 7.22: Un cuerpo en reposo, colgando de dos cuerdas ideales

5. Alguien ha colgado una masa de 60 kg de dos cuerdas atadas en dos rocas, como se muestra esquemáticamente en la Fig. 7.22. Calcula la tensión sobre cada lado de la cuerda. ¿Cuál de los dos lados es más fácil que se rompa, si las cuerdas son iguales en composición?

6. Una joven malabarista de 50 kg camina por un cable tendido entre dos edificios separados 20 m. Si, cuando está en el centro del cable, éste forma un ángulo de  $10^\circ$  con la horizontal, ¿cuál es la tensión del cable?

7. En la Fig. 7.23 se muestra una rampa con ángulo de inclinación  $30^\circ$ , donde descansa una cuerpo de 12 kg. La rampa no tiene roce.

a) ¿Cuál es la masa máxima que se puede colgar de modo que la masa sobre el plano está a punto de moverse?

b) ¿Cuál es la masa máxima que se puede colgar de modo que la masa sobre el plano se mueve a velocidad constante?

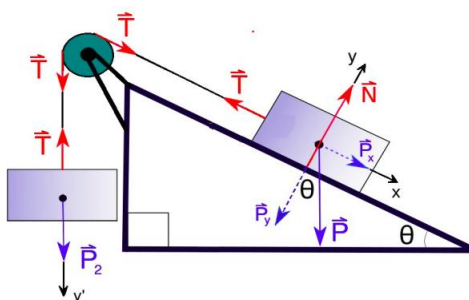


Figura 7.23: Dos cuerpos unidos por cuerda tensa que pasa por polea ideal

8. En el sistema de la Fig. 7.24 se encuentra con un bloque de masa  $m$  igual a 2,5 kg que cuelga de una cuerda ideal de tensión  $T$ . Esta cuerda está unida a dos cuerdas ideales sujetas a superficies horizontal. Encuentra el valor de  $T_a$  y  $T_b$  para que el sistema se mantenga el equilibrio

9. Se cuelga un objeto de masa  $m = 0,5$  kg de un anillo sujeto a un resorte y una soga, como se muestra en la Fig. 7.25. El resorte sin ser elongado tiene una longitud natural  $l_0 = 32$  cm, mientras que cuando sujeta el anillo su longitud es  $l = 36$  cm. Suponemos que la soga es inextensible y su longitud es  $d = 40$  cm. El anillo se ubica a una altura  $h = 20$  cm por debajo de los soportes. Determina:

a) la tensión en la soga, y

b) la constante elástica del resorte, en unidades internacionales.

10. Se cuelga un cuerpo de masa  $m = 0,5$  kg de un anillo sujeto a dos resortes idénticos de longitud natural  $l_0 = 32$  cm, como muestra la Fig. 7.26. Ahora el anillo está ahora a una

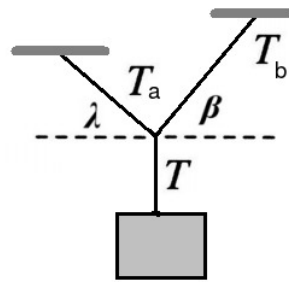


Figura 7.24: Cuerpo que cuelga de cuerdas

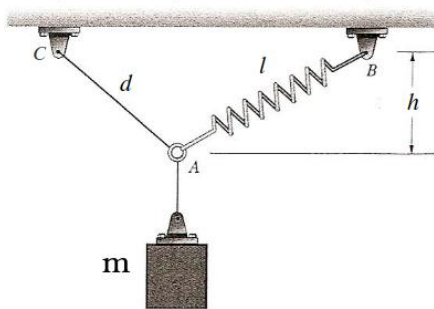


Figura 7.25: Masa que cuelga de cuerda con resorte

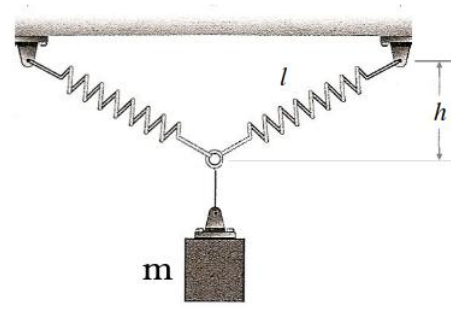


Figura 7.26: Masa que cuelga de dos resortes

distancia  $h = 25$  cm por debajo de los puntos de fijación de ambos resortes. ¿Cuál será la longitud de cada resorte y qué ángulo forman entre sí?

11. En el sistema de la Fig. 7.27 las masas de los cables y poleas son despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre la superficie inclinada y  $m_2$  es  $\mu_e$ , determina las condiciones de movimiento en uno u otro sentido.

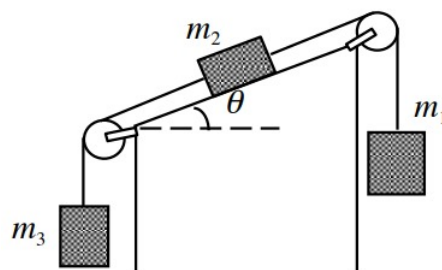


Figura 7.27: Dos cuerpos unidos por cuerda tensa que pasa por polea ideal, unidos a un tercero

12. Dos postes telefónicos están separados por 40 m y conectados por un cable sin masa. Un ave de 0,5 kg de masa aterriza en el cable a medio camino entre los postes, lo que hace que el cable se hunda 2,0 m por debajo de la horizontal. ¿Cuál es la tensión en el cable?

13. Un extremo de un resorte de masa insignificante está unido al techo. Cuando se coloca una masa de 250 g en el extremo libre (sin estirar el resorte) y luego se baja

lentamente hasta que la masa desciende 20,0 cm. ¿Cuál es la constante de resorte  $k$  en N/m?



Figura 7.28: El famoso equipo de rugby neozelandés, All Blacks

14. Para los All Blacks es tiempo de pesaje para aquellos con menos de 85 kg. La báscula de baño utilizada para evaluar la elegibilidad puede describirse según la ley de Hooke. Esta báscula es tal que cuando se exige a su carga máxima de 120 kg, se comprime 0,75 cm.

- ¿Cuál es la constante de resorte efectiva del resorte?
- Un jugador se para en la balanza y la comprime 0,48 cm. ¿Es elegible para jugar en este equipo de menos de 85 kg?

15. Los amortiguadores de una camioneta se pueden modelar como resortes.

- Los 4 resortes de una camioneta actúan como un solo resorte con una constante elástica de  $1,30 \times 10^5$  N/m. ¿Cuánto se deprimirá el camión por su carga máxima de 1.000 kg?
- Si la camioneta tiene cuatro resortes idénticos, ¿cuál es la constante elástica de cada uno?

16. En el esquema de la Fig. 7.29, el bloque de peso  $P$  se mantiene en equilibrio cuando se aplica una fuerza de magnitud  $F = 500$  N en el punto  $B$  del sistema de cables. Determina las tensiones en los cables y el peso  $P$ .

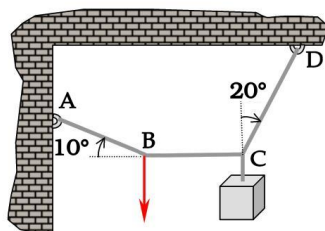


Figura 7.29: Cuerpo que cuelga de cuerdas

17. Un resorte tiene una longitud de 0,2 m cuando una masa de 0,3 kg cuelga de él, y una longitud de 0,75 m cuando se le cuelga una masa de 1,95 kg.

- ¿Cuál es la constante del resorte?

b) ¿Cuál es la longitud natural del resorte?

18. Un cuerpo de masa  $m = 250$  kg está unido al sistema de cables indicado en la Fig. 7.30 y se mantiene en equilibrio en la posición indicada. Determina las tensiones en los cables.

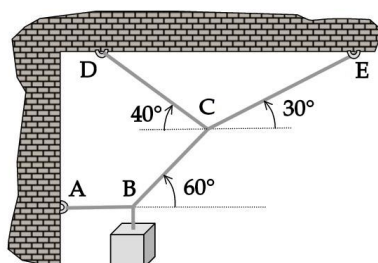


Figura 7.30: Cuerpo que cuelga de cuerdas

19. En el esquema de la Fig. 7.31, un bloque de 600 N de peso cuelga de dos cables y además hay una fuerza externa  $\vec{F}$  que está tirando en un ángulo  $\alpha$  tal que  $\tan \alpha = 4/3$ . Determina:

- el intervalo de valores de la fuerza  $F$  para que ambos cables estén tensos.
- el valor de las tensiones en los cables si el módulo de la fuerza es  $F = 500$  N.

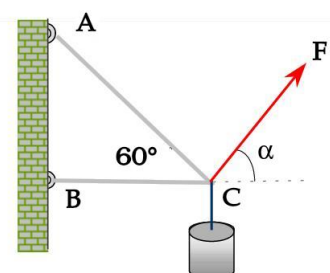


Figura 7.31: Cuerpo que cuelga de cuerdas

20. Una lámpara de 3,5 kg se suspende de dos resortes, donde cada uno tiene una longitud sin elongar 1,2 m y una constante elástica  $k = 100$  N/m, como muestra la Fig. 7.32. Determina el ángulo para la situación de equilibrio.

21. En la Fig. 7.33 muestra dos cuerdas y un resorte elongado que inicialmente tenía una longitud sin elongar de 200 mm. Determina la tensión en las cuerdas si la constante elástica es  $k = 80$  N/m.

22. En la Fig. 7.34 se muestran dos resortes idénticos con longitudes naturales de 250 mm y constante elástica  $k = 1200$  N/m.

- Dibuja el diagrama de cuerpo de cuerpo libre de A y B.
- Determina las masas de los bloques.

23. En la Fig. 7.35 una fuerza vertical de 3.5 kg se aplica al final de una cuerda que en el segmento AB tiene una longitud de 60 cm. La longitud del resorte sin estirar es 60 cm

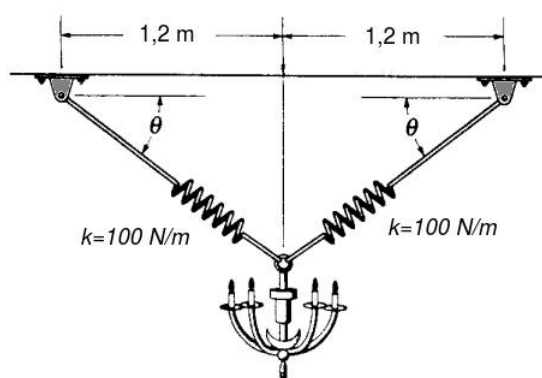


Figura 7.32: Lámpara unida por dos resortes

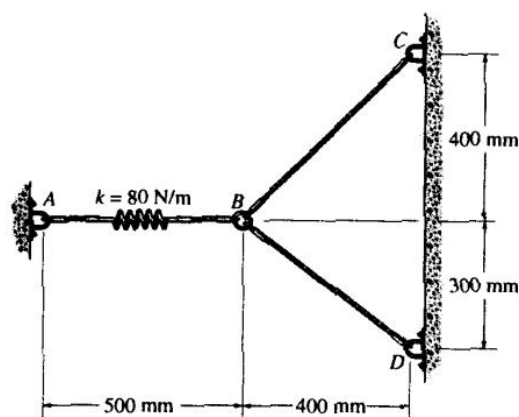


Figura 7.33: Resorte unido a dos cuerdas

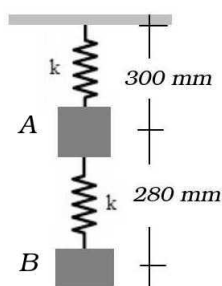


Figura 7.34: Resortes en serie, en posición vertical

y su constante elástica vale  $k = 80 \text{ N/m}$ . Determina el ángulo cuando para la posición de equilibrio.

24. En la Fig. 7.36 una fuerza vertical de  $25 \text{ kg}$  se aplica al final de una cuerda que en el segmento  $AB$ , cuya longitud es  $60 \text{ cm}$ . Esta fuerza causa que el ángulo sea el de equilibrio. Si la constante elástica vale  $k = 150 \text{ N/m}$ , determina la longitud sin elongar del resorte.

**Ayuda:** Usa el teorema del seno.<sup>4</sup>

25. Dos masas inicialmente en reposo se encuentran unidas por una soga inextensible y de masa despreciable, como muestra la Fig. 7.54. Considera que entre  $m_1$  y el plano inclinado hay rozamiento.

- Grafica el diagrama de la partícula libre para las masas  $m_1$  y  $m_2$ .
- Si el coeficiente de rozamiento estático es  $\mu_e = 0,7$  y  $\alpha = 60^\circ$ , ¿cuál es la máxima  $m_2$  para que el sistema esté en equilibrio? Supón que la masa  $m_1$  es conocida.

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Law\\_of\\_sines](https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_sines)

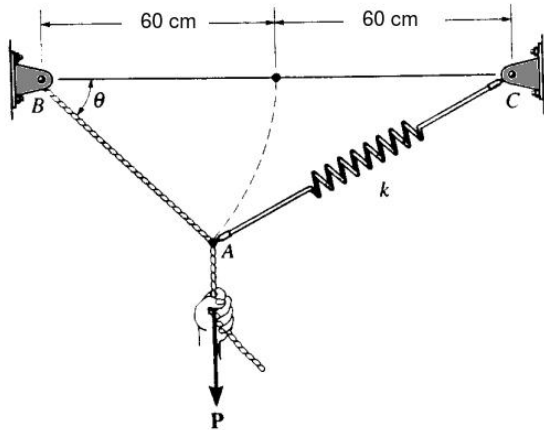


Figura 7.35: Cuerda y resorte

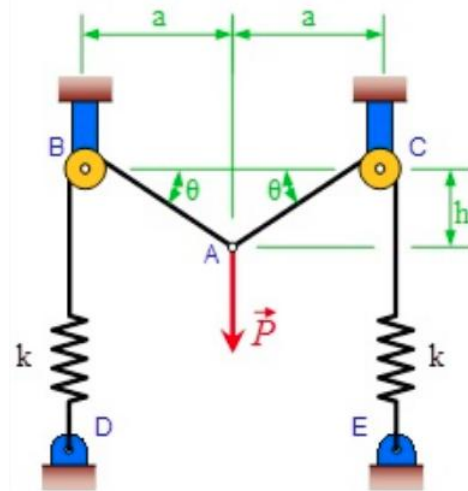


Figura 7.36: Dos resortes unidos por una cuerda ideal

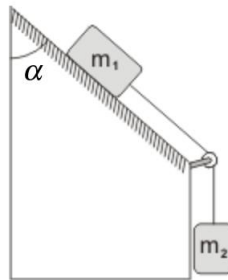


Figura 7.37: Masa sobre plano inclinado atada a cuerda ideal que pasa por polea

## 7.6 Dinámica

La segunda ley de Newton establece que la variación del momentum lineal de un objeto en el tiempo es igual a la **fuerza neta externa** que actúa sobre un objeto:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (7.42)$$

En el caso de sistemas con masa constante, esta ley se convierte

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m\vec{a}, \quad (7.43)$$

que es la ecuación que utilizaremos a partir de ahora.

Dado que ya tenemos todos los conceptos e instrumentos de análisis y de cálculo, podemos comenzar con un ejemplo, para seguir aclarando cómo trabajar de modo seguro.

### Ejemplo 1

Dos bloques de masas  $m_1 = 20 \text{ kg}$  y  $m_2 = 8 \text{ kg}$ , están unidos mediante una cuerda ideal (inextensible y sin masa), como muestra la Fig. 7.38. Se aplica al conjunto una fuerza vertical hacia arriba de 560 N. Calcula:

- a) La aceleración del conjunto;  
 b) Las fuerzas que actúan en los extremos de la cuerda.

**Solución:**

a) En la Fig. 7.38 se muestra el diagrama de cuerpo libre; se ha elegido un sistema de referencia vertical. Hemos incluido en el diagrama la aceleración del sistema de partículas.

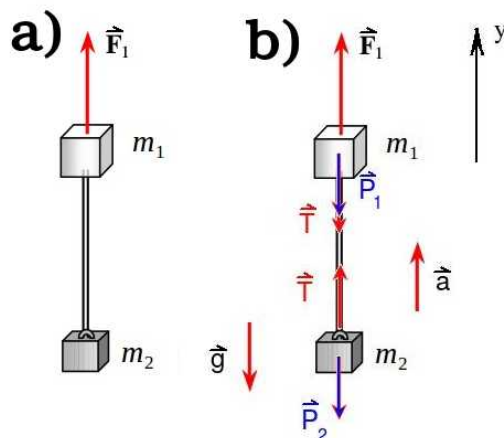


Figura 7.38: a) Dos cuerpos atados a una cuerda, sujetos a una fuerza vertical: b) Diagrama de cuerpo libre y sistema de referencia

La segunda ley

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m\vec{a}.$$

se escribe para este problema

$$\vec{F} + \vec{P}_1 + \vec{T} = m_1 \vec{a} \quad (7.44)$$

y

$$\vec{P}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a} \quad (7.45)$$

para cada cuerpo.

Notar, nuevamente, que en estas expresiones no hay signos menos y que, dado que la cuerda es inextensible, la aceleración es única.

De la Ec. (7.44), con el sistema de referencia elegido, obtenemos

$$F\hat{y} - P_1\hat{y} - T\hat{y} = m_1 a\hat{y}. \quad (7.46)$$

Es decir

$$F - P_1 - T = m_1 a. \quad (7.47)$$

De la Ec. (7.45),

$$-P_2\hat{y} + T\hat{y} = m_2 a\hat{y}, \quad (7.48)$$

o bien,

$$-P_2 + T = m_2 a. \quad (7.49)$$



Sumando las Ecs. (7.47) y (7.49) desaparece la tensión de la cuerda y obtenemos la aceleración. Esto es,

$$a = \frac{F - g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}. \quad (7.50)$$

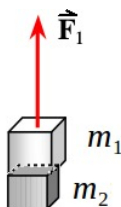


Figura 7.39: Un solo cuerpo, equivalente al sistema anterior

**Observación:** Notamos que la tensión no juega rol alguno en el movimiento del sistema, excepto mantenerlo unido. **La tensión es una fuerza interna** en este problema. Es decir, podríamos cambiar el sistema original por el sistema de la Fig. 7.39, con una masa  $M = m_1 + m_2$  y fuerza de peso  $\vec{P} = M\vec{g}$ , de modo tal que

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = M \vec{a}$$

y el resultado de la aceleración sería el mismo, como podrás chequear en casa.

Este es un ejemplo de por qué la **fuerzas internas** no aparecen en la segunda ley de Newton: ellas se anulan de a pares, debido a la tercera ley.

Obviamente, si queremos conocer la tensión, necesitamos analizar el problema del modo en que hemos partido, con la cuerda incluida.

b) Las fuerzas que actúan en los extremos de la cuerda es la tensión.

Ahora que tenemos la aceleración, podemos usar cualquiera de la ecuaciones (7.47) o (7.49) para obtener la tensión. Así,

$$T = m_2(a + g) = m_2 \left\{ \frac{F - g(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} + g \right\} = m_2 \left( \frac{F}{m_1 + m_2} \right). \quad (7.51)$$

**Mi recomendación es que trabajes de este modo, sin reemplazar inmediatamente valores numéricos, a menos que sea un cálculo muy simple y directo.** Solo al tener una versión fina, algebraica, de lo que andas buscando o necesitas haz la evaluación numérica. Te harás la vida más fácil.

### Ejemplo 2

La Fig. 7.40 a) muestra dos masas unidas por una cuerda ideal. La masa de 3 kg está sobre la mesa horizontal. Se la sujeta a una cuerda sobre una polea ideal, atada a una masa de 3,3 kg que cuelga verticalmente. La fricción cinética entre la masa y la superficie está representada por el coeficiente de fricción  $\mu_k = 0,3$ . Tomando el sentido hacia abajo como la dirección positiva, determina

- la aceleración,
- la tensión en la cuerda

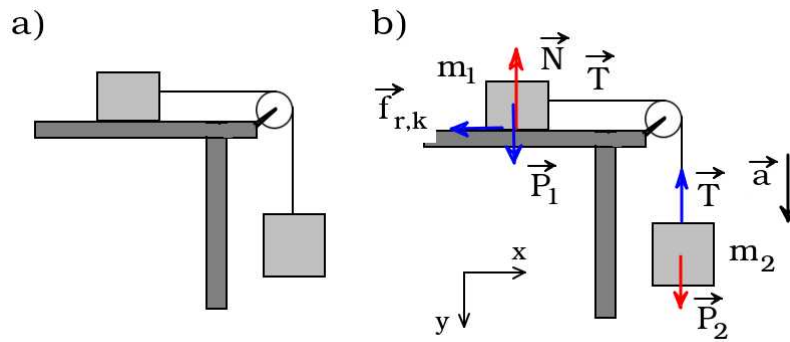


Figura 7.40: a) Dos masas unidas por una cuerda ideal. b) Diagramas de cuerpo libre

### Solución:

La Fig. 7.40 b) muestra los diagramas de cuerpo libre para nuestro problema. Partimos, como siempre, de las leyes de la física

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m \vec{a}.$$

Aplicamos las leyes al

#### I) Cuerpo 1

$$\vec{f}_{rk} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{P}_1 = m_1 \vec{a}_1$$

que en el sistema de referencia elegido se convierten en

$$-f_{rk} \hat{x} + T \hat{x} - N \hat{y} + P_1 \hat{y} = m_1 a_1 \hat{x}, \quad (7.52)$$

o bien, el conjunto de ecuaciones

$$-f_{rk} + T = m_1 a_1, \quad (7.53)$$

$$-N + P_1 = 0. \quad (7.54)$$

Como los cuerpos están acelerando, la fuerza de roce que debemos utilizar es la cinética:  $f_r^k = \mu_k N = \mu_k P_1$ , al usar la Ec. (7.54).

#### II) Cuerpo 2

$$\vec{T} + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a}_2. \quad (7.55)$$

Es decir, la ecuación escalar es

$$-T + P_2 = m_2 a_2, \quad (7.56)$$

donde me he saltado un paso, **que no te debes saltar**.

Si observamos nuestras ecuaciones nos damos cuenta que no podemos resolverlas así como están. Nos falta algo. Obviamente ese algo no puede provenir de la información que nos dan las ecuaciones de Newton, ya que hemos agotado ese camino.

**Nota importante:** Este tipo de problema tiene una ligadura cinemática que sirve para encontrar la relación entre las aceleraciones de los cuerpos. Ésta se obtiene notando que el largo de la cuerda,  $L$ , es constante. Que lo que un cuerpo se mueve en  $x$  tiene una correlación con lo que el segundo cuerpo mueve en  $y$ . En este problema, resulta que

$$L = -x_1 + y_2. \quad (7.57)$$

El signo menos en la variable  $x$  se debe a que cuando el cuerpo se mueve a la derecha, la cuerda en  $x$  se acorta. En cambio, la variable  $y$  es positiva. Derivando dos veces esta ecuación respecto al tiempo, obtenemos

$$0 = -a_1 + a_2. \quad (7.58)$$

Es decir, la aceleración de ambos cuerpos es la misma, que llamamos  $a$ , algo que podríamos haber argumentado “con las manos”, dado el hecho que la cuerda es ideal. Es cierto, hemos “muerto una mosca con un cañón”, pero es bueno saber manejar armas más avanzadas. De hecho, lo que aquí es trivial, en otros problemas puede no serlo, como veremos luego.

Ahora podemos responder nuestras preguntas

a) Sumando las ecuaciones Ecs. (7.54) y (7.59) obtenemos

$$-\mu_k P_1 + P_2 = (m_1 + m_2) a,$$

es decir,

$$a = g \frac{m_2 - \mu_k m_1}{m_1 + m_2}.$$

b) De la Ec. (7.59)

$$T = m_2 (g - a). \quad (7.59)$$

Te dejo como ejercicio reemplazar los valores numéricos.

### Ejemplo 3

En la Fig. 7.41 se muestra un sistema que consiste de dos masas y tres poleas ideales, unidas por una cuerda ideal. Los cuerpos  $A$  y  $B$  pesan 40 N y 60 N respectivamente. El coeficiente de fricción estática entre el cuerpo  $A$  y el plano horizontal es 0,35 y el de fricción cinética es 0,25. Suponiendo despreciable la masa de las poleas y cualquier resistencia suya al movimiento, calcula

- la tensión de la cuerda que une las poleas,
- la aceleración de los cuerpos  $A$  y  $B$ .

**Solución:**

Las ecuaciones de la física son:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m\vec{a}. \quad (7.60)$$

Los diagramas de cuerpo libre aparecen detallados en la Fig. 7.41 b). Estúdialos y compéndelos.

Es muy importante darse cuenta de todas las fuerzas que actúan sobre la polea de abajo. Te sugiero que dibujes las fuerzas que actúan sobre las otras dos poleas, para convencerte

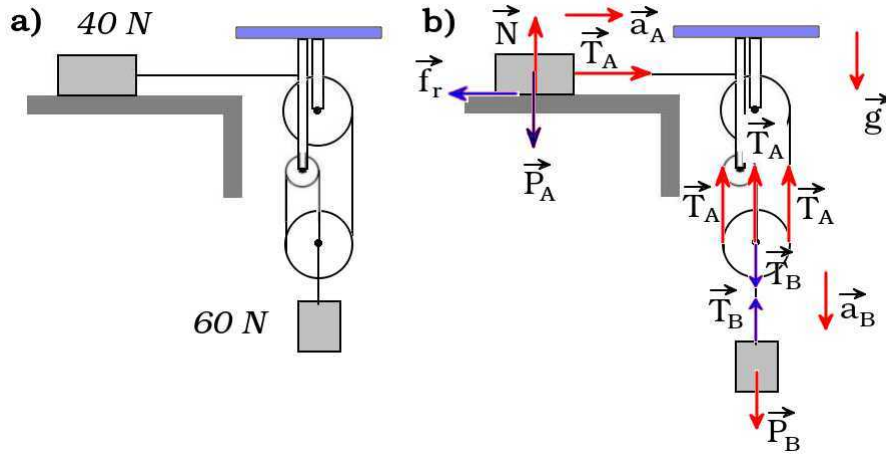


Figura 7.41: Plano horizontal con masas unidas por una cuerda ideal y dos poleas

que la identificación de las tensiones es correcta. Recuerda que una polea ideal solo hace desviar la acción de la tensión.

**En general, es una buena idea encontrar y dibujar todos los pares acción y reacción, así te aseguras que no has fallado al realizar el diagrama de cuerpo libre.**

Notar que además de éstos, se ha agregado el sistema de referencia y la información acerca de las aceleraciones, distintas, de los cuerpos A y B.

Aplicamos las leyes de Newton a los cuerpos A y B:

I) Cuerpo A

$$\vec{f}_r + \vec{T}_A + \vec{N} + \vec{P}_A = m_A \vec{a}_A$$

que en el sistema de referencia elegido es

$$-f_r \hat{x} + T_A \hat{x} + N \hat{y} - P_A \hat{y} = m_A a_A \hat{x}, \quad (7.61)$$

o bien,

$$-f_r + T_A = m_A a_A, \quad (7.62)$$

$$N - P_A = 0. \quad (7.63)$$

Como los cuerpos están acelerando, la fuerza de roce que debemos utilizar es la cinética:  $f_r^k = \mu_k N$ .

II) Cuerpo B

$$\vec{T}_B + \vec{P}_B = m_B \vec{a}_B. \quad (7.64)$$

Es decir, la ecuación escalar es

$$T_B - P_B = -m_B a_B, \quad (7.65)$$

donde me he saltado un paso, **que no te debes saltar**.

III) Polea tiene masa cero así que

$$3\vec{T}_A + \vec{T}_B = \vec{0}, \quad (7.66)$$

o sea,

$$3T_A - T_B = 0. \quad (7.67)$$

De esta ecuación podemos concluir que el estado de movimiento de esta polea (las otras están fijas), en reposo, es en movimiento con velocidad constante. ¡También puede estar acelerada, ya que masa cero por aceleración es cero!

**Nota importante:** Al igual que antes, vemos que este tipo de problema tiene una ligadura cinemática que sirve para encontrar la relación entre las aceleraciones de los cuerpos. Debemos recordar que las leyes de Newton son válidas en sistemas inerciales de referencia. Por ello, si queremos determinar las aceleraciones, debemos usar un sistema de referencia inercial para definir los respectivos vectores de posición. Al derivar dos veces respecto del tiempo esos vectores de posición obtenemos las aceleraciones.

Para esta parte ubiquemos nuestro sistema de referencia en la polea fija, con eje  $x$  hacia la derecha y  $y$  hacia la abajo. Dado que el largo de la cuerda,  $L$ , es constante, lo que se mueve en  $x$  tiene una correlación con lo que se mueve en  $y$ . En este problema, resulta que

$$L = -x_A + 3y_B. \quad (7.68)$$

El signo menos en la variable  $x$ , el módulo del vector de posición  $\vec{x}$ , se debe a que cuando el cuerpo se mueve a la derecha, la cuerda en  $x$  se acorta. En cambio, la variable  $y$ , el módulo del vector de posición  $\vec{y}$ , es positiva y tiene un factor tres debido a las tres cuerdas que llegan a la polea.

Derivando dos veces la Ec. (7.68) respecto al tiempo, obtenemos la relación entre las aceleraciones de los cuerpos

$$0 = -a_A + 3a_B. \quad (7.69)$$

Ahora podemos responder las preguntas del problema.

a) De Ecs. (7.62) y (7.63)

$$T_A = m_A(a_A + \mu_k g)$$

Ahora, tenemos que  $m_A = 40/9,8 = 4,08 \text{ kg}$  y  $m_B = 60/9,8 = 6,12 \text{ kg}$ , luego

$$T_A = 4,08 a_A + 10. \quad (7.70)$$

De Ec. (7.65)

$$T_B = -m_B a_B + P_B = -6,12 a_B + 60. \quad (7.71)$$

Usando las Ecs. (7.67) y (7.69),

$$T_A = 4,08 \cdot 3 a_B + 10 = T_B/3 = (-6,12 a_B + 60)/3 \quad (7.72)$$

Reemplazando en la Ec. (7.70) obtenemos

$$18,36 a_B = 60/3 - 10,$$

que implica  $a_B = 0,7 \text{ m/s}^2$  y entonces, de la Ec. (7.69)  $a_A = 2,1 \text{ m/s}^2$ .

b) Las tensiones se obtienen de las Ecs. (7.71) y (7.72)  $T_A = 18,6 \text{ N}$  y  $T_B = 55,7 \text{ N}$ .

## 7.6.1 Ejercicios

1. En la Fig. 7.42 se muestran dos masas que yacen sobre planos inclinados sin roce, atados por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. El bloque A tiene masa  $m = 4,3$  kg, mientras que el bloque B,  $m = 5,4$  kg. Halla:

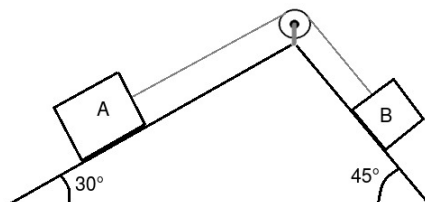


Figura 7.42: Plano inclinado con dos masas unidas por una cuerda ideal

- La aceleración del sistema.
- La tensión de la cuerda.

2. Sobre un tablero inclinado un ángulo de  $30^\circ$  se colocan dos cuerpos A y B, de masa 4,0 y 3,0 kg, respectivamente, como muestra la Fig. 7.43. El coeficiente de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es 0,1, y entre el bloque B y dicho plano 0,2.

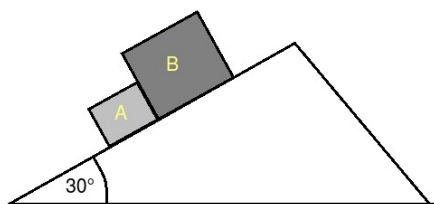


Figura 7.43: Plano inclinado con dos masas en contacto

Este ejemplo puede ser una esquema de una persona tratando de subir un refrigerador por una rampa.

- Dibuja todos los pares acción y reacción de las fuerzas que actúan sobre ambos cuerpos
- ¿Cómo deslizarán los cuerpos, juntos o separados?.
- Encuentra la aceleración de cada cuerpo y la reacción en la superficie de contacto entre ambos (si la hubiere).

3. En el problema de la Fig. 7.44 el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto es  $\mu = 0,2$ . La polea tiene masa despreciable y la cuerda es ideal.



Figura 7.44: Una masa sobre otra, unidas por una polea y cuerda ideales

a) Dibuje todos los pares acción y reacción de las fuerzas que actúan sobre ambos cuerpos

b) Determina la aceleración de los bloques.

4. Un bloque de 4,0 kg asciende a lo largo de un plano inclinado  $30^\circ$  al serle aplicada una fuerza horizontal, tal como se indica en la Fig. 7.45. El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado es 0,2. Sabiendo que el bloque, parte del reposo, en la base del plano inclinado, y alcanza una velocidad de 6,1 m/s después de recorrer 10,0 m a lo largo del plano.

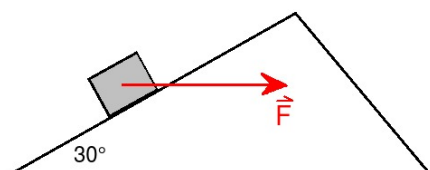


Figura 7.45: Masa siendo arrastrada hacia a lo largo de plano inclinado

a) Determina el valor de la fuerza.

b) En dicha posición  $x = 10,0$  m se deja de aplicar la fuerza. Determina el desplazamiento total del móvil a lo largo del plano hasta que se detiene.

5. Calcula la aceleración de los cuerpos  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  de la Fig. 7.46 a), si

a) no hay roce en la superficie horizontal,

b) hay roce en la superficie horizontal, con coeficiente de roce 0,35.

Antes de comenzar a aplicar las leyes de la física, debe dibujar todos los pares acción y reacción, para cada caso.

Como siempre, hasta ahora, las cuerdas y poleas son ideales.

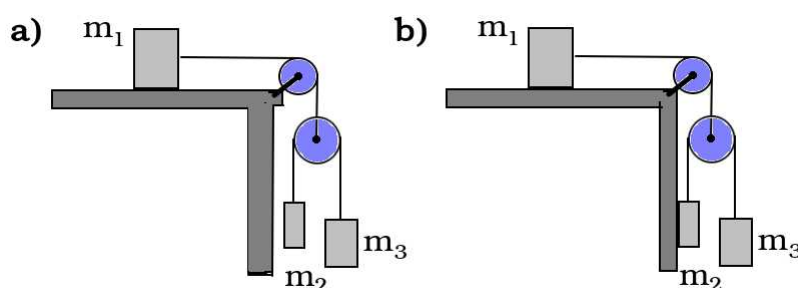


Figura 7.46: Conjunto de masas con poleas, sin (figura a) y con (figura b) roce sobre superficie vertical

6. Calcula la aceleración de los cuerpos  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  de la Fig. 7.46 b), si hay roce en la superficie vertical, con coeficiente de roce 0,2, y

a) no hay roce en la superficie horizontal,

b) hay roce en la superficie horizontal, con coeficiente de roce 0,35.

Antes de comenzar a aplicar las leyes de la física, debe dibujar todos los pares acción y reacción, para cada caso.

Como siempre, hasta ahora, las cuerdas y poleas son ideales.

7. Por una pista horizontal cubierta de nieve, se desliza un trineo, de masa  $m = 105$  kg, con velocidad  $v = 36$  km/h. El coeficiente de roce entre el trineo y la nieve es de  $\mu_k = 0,025$ . Calcula:

- El tiempo que tardará en pararse el trineo.
- Distancia recorrida antes de pararse.

8. En la Fig. 7.47 se muestran dos cuerpos  $A$  y  $B$  de masas  $20,0$  y  $5,0$  kg respectivamente, que están unidos mediante una cuerda de  $1,0$  m de longitud, deslizan a lo largo de un plano inclinado  $30^\circ$  respecto de la horizontal. Ambos cuerpos parten inicialmente del reposo, encontrándose el cuerpo  $B$   $5,0$  m por encima de la horizontal. Sabiendo que los coeficientes de roce cinéticos entre los cuerpos  $A$  y  $B$  y el plano son  $0,2$  y  $0,4$ , respectivamente, calcular

- La aceleración de ambos cuerpos,
- La tensión de la cuerda,
- La velocidad con que el cuerpo  $A$  llega a la base del plano inclinado.

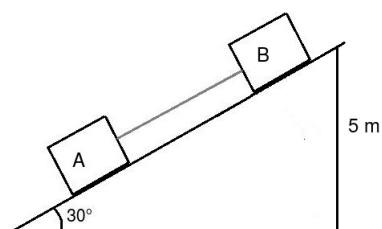


Figura 7.47: Dos masas sobre un plano inclinado, unidas por una cuerda ideal

9. Dos bloques de masas  $m_1 = 20$  kg y  $m_2 = 15$  kg, apoyados el uno contra el otro, descansan sobre un suelo perfectamente liso, como muestra la Fig. 7.48. Se aplica al bloque  $m_1$  una fuerza  $F = 40$  N horizontal y se pide que determines :

- la aceleración con la que se mueve el sistema
- las fuerzas de interacción entre ambos bloques.

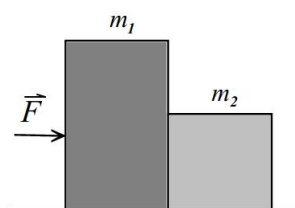


Figura 7.48: Dos masas sobre un plano, empujadas por una fuerza

10. Un bloque de masa  $m_1 = 16$  kg y otro de masa  $m_1 = 8$  kg se encuentran sobre una superficie horizontal sin roce, unidos por una cuerda y son arrastrados sobre la superficie por una segunda cuerda, como muestra la Fig. 7.49, adquiriendo una aceleración constante de  $0,5$  m/s<sup>2</sup>. Calcula la tensión de cada cuerda.

11. Considera la Fig. 7.50. Calcula las aceleraciones de los bloques  $A$  y  $B$  de masas  $200$  kg y  $100$  kg, respectivamente, suponiendo que el sistema parte del reposo, que el



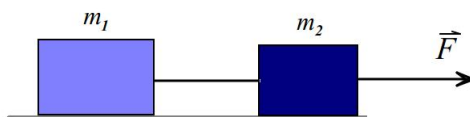


Figura 7.49: Dos masas sobre un plano, empujadas por una fuerza

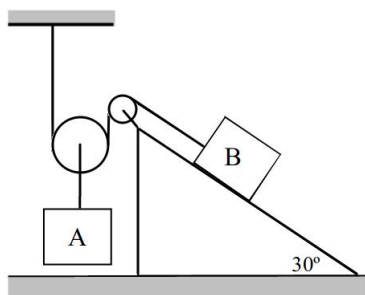


Figura 7.50: Dos masas unidas por una cuerda que pasa por una polea ideal

coeficiente de rozamiento entre el bloque  $B$  y el plano es de 0,25 y que se desprecia la masa de las poleas y el rozamiento de las cuerdas.

12. A través de una polea ideal pasa una cuerda de la cual están suspendidas tres masas de 2 kg cada una, como muestra la Fig. 7.51. Encuentra la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda que une las masas  $A$  y  $B$ .

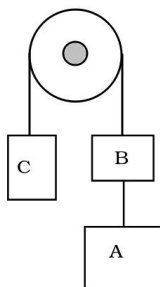


Figura 7.51: Tres masas unidas por una cuerda que pasa por una polea ideal

13. Un bloque de madera es lanzado con una velocidad de 4 m/s por una superficie horizontal cuyo coeficiente de rozamiento vale 0,3.

- a) Describe el movimiento del bloque
- b) Realiza aquellos cálculos que permitan conocer
  - b1) ¿Cuánto tiempo tardará en pararse?
  - b2) ¿Qué espacio recorre hasta que se detiene?

14. La Fig. 7.52 muestra un bloque de masa  $m_1 = 4$  kg sobre una superficie lisa, es decir sin roce, atado a una cuerda ideal que pasa por una polea ideal móvil. El otro extremo de la cuerda está fijo a un trozo de madera fijo al piso. La polea es jalada por una fuerza constante de magnitud 20 N. Encuentra

- a) la aceleración del bloque, y

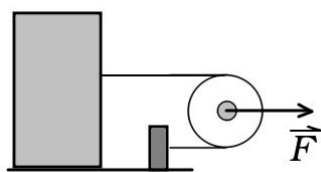


Figura 7.52: Masa unida a polea

b) la tensión de la cuerda

15. Repite el problema anterior, pero supón que existe roce entre el bloque y la superficie, con coeficiente de roce cinético  $\mu_k = 0,25$ .

16. En la Fig. 7.53 se muestra un bloque de 15 kg que está y permanece en reposo sobre en un plano inclinado  $37^\circ$ , con rozamiento. Al atarle un carrito de 5 kg, para el que puede despreciarse el rozamiento, como se muestra en la figura, ambos descienden con una aceleración de  $2 \text{ m/s}^2$ . A partir del diagrama y las ecuaciones correspondientes, determina:

a) La intensidad de la fuerza de rozamiento entre el bloque y el plano, antes de atar el carrito.

b) La fuerza que soporta la cuerda en el descenso.

c) Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y el plano, si es posible.

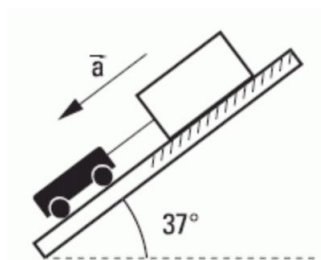


Figura 7.53: Masa unida a un carrito sobre un plano inclinado

17. La caja de masa  $m_2 = 2 \text{ kg}$  de masa es arrastrada sobre una superficie horizontal mediante una fuerza de 10 N que forma un ángulo de  $53^\circ$  con la horizontal, como muestra la Fig 7.54. Sobre la caja yace un bloque de masa  $m_1 = 1 \text{ kg}$ , que no desliza respecto de ella. Los coeficientes de roce estático y cinético, de todas las superficies (bloque-caja y caja-piso) valen:  $\mu_e = 0,4$  y  $\mu_k = 0,2$ .

a) Plantea el diagrama de cuerpo libre de la caja y del bloque y calcular la aceleración del sistema.

b) Calcula la máxima aceleración que puede tener el sistema sin que el bloque de 1 kg deslice sobre la caja.

18. Se lanza un bloque de 4 kg hacia arriba por un plano inclinado  $30^\circ$  sobre la horizontal, con una velocidad de 6 m/s. Si se supone que no hay rozamiento, calcula:

a) La aceleración con que asciende.

b) El tiempo que tarda en detenerse.

c) La distancia que recorre hasta que se detiene.

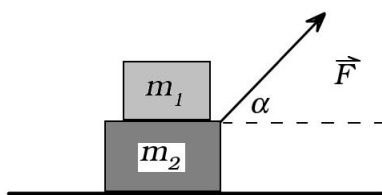


Figura 7.54: Dos masas, una sobre la otra, son tiradas por una fuerza

19. Considera una pila de maderos de Jenga gigante con coeficientes de roce estático y cinámico  $\mu_e = 0,6$ ;  $\mu_k = 0,4$ , respectivamente. De esta pila, que pesan 100 Newton cada uno, se quiere retirar el quinto (contando desde arriba). Calcula

- la magnitud mínima que deberá tener la fuerza horizontal capaz de ponerlo en movimiento, y
- qué fuerza habrá que aplicar al conjunto de los cuatro restantes, para que no lo acompañen (es decir, no se mueven).
- ¿Qué fuerza deberá aplicarse, para extraerlo a velocidad constante, después que comenzó a moverse?



Figura 7.55: Torre de maderos de Jenga

20. En el sistema de la Fig. 7.56, el bloque de 200 kg y el carrito, también de 200 kg, se mueven inicialmente en el sentido indicado, unidos entre sí por una cuerda ideal que pasa por una polea ideal. Puede despreciarse el rozamiento en la polea y entre el carrito y el plano en que se apoya. Sin embargo, entre el bloque y el plano el coeficiente de roce cinético es  $\mu_k = 0,25$ .

- Determina el módulo y el sentido de la aceleración que experimentan en ese instante, y la intensidad de la fuerza que soporta el cable.
- Con el sistema en movimiento, se corta el cable. Determina la nueva aceleración que experimenta cada cuerpo, y describir en forma cualitativa su movimiento.

21. Se presiona un borrador contra un pizarrón de modo perpendicular aquel. ¿Cuál es la fuerza mínima que hay que aplicarle para que no se caiga si el coeficiente de roce estático entre el borrador y el pizarrón es  $\mu_e = 0,4$ ?

22. Un camión lleva apoyado en su caja un paquete de 10 kg. Los coeficientes de roce entre el piso del camión y el bulto son  $\mu_e = 0,5$  y  $\mu_k = 0,4$ . ¿Cuál es el máximo de aceleración que puede imprimirse al camión para que el bulto no deslice?

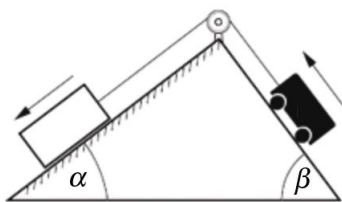


Figura 7.56: Una masa atada a un carro a través de una polea

23. Un sistema como el que muestra la Fig. 7.59, la caja de 5 kg y el balde de 2 kg están y permanecen en reposo. Se puede despreciar el rozamiento entre la cuerda y la polea, y sus respectivas masas.

Determina la magnitud y sentido de la fuerza de roce entre la caja y el plano, en este caso. Se va echando arena dentro del balde hasta totalizar un peso de 40 N. En esas condiciones el sistema comienza a moverse, y adquiere una aceleración de  $0,4 \text{ m/s}^2$ .

Calcula los coeficientes de roce, estático y cinético, entre la caja y el plano.

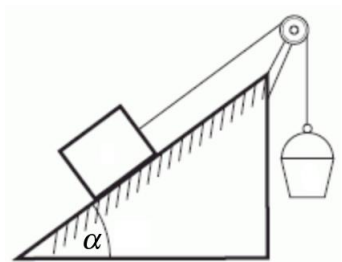


Figura 7.57: Una caja y un balde unidos por una cuerda que pasa por polea ideal

24. Los bloques 1 y 2, cuya masa son  $m_1$  y  $m_2$ , se deslizan hacia abajo sobre un plano inclinado un ángulo  $\theta$ , como se muestra en la Fig. 7.58. El bloque 2 está apoyado sobre el 1. Los coeficientes de rozamiento cinético entre los bloques y el plano inclinado valen  $\mu_{k1}$  y  $\mu_{k2}$ , respectivamente. Encuentra la fuerza de contacto entre los bloques.

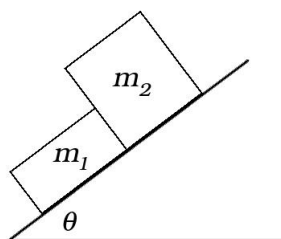


Figura 7.58: Dos masa juntas bajan por una plano inclinado

25. Un bloque cuya masa es de 12 kg se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal. Suponiendo que no hay rozamiento, calcula la aceleración que adquiere en los siguientes casos:

a) Cuando actúa sobre el una fuerza horizontal de 20 N.

b) Cuando actúa sobre el una fuerza de 20 N pero formando un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal.

26. Mi amiga Anita decidió aprender a esquiar ski alpino y le va muy bien. Ella pesa 50 kg. En una competencia de Slalom desciende por una pendiente que forma un ángulo  $\theta = 37^\circ$  con la horizontal. El rozamiento con el aire es despreciable y el coeficiente de roce cinético entre los esquís y la nieve es de 0,25. calcula cuál fue el desplazamiento realizado en tres segundos, a partir del reposo.

27. Se quiere mover un baúl aplicándole una de las dos fuerzas que se indican en la Fig. 7.59. ¿Cuál de las dos elegiría para que la tarea sea más fácil? Si aplicamos la fuerza que apunta hacia arriba y tiene un módulo igual al peso del baúl ¿cuál es el mínimo valor que debe tener el coeficiente de rozamiento estático entre el baúl y el piso para evitar el deslizamiento?



Figura 7.59: Baúl está siendo tirado

28. La Fig. 7.60 representa dos bloques A y B sobre una superficie horizontal sin roce, uno junto a otro. Si se ejerce una fuerza de 12 N sobre A, calcula:

- La aceleración con que se mueven los dos bloques.
- La fuerza que A ejerce sobre B y su reacción la fuerza que B ejerce sobre A.



Figura 7.60: Dos masas juntas

29. La Fig. 7.61 muestra dos bloques de masas  $m_1 = 6$  kg y  $m$  unidos y colgando de una cuerda que pasa por una polea ideal. Calcula:

- La masa  $m$  para que los bloques, uno subiendo y el otro descendiendo, se muevan con una aceleración de  $0,5 \text{ m/s}^2$ .
- La tensión de la cuerda.

30. La Fig. 7.62 a) muestra dos bloques de masas  $m_1 = 1$  kg y  $m_2 = 2$  kg unidos por medio de una cuerda ideal, sobre un plano inclinado en  $\alpha = 37^\circ$ . Si la fuerza que actúa sobre el bloque  $m_2$  tiene una magnitud de 36 N y si se supone que no hay roce, calcula:

- La aceleración con que ascienden los bloques.
- La tensión de la cuerda.

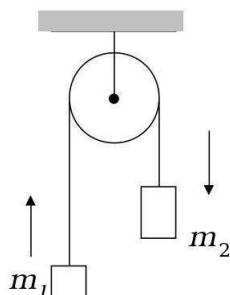


Figura 7.61: Dos masas colgando de una polea

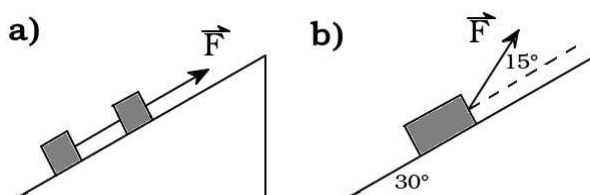


Figura 7.62: a) Dos masas sobre un plano inclinado, unidas por una cuerda; b) Una masa en plano inclinado, tirada por una cuerda

31. La Fig. 7.62 b) muestra un bloque cuya masa es de 3 kg sube por un plano inclinado  $30^\circ$  bajo la acción de una fuerza de 20 N que forma un ángulo de  $15^\circ$  con el plano inclinado. Calcula:

- La aceleración con que asciende el bloque.
- La distancia que recorre en 3 s contados a partir de que la fuerza empieza a actuar.

32. En la Fig. 7.63 se muestra un diagrama con tres masas, dos de las cuales están unidas por una polea. Determina la fuerza  $F$  aplicada al bloque de masa  $M$  de la figura adjunta, para que los bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  apoyados en  $M$ , no se muevan respecto de  $M$ . Todas las superficies son lisas y la polea y el cable tienen masa despreciable.

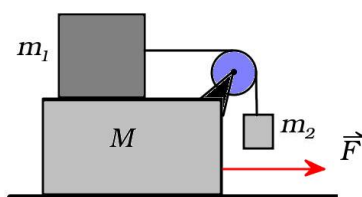


Figura 7.63: Dos masas unidas por una cuerda ideal que pasa sobre una polea. Una de ellas está sobre una masa que está siendo tirada por una fuerza

33. Usando el mismo sistema de la pregunta anterior, pero ahora hay un coeficiente roce estático  $\mu_e = 0,3$  entre los bloques, determina la aceleración mínima con que debe desplazarse el bloque de masa  $M$  en sentido horizontal para que los bloques de masas  $m_1$  y  $m_2$  no se muevan respecto de  $M$ .

34. Los cuerpos A y B, mostrados en la Fig. 7.64, tiene masas  $m_A = 400$  kg y  $m_B = 300$  kg, respectivamente, y se encuentran conectados por medio de un cable ideal. Si el sistema

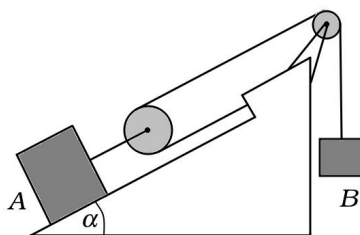


Figura 7.64: Una masa cuelga unida a una polea. A esta polea está atada una segunda masa que descansa sobre un plano inclinado

se encuentra en reposo en la posición mostrada y el coeficiente de fricción vale 0,1, determina el módulo que debe tener una fuerza vertical constante aplicada en el cuerpo  $B$ , de tal forma que  $A$  adquiera una rapidez de 5 m/s después de ascender 10 m a lo largo del plano.

35. La Fig. 7.65 muestra tres bloques sobre un plano inclinado en  $37^\circ$ . Se aplica una fuerza sobre el bloque central, paralela al plano. El bloque superior está fijo a un pared por medio de un cable ideal. El coeficiente de roce estático entre las superficies 1 y 2 es  $\mu_e = 0,25$ , aquel para las superficies 2 y 3,  $\mu_e = 0,35$ . El coeficiente de roce con el piso es  $\mu_e = 0,4$ . Determina el valor máximo que la magnitud de  $\vec{F}$  puede tener antes de que ocurra cualquier deslizamiento.

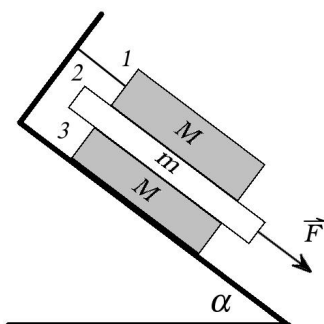


Figura 7.65: Tres masas sobre plano inclinado, una sobre la otra, con la del medio jalada por un fuerza  $\vec{F}$

36. Estás jugando con tu hermana pequeña a quien has subido arriba de una caja y tiras de ella. La Fig. 7.66 muestra un modelo de tal situación, suponiendo dos bloques. El bloque de masa  $m$  sobre el bloque de masa  $M$  yace sobre una superficie horizontal lisa. El coeficiente de roce entre los dos bloques es  $\mu$ . Al bloque  $M$  se le aplica una fuerza horizontal dirigida hacia la derecha, paralela a la superficie, cuya magnitud depende del tiempo según la ley  $F = \gamma t$ , donde  $\gamma$  es un coeficiente constante. Determina:

- El instante  $t^*$  en que  $m$  empieza a deslizar sobre  $M$ ;
- La aceleración de cada uno de los bloques.

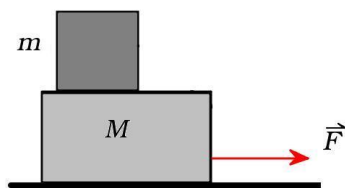


Figura 7.66: Dos masas, una sobre otra, cuando la de abajo se tira con una fuerza de magnitud  $F$

## 7.7 Fuerzas en Movimiento Circular

Ya hemos aprendido cómo caracterizar el movimiento circular, con movimiento uniforme o no uniformemente acelerado.

Cuando hemos viajado en un móvil como un auto, bus, etc. y este móvil hace un giro, hemos sentido una fuerza que nos tira “hacia afuera”. Normalmente debemos agarrarnos fuerte. Otras veces, en el caso de que vayamos en un asiento pegado al borde del móvil, una ventana por ejemplo, sentimos como nuestro cuerpo es aplastado sobre esa superficie. Como hemos visto al estudiar movimiento circular, en una situación como la descrita, nosotros observadores viajamos en un sistema de referencia acelerado, debido a que el vector velocidad cambia en el tiempo instantáneamente. Lo que describimos, entonces, es la física de un movimiento en un **sistema de referencia no inercial**. Este tipo de sistema de referencia u observador no es el tipo de referencia inercial en el que las leyes de Newton han sido establecidas. Aún así, podemos aplicar las leyes de Newton, con cuidado, porque aparecen fuerzas que **para un observador inercial no están presentes**. Ejemplo de ese tipo de fuerzas, llamadas **fuerzas ficticias**, o **pseudo fuerzas**, pero que para el observador acelerado son muy reales, es la **fuerza centrífuga**. Esa fuerza no es observada por alguien que está en el camino observando cómo el vehículo en que uno se mueve está virando, es decir, por un observador inercial.

Cuando el movimiento lo observa un observador inercial, éste concluye que el vehículo en el que se transporta, se mueven en una trayectoria curva debido a una fuerza que apunta hacia el centro del círculo osculador, llamada **fuerza centrípeta**,  $\vec{F}_c$ .

¿Y para qué sirve la fuerza centrípeta? Bueno, ve y disfruta:

<https://www.youtube.com/watch?v=GFy8mJZCM94>.

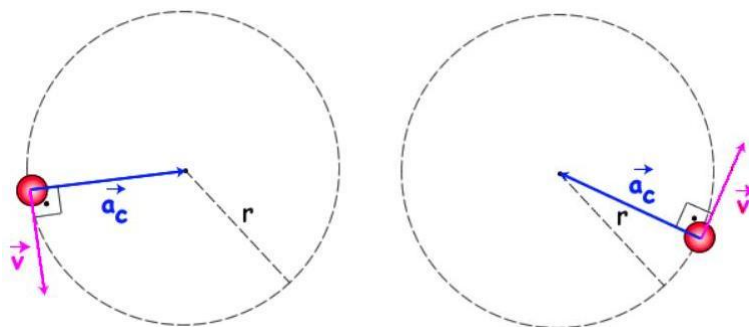


Figura 7.67: Dos instantes en el movimiento circular de un objeto con aceleración constante



Recuerda que la aceleración centrípeta se define como

$$\vec{a} = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| (-\hat{r}) = -a_c \hat{r}, \quad (7.73)$$

donde

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (7.74)$$

Si suponemos que la única fuerza actuando es la fuerza centrípeta, es decir el movimiento es circular uniforme, entonces la segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c, \quad (7.75)$$

o bien, en términos de el vector unitario

$$\vec{F}_c = -ma_c \hat{r} = -m \frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (7.76)$$

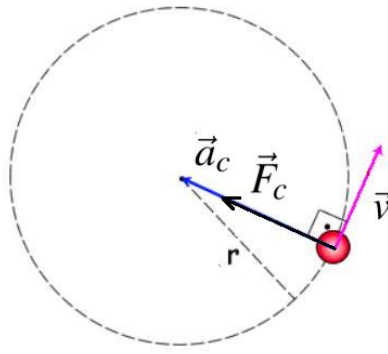


Figura 7.68: Fuerza y aceleración centrípetas

Por otro lado, si suponemos un movimiento circular no uniforme, sabemos que ahora, aparte de la aceleración centrípeta, existe una aceleración tangencial

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} (-\hat{r}) + \frac{dv}{dt} \hat{\theta} = -a_c \hat{r} + a_t \hat{\theta} \quad (7.77)$$

y luego, según la segunda ley de Newton, un observador inercial siente un tirón hacia el centro de curvatura y hacia la dirección de movimiento. Es decir,

$$\vec{F}_c + \vec{F}_t = m \left\{ \frac{v^2}{r} (-\hat{r}) + \frac{dv}{dt} \hat{\theta} \right\}. \quad (7.78)$$

En la Fig. 7.69 se muestran la aceleraciones centrípeta, tangencial y total, así como las fuerzas asociadas.

### Ejemplo:

Los pilotos de combate deben resistir aceleraciones de varias veces la aceleración de gravedad. El entrenamiento es duro y muchas veces pierden el conocimiento al no soportar

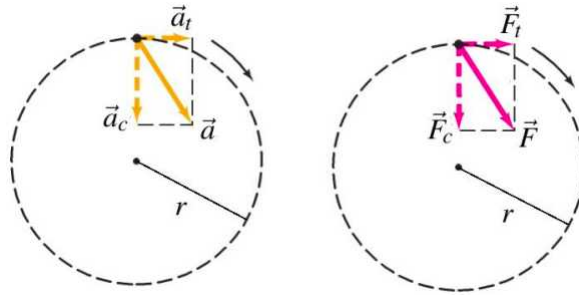


Figura 7.69: Aceleraciones centrípeta, tangencial y total. Fuerzas correspondientes

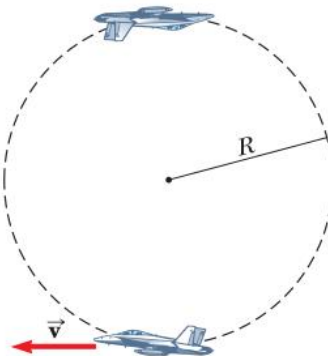


Figura 7.70: Movimiento de un piloto de combate en un loop cerrado

la fuerzas involucradas. Ese fenómeno se denomina g-LOC, (G-force induced Loss Of Consciousness, pérdida de conciencia inducida por fuerza G).

Considera un piloto de combate de 80 kg que realiza un loop cerrado, describiendo una circunferencia de radio  $R = 1.500$  m. Supón que el movimiento ocurre con aceleración uniforme, con  $v = 120$  m/s

- ¿Qué aceleración sufre el piloto?
- Determina la fuerza ejercida **por** el asiento en el piloto cuando va justo en la parte inferior del loop.
- Determina la fuerza ejercida **por** el asiento en el piloto cuando va justo en la parte superior del loop.

### Solución:

La Fig. 7.71 muestra los diagramas de cuerpo libre en las posiciones abajo y arriba del loop. Por supuesto, el peso siempre apunta hacia abajo. Más importante es la fuerza normal. Observa cómo apunta. Recuerda que ésta es la reacción de la superficie al contacto del cuerpo. En este caso, esa superficie es la del asiento.

Usamos la segunda ley de Newton

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m\vec{a}$$

**Parte inferior:** En esta parte la ecuación es

$$\vec{P} + \vec{N}_1 = m\vec{a}_c. \quad (7.79)$$

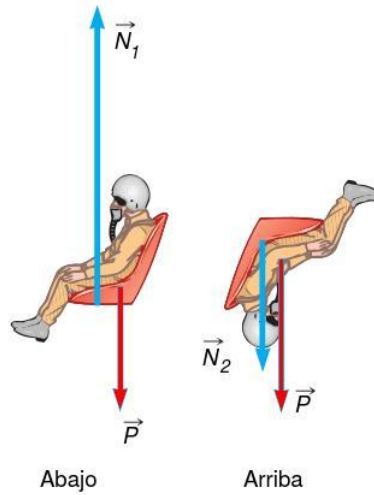


Figura 7.71: Diagramas de cuerpo libre para el piloto abajo y arriba del loop

**Notar que todo el lado izquierdo es la fuerza centrípeta.**

En términos del vector unitario,  $\hat{r}$ , la ecuación anterior queda

$$P\hat{r} - N_1\hat{r} = -ma_c\hat{r}. \quad (7.80)$$

Es decir,

$$P - N_1 = -ma_c. \quad (7.81)$$

A partir de esta ecuación obtenemos la normal  $N_1$ :

$$N_1 = P + ma_c = m \left( g + \frac{v^2}{r} \right) = 1.552 \text{ N} \quad (7.82)$$

**Parte superior:** En esta parte la segunda Ley da:

$$\vec{P} + \vec{N}_2 = m\vec{a}_c. \quad (7.83)$$

**Notar que todo el lado izquierdo es la fuerza centrípeta.**

En términos del vector unitario,  $\hat{r}$ , tenemos que

$$-P\hat{r} - N_2\hat{r} = -ma_c\hat{r}. \quad (7.84)$$

Es decir,

$$P + N_2 = ma_c. \quad (7.85)$$

A partir de esta ecuación obtenemos la normal  $N_2$ :

$$N_2 = ma_c - P = m \left( -g + \frac{v^2}{r} \right) = -16 \text{ N} \quad (7.86)$$

¡Qué es esto! ¿Qué significa este resultado? Piensa.

Uno de los quebraderos de cabeza de los estudiantes aparece en la figura de la derecha de la Fig. 7.71. Causa sorpresa ver un objeto sobre el cual actúan solo fuerzas hacia abajo

y el cuerpo no cae. ¡Algo debe sostener a ese cuerpo y por lo tanto **tiene que haber una fuerza en dirección opuesta!**, piensan. De hecho, es usual ver cómo los estudiantes agregan la fuerza centrífuga a su análisis en un sistema inercial. Sin embargo, esas son todas las fuerzas que un **observador en un sistema inercial** ve. La sorpresa ocurre porque se piensa en un sistema en reposo. El punto es que este sistema está en movimiento.

Observemos que en la ecuación (7.86), si  $g = 0$ , la normal tiene exactamente la forma de la fuerza centrípeta. Lo que hace el peso, en ese punto, es reducir esta fuerza. Si la fuerza centrípeta no es suficientemente grande de modo tal que sobrepase a la gravedad, el cuerpo se soltará (piensa en una masa atada) y, de acuerdo a la primera ley de Newton, tenderá a seguir en línea recta, con velocidad inicial igual a la velocidad tangencial en ese punto. En este problema específico, dado que el peso sigue actuando, el cuerpo describirá una parábola.

A propósito de parábola y movimiento circular, en su Principia Mathematica Newton muestra una figura maravillosa donde se bosqueja el lanzamiento de un proyectil desde una alta montaña (ver Fig. 7.72), con velocidades iniciales cada vez más grandes. En ese movimiento existe siempre una **fuerza central**, que apunta hacia el centro de la Tierra (el centro de masa en realidad). Si la trayectoria (órbita) es circular, entonces la fuerza es lo que hemos denominado fuerza centrípeta. ¿Qué tienen de particular todas esas trayectorias? **En todas ellas el proyectil está cayendo**, la única diferencia es que las primeras cuatro trayectorias terminan en la superficie terrestre.

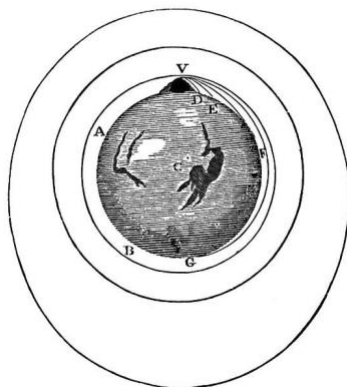


Figura 7.72: Diagramas de lanzamiento de proyectil según Newton

### 7.7.1 Ejercicios

1. Un pequeño bloque de 100 g de masa se mueve con velocidad constante en un surco circular liso horizontal de diámetro 50 cm, con paredes laterales verticales. Si el bloque tarda 2s en completar una ronda, averigüe la fuerza de contacto normal con la pared lateral de la ranura.

2. Los ingenieros están tratando de crear gravedad artificial en una estación espacial en forma de anillo girándola como una centrifugadora. El anillo tiene 100 m de radio. ¿Qué tan rápido debe girar la estación espacial para dar a los astronautas dentro de ella pesos aparentes iguales a sus pesos reales en la superficie de la Tierra?

3. ¿Es la Tierra un marco de referencia no inercial? Calcule. Explique. Argumente.

4. Una partícula de masa  $m$  se mueve en un círculo de radio  $R$  con una velocidad constante  $v$ . Encuentra la fuerza promedio sobre la partícula, después de cubrir un semicírculo.

5. Si los radios de las pistas circulares de dos cuerpos de las mismas masas están en la relación 1:2, para tener la misma fuerza radial (o fuerza centrípeta), ¿en qué razón deben estar sus velocidades?

6. Una carretera está inclinada en un ángulo de  $30^\circ$  (desde la horizontal) para pasar una curva de radio de  $10\sqrt{3}$  m sin salirse de ella. ¿A qué velocidad un vehículo no experimentará fricción al lograr pasar la curva?

7. Un hombre se para en un disco horizontal rugoso que tiene un coeficiente de roce estático  $\mu_e = 0,5$ . El disco gira con una velocidad angular de 5 rad/s. ¿A qué distancia del centro debe pararse para que no resbale y se caiga?

8. Caja de peso  $P$  se suelta desde el punto A, según se muestra en la Fig. 7.73, desliza sobre una guía circular rugosa. Si el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto es  $\mu_k$ , determina las ecuaciones de movimiento de la caja, en las direcciones normal y tangencial.

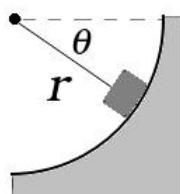


Figura 7.73: Caja deslizando por pista circular vertical

9. Un pequeño bloque de 1 kg de masa está atado a una cuerda de 0,6 m, y gira a 60 rpm describiendo una circunferencia vertical, como muestra la Fig. 7.74. Calcula la tensión de la cuerda cuando el bloque se encuentra:

- En el punto más alto de su trayectoria.
- En el más bajo de su trayectoria.

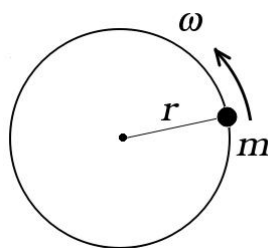


Figura 7.74: Masa girando atada a cuerda tensa

10. La Fig. 7.75 muestra dos bloques de masas  $m_1 = 2$  kg y  $m_2 = 3$  kg unidos por una cuerda inextensible giran con la misma velocidad angular  $\omega$ , describiendo dos trayectorias

circulares situadas en el plano horizontal de radios  $r_1 = 30$  cm y  $r_2 = 50$  cm, respectivamente. Sabiendo que la tensión de la cuerda que une el centro de las trayectorias con el bloque de masa  $m_1$  es de 40 N. Calcula:

- La tensión de la cuerda que une ambas masas.
- La velocidad angular de giro  $\omega$ .

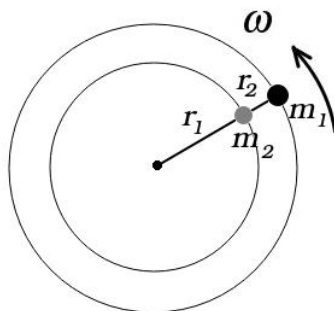


Figura 7.75: Dos masas girando atadas a cuerda tensa

11. Un bloque de masa  $m = 8$  kg está sujeto a una barra vertical mediante dos cuerdas de largo  $L = 2,6$  m. Cuando el sistema gira alrededor del eje de la barra las cuerdas están tensadas, y la masa se ubica a una distancia  $d = 2,4$  m del eje, como se muestra en la Fig. 7.76.

- ¿Cuántas revoluciones por minuto ha de dar el sistema para que la tensión de la cuerda superior sea de 250 N
- ¿Cuál es entonces la tensión de la cuerda inferior?

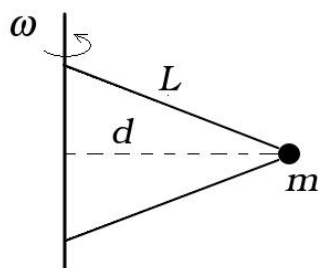


Figura 7.76: Bloque atado a dos cuerdas de largo  $L$

12. Una partícula atada a una cuerda de 50 cm de longitud gira como un péndulo cónico<sup>5</sup>, como muestra la Fig. 7.77. Calcula la velocidad angular de rotación de la masa puntual para que el ángulo que forma la cuerda con la vertical sea de  $60^\circ$ .

13. Una pelota unida a una cuerda ideal describe en un círculo horizontal con una velocidad constante, como se muestra en la Fig. 7.77.

- Haz el diagrama de cuerpo libre de la pelota.
- Determina la masa de la pelota.

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Conical\\_pendulum](https://en.wikipedia.org/wiki/Conical_pendulum)

- c) Determina la velocidad de la pelota.
- d) Determina la frecuencia de revolución de la pelota.
- e) Supón que la cuerda se rompe cuando la pelota describe su movimiento circular. Describe cualitativamente la trayectoria de la pelota después de que la cuerda se rompe pero antes de que toque el suelo.

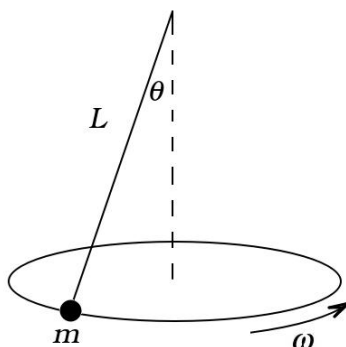


Figura 7.77: Masa girando en un plano, mientras la cuerda que la ata describe un cono

14. Un juego de un parque de atracciones consta de una plataforma circular de 8 m de diámetro que gira. De la plataforma cuelgan “sillas voladoras” suspendidas de unas cadenas de 2,5 m de longitud. Cuando la plataforma gira las cadenas que sostienen los asientos forman un ángulo de  $28^\circ$  con la vertical.

- a) ¿Cuál es la velocidad angular de rotación?
- b) Si la masa total del asiento y del niño es de 50 kg, ¿cuál es la tensión de la cadena?



Figura 7.78: Sillas voladoras

15. Enganchamos una partícula de 1 kg a un resorte de masa despreciable cuya longitud natural es de 48 cm y con constante elástica 10 N/cm, como se muestra en la Fig. 7.79. Lo hacemos girar como un péndulo cónico con una velocidad angular constante de 60 rpm. Calcula:

- a) El alargamiento del resorte.
- b) El ángulo que forma el eje del cono con la generatriz.

16. Un bloque de masa de 2 kilogramos se desliza en un círculo a una velocidad constante de 4 metros por segundo. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y

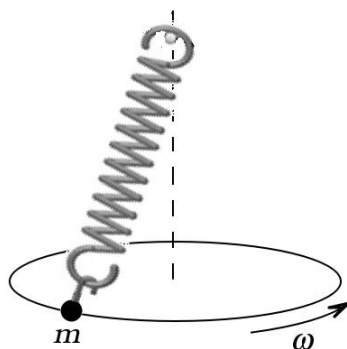


Figura 7.79: Péndulo cónico con resorte

el suelo es 0,35 y la aceleración constante del bloque es de  $10 \text{ m/s}^2$ , encuentra el radio del círculo formado por el bloque.

17. Una bola de masa  $m$  que está unida a una cuerda ideal de longitud  $r$  se mueve en un círculo vertical, como se muestra en la Fig. 7.80 a). Los puntos  $A$  y  $B$  se ubican sobre la vertical, mientras que en el  $C$  la cuerda está horizontal.

a) En las figuras b) y c), dibuja y etiqueta todas las fuerzas ejercidas sobre la bola cuando está en los puntos  $B$  y  $C$ , respectivamente.

b) Obtén una expresión para la velocidad mínima que puede tener la bola en el punto  $A$  sin salir de la trayectoria circular.

c) Supón que la tensión máxima que la cuerda puede tener sin romperse es  $T_{\max}$ , encuentra una expresión para  $v_{\max}$ , la velocidad máxima que la bola puede tener en el punto  $B$  sin romper la cuerda.

d) Imagina que la cuerda se rompe en el instante en que la pelota está en el punto  $C$ . Describe el movimiento de la bola inmediatamente después de que se rompe la cuerda.

Expresa todas las respuestas algebraicas en términos de las cantidades dadas.

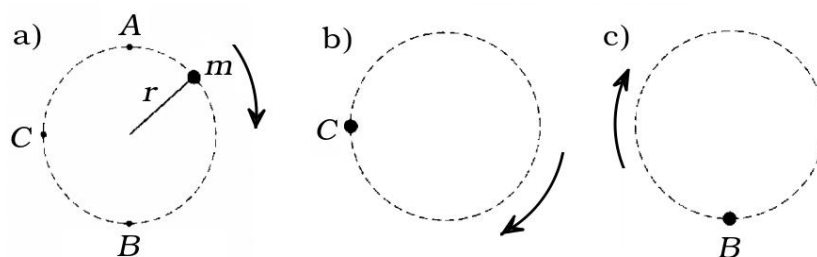


Figura 7.80: Ball moving on a vertical with the help of a taut string

18. Si un automóvil toma una curva inclinada a menos de la velocidad ideal, se necesita fricción para evitar que se deslice hacia el interior de la curva (un problema en las carreteras de montaña heladas).

a) Calcula la velocidad ideal para tomar una curva de 100 m de radio inclinada a  $15^\circ$ .

b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo necesario para que un conductor asustado tome la misma curva a 20 km/h?



19. El acelerador de partículas Large Hadron Collider (LHC) en el CERN es circular con una circunferencia de 27,0 km.

a) ¿Cuál es la aceleración de los protones, con masa  $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg, que se mueven por el acelerador al 99.9999991 % de la velocidad de la luz,  $c = 3 \times 10^8$  m/s?

b) ¿Cuál es la fuerza sobre los protones?

Supón que se satisface la mecánica de Newton no relativista.

20. En la Fig. 7.81 se muestran dos objetos de igual masa  $m$  que giran alrededor de un eje con una velocidad angular constante  $\omega$ , unidas por cuerdas ideales. El primer objeto está a una distancia  $r_1 = d$  del eje central, y el segundo objeto está a una distancia  $r_2 = 2d$  del eje. Encuentra las tensiones en las dos cuerdas, ignorando el efecto de la fuerza de gravedad.

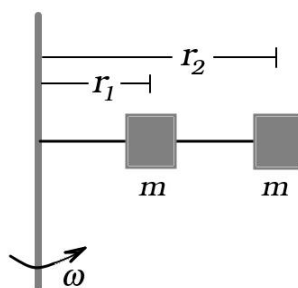


Figura 7.81: Dos masas unidas por una cuerda y rotando

21. En el modelo simple de Bohr del estado fundamental del átomo de hidrógeno, el electrón viaja en una órbita circular alrededor de un protón fijo. El radio de la órbita es  $5,29 \times 10^{-11}$  m<sup>6</sup>, y la velocidad del electrón es  $2,18 \times 10^{-6}$  m/s. La masa de un electrón es  $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$  kg. ¿Cuál es la fuerza sobre el electrón?

22. Considera un objeto de masa  $m$  que se mueve en una órbita circular con velocidad constante  $v_0$  a lo largo del interior de un cono, como muestra la Fig. 7.82. Supón que la pared del cono no tiene fricción. El cono forma un ángulo  $\phi$  con respecto a un eje vertical.

a) Encuentra el radio de la órbita del objeto en términos de  $v_0$ ,  $g$  y  $\phi$ .

b) ¿Es la fuerza normal una fuerza centrípeta o es un componente de la fuerza normal la fuerza centrípeta en este problema? Explica.

c) ¿El radio de la órbita circular es independiente de la masa del objeto? Explica por qué o por qué no

23. Un automóvil de masa  $m$  gira alrededor de una pista circular de radio  $R$  con velocidad constante  $v$ . La pista está inclinada en un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal. El automóvil se mantiene en la pista por fricción estática entre las ruedas y la pista con un coeficiente de fricción estática  $\mu_e$ . Obtén una expresión para la velocidad mínima necesaria para mantener el automóvil en movimiento en un círculo sin deslizarse por la curva. Expresa tu respuesta en términos de las cantidades dadas.

<sup>6</sup>Esta cantidad, el radio de la órbita clásica de un electrón en el estado fundamental, el de menor energía, se denomina **radio de Bohr**.

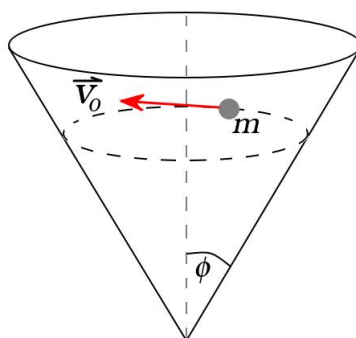


Figura 7.82: Masa girando sobre la superficie interior de un cono

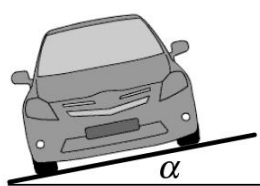


Figura 7.83: Auto girando en pista con peralte

24. Si un automóvil toma una curva inclinada a menos de la velocidad ideal, se necesita fricción para evitar que se deslice hacia el interior de la curva (un problema en las carreteras de montaña heladas).

- a) Calcula la velocidad ideal para tomar una curva de 100 m de radio acumulada a  $15^\circ$ .
- b) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo necesario para que un conductor asustado tome la misma curva a 20 km/h?

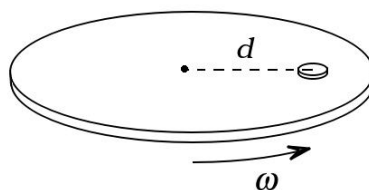


Figura 7.84: Moneda sobre disco giratorio

25. Estás en una fiesta con tus compañeros y resulta que lo que había en la tabla de quesos se ha acabado. Como la tabla es giratoria, se les ocurre hacer un experimento. Colocas una moneda de masa de 0,005 kg sobre la tabla de a una distancia  $d = 0,14$  m del centro, como se muestra en la Fig. 7.84. El disco gira a una velocidad constante en sentido antihorario. La moneda no se desliza, y el tiempo que le toma a la moneda hacer una revolución completa es de 1,5 s.

a) Haz un bosquejo de la misma figura, pero mirada desde arriba, con la moneda en la misma posición. En ella dibuja y etiqueta los vectores aceleración instantánea y velocidad lineal (tangencial) de la moneda.

b) Determina la velocidad lineal de la moneda.

c) La velocidad de rotación del disco aumenta gradualmente. El coeficiente de fricción estática entre la moneda y el disco es  $\mu_e = 0,50$ . Determina la velocidad tangencial de la moneda cuando apenas comienza a deslizarse.

Si el experimento en la parte c) se repitió con una segunda moneda idéntica pegada a la parte superior de la primera moneda, ¿cómo afectaría esto a la respuesta a la parte c)? Explica tu razonamiento.

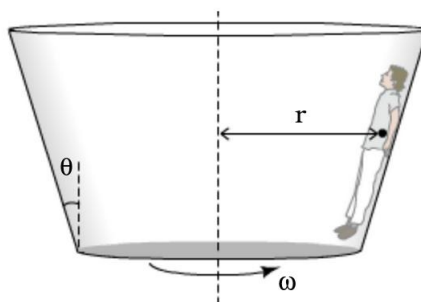


Figura 7.85: Daemon cylinder

26. Visitas un parque de diversiones. Te das cuenta que hay una versión del cilindro del demonio, llamada Gravitron y está hecho de acero. Éste se muestra en la Fig. 7.85. En esta atracción el piso del cilindro giratorio se abre cuando este está rotando a gran velocidad angular. Aquí la pared no es un cilindro recto, sino una sección de un cono, con inclinación de  $\theta = 25,3^\circ$ . Haz preguntado en el parque y te han informado que el coeficiente de fricción estática entre la ropa humana típica y el acero oscila entre 0,23 y 0,39. En la figura, tu centro de masa se ubica a  $r = 3$  m del eje de rotación.

¿Si tienes una masa de 54,6 kg, qué velocidad de rotación mínima, expresada en rev/s, se necesita para evitar que te deslices por la pared?





## 8. TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

Energía es un concepto que utilizamos todos los días: creamos energía, almacenamos energía, consumimos energía, transmitimos energía, quedamos sin energía, etc.

Cualquier libro de texto de física le dirá que la energía es “la capacidad de realizar trabajo”. Luego, por lo general, se explica que “trabajo” es la acción de mover algo contra una fuerza. Sin embargo, el concepto de energía es uno muy básico en la física y, como dijo una vez Lev Okun, *cuanto más básica es una noción física, más difícil de definir con palabras*.

De acuerdo a Richard P. Feynman <sup>1</sup>, Premio Nobel, 1965:

*Existe un hecho, o si lo desea, una ley que rige todos los fenómenos naturales que se conocen hasta la fecha. No hay una excepción conocida a esta ley, es exacta hasta donde sabemos. La ley se llama la conservación de la energía. Afirma que hay una cierta cantidad, que llamamos energía, que no cambia en los múltiples cambios que la naturaleza experimenta. Esa es una idea muy abstracta, porque es un principio matemático; dice que hay una cantidad numérica que no cambia cuando algo sucede. No es una descripción de un mecanismo, o algo concreto; es solo un hecho extraño que podemos calcular un número y cuando terminamos de ver a la naturaleza repasar sus trucos y calcular el número de nuevo, es lo mismo. (Algo así como el alfil en un cuadrado negro, y después de varios movimientos, detalles desconocidos, todavía está en algún cuadrado rojo. Es una ley de esta naturaleza).*

En física las simetrías juegan un rol muy importante. Por ejemplo, las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo. Otra simetría importante es la simetría de las leyes físicas bajo traslaciones temporales,

$$t \rightarrow t + \tau. \quad (8.1)$$

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Richard\\_Feynman](https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman)

Esto significa que las leyes de la física no dependen del momento en que ocurren los fenómenos. Fue Emmy Noether <sup>2</sup> quien primero se dió cuenta, y estableció rigurosamente mediante un teorema que lleva su nombre, la conexión entre simetría continuas y cantidades conservadas.



Figura 8.1: Emmy Noether

Cualquier cantidad que se conserva como resultado de la invariancia temporal la denominamos energía. La unidad de energía en el sistema SI es el joule en honor a James P. Joule <sup>3</sup>; se denota  $J$ . La relación de este concepto abstracto de energía con el tiempo implica que está relacionado con la evolución temporal del sistema físico, cualquier sistema físico, desde un estado inicial a uno final. ¿Muy abstracto? No te preocupes, ya lo irás comprendiendo, espero, durante su carrera y más allá. La fortaleza misma del concepto de energía es que es universal y abstracto.

### 8.0.1 Formas de energía

La energía total se conserva, pero hay muchas formas de energía que son más concretas que el concepto de energía en sí, las que se pueden convertir de una forma a otra. Además, la energía es útil y nos permite decir algo sobre el estado final desde el estado inicial, incluso sin resolver el problema exacto de cómo se ve el sistema en cualquier momento intermedio.

La energía asociada al movimiento se denomina **energía cinética**. La **energía potencial** es la posibilidad de cambio futuro. Requiere la idea adicional de que el cambio puede ser absorbido de algún modo por el sistema, almacenado durante un período de tiempo, y luego liberado de nuevo en el futuro.

La temperatura de algo es una medida directa de qué tan rápido se mueven las partículas del sistema. En una taza de café caliente, las moléculas de agua se mueven rápidamente, disminuyendo la velocidad a medida que la taza se enfría. El calor es energía transferida entre sistemas a diferentes temperaturas.

En cambio, si el objeto al que se le aumenta la temperatura es un sólido, los átomos, al estar fijos en ciertas posiciones, adquieren un movimiento oscilatorio alrededor de sus posiciones de equilibrio.

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Noether's\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Noether's_theorem)

<sup>3</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/James\\_Prescott\\_Joule](https://en.wikipedia.org/wiki/James_Prescott_Joule)

Existe mucha energía que está almacenada, como en un resorte comprimido, dentro de los núcleos atómicos. Esta energía puede ser liberada cuando un núcleo se divide en dos, es decir, se fisiona. Las dos mitades están cargadas positivamente, por lo que, justo después de la división, son repelidas eléctricamente por la otra y se separan. Así, la energía potencial nuclear termina como energía cinética.

En el análisis final, todas estas formas de energía también involucran un tipo de movimiento o un potencial para moverse.

## 8.1 Trabajo

Podemos entender el trabajo como un concepto cualitativo: el trabajo es solo un proceso en el que la energía se transforma de una forma a otra forma. Por ejemplo, la energía almacenada en azúcares y grasas en sus músculos se transforma en energía potencial de un mueble cuando usted lo lleva al piso 3 usando las escaleras.

Cuando se trata de un concepto cuantitativo, el trabajo es la cantidad de energía que se transformó de una forma a otra; en aplicaciones prácticas, generalmente queremos decir que se transformó de los músculos o la red eléctrica o una batería u otro “almacenamiento” a una forma de energía que es “útil”, pero, por supuesto, estas etiquetas de ser “útiles” no son una parte de la física, son parte de la ingeniería o aplicaciones.

### Pausa matemática

Para un campo vectorial dado,  $\vec{V}(x, y, z)$ , una función vectorial de las coordenadas, podemos definir la **integral de línea de un campo vectorial** como una integral definida a lo largo de un camino abierto o cerrado,  $C$ .

Un camino en  $\mathbb{R}^3$  se define como

$$\vec{r}(\tau) = r_x(\tau)\hat{x} + r_y(\tau)\hat{y} + r_z(\tau)\hat{z}, \quad (8.2)$$

donde  $\tau$  es un parámetro que nos ayuda a mantener registro del progreso a lo largo de ese camino, y es tal que  $\tau_i \leq \tau \leq \tau_f$ . Podría ser el tiempo, por ejemplo. Luego, la integral de línea se define como

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r}. \quad (8.3)$$

Un ejemplo de ese camino se muestra en la Fig. 8.2.

Pero podríamos escribir

$$d\vec{r} = \hat{T} ds \equiv d\vec{s}, \quad (8.4)$$

donde  $\hat{T}$  es un **vector tangente** (cuya definición no daré) en cada punto a lo largo del camino;  $ds$  es una longitud infinitesimal a lo largo del camino. Por lo tanto, en nuestra notación

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_C |\vec{V}| |d\vec{s}| \cos \theta. \quad (8.5)$$

El significado de la integral es como sigue: se nos movemos a lo largo de un camino en el espacio donde existe un campo vectorial, como muestra en la Fig. 8.2, entonces debemos realizar la operación  $|\vec{V}| |d\vec{s}| \cos \theta$  en cada punto a lo largo del camino y sumar todas esas contribuciones

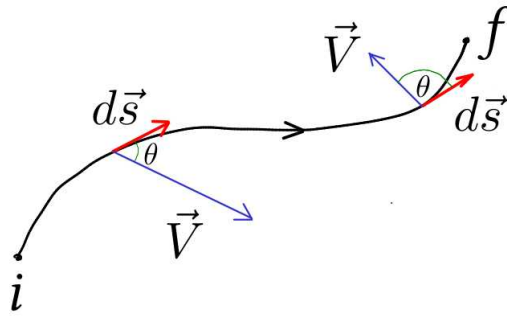


Figura 8.2: Ejemplo de un camino en la definición de la integral de línea de un campo vectorial  $\vec{V}$

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

El **trabajo mecánico** se define como la energía necesaria para trasladar un objeto desde un estado inicial  $i$  hasta un estado final  $f$ , a lo largo de una determinada trayectoria, aplicando una fuerza externa  $\vec{F}$ . Matemáticamente queda definido a través de una integral de línea. Hacer la integral, entonces, es simplemente sumar cada una de estas contribuciones, que son escalares.

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_i^f |\vec{F}| |d\vec{s}| \cos \theta. \quad (8.6)$$

En Mecánica, los estados inicial  $i$  y final  $f$  corresponden a las posiciones inicial y final.

En la Fig. ?? se muestra la representación gráfica de la integral de línea. Notar que en general, el **producto punto involucrado en la integración implica hacer esta operación,  $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ , con cada elemento infinitesimal de la curva**. Por eso es que no podemos, en general, sacar el coseno fuera de la integral, ya que varía a lo largo de la curva.

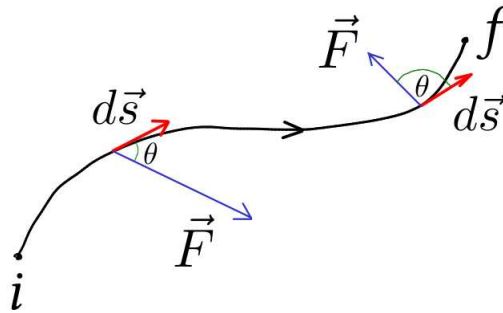


Figura 8.3: Camino en el espacio donde una fuerza está actuando sobre un cuerpo (el sistema)

### 8.1.1 Trabajo debido a una fuerza constante

Cuando la fuerza que actúa sobre un cuerpo es constante, es decir, cuando la dirección de la fuerza no cambia y su módulo es constante, podemos pensar en tomar un camino recto en el espacio, como se muestra en la Fig. ?? . Allí, las líneas verticales son solo una



forma de ayudarnos a visualizar las fuerzas a lo largo del camino. Un ejemplo de esto es un bloque que ha sido lanzado deslizándose sobre un plano inclinado suave, yendo de una altura a otra. En este caso, la fuerza que actúa sobre el sistema, el bloque, es su peso, es decir,  $\vec{F} = \vec{W}$ . En tal ejemplo, la integral es muy simple porque la fuerza y el coseno pueden salir de la integral, siendo ambos constantes a lo largo del camino. Entonces,

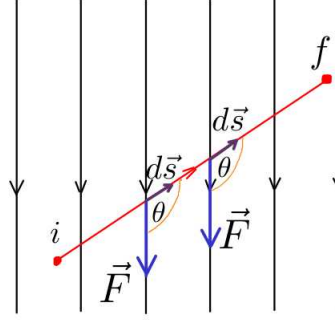


Figura 8.4: Camino recto en el espacio donde existe una fuerza constante actuando sobre un cuerpo (el sistema)

$$W_{i \rightarrow f} = |\vec{F}| \cos \theta \int_i^f |d\vec{s}| = |\vec{F}| \cos \theta \int_i^f dx. \quad (8.7)$$

Consideremos el ejemplo que se muestra en la Fig. ?? que muestra un objeto sobre el cual actúa una fuerza constante (módulo y dirección invariantes), haciendo que se mueva a lo largo de una línea. En este caso,  $F_{\parallel} = |\vec{F}| \cos \theta$  es la componente de la fuerza paralela a la dirección del movimiento. Solo esta componente de la fuerza realiza trabajo. El componente perpendicular, es decir,  $\vec{F}_{\perp} = F \sin \theta \hat{y}$ , por definición no realiza trabajo, porque el producto punto con  $\hat{x}$  es cero. Entonces, en este caso, la integral es simplemente la longitud del camino recorrido porque el movimiento se produce en línea recta y, por lo tanto,

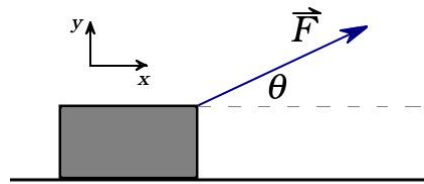


Figura 8.5: Ejemplo de fuerza constante

$$W_{i \rightarrow f} = |\vec{F}| (x_f - x_i) \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}, \quad (8.8)$$

where in the last equality we have recovered the dot product. Clearly,

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i. \quad (8.9)$$

Para que el ángulo no cambie, el movimiento debe ocurrir en línea recta, lo que es así, ya que  $\vec{F}$  no cambia. En este caso, entonces, la integral es simplemente el largo del camino recorrido porque el movimiento ocurre en línea recta y por tanto

$$W_{i \rightarrow f} = |\vec{F}| (x_f - x_i) \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}, \quad (8.10)$$

donde en la última igualdad hemos recuperado el producto punto. Claramente,

$$\Delta \vec{x} = \vec{x}_f - \vec{x}_i. \quad (8.11)$$

Este ejemplo nos muestra que para un movimiento, un camino, en un campo vectorial constante, realmente no importa que el camino sea en línea recta, porque todas las componentes perpendiculares al camino desaparecen. En la Fig. ??, esto significa que para el trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$ , solo importa el desplazamiento a lo largo de la línea donde actúa la fuerza.

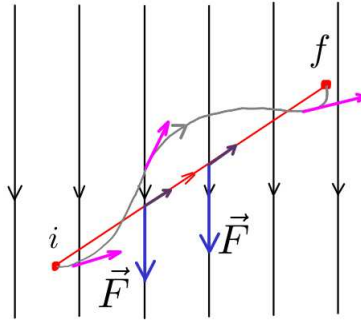


Figura 8.6: Un camino arbitrario en espacio donde hay una fuerza constante actuando sobre un cuerpo (el sistema)

Con respecto a esto, un ejemplo importante de una fuerza constante es la fuerza de peso,  $\vec{P}$ , cerca de la superficie terrestre. La Fig. 8.7 muestra en línea segmentada el camino por el que fue llevado un objeto desde el punto  $i$  hasta el punto  $f$ , por un agente externo (tu mano, por ejemplo). Por definición, tenemos que el trabajo realizado por la fuerza de peso (no tu mano) es

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f} &= \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_i^f |\vec{P}| |d\vec{s}| \cos \theta \\ &= |\vec{P}| \cos \theta \int_i^f ds = |\vec{P}| \cos \theta s. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Con este resultado tenemos una interpretación diferente al resultado anterior. Ahora resulta que  $s_{\parallel} = h = \cos \theta s$  es la proyección de la trayectoria en la dirección de la fuerza. Por lo tanto,

$$W_{i \rightarrow f} = Ph = mgh = mg(y_i - y_f) \quad (8.13)$$

Esto demuestra que **el trabajo realizado por la fuerza de peso solo depende de la distancia vertical entre los puntos inicial y final.**

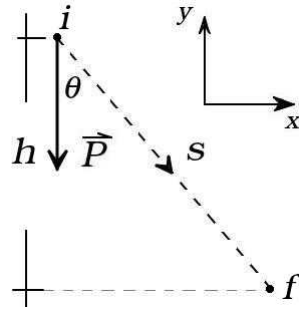


Figura 8.7: Ejemplo de fuerza constante

Observa que si  $y_i > y_f$  entonces el trabajo realizado por el peso sobre el objeto de masa  $m$  es positivo. Esto significa que el cuerpo ha ganado energía. Esto es razonable, pues si tiramos desde más alto un cuerpo sólido sobre una superficie blanda, más profunda será la deformación que producirá en ésta.

Al revés, si el cuerpo va de abajo hacia arriba,  $y_i < y_f$ , el trabajo de la fuerza peso será negativo. Esto significa, como sabemos, que el cuerpo viaja cada vez más lento a medida que sube.

### 8.1.2 Trabajo debido a fuerza de Hooke

Sabemos que la ley de Hooke es

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

y luego, la integral de trabajo es

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = -k \int_i^f |\vec{x}| |d\vec{x}| = -k \int_i^f x dx. \quad (8.14)$$

Una integral como ésta ya la hemos visto antes cuando hemos estudiado cinemática. Recuerda la Fig. 5.14. Ahora la función es  $y(x) = x$ . Si volvemos a hacer un gráfico y versus  $x$ , y calcular el área bajo la curva (recta) obtendremos (¡hazlo, tú puedes!)

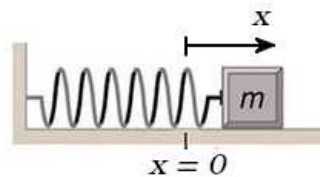


Figura 8.8: Ejemplo de fuerza de Hooke

$$W_{i \rightarrow f} = -k \int_i^f x dx = -\frac{k}{2} (x_f^2 - x_i^2). \quad (8.15)$$

Vemos que si el resorte se expande (como pasa en la Fig. 8.8),  $x_f^2 > x_i^2$ , el trabajo realizado por la fuerza de Hooke es negativo. Al igual que en el caso de la fuerza de peso, eso significa que la masa atada al resorte pierde velocidad.

## 8.2 Fuerzas conservativas y no-conservativas

Uno de los problemas importantes en física es definir cuál es el sistema en el cual estamos interesados. Cuando logramos hacerlo, el resto del universo será el **medio ambiente**. Existen fuerzas que disipan energía, esto es, producen calor; piensa por ejemplo en el roce que produces en tus manos cuando hace frío. Por supuesto, el calor emitido es difícil de utilizar, e imposible de hacerlo en su totalidad<sup>4</sup>. Luego, esa energía se libera al medio ambiente y se pierde como energía útil. Si hacemos un conteo de la energía que teníamos en nuestro sistema antes y después de que esa fuerza actuara encontraremos que falta energía y decimos que la **fuerza es no conservativa**; la energía en el sistema no se conserva.

Desde el punto de vista de la definición de trabajo, las fuerzas no-conservativas son aquellas para las cuales la integral de línea depende del camino que se utiliza para calcularla, es decir, del camino por el cual se lleva al sistema desde el estado inicial hasta el estado final. Por supuesto, un ejemplo de fuerza no conservativa es el roce deslizante. Dependiendo del camino que se utilice para mover un cuerpo, camino que tiene superficies con distintos coeficientes de roce, el cuerpo disipará más o menos calor al ambiente. Imagínate empujando un mueble por unas baldosas y el mismo mueble, a través de la misma distancia, sobre asfalto.

Por otro lado, hay fuerzas que sí conservan la energía, se denominan **fuerzas conservativas**. Son fuerzas para las cuales el valor de la integral de trabajo no depende del camino que se utiliza para calcularla. En la Fig. 8.9 a) se muestran tres caminos por los que ha sido llevado el sistema desde el estado inicial  $i$  al estado final  $f$ . Para un fuerza conservativa, la integral es independiente del camino. En ese caso, es equivalente a afirmar que la integral sobre un camino cerrado, como se muestra en la figura b) es cero. Matemáticamente esto se denota

$$\oint \vec{F}_c \cdot d\vec{s} = 0$$

y se lee “la integral de línea cerrada de la fuerza conservativa  $\vec{F}_c$  es cero”.

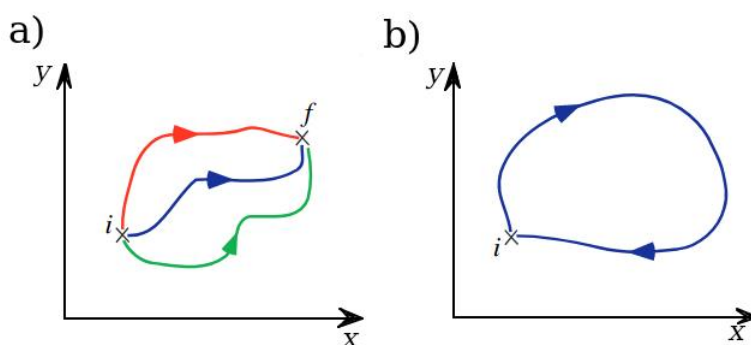


Figura 8.9: Independencia del camino para fuerzas conservativas

<sup>4</sup>Esta prohibición es fundamental: la segunda ley de la Termodinámica lo prohíbe

## 8.3 Energía Potencial, $U$

James Clerk Maxwell <sup>5</sup> el gran unificador del electromagnetismo escribió en 1877 un libro llamado *Materia y Movimiento* <sup>6</sup>. Allí él definió conceptos que se ocupan hasta hoy en día. Escribió, en la página 65:

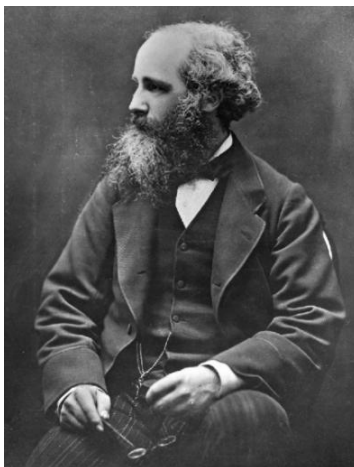


Figura 8.10: James Clerk Maxwell (Wikipedia)

*La energía potencial de un sistema material es la capacidad que tiene de realizar trabajo [en otros sistemas] dependiendo de circunstancias distintas al movimiento del sistema. En otras palabras, la energía potencial es aquella energía que no es cinética.*

*En aquellos sistemas materiales teóricos que construimos en nuestra imaginación a partir de las ideas fundamentales de materia y movimiento, no existen otras condiciones presente excepto la configuración y el movimiento de las diferentes masas de las cuales está compuesto el sistema. Por lo tanto, en tal sistema, las circunstancias de las cuales la energía debe depender son únicamente el movimiento y configuración, tal que dado que la energía cinética depende del movimiento, la energía potencial debe depender de la configuración. En muchos sistemas materiales reales sabemos qué parte de la energía depende de la configuración. Por eso el resorte principal de un reloj de cuerda tiene más energía cuando está enrollado completamente que cuando lo está parcialmente, y dos barras imantadas tienen más energía cuando se colocan uno al costado del otro con sus polos iguales que cuando los polos son distintos.*

En la página 67:

*Admitiendo que la energía de un sistema material puede depender de su configuración, el modo en que depende puede ser mucho más complicado de cómo depende la energía cinética ... Pero la energía potencial que aparece de la interacción mutua entre dos partes del sistema puede depender de la posición relativa de las partes de una forma que puede ser diferente en diferentes situaciones.*

Las fuerzas conservativas son especiales: conservan la energía asociada ellas y por lo tanto el trabajo realizado por ellas para llevar a un sistema desde un estado inicial a uno final solo depende de los estados inicial y final y no del camino por que se lleve al sistema.

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/James\\_Clerk\\_Maxwell](https://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell)

<sup>6</sup><https://archive.org/details/mattermotion00maxwiala/page/n8>

Ya hemos encontrado dos fuerzas conservativas: la fuerza de peso y la fuerza de Hooke, para las cuales el trabajo realizado por ellas solo depende de los estados inicial y final, como ya hemos mostrado.

En general, **para una fuerza conservativa, el trabajo es igual a menos la diferencia de energía potencial**. Esto es,

$$W_{i \rightarrow f} = -(U_f - U_i). \quad (8.16)$$

Al comparar con la Ec. (8.15), deducimos que la **energía potencial elástica** es

$$U_e = \frac{1}{2} k x^2, \quad (8.17)$$

donde, así escrita,  $x$  corresponde al módulo del desplazamiento desde la posición de equilibrio, como muestra la Fig. 8.11 a). Por otro lado, la Fig. 8.11 b) muestra la función correspondiente, que es una parábola.

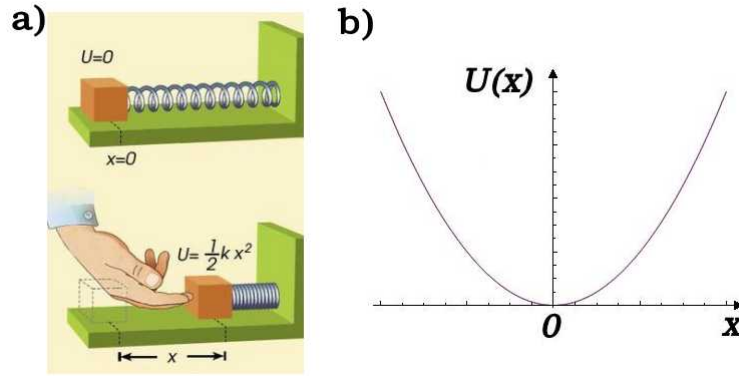


Figura 8.11: Energía potencial en un sistema elástico que satisface la ley de Hooke

Se denomina energía potencial porque está allí, guardada, esperando ser utilizada para realizar trabajo.

La energía potencial gravitatoria cerca de la superficie terrestre la obtenemos de la integral de trabajo para la fuerza peso. Este es el trabajo realizado **por** la fuerza de peso<sup>7</sup>:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad (8.18)$$

De la Fig. 8.12 observamos que  $\vec{P} = -P\hat{y}$ ,  $d\vec{s} = ds\hat{y}$ . Reemplazamos en Ec. (8.18) y obtenemos

$$W_{i \rightarrow f} = - \int_i^f m g dy = -m g \int_i^f dy = -m g (h_f - h_i), \quad (8.19)$$

de lo que concluimos, a partir de la Ec. (8.16), que la energía potencial gravitatoria que posee un cuerpo de masa  $m$  que se encuentra a una altura  $h$ , cerca de la superficie terrestre, está definida por

$$U_g = mgh. \quad (8.20)$$

<sup>7</sup>He recalado aquí la palabra **por** debido a que un agente externo, tú por ejemplo, puede realizar trabajo **en contra** de la fuerza gravitatoria al levantar o bajar un cuerpo de masa  $m$ .

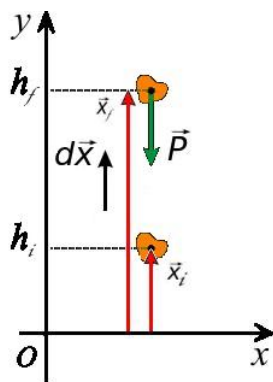


Figura 8.12: Movimiento vertical de un cuerpo cerca de la Tierra

Es decir, para una altura dada, medida desde la superficie terrestre, la energía potencial gravitatoria es constante.

**Observación importante:** Es importante recalcar que ecuaciones como (8.17) y (8.20) no tienen sentido *per se*. Una medición de energía absoluta no existe; siempre debe estar referida a un punto de referencia arbitrario. Eso conduce de inmediato a que **siempre mide diferencias de energía**, como en las Ecs. (8.15) y (8.19).

**Ejercicio:** Haz el mismo ejercicio, pero ahora llevando el cuerpo desde una altura inicial a una altura final más baja. Obviamente el resultado tiene que ser lo mandado por la Ec. (8.16), pero el cálculo tiene sutilezas.

Ya sabemos que las fuerzas conservativas son especiales. Hay algo muy interesante que se puede concluir cuando existen fuerzas conservativas,  $\vec{F}_C$ . Consideremos la Ec. (8.16) en su versión infinitesimal

$$dW_C = \vec{F}_C \cdot d\vec{s} = -dU. \quad (8.21)$$

Esto es, un elemento de trabajo realizado por una fuerza conservativa es igual a menos un elemento de energía potencial. Para simplificar el trabajo matemático siguiente, supondremos que la fuerza y el desplazamiento son vectores paralelos, es decir, el movimiento ocurre en una dimensión, que llamamos  $x$ . Entonces,

$$F_C dx = -dU. \quad (8.22)$$

Podemos “pasar dividiendo”  $dx$  (¡no es lo que se hace, pero funciona pensar de ese modo, al menos aquí. ¡Cuidado!) y obtenemos

$$F_C = -\frac{dU}{dx}. \quad (8.23)$$

Esta expresión es en el fondo la definición de una fuerza conservativa: **una fuerza conservativa es toda fuerza que se puede obtener derivando una energía potencial respecto de la posición**. Este es un resultado muy importante.

Recuerda que hemos hecho una simplificación, al suponer que el desplazamiento y la fuerza son paralelos. Esto no es necesario. La expresión más general para una fuerza conservativa está dada por

$$\vec{F}_C = -\vec{\nabla}U, \quad (8.24)$$

donde  $\vec{\nabla}$ , es lo que los matemáticos llaman un **operador diferencial en derivadas parciales**<sup>8</sup>. Su nombre es **gradiente** u **operador nabla**. En coordenadas cartesianas, en tres dimensiones, se escribe como

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (8.25)$$

No tienes que asustarte. Es un operador vectorial que **opera derivando sobre funciones escalares**. Observa que si todo ocurre en una dimensión, este operador queda definido como

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (8.26)$$

y luego la Ec. (8.24) se convierte en

$$\vec{F}_C = -\hat{x} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (8.27)$$

En el caso en que solo existe una dirección, la derivada parcial aún se puede escribir, pero no tiene diferencia alguna con la derivada que ya hemos visto, la derivada total. Por esa razón, en una dimensión, en vez de escribir la derivada parcial, escribimos

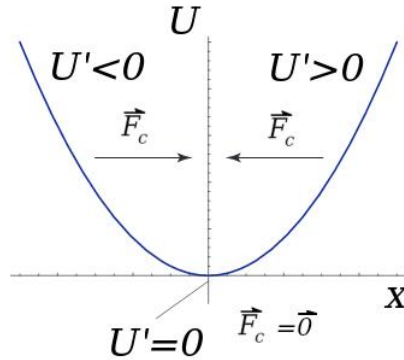


Figura 8.13: Fuerza elástica y energía potencial

$$\vec{F}_C = -\hat{x} \frac{dU}{dx}, \quad (8.28)$$

que al hacer el producto punto con  $\hat{x}$  nos conduce a la Ec. (8.23).

Por supuesto, para el caso particular de la energía potencial elástica  $U_e = \frac{1}{2} kx^2$  esta ecuación conduce a la fuerza de Hooke

$$\vec{F}_e = -\hat{x} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} kx^2 \right) = -kx\hat{x}. \quad (8.29)$$

<sup>8</sup>Derivada parcial es una **derivada direccional**, es decir una derivada que actúa en una dirección determinada. Es útil cuando tenemos funciones cuyo cambio es diferente en distintas direcciones. Piensa en que estás en un valle y quieres subir el cerro, pero hay distintos caminos con distintas inclinaciones. Las pendientes de esas subidas corresponden al módulo del gradiente de la función correspondiente



En la Fig. 8.13 observamos gráficamente el comportamiento de la derivada de la energía potencial y su relación con la fuerza conservativa, para un potencial tipo Hooke. Observa que en el lado izquierdo (derecho) la primera derivada de la energía potencial es negativa (positiva), que corresponde a la pendiente de la curva en cada lado. Esto implica que la fuerza siempre apunta hacia el mínimo del potencial donde la primera derivada es cero y la fuerza es cero.

Este es un ejemplo de un **mínimo estable**: cada vez que se saca al sistema de su posición de equilibrio, el sistema tiende hacia el mínimo de energía.

Haz como ejercicio un análisis similar para el caso en que el potencial está invertido. Te darás cuenta que ahora ese máximo es un punto inestable.

## 8.4 Teorema Trabajo-Energía

El Teorema Trabajo-Energía establece una relación entre el **trabajo total realizado por fuerzas externas** y el cambio de energía cinética que sufre el sistema debido a la acción de esas fuerzas. Es uno de los teoremas más importantes de la física.

Para demostrar este muy importante teorema usamos la definición de trabajo y la segunda ley de Newton y supondremos por un momento que estamos en una dimensión,  $x$ . Supondremos que la masa del sistema es constante:

$$\begin{aligned}
 W_{i \rightarrow f} &= \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_i^f \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} \\
 &= m \int_i^f \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} \\
 &= m \int_i^f \frac{dv}{dt} dx \cos \theta \\
 &= m \int_i^f \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx \cos \theta \\
 &= m \int_i^f \frac{dv}{dx} dx \frac{dx}{dt} \cos \theta = m \int_i^f dv v \cos \theta \\
 &= m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}.
 \end{aligned} \tag{8.30}$$

### Pausa matemática

En la cuarta línea existe un cambio importante, que luce como si hubiésemos multiplicado y dividido por  $dx$ , pero no es así. El significado de esa operación la aprenderás en tu libro de Cálculo y se denomina **derivada implícita**. La podemos interpretar pensando que la velocidad de la partícula que sobre la cual está actuando la fuerza depende en general de la posición, pero la posición a su vez es función del tiempo. Por eso aparecen dos operaciones una tras otra: primero derivada de  $v$  respecto del espacio y después la coordenada espacial se deriva respecto del tiempo.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática

Notar que el resultado final se podría haber obtenido suponiendo que en la segunda línea el  $dt$  está dividiendo (¡no es cierto!) y por tanto, lo podríamos haber ubicado debajo del  $d\vec{s}$  para formar el  $\vec{v}$ .

Para hacer el cálculo más simple, vamos a suponer un movimiento en una dimensión, tal que  $\cos \theta = 0$ . Esto significa que nos encontramos con una integral que ya hemos resuelto, así que su resultado es:

$$W_{i \rightarrow f} = m \int_i^f v dv = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2). \quad (8.31)$$

Este es un resultado general.

Recordando la última línea de la Ec. (8.30), podemos escribir esta expresión de modo equivalente como

$$W_{i \rightarrow f} = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m (\vec{v}_f \cdot \vec{v}_f - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i). \quad (8.32)$$

Lo que hemos demostrado es el **Teorema Trabajo-Energía**, que establece que el trabajo total de las fuerzas externas sobre un sistema es igual al cambio de energía cinética que ese sistema sufre:

$$W_{i \rightarrow f} = K_f - K_i = \Delta K, \quad (8.33)$$

donde la **energía cinética** de la partícula de masa  $m$  que lleva una velocidad  $\vec{v}$  queda definida como

$$K \equiv \frac{1}{2} m v^2. \quad (8.34)$$

Es importante recalcar que en la expresión del trabajo en el lado izquierdo de la Ec. (8.33) están incluidas todos los tipos de fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Podemos dividir naturalmente esas fuerzas entre fuerzas que conservan la energía, llamadas fuerzas conservativas  $F_C$ , y aquellas que no lo hacen, fuerzas no conservativas,  $F_{NC}$ . Los trabajos asociados a estas fuerzas se denomina trabajos conservativo y no conservativo, respectivamente. Luego, podemos reescribir la Ec. (8.33) como

$$W_{NC \ i \rightarrow f} + W_{C \ i \rightarrow f} = \Delta K. \quad (8.35)$$

Pero ya sabemos cómo se expresa el trabajo conservativo; está dado por la Ec. (8.16). Por lo tanto, el teorema Trabajo-Energía también se puede expresar como

$$W_{NC \ i \rightarrow f} = \Delta K + \Delta U. \quad (8.36)$$

**Observación:** El teorema que hemos derivado es general, cuando se expresa como la Ec. (8.33) o Ec. (8.42). Sin embargo, si consideramos que la energía cinética queda definida solo por la Ec. (8.34), entonces el teorema se aplica al desplazamiento de una partícula (un objeto puntual) o al centro de masa de un cuerpo extendido, tratado como una partícula. Ya veremos más adelante qué debemos agregar, aparte de la energía cinética Ec. (8.34), la energía cinética para el caso de sólidos rígidos.

### 8.4.1 Conservación de la Energía

Si el trabajo de las fuerzas no conservativas es cero o no existen fuerzas no conservativas, entonces la energía total, que es igual a la suma de la energía cinética y la energía potencial,

$$E = K + U \quad (8.37)$$

se conserva. Es decir,

$$\Delta K + \Delta U = 0, \quad (8.38)$$

que implica que la energía total inicial es igual a la energía total final:

$$E_i = E_f. \quad (8.39)$$

Esta igualdad se puede escribir

$$\frac{dE}{dt} = 0. \quad (8.40)$$

Que la energía total se conserve significa que la energía cinética se convierte en energía potencial y vice versa. Este procesos puede durar en principio por tiempo infinito, pero en la realidad no ocurre porque siempre hay algo de disipación en un sistema físico.

Las leyes de conservación son muy importantes en la física ya que están asociadas a simetrías del sistema. En general, **si una cantidad  $Q$ , que le podemos llamar *carga*, se conserva, entonces resulta que su derivada total con respecto del tiempo es cero.** Es decir,

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (8.41)$$

Así, tú ya conoces una carga conservada: la energía total, asociada a la invariancia bajo traslaciones temporales:  $t \rightarrow t + t'$ . Más adelante veremos otras cargas conservadas: el momentum lineal, asociada a la invariancia bajo traslaciones espaciales:  $x \rightarrow x + x'$ ; el momentum angular, asociada a la invariancia del sistema bajo rotaciones:  $\theta \rightarrow \theta + \theta'$ . En electromagnetismo, se topará con la carga eléctrica, etc.

### 8.4.2 Potencia

Hasta ahora nos hemos preocupado de cuánto trabajo se realiza sobre un sistema, pero en las aplicaciones es usual poner en foco en cuánta energía se puede utilizar o extraer de un sistema durante un cierto intervalo de tiempo. Por ejemplo, en ingeniería, se necesita conocer cuánta energía se podrá obtener de un motor durante cierto tiempo, o en el caso de las centrales de generación eléctrica, es necesario conocer cuánta potencia eléctrica se podrá producir para alimentar a la red eléctrica. El concepto de potencia sirve para responder este tipo de preguntas. En general, definimos potencia como el cambio de energía en el tiempo

$$\mathcal{P} = \frac{dE}{dt}. \quad (8.42)$$

Esta es la forma instantánea de potencia; ya sabemos cómo definir una potencia media

$$\mathcal{P}_m = \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (8.43)$$

La potencia se mide en joule por segundo,  $J/s$  en el S.I. Esta unidad tiene nombre, se denomina *watt*, denotada por  $W$ , en honor a James Watt<sup>9</sup>, ingeniero escocés que jugó un rol importante en el desarrollo de la máquina a vapor.

<sup>9</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/James\\_Watt](https://en.wikipedia.org/wiki/James_Watt)

El trabajo es energía, así que podemos derivar la expresión de trabajo con respecto al tiempo para obtener la **potencia mecánica**.

Recordemos que

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta K,$$

que podemos escribir de modo infinitesimal como  $dW = dK$ . Si derivamos esta ecuación con respecto del tiempo obtenemos para la potencia total

$$\mathcal{P} = \frac{dK}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d\vec{v} \cdot \vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (8.44)$$

donde hemos utilizado la definición de momentum lineal  $\vec{p} = m\vec{v}$  y la segunda ley de Newton  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ .

### Ejemplo 1:

La Fig. 8.14 muestra una mesa sobre la cual hay dos masas  $m_1 = 8 \text{ kg}$  y  $m_2 = 6 \text{ kg}$  que están unidas por una cuerda ideal tensa que pasa por una polea ideal. La mesa tiene un coeficiente de fricción cinético de 0,25. Parten su movimiento desde el reposo. ¿Cuál es la velocidad final de los bloques después de que se hayan movido una distancia  $s = 1,5 \text{ m}$ ?

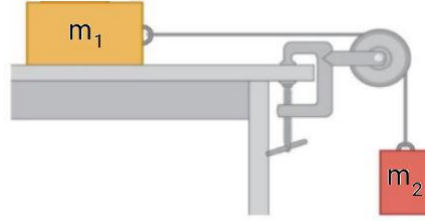


Figura 8.14: Figura para el ejemplo 1.

### Solución

Usamos el Teorema Trabajo-Energía:

$$W_{NC \ i \rightarrow f} + W_{C \ i \rightarrow f} = \Delta K.$$

Cualquier fuerza que no hayamos considerado como conservativas, entran en el trabajo no conservativo. De hecho, la única fuerza conservativa es el peso, todas las otras fuerzas son no conservativas, es decir, no se puede obtener a partir de una energía potencial. Luego,

$$\begin{aligned} W_{NC \ i \rightarrow f} &= -f_r \hat{x} \cdot \Delta x \hat{x} + T \hat{x} \cdot \Delta x \hat{x} - T \hat{y} \cdot \Delta y \hat{y} + N \hat{y} \cdot \Delta x \hat{x} \\ &= -f_r s + T s - T s = -f_r s \end{aligned}$$

El trabajo realizado por el peso es

$$W_{C \ i \rightarrow f} = -P_1 \hat{y} \cdot \Delta x \hat{x} - P_2 \hat{y} \cdot \Delta y \hat{y} = P_2 s.$$

**Observación:** Nota el signo + en el resultado. Esto se debe a que  $\Delta y < 0$ , ya que la masa  $m_2$  ha reducido su altura. Observa también que la diferencia de energía potencial  $\Delta U_g$  para la masa  $m_1$  es cero porque ese cuerpo se mueve horizontalmente.

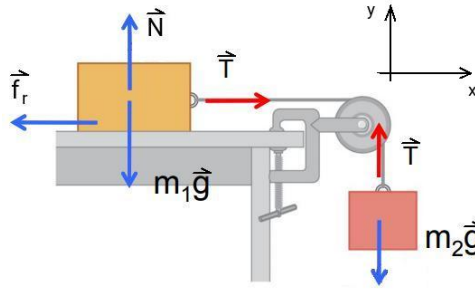


Figura 8.15: Diagrama de cuerpo libre para el Ejemplo 1.

El lado derecho del teorema Trabajo-Energía es

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2 - 0.$$

Por lo tanto, con  $v_f = v$ , tenemos que

$$m_2 g s - f_r s = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} M v^2, \quad (8.45)$$

donde hemos reemplazado la masa total  $M = m_1 + m_2$ . De esta ecuación podemos despejar la velocidad

$$v = \sqrt{\frac{2(m_2 - \mu_k m_1) g s}{M}}.$$

Aquí hemos usado que  $N = P_1$  y que  $f_r = \mu_k N$ . A ti te toca evaluar esa expresión.

Hemos aprendido que hacer un diagrama de cuerpo libre aún sigue siendo muy importante para resolver problemas de trabajo-energía.

#### Observación importante:

Conocemos cómo se define la potencia. La potencia total se obtiene tomando la derivada con respecto del tiempo del trabajo total (Ec. (8.45)):

$$\mathcal{P} = \frac{dW^{(neto)}}{dt} = m_2 g \frac{ds}{dt} - f_r \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} M \frac{dv^2}{dt}. \quad (8.46)$$

Pero

$$\frac{ds}{dt} = v \quad (8.47)$$

y

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v \frac{dv}{dt} = 2v a. \quad (8.48)$$

Por lo tanto, la potencia generada en este problema es

$$\mathcal{P} = m_2 g v - f_r v = M v a, \quad (8.49)$$

que claramente tiene la forma esperada, ya que sabemos que la potencia es también

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad (8.50)$$

que en este caso es  $F_v$ . Por lo tanto, al simplificar la velocidad en la Ec. (8.49) obtenemos

$$m_2 g - f_r = M a. \quad (8.51)$$

¿Qué nos dice la segunda ley de Newton? Si nos saltamos algunos pasos, tú no lo debes hacer, obtenemos

$$\begin{aligned} -f_r \hat{x} + T \hat{x} + N \hat{y} - m_1 g \hat{y} &= m_1 a \hat{x} \\ -m_2 g \hat{y} + T \hat{y} &= -m_2 a \hat{y} \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones obtenemos la Ec. (8.49).

### Ejemplo 2:

En la Fig. 8.16 se muestra una caja que lleva una velocidad de 6 m/s, aproximándose a un resorte de constante elástica  $k = 500$  N/m. Usando el teorema Trabajo-Energía encuentra la distancia máxima que el resorte se comprimirá.

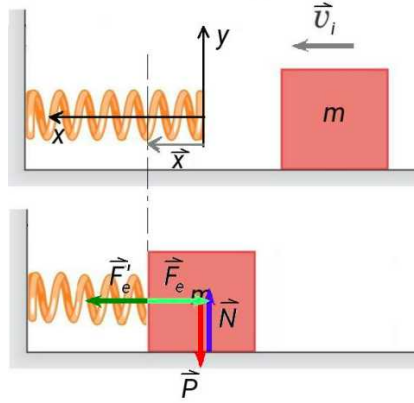


Figura 8.16: Diagrama de cuerpo libre para el Ejemplo 2.

### Solución

Usamos el Teorema Trabajo-Energía:

$$W_{NC \ i \rightarrow f} + W_{C \ i \rightarrow f} = \Delta K,$$

donde

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2,$$

debido a que la velocidad final es cero.

En este problema tenemos dos fuerza conservativas, el peso y la fuerza de Hooke, y una fuerza no conservativa, la normal. Esta fuerza no contribuye debido a que es perpendicular al desplazamiento:

$$W_{NC \ i \rightarrow f} = N x \hat{y} \cdot \hat{x} = 0.$$

Por otro lado, las fuerzas conservativas contribuyen con

$$W_{C \ i \rightarrow f} = -P x \hat{y} \cdot \hat{x} - k \int_0^x \vec{x} \cdot d\vec{x} = -k \int_0^x x dx = -k \frac{1}{2} x^2,$$

donde  $x$  es la distancia, medida desde la posición de equilibrio, que el cuerpo se ha desplazado. Observa que la fuerza de peso no realiza trabajo. Por lo tanto,

$$-k \frac{1}{2} x^2 = -\frac{1}{2} m v_i^2$$

y, entonces el resorte se ha comprimido

$$x = v_i \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Nuevamente, te dejo el trabajo de encontrar el valor numérico de esta expresión.

### Ejemplo 3:

Un objeto de masa  $m = 4 \text{ kg}$ , a partir del reposo, se desliza hacia abajo en un plano inclinado de longitud  $L = 3 \text{ m}$ . El plano está inclinado por un ángulo de  $\theta = 30^\circ$  al suelo. El coeficiente de fricción cinética  $\mu_k = 0,2$ . En la parte inferior del plano, la masa se desliza a lo largo de una superficie rugosa hasta que se detiene. Esta superficie tiene un coeficiente de fricción cinética que depende linealmente con la distancia recorrida:  $\mu_k(x) = 0,05x^{10}$ . El objetivo de este problema es averiguar a qué distancia se desliza el objeto a lo largo de la superficie rugosa.

- ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de fricción mientras la masa se desliza por el plano inclinado? ¿Es éste positivo o negativo?
- ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza gravitacional mientras la masa se desliza hacia abajo en el plano inclinado? ¿Es éste positivo o negativo?
- ¿Cuál es la energía cinética de la masa justo en la parte inferior del plano inclinado?
- ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de fricción mientras la masa se desliza por el suelo? ¿Es éste positivo o negativo?
- ¿Qué tan lejos se desliza el objeto a lo largo de la superficie rugosa?

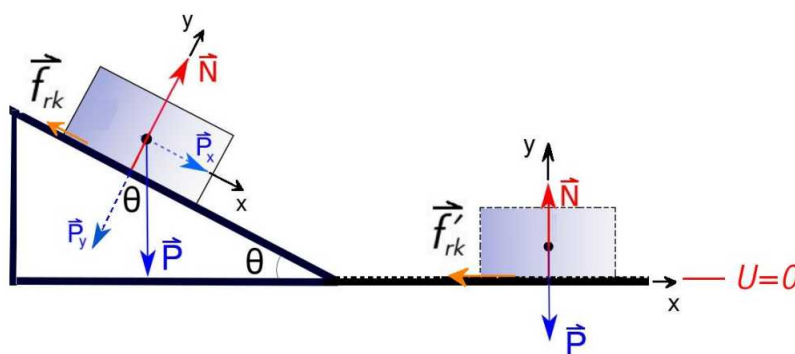


Figura 8.17: Diagrama de cuerpo libre para el Ejemplo 3.

### Solución

#### Plano inclinado:

- Aplicamos la segunda ley de Newton:

<sup>10</sup>Recuerda que el coeficiente de roce es adimensional

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m \vec{a}$$

que implica

$$\vec{f}_{rk} + \vec{P} + \vec{N} = m \vec{a}. \quad (8.52)$$

En términos de los vectores unitarios

$$-f_{rk} \hat{x} + P_x \hat{x} - P_y \hat{y} + N \hat{y} = m a \hat{x}. \quad (8.53)$$

De aquí obtenemos para ecuación en el eje y, con  $P_y = m g \cos \theta$ ,

$$-m g \cos \theta + N = 0. \quad (8.54)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por la fuerza de roce es entonces:

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f} &= \int_0^L \vec{f}_{rk} \cdot d\vec{s} = - \int_0^L f_{rk} dx \\ &= - \int_0^L \mu_k N dx = -\mu_k N \int_0^L dx \\ &= -\mu_k N L = -\mu_k m g \cos \theta L \\ &= -20,4 J \end{aligned} \quad (8.55)$$

b) Para determina el trabajo realizado por la fuerza de peso no es necesario hacer la integral, porque sabemos que es una fuerza conservativa y luego

$$W_{i \rightarrow f} = -m g (h_f - h_i). \quad (8.56)$$

Recordemos que no existe un valor absoluto para la energía. Siempre la debemos medir respecto a algún nivel de referencia arbitrario. Para la energía potencial, elegimos como cero de energía potencial el nivel del plano horizontal, como muestra la figura. Esta elección es arbitraria. Esto significa  $h_f = 0$ . Ahora, del diagrama vemos que  $h_i = L \sin \theta$  porque el plano inclinado tiene largo  $L$ . Por lo tanto, el trabajo realizado por el peso es

$$W_{i \rightarrow f} = m g L \sin \theta = 58,8 J. \quad (8.57)$$

c) Notamos que las fuerzas que son perpendiculares al movimiento no realizan trabajo. Por lo tanto, el trabajo total es la suma del trabajo realizado por la fuerza de roce y el trabajo realizado por la componente del peso a lo largo del plano inclinado. Ya hemos calculado ambos trabajos, así que

$$W_{total \ i \rightarrow f} = W_{roce \ i \rightarrow f} + W_{peso \ i \rightarrow f} = -20,4 + 58,8 = 38,4 J. \quad (8.58)$$

Ahora, usamos el teorema Trabajo-Energía para calcular la energía cinética al final del plano inclinado

$$W_{total \ i \rightarrow f} = \Delta K = \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2) = \frac{m}{2} v_f^2 = 38,4 J. \quad (8.59)$$

debido a que el cuerpo parte del reposo.



**Plano horizontal:**

d) En el plano horizontal, la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza de roce, debido a que el peso y la fuerza normal son perpendiculares al desplazamiento. Suponemos que el cuerpo desliza una distancia  $d$ , con origen en la unión entre ambos planos. Luego,

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f} &= \int_0^d \vec{f}_{rk}' \cdot d\vec{s} = - \int_0^k f_{rk}' dx \\ &= - \int_0^d \mu_k x N dx = - \mu_k N \int_0^d x dx. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Ya conocemos esta integral, luego

$$W_{i \rightarrow f} = - \mu_k N \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^d = - \mu_k m g \frac{1}{2} d^2, \quad (8.61)$$

donde hemos usado que  $P = N$  a partir de la segunda ley de Newton.

e) El lado izquierdo está dado por el teorema Trabajo-Energía:

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta K = K_f - K_i = -K_i,$$

debido a que el cuerpo termina en reposo. Ya conocemos el valor de la energía cinética inicial, es la energía cinética al final del plano inclinado que ya hemos calculado,  $K_i = 38,4$  J. Por lo tanto,

$$d = \sqrt{\frac{2 \cdot 38,4}{\mu_k m g}} = 6,3 \text{ m}. \quad (8.62)$$

**Ejemplo 4:**

Una partícula  $A$  de masa  $m$  está unida a un extremo de una cuerda inextensible y liviana de longitud  $R$ , como muestra la Fig. 8.18. El otro extremo de la cuerda está fijo en el punto  $O$ . La partícula se mantiene inicialmente con  $OA$  horizontal y la cuerda tensa. Luego se proyecta verticalmente hacia arriba con la velocidad  $u$ , donde  $u^2 = 5Rg$ . Cuando  $OA$  ha girado en un ángulo  $\theta$ , la velocidad de  $A$  es  $v$  y la tensión en la cuerda es  $T$ .

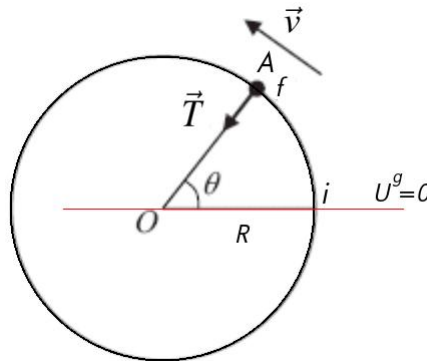


Figura 8.18: Diagrama para el Ejemplo 4.

a) Encuentra, en términos de  $R$ ,  $g$  y  $\theta$ , una expresión para  $v^2$

- b) Encuentra, en términos de  $m$ ,  $g$  y  $\theta$ , una expresión para  $T$ .  
 c) Prueba que la partícula  $A$  se mueve en un círculo completo.  
 d) Encuentra la velocidad máxima de la partícula  $A$ .

### Solución

- a) Usamos el Teorema Trabajo-Energía en su forma

$$W_{NC \ i \rightarrow f} = \Delta E = E_f - E_i.$$

De lo que hemos aprendido, la única fuerza no conservativa es la tensión. El trabajo realizado por la tensión, sin embargo es cero, porque  $\vec{T}$  y  $d\vec{s}$  son vectores perpendiculares en todo momento. Luego, de la ecuación anterior, resulta que la energía total se conserva. Los estados inicial y final están informados en la figura, así como el nivel de energía potencial cero.

Luego, tenemos que

$$U_f^q + K_f = U_i^q + K_i,$$

donde  $U_i^q = 0$  J,  $K_i = \frac{1}{2} m u^2$ ,  $U_f^q = mgR \sin \theta$ , y  $K_f = \frac{1}{2} m v^2$ . Luego,

$$v^2 = Rg \{5 - 2 \sin \theta\}. \quad (8.63)$$

- b) Para responder esta pregunta debemos aplicar la segunda ley de Newton

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m \vec{a},$$

que para este problema es

$$\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}. \quad (8.64)$$

En coordenadas polares planas,

$$-P \sin \theta \hat{\theta} - P \sin \theta \hat{r} - T \hat{r} = -m a_c \hat{r} + m a_t \hat{\theta}. \quad (8.65)$$

Para conocer la tensión basta analizar la ecuación radial. Luego, con el resultado para la velocidad encontrado en la parte a), obtenemos

$$T = m \frac{v^2}{R} - mg \sin \theta = mg \{5 - 3 \sin \theta\}. \quad (8.66)$$

c) Para probar que se mueve en un círculo completo debemos asegurarnos que la cuerda se mantiene tensa durante todo el giro. El punto crítico en el movimiento es en la parte superior del movimiento, donde  $\theta = \pi/2$ . Veamos qué sucede allí al evaluar la ecuación anterior

$$T = mg \{5 - 3\} = 2mg > 0. \quad (8.67)$$

Luego, la cuerda no se suelta y la partícula realiza un giro completo.

d) No es difícil convencerse que la máxima velocidad ocurre en el punto más bajo del giro. Esto es, para  $\theta = 3\pi/2$ :

$$v = \sqrt{Rg \left\{ 5 - 2 \sin \left( \frac{3\pi}{2} \right) \right\}} = \sqrt{7Rg}. \quad (8.68)$$

### 8.4.3 Ejercicios

1. Un automóvil con una masa de 500 kg viaja inicialmente con una velocidad de 80 km/h. Reduce su velocidad a una razón constante, deteniéndose a una distancia de 50 m.

- ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del automóvil después de recorrer 50 m?
- Si el automóvil disminuye la velocidad hasta detenerse en un terreno nivelado, ¿es recuperable el trabajo realizado en él?

2. Una bola de 1 kg se cae desde la cima de un acantilado con una aceleración constante debido a la gravedad. Supongamos que los efectos de la resistencia del aire pueden ser ignorados.

- ¿Cuánto ha cambiado la energía potencial gravitatoria de la bola después de haber caído 10 m?
- ¿Qué tan rápido va la pelota después de haber caído 10 m?
- ¿Cuál es la fuerza (si la hay) que actúa sobre la bola?
- ¿Cuánto trabajo se ha hecho sobre la bola?
- ¿Es recuperable el trabajo realizado sobre la bola?

3. Un automóvil con una masa de 500 kg está inicialmente en reposo. Una fuerza neta constante de 1.000 N actúa sobre el automóvil durante una distancia de 50 m, haciendo que el automóvil se acelere. Después de recorrer 50 m, el coche se mueve con velocidad constante.

- ¿Cuál es el trabajo total realizado en el automóvil a lo largo de los 50 m de distancia que recorre mientras se acelera?
- ¿Qué tan rápido se mueve el auto después de 50 m?
- ¿Cuál es la fuerza neta sobre el automóvil mientras se mueve con velocidad constante?
- ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el automóvil mientras se mueve con velocidad constante?

4. Tarzán corre a una velocidad máxima de 8 m/s y agarra una liana que cuelga verticalmente de un árbol alto en la selva. ¿Qué tan alto puede oscilar hacia arriba?

5. Un proyectil se dispara en un ángulo ascendente de  $60^\circ$  con una velocidad de 100 m/s. Aterrizo en una meseta 150 m más arriba. ¿Cuál es la velocidad del proyectil en el momento antes de que llegue a la meseta?

6. Un objeto de 2 kg está siendo empujado por una fuerza horizontal de magnitud  $F$  a lo largo de una mesa de aire horizontal, sin fricción. El objeto comienza desde el reposo en  $x = 0$  y la fuerza  $F$  que actúa sobre él cambia de acuerdo con la fuerza  $F$  vs  $x$  como muestra el gráfico en la Fig. 8.19.

- Encuentra el trabajo realizado por la fuerza  $F$  en el objeto cuando el objeto se mueve de  $x = 0$  a  $x = 9$  m.
- Encuentra la velocidad del objeto en  $x = 9$  m.

7. Una caja de 2 kg descansa en el suelo. ¿Cuánto trabajo se requiere para moverla a velocidad constante

- 3 m a lo largo del piso contra una fuerza de fricción de 4 N,
- 3 m a lo largo de una mesa de aire sin fricción,
- 3 m verticalmente?

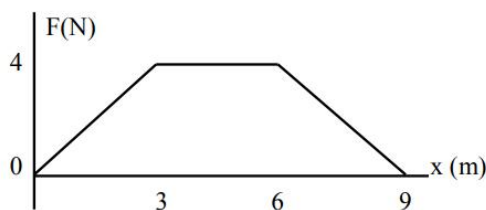


Figura 8.19: Figura para problema 6.

8. Una persona quiere mover 5 m en línea recta, a lo largo de un piso rugoso, una caja de 10 kg usando una fuerza de 80 N, como lo muestra la Fig. 8.20 . El coeficiente de roce cinético  $\mu_k$  entre el piso y la caja es 0,1. Determina el trabajo realizado en la caja por cada una de las siguientes fuerzas:

- la fuerza 80 N,
- la gravedad,
- la fuerza normal,
- la fricción,
- la fuerza neta.
- Encuentra el cambio en la energía cinética de la caja.

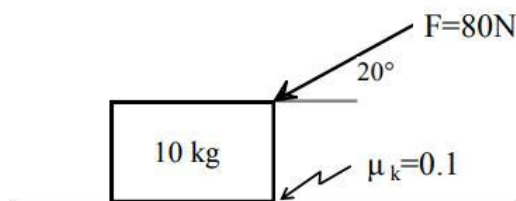


Figura 8.20: Figura para problema 8

9. A partir del reposo, un bloque de 4 kg se desliza 10 m por una inclinación de  $30^\circ$  sin fricción. Determina el trabajo realizado en el bloque por

- la fuerza de gravedad,
- la fuerza normal,
- todas las fuerzas (la fuerza neta) en el bloque.
- Encuentra la energía cinética del bloque al final de la plano de 10 m.

10. El bloque de 4 kg ahora se empuja por una fuerza paralela a la inclinación, de modo que el bloque se desliza 10 m por la inclinación sin fricción de  $30^\circ$  a velocidad constante.

- Encuentra la magnitud de la fuerza de empuje.
- Determina el trabajo realizado en el bloque por
- la fuerza de empuje,
  - la fuerza de gravedad,
  - la fuerza normal,
  - todas las fuerzas (la fuerza neta) en el bloque.
  - Encuentra el cambio en la energía cinética del bloque.

11. Si la velocidad de una partícula se triplica, ¿por qué factor cambia su energía cinética?

12. Una pelota de béisbol de masa  $m = 0,14 \text{ kg}$  que viaja a  $40 \text{ m/s}$  mueve el guante de un jardinero hacia atrás  $0,2 \text{ m}$  cuando se atrapa la pelota. ¿Cuál fue la cantidad promedio de fuerza ejercida por la pelota en el guante?

13. Se suelta una bola de espuma de poliestireno de  $0,01 \text{ kg}$  desde el reposo a  $2 \text{ m}$  sobre el piso. Alcanza una velocidad de  $3 \text{ m/s}$  el momento antes de que toque el suelo. ¿Cuánto calor debido a la resistencia del aire se genera durante este proceso?

14. Una montaña rusa pasa el punto A con una velocidad de  $1,2 \text{ m/s}$ .

a) Suponiendo que no haya fricción, encuentra la velocidad de la montaña rusa en los puntos B y C.

b) Si hay fricción y la fricción promedio es igual a una sexta parte de su peso, ¿con qué velocidad alcanzará el punto B? La distancia recorrida entre A y B es de  $60 \text{ m}$ .

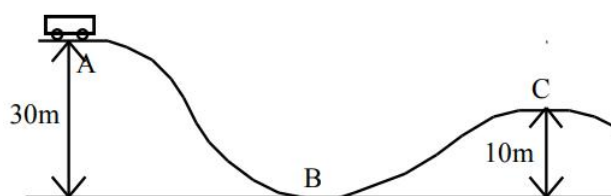


Figura 8.21: Figura para problema 15.

15. La longitud total de un resorte que satisface la ley de Hooke con una masa  $m = 0,2 \text{ kg}$  colgada es de  $0,2 \text{ m}$ . La longitud total del mismo resorte con una masa de  $0,7 \text{ kg}$  colgando es de  $0,25 \text{ m}$ .

a) Encuentra la constante de resorte.

b) ¿Cuánta energía potencial elástica se almacena en el resorte cuando la masa colgada debajo es  $m = 0,7 \text{ kg}$ ?

16. ¿Qué cambio de energía importante (por ejemplo,  $U_g \rightarrow \text{calor}$ ) se está produciendo cuando

a) una roca esta cayendo.

b) un péndulo se balancea desde su posición central hacia su punto final.

c) un paracaidista está cayendo a una velocidad constante (ésta se denomina **velocidad terminal**).

d) un auto de fricción (juguete) está acelerando a través de una mesa nivelada.

17. Si la energía potencial almacenada en un resorte se reduce a la mitad, ¿por qué factor ha disminuido su estiramiento?

18. Un carro de  $1.000 \text{ kg}$  que rueda sobre una superficie horizontal tiene una velocidad de  $30 \text{ m/s}$  cuando golpea un resorte en espiral horizontal y se detiene en una distancia de  $2 \text{ m}$ . ¿Cuál es la constante del resorte? Ignora la fricción.

19. Un dardo de  $0,2 \text{ kg}$  de masa se carga  $0,05 \text{ m}$  en un resorte enrollado verticalmente (como se muestra en la Fig 8.22 ) y luego se libera. El resorte tiene una constante de elástica  $k = 800 \text{ N/m}$  y masa despreciable.

a) ¿Cuál es la velocidad del dardo en el momento en que el resorte recupera su longitud relajada?

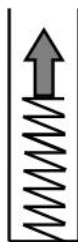


Figura 8.22: Figura para problema 19.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el dardo (medida desde su punto de inicio)?

20. Considera la Fig. 8.23. Un bloque pequeño de 2 kg se cae del reposo en el punto A. El resorte tiene una constante de resorte  $k = 500 \text{ N/m}$ .

a) Si toda la pista no tiene fricción, encuentra la compresión máxima del resorte. Si la pista completa no tiene fricción, excepto por 1 m entre los puntos B y C, donde el coeficiente de fricción cinética es 0,15,

b) encuentra la compresión máxima del resorte, y

c) encuentra la posición final del bloque en términos de la distancia desde el punto B.

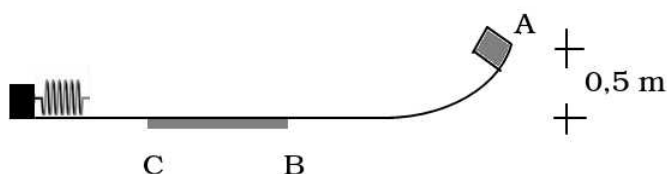


Figura 8.23: Figura para problema 20.

21. En la Fig. 8.24 se muestra un péndulo con una masa de 0,3 kg se suelta desde un ángulo de  $53^\circ$  a la vertical. La cuerda del péndulo tiene 2 m de largo.

a) Encuentra la altura  $h_1$ .

b) Encuentra la altura  $h_2$ .

c) Encuentra la velocidad del péndulo en el punto más bajo del movimiento.

d) Dibuja un diagrama de fuerza para mostrar todas las fuerzas que actúan sobre la masa del péndulo en el punto más bajo de la trayectoria. Junto al diagrama de fuerza, dibuja una flecha para mostrar la dirección de la aceleración del péndulo en el punto más bajo.

e) Encuentra la tensión en la cuerda cuando el péndulo oscile a su punto más bajo.

22. Una esfera sólida lisa, con centro  $O$  y radio  $R$ , se fija a la superficie de una mesa horizontal. Una partícula se coloca en la superficie de la esfera en un punto A, donde  $OA$  forma un ángulo  $\alpha$  con la vertical hacia arriba, y  $0 < \alpha < \pi/2$ . La partícula se libera del reposo. Cuando  $OA$  hace un ángulo  $\theta$  con la vertical hacia arriba, y la partícula aún está en la superficie de la esfera, la velocidad de la partícula es  $v$ .

a) Haz un esuema de la situación.

b) Encuentra  $v$  en función de  $\alpha$ ,  $\theta$ ,  $g$  y  $R$

Dado que  $\cos \alpha = 3/4$ , encuentra

c) el valor de  $\theta$  cuando la partícula pierde contacto con la esfera, y

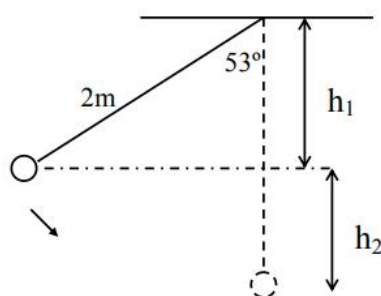


Figura 8.24: Figura para problema 21.

d) la velocidad de la partícula cuando golpea la mesa.

23. Un bloque de masa  $m = 5\text{ kg}$  desliza sobre una superficie horizontal. Cuando su velocidad es de  $v = 5\text{ m/s}$  choca contra un resorte de masa despreciable y de constante elástica  $k = 2.500\text{ N/m}$ , como muestra la Fig. 8.25. El coeficiente de roce cinético bloque-superficie es  $\mu_k = 0,2$ .

a) Haz un análisis energético del problema. Es decir analiza como se modifica la energía en cada etapa.

b) Calcula la longitud que se comprime el resorte.

c) Tras la compresión máxima, el resorte vuelve a descomprimirse y el bloque sale despedido hacia atrás. Calcula la distancia que recorre el bloque hasta que se detiene.

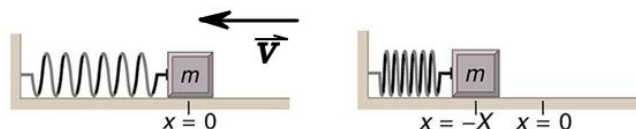


Figura 8.25: Sistema masa resorte comprimido.

24. Un bloque de  $m = 5\text{ kg}$  se desliza por una superficie horizontal lisa con una velocidad de  $v = 4\text{ m/s}$  y choca con un resorte de masa despreciable y  $k = 800\text{ N/m}$ , en equilibrio y con el otro extremo fijo. Calcula:

a) Cuánto se comprime el resorte.

b) Desde qué altura debería caer el bloque sobre el resorte, colocado verticalmente como muestra la Fig. 8.26, para producir la misma compresión.

25. Un bloque de masa  $m = 5\text{ kg}$  desliza con velocidad constante por una superficie horizontal mientras se le aplica una fuerza de  $10\text{ N}$ , paralela a la superficie.

a) Dibuja en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque. Analiza cuáles fuerzas son conservativas y cuáles no lo son.

b) Calcula los trabajos de cada fuerza si el bloque se ha desplazado  $0,5\text{ m}$ . Luego aplica el teorema Trabajo-Energía.

c) Dibuja en otro esquema las fuerzas que actuarían sobre el bloque si la fuerza que se le aplica fuera de  $30\text{ N}$  en una dirección que forma  $60^\circ$  con la horizontal, e indicar el valor

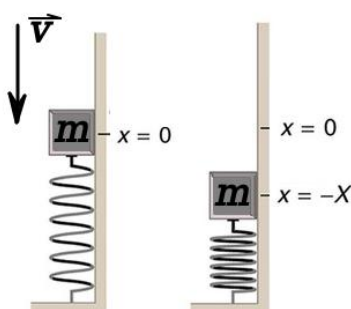


Figura 8.26: Sistema masa resorte comprimido.

de cada fuerza. Calcula la variación de energía cinética del bloque en un desplazamiento de 0,5 m.

26. Un ascensor tiene una masa  $m = 1.000$  kg y lleva una carga de  $M = 800$  kg. Una fuerza de roce constante de 4.000 N se opone a su movimiento. ¿Cuál debe ser la potencia mínima del motor para subir la carga con una velocidad constante de 3 m/s?

27. Un esquiador de 70 kg de masa es arrastrado hacia arriba por un cable motorizado.  
a) ¿Cuánta potencia se requiere para tirarlo 100 m por una pendiente sin fricción de  $30^\circ$  a una velocidad constante de 2 m/s?

b) ¿Cuántos caballos de potencia (hp) debe tener un motor para realizar esta tarea? (1 hp = 746 W. **No tienes que memorizar esto**).

28. El agua fluye sobre una cascada a una velocidad de 50.000 kg/s y cae 30 m. ¿Cuánta energía es generada por la caída del agua?

29. Un cajón de masa  $m = 48$  kg es arrastrado 8 m por una rampa hacia arriba mediante una cuerda de tensión  $T = 540$  N. Si el ángulo que forma la rampa con la horizontal es de  $30^\circ$  y el coeficiente de fricción cinético es  $\mu_k = 0,4$ , determina el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cajón.

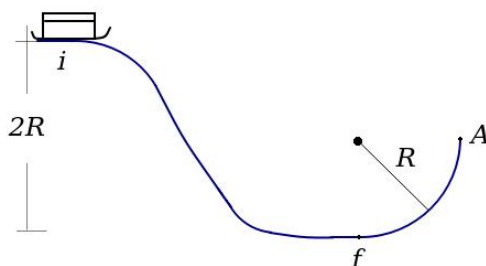


Figura 8.27: Trineo que baja por pendiente y se encuentra con rizo

30. Un trineo comienza a deslizarse desde el reposo en la cima de una colina siguiendo un camino cubierto de nieve y con el perfil de la Fig. 8.27. El tramo circular tiene un radio  $R$ . Si despreciamos cualquier roce:

- Determina el módulo de la velocidad del trineo en el punto  $f$ .
- ¿Cuál es la fuerza normal ejercida por la superficie en ese punto?



c) ¿Cuánto valen el módulo de la velocidad y la fuerza normal en el punto A?

31. En lo alto de un plano de 2 m de altura y  $30^\circ$  de inclinación se coloca una masa  $m = 0,5$  kg. Al final del plano se encuentra un aro circular de radio  $R = 0,8$  m, como indica la Fig. 8.28. En todo el recorrido no existe roce. Calcula:

a) La velocidad de la masa en los puntos A, B y C.

b) ¿Desde qué altura sobre el plano se debe dejar caer la masa para que al llegar al punto C no ejerza ninguna fuerza sobre el aro?

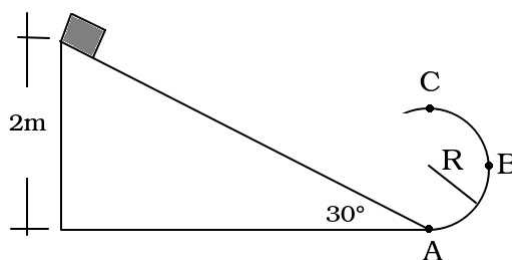


Figura 8.28: Masa que baja por un plano inclinado y sube a un loop

32. Desde una altura de 50 m se deja caer un cuerpo de 500 g. Si al llegar al suelo penetra en éste una distancia de 8 cm, calcula la fuerza de roce promedio que ha ofrecido el suelo. ¿En qué se ha empleado la energía mecánica que poseía el cuerpo? Se desprecia la resistencia del aire.

33. Un bloque de 2 kg está situado en el extremo de un resorte de constante elástica  $k = 500$  N/m y comprimido 20 cm. Al liberar el resorte, el bloque se desplaza por un plano horizontal y, tras recorrer una distancia de 1 m, asciende por un plano inclinado  $30^\circ$  con la horizontal. Solo existe rozamiento, con coeficiente de roce cinético  $\mu_k = 0,1$ , en el tramo de 1 metro recorrido en horizontal desde que el cuerpo se suelta del del resorte.

a) Calcula la distancia recorrida por el bloque sobre el plano inclinado.

b) Razona cuándo será máxima la energía cinética.

34. Un pequeño disco de masa de 4 kg se mueve en un círculo de radio de 1 m sobre una superficie horizontal, con un coeficiente de fricción cinética de  $\mu_k = 0,25$ . ¿Cuánto trabajo se realiza por fricción durante la finalización de una revolución?

35. Una partícula de masa  $m$  está colgada del techo por una cuerda sin masa de longitud 1 m, como se muestra en la Fig. 8.29. La partícula se libera del reposo, cuando el ángulo entre la cuerda y la dirección vertical hacia abajo es de  $30^\circ$ . ¿Cuál es su velocidad cuando alcanza el punto más bajo de su movimiento?

36. Se dispara una bala de cañón de 5 kg desde el suelo directamente hacia el aire de modo que se eleva a una altura de 50 m.

a) ¿Cuál es la energía potencial de la bala de cañón cuando alcanza su altura máxima?

b) ¿Cuál es la velocidad de la bala de cañón justo antes de que caiga al suelo?

37. Una bola de boliche de 2,5 kg rueda hacia una pared que viaja a 6 m/s. Se estrella contra la pared y las fuerzas que actúan desde la pared lo detienen.

a) ¿Cuánto trabajo realizó el muro para que el objeto descansara?

b) Si la pelota descansa en 0,4 segundos, calcula la potencia utilizada para detenerla.

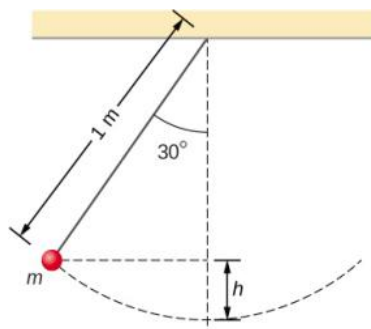


Figura 8.29: Péndulo en movimiento

38. En la Fig. 8.30 se muestra una pequeña esfera sólida de radio despreciable y masa  $m = 0,1 \text{ kg}$ . Se presiona sobre un resorte de constante elástica  $k = 20 \text{ N/m}$  quedando en la posición A. Luego se libera del reposo con el resorte comprimido a 20 cm de su longitud natural. La esfera se mueve a lo largo de una superficie horizontal hasta el punto B, donde continúa suavemente sobre una pista circular de radio  $R = 2 \text{ m}$ . La esfera finalmente abandona la superficie de la pista en el punto C. Encuentra el ángulo  $\theta$  donde la esfera se despega de la pista. Supón que no hay roce sobre las superficies.

Ayuda: Encuentra una expresión para la velocidad de la esfera en el punto C.

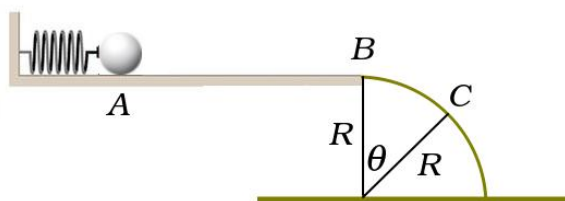


Figura 8.30: Esfera que rueda por trayectoria curva

39. En el diagrama de la Fig. 8.31, el bloque  $m_1$  está conectado a  $m_2$  por una cuerda ideal tensa que pasa por tres poleas idénticas e ideales. El coeficiente de fricción cinética para la superficie horizontal es  $\mu_k$ . Encuentra una expresión para la velocidad  $v$  del bloque  $m_2$  en términos de la distancia  $L$  que el bloque  $m_1$  se mueve hacia la derecha. Tu respuesta debe expresarse en términos de  $L$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $\mu_k$  y  $g$  solamente.

40. Un vehículo de  $1.250 \text{ kg}$  de masa es conducido con una aceleración de  $0,2 \text{ m/s}^2$  a lo largo de una carretera recta contra una fuerza resistiva externa de  $500 \text{ N}$ . Calcula la potencia entregada por el motor del vehículo si la velocidad del vehículo es de  $30 \text{ m/s}$ .

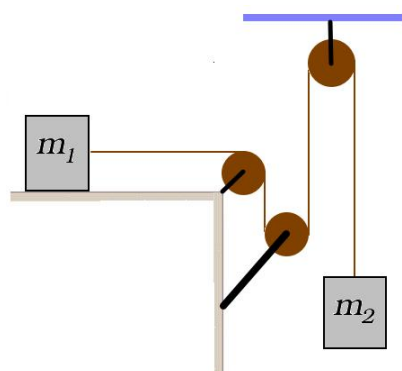


Figura 8.31: Dos masas unidas por cuerda que pasa por tres poleas ideales





## 9. CENTRO DE MASA

Hasta ahora hemos trabajado con sistemas, objetos físicos, que pueden ser considerados puntuales. El punto que hemos utilizado, hemos dicho, corresponde al **centro de masa del sistema de partículas** sin haber dado una definición precisa.

### 9.1 Definición del centro de masa

Ha llegado el momento de definir esta importante cantidad. Para ello, por supuesto necesitamos un observador inercial. Consideremos un sistema de partículas como en la figura. En ésta, a cada una de las  $n$  partículas se le ha asignado un vector de posición  $\vec{r}_i$  (no mostrado para todas las partículas). Aparece allí también el vector de posición del centro de masa,  $\vec{r}_{cm}$ . Observa que este vector no se ubica en una masa en particular, solo da cuenta de una posición en el espacio.

Definimos el vector de posición del centro de masa como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i\vec{r}_i, \quad (9.1)$$

donde hemos usado el hecho que la masa total del sistema,  $M$ , es la suma de las masas individuales. Esto es lo que se denomina en matemáticas un promedio ponderado, ya que cada término en el promedio contribuye, en general, de modo distinto en la suma. Luego, esta expresión para el vector de posición lo que hace es tomar en cuenta el valor de cada masa y dar cuenta entonces de cuánto contribuye al promedio de los vectores de posición de cada masa.

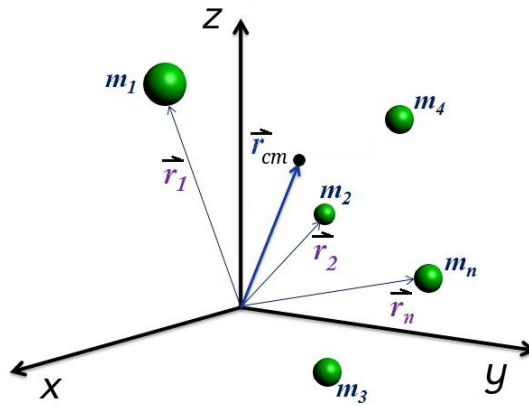


Figura 9.1: Centro de masa de un sistema de partículas.

La pregunta que aparece naturalmente es qué sucede si el sistema no está compuesto de masas discretas, sino es un cuerpo continuo, como un teléfono celular o una pelota de fútbol. Un sistema continuo lo podemos pensar como un arreglo de masas infinitesimales,  $dm$ , unas pegadas al lado del otro, cuya suma forma la masa completa. Esto nos da la idea para definir el vector de posición del centro de masa de tal sistema. Esto es lo que hemos hecho, de manera poco rigurosa, cierto, para pasar de una suma a una integral. Por lo tanto, la generalización natural del promedio ponderado anterior es un “promedio continuo ponderado”:

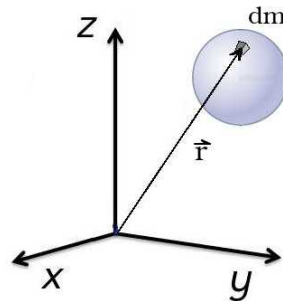


Figura 9.2: Centro de masa de una distribución continua de masa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}. \quad (9.2)$$

La integral del denominador no es más que la suma sobre todos los elementos infinitesimales de masa en todo el volumen que ocupa el cuerpo, es decir, su masa total,  $M$ .

¿Cómo se hace esta integral, que como he dicho, no haremos aquí porque aún usted debe aprender un poco más de cálculo diferencial e integral? La clave está en lo siguiente: probablemente recuerda que le han dicho que la densidad (volumétrica) en un volumen  $V$  se escribe como

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (9.3)$$

Esta expresión solo es válida cuando la densidad es constante. Pero no todos los cuerpos tienen densidad de masa constante; ¡basta pensar en nuestro propio cuerpo! Cuando la densidad no es constante, la densidad se define como

$$\rho = \frac{dm}{dV}, \quad (9.4)$$

que es una expresión, claro, más general, ya que este  $\rho$  depende ahora de la posición. Luego, podemos despejar el  $dm$  de aquí (haciendo la suposición de que el  $dV$  está dividiendo – no es cierto–) y reemplazar en la Ec. (9.2) para obtener

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho \, dV. \quad (9.5)$$

Es decir, en general el vector de posición del centro de masa queda definido por una **integral de volumen**. ¿Y qué pasa con un cuerpo que es plano o una vara unidimensional? Más adelante aprenderás a hacer el paso de la integral de volumen a las **integrales de superficie**, dos dimensiones, e **integrales de línea**, una dimensión. Solo te cuento el resultado aquí:

**Dos dimensiones:** Definimos la **densidad superficial** de masa,  $\sigma = dm/dA$  y entonces

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \sigma \, dA, \quad (9.6)$$

con

$$M = \int dm = \int \sigma \, dA. \quad (9.7)$$

**Una dimensión:** Definimos la **densidad lineal** de masa,  $\lambda = dm/dl$  y entonces

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \lambda \, dl. \quad (9.8)$$

con

$$M = \int dm = \int \lambda \, dl. \quad (9.9)$$



Figura 9.3: Ave voladora en equilibrio

Un ejemplo simpático es el del ave voladora, que se equilibra con un dedo, como muestra la Fig. 9.3. Sabemos por las leyes de Newton que si la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es cero, este cuerpo permanecerá en reposo (o con velocidad

constante). También hemos visto que la fuerza de peso actúa en un punto del cuerpo, el centro de masa. Para que el cuerpo permanezca en reposo necesariamente la fuerza normal, que es la reacción de la superficie, debe pasar por ese punto. Si no lo hiciese entonces las fuerzas normal y peso no estarían alineadas y luego su suma vectorial no podría ser cero. Para que este juguete se quede en reposo, entonces, su centro de masa debe estar en la posición del pico del ave, o estar sobre esa dirección.

Claramente, hacer una integral de volumen para esta ave no es cosa fácil. ¡Mejor utilizar cálculo numérico!

Sin embargo, cuando el sistema tiene suficiente simetría, la misma simetría viene a nuestro auxilio.

Para ejemplificar la importancia de las simetrías, consideremos un bolón esférico de metal, con masa 200 g, como el que se utiliza para la molienda de roca en minería. Suponiendo que su masa está uniformemente distribuida, es decir  $\rho = cte$ , entonces este bolón tiene **simetría esférica**. No la voy a definir de un modo formal riguroso, sino “con las manos”, es decir, usando argumentos plausibles.

Si tenemos una esfera con las características dadas, entonces la podemos hacer rodar y se mantendrá en línea recta, o mejor, la podemos girar respecto de un eje cualquiera y se verá igual. Estos ejes se denominan **ejes de simetría**. En la figura se muestra dos de esos ejes. Observa que ambos ejes pasan por el centro de la esfera. Ese punto corresponde al centro de masa. Es en ese punto donde **toda** la masa del bolón de metal **parece** localizarse.

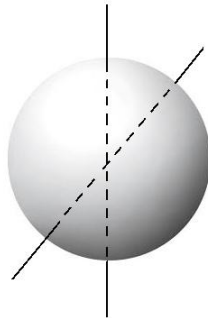


Figura 9.4: Ejemplo de simetría esférica

También podemos considerar dos cilindros, uno lleno, con masa de 350 g, y el otro con un orificio **coaxial** a lo largo de “la vertical”. En la figura se observan dos ejes (principales) de simetría: uno que va por el eje del cilindro (coaxial), y otro que pasa por la mitad del cilindro, cruzándolo por su diámetro. Observa que, nuevamente, si se giran los cilindros alrededor de alguno de esos eje, éste queda invariante después de girar por un ángulo dado. Notar además que en ambos casos, así como ocurrió con la esfera, el punto donde ambos ejes se cruzan es donde se debe ubicar el centro de masa.

Este ejemplo muestra claramente que el centro de masa no necesita encontrarse **dentro** del volumen del objeto.

### Ejemplo 1:

Podemos hacer algo mucho mejor que lo que hemos hecho hasta ahora. Consideremos un bolón de acero sobre el cilindro lleno, tal que dos de sus ejes de simetría coinciden, como muestra la Fig. 9.6. Nos preguntamos por la posición del centro de masa del sistema.



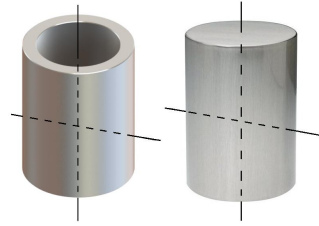


Figura 9.5: Ejemplo de simetría cilíndrica

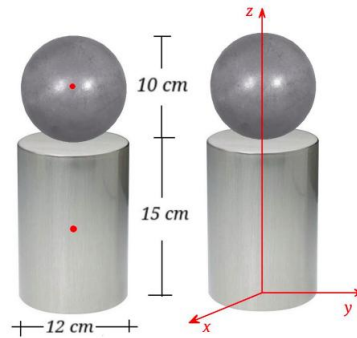


Figura 9.6: Ejemplo de simetría cilíndrica

### Solución

De lo que hemos aprendido, ya sabemos dónde ubicar los centros de masa para ambos cuerpos, como se muestra en la figura de la izquierda. ¿Cómo obtenemos la posición del centro de masa del objeto completo? Parece difícil, pero no lo es, justamente porque tenemos simetrías a nuestro favor. Pero nos falta algo. Así es, nuestro sistema de referencia inercial. Éste se muestra en la figura de la derecha. **De acuerdo a este sistema de referencia**, los respectivos centros de masa se ubican en las posiciones

$$\begin{aligned}\vec{r}_{esf. cm} &= 20,0 \hat{z} \text{ cm} \\ \vec{r}_{cil. cm} &= 7,5 \hat{z} \text{ cm},\end{aligned}$$

que corresponden a las posiciones de dos masas puntuales, los centros de masas de cada cuerpo. Pero ya sabemos qué hacer cuando queremos localizar el centro de masa de un sistema de masas puntuales, usamos la Ec. (9.1):

$$\begin{aligned}\vec{r}_{cm} &= \frac{m_{cil.} \vec{r}_{cil. cm} + m_{esf.} \vec{r}_{esf. cm}}{m_{cil.} + m_{esf.}} \\ &= \frac{1}{550} \{350 \cdot 7,5 \hat{z} + 200 \cdot 20,0 \hat{z}\} = \frac{6625}{550} \hat{z} \\ &= 12,0 \hat{z} \text{ cm}\end{aligned}\tag{9.10}$$

Lo interesante de esta técnica es que la podemos usar cuando tenemos suficientes simetrías, sin importar si hablamos de sistemas continuos unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales.

### Ejemplo 2:

Consideremos una plancha de madera de  $4 \times 4 \text{ m}^2$ , con densidad superficial de masa  $\sigma$  uniforme, a la que se le ha cortado un trozo como muestra la Fig. 9.7. Determina la posición del centro de masa.

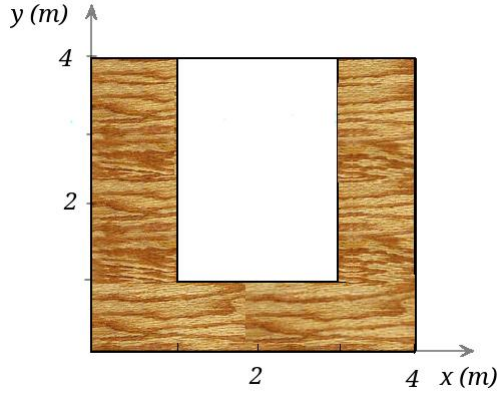


Figura 9.7: Plano de madera, cortado en U.

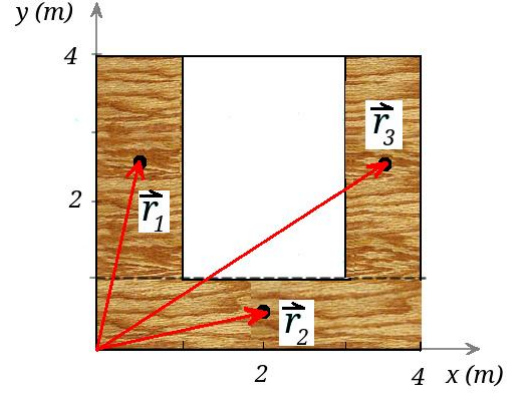


Figura 9.8: Vectores de posición de los centros de masa de tres trozos.

### Solución

En la Fig. 9.8 hemos hecho uso de las simetrías del objeto y lo hemos dividido en tres rectángulos. Nota que esa división no es única. No importa. Para determinar la posición del centro de masa de un rectángulo basta con ubicar dos ejes de simetría y ver dónde se intersectan. Para un rectángulo uniforme, estos ejes pasan por la mitad de la figura. Luego, hemos dibujado un círculo negro en la posición del centro de masa, con vectores de posición

$$\vec{r}_1 = 0,5\hat{x} + 2,5\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = 2,0\hat{x} + 0,5\hat{y}$$

$$\vec{r}_3 = 3,5\hat{x} + 2,5\hat{y}.$$

Para aplicar la definición del centro de masa de un sistema de partículas, debemos saber cómo incorporar la información de la masa. Tenemos que la densidad superficial de masa es constante, luego

$$\sigma = \frac{m}{A} \implies m_i = \sigma A_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.11)$$

Reemplazamos en la Ec. (9.1) esta expresión para cada trozo de madera, de masa  $m_i$  y área  $A_i$ , y obtenemos para este caso

$$\vec{r}_{cm} = \frac{A_1\vec{r}_1 + A_2\vec{r}_2 + A_3\vec{r}_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^3 A_i\vec{r}_i, \quad (9.12)$$

donde hemos simplificado  $\sigma$ . El área total de la plancha de madera es  $A = 2(3 \times 1) + 4 \times 1 = 10 \text{ m}^2$ . Evaluando obtenemos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{3 \cdot (0,5\hat{x} + 2,5\hat{y}) + 4 \cdot (2,0\hat{x} + 0,5\hat{y}) + 3 \cdot (3,5\hat{x} + 2,5\hat{y})}{10} = 2\hat{x} + 1,7\hat{y} \text{ m}. \quad (9.13)$$

Es claro que la posición del centro de masa en el eje  $x$  debe tener coordenada  $x = 2 \text{ m}$  porque la plancha es simétrica alrededor de un eje vertical que pasa por allí (¡nuevamente la simetría!).

Podemos resolver el mismo problema haciendo algo más interesante aún. La siguiente forma de pensar manténla en mente, ya que te será útil por ejemplo cuando estudies electromagnetismo (!). No es más que una aplicación práctica del **principio de superposición lineal**. Retomaremos las consecuencias de este principio cuando estudiemos ondas.

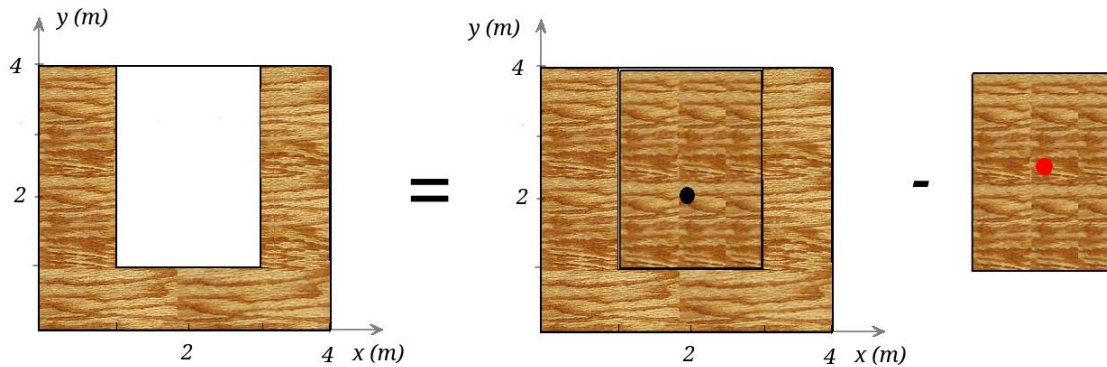


Figura 9.9: Combinación de dos objetos para formar el original

En la Fig. 9.9 se muestra cómo la figura original se puede pensar como la plancha de madera completa, menos el rectángulo del sacado. Los centros de masa de cada cuerpo están marcados en la figura. Los vectores de posición de esos puntos están dados por  $\vec{r}_1 = 2,0\hat{x} + 2,0\hat{y}$  y  $\vec{r}_2 = 2,0\hat{x} + 2,5\hat{y}$ . Luego, usando la ecuación análoga a la Ec. (9.12) obtenemos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{16 \cdot (2,0\hat{x} + 2,0\hat{y}) - 6 \cdot (2,0\hat{x} + 2,5\hat{y})}{16 - 6} = 2\hat{x} + 1,7\hat{y} \text{ m.} \quad (9.14)$$

**Observa el detalle importante:** el área total que se debe considerar es la diferencia entre las áreas de los dos cuerpos, tal como lo muestra la figura.

### Ejemplo 3:

Un bloque cuadrado de lado  $0,1 \text{ m}$  y masa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  se asienta en el lado de una cuña triangular de masa  $m_2 = 6 \text{ kg}$ , como se muestra en la figura. Localiza el centro de masa del sistema combinado, medido desde el vértice rectangular del triángulo.

### Solución

**Resultado importante:** El centro de masa de una cuña triangular rectangular de lados  $a$  y  $b$  está ubicado en un punto con coordenadas  $a/3$  y  $b/3$ .

De modo más general, hay un teorema muy útil para el caso de triángulos:

Las tres medianas de un triángulo se encuentran en un único punto que está a dos tercios de la distancia desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto, como muestra la Fig. 9.11.

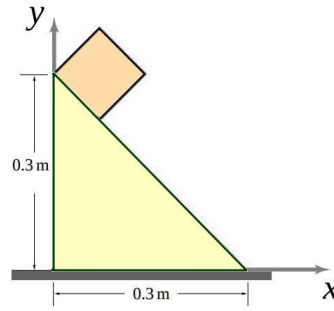


Figura 9.10: Figura para problema 4

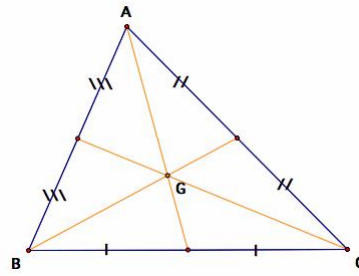


Figura 9.11: Centro de masa de un triángulo

Llamemos  $m_1$  la masa de la cuña y  $m_2$  la masa del bloque cuadrado. Entonces, de la figura, las posiciones del centro de masa de cada cuerpo están dadas por

$$\vec{r}_1 = \frac{0,3}{3} (\hat{x} + \hat{y}) = 0,1 (\hat{x} + \hat{y}) m \quad (9.15)$$

y

$$\vec{r}_2 = \frac{\sqrt{(2 \cdot 0,1)^2}}{2} \hat{x} + 0,3 \hat{y} = 0,071 \hat{x} + 0,3 \hat{y} m, \quad (9.16)$$

donde hemos usado el hecho de que la posición en el eje  $x$  es a la mitad de la diagonal del cuadrado.

Por lo tanto, utilizando la definición de centro de masa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

obtenemos, usando que  $m_2 = 3 m_1$ ,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm} &= \frac{\vec{r}_1 + 3\vec{r}_2}{4} = \frac{1}{4} (0,1 (\hat{x} + \hat{y}) + 3 \cdot (0,071 \hat{x} + 0,3 \hat{y})) \\ &= 0,08 \hat{x} + 0,25 \hat{y} m \end{aligned} \quad (9.17)$$

## 9.2 Centro de gravedad

El centro de gravedad es una propiedad geométrica de cualquier objeto y corresponde a la ubicación promedio del peso de un objeto:

$$\vec{r}_{cg} = \frac{m_1 g \vec{r}_1 + m_2 g \vec{r}_2 + m_3 g \vec{r}_3 + \dots m_n g \vec{r}_n}{m_1 g + m_2 g + m_3 g + \dots m_n g}, \quad (9.18)$$

definido así, parece una definición tonta, ya que no se diferencia de la definición del centro de masa, dado que las aceleraciones de gravedad se cancela en la ecuación. Y sí, así es cuando cuando el cuerpo se encuentra en un campo gravitatorio constante, algo usual en la superficie terrestre. Sin embargo, en caso de que el objeto sea tan grande que el campo gravitatorio no puede considerarse paralelo a la superficie, el centro de gravedad no coincide con el centro de masa. Es por eso que uno debe distinguir entre el centro de masa y el centro de gravedad.

Para un objeto con forma general, hay una forma mecánica simple de determinar el centro de gravedad: se cuelga el objeto de cualquier punto y traza una línea en el objeto en la dirección de la cuerda. Luego se cuelga desde otro punto y se repite el procedimiento. Donde las dos líneas dibujadas se intersectan allí se ubica el centro de gravedad. Este procedimiento funciona bien para objetos de forma irregular que son difíciles de equilibrar.

## 9.3 Movimiento del centro de masa

Dado que el centro de masa de un objeto o sistema de partículas es un punto, una vez localizado ese punto, podemos analizar su movimiento de traslación. Por ejemplo, al lanzar un martillo de masa  $m$  al aire podemos seguir el movimiento del su centro de masa. Lo que tenemos es un punto de masa  $m$  que se mueve en el campo gravitatorio terrestre, con  $g = cte.$ ; es decir, el centro de masa describe un movimiento parabólico, como muestra la Fig. 9.12. Todo lo que has aprendido de cinemática bidimensional lo puedes utilizar para describir el movimiento de traslación del centro de masa.

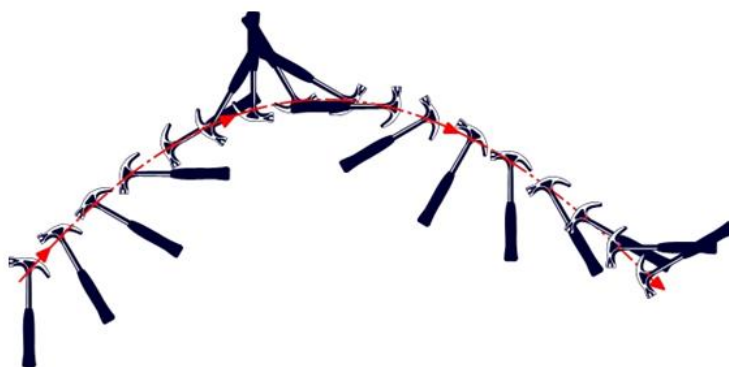


Figura 9.12: Movimiento parabólico del centro de masa de un objeto

Hasta ahora esto es lo que hemos hecho en este curso, tanto en cinemática como en dinámica, analizar el movimiento de un punto: el centro de masa. Como puedes observar en la figura, el movimiento del centro de masa no describe todo el movimiento del cuerpo.

Para ello, más adelante, estudiaremos la dinámica del sólido rígido. Por ahora puedes mirar, atentamente, este video del MIT <https://www.youtube.com/watch?v=DY3LYQv22qY>.

Si derivamos con respecto del tiempo la definición del centro de masa obtenemos la expresión para la velocidad del centro de masa

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (9.19)$$

Si sobre el sistema de masas no actúan fuerza externas, entonces el centro de masa permanecerá en reposo o se moverá a velocidad constante, de acuerdo a la primera ley de Newton.

Por supuesto, una siguiente derivada temporal de la ecuación anterior conduce a la expresión para la aceleración del centro de masa,

$$\vec{a}_{cm} = \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots m_n \vec{a}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots m_n} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i. \quad (9.20)$$

#### Ejemplo 4:

Un joven de 70 kg está de pie al final de un bote de 250 kg que está flotando en el agua. Tanto el muchacho como el bote están en reposo. El bote tiene una longitud de 3 m. Si el joven camina hacia el otro extremo del bote, ¿hasta dónde se moverá el bote en el agua? Ignora cualquier fuerza ejercida sobre el bote por el agua.

#### Solución

Sobre el sistema joven-bote no existen fuerzas externas actuando. Por la primera ley de Newton, el centro de masa estará en reposo (o moviéndose con velocidad constante). En este caso, inicialmente está en reposo y luego permanecerá en ese estado, como muestra la Fig. 9.13. Por lo tanto, todo lo que tenemos que hacer es igualar la expresión para el centro de masa del sistema antes de que el muchacho se mueva con la expresión para el centro de masa del sistema después de que el joven se movió.

Ponemos nuestro sistema de referencia en la posición inicial del centro de masa del bote, como muestra la figura superior. Luego, en la situación “antes”, la posición del centro de masa es

$$\vec{x}_{cm,i} = \frac{m_j \vec{x}_j + m_b \vec{x}_b}{m_j + m_b} = \frac{-70 \cdot 1,5 \hat{x} + 250 \cdot 0 \hat{x}}{70 + 250} = -\frac{105}{320} \hat{x}. \quad (9.21)$$

En la figura inferior se muestra cómo el centro de masa del bote se ha movido debido al movimiento del joven. Así, en la situación “después”, la posición del centro de masa del sistema es

$$\vec{x}_{cm,f} = \frac{m_j \vec{x}'_j + m_b \vec{x}'_b}{m_j + m_b} = \frac{70(1,5 - x) \hat{x} - 250 \hat{x}}{70 + 250} \quad (9.22)$$

Debido a que no hay fuerzas externas netas actuando, el centro de masa debe permanecer sin moverse. Por lo tanto,

$$\vec{x}_{cm,i} = \vec{x}_{cm,f} \implies 320 \cdot x = 2 \cdot 105. \quad (9.23)$$

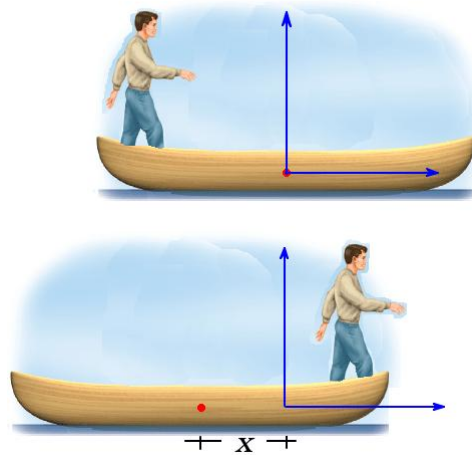


Figura 9.13: Estudiante caminando sobre bote

Es decir, el bote se movió

$$x = 66 \text{ cm} \quad (9.24)$$

hacia la izquierda.

## 9.4 Baricentro: un ejemplo desde la astronomía

El baricentro es el punto entre dos objetos donde se equilibran entre sí. En el área de la astronomía y astrofísica, es el centro de gravedad (masa) donde dos o más cuerpos celestes orbitan entre sí. Cuando una luna orbita un planeta, o un planeta orbita una estrella, ambos cuerpos están orbitando alrededor de un punto que se encuentra en algún lugar entre los dos cuerpos, como muestra la Fig. 9.14 para el caso Tierra-Luna. Para este caso, la Luna no orbita alrededor del centro de la Tierra, sino que orbita un punto fuera del centro de la Tierra (pero muy por debajo de la superficie terrestre). Por cierto, dependiendo de las masas involucradas, el baricentro puede estar fuera de ambos cuerpos. En cualquier caso, el baricentro es uno de los focos de la órbita elíptica de cada cuerpo.

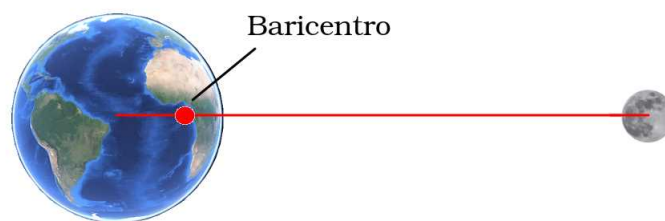


Figura 9.14: Baricentro en la órbita de Tierra-Luna

En un caso simple de dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$ , que están separados una distancia  $a$  desde el centro del primer cuerpo, el más masivo, hasta el baricentro, la posición de éste está dada por:

$$r_1 = a \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{a}{1 + \frac{m_1}{m_2}}. \quad (9.25)$$

Resulta que  $r_1$  es esencialmente el **semi-eje mayor de la órbita** del primer cuerpo alrededor del baricentro, y  $r_2 = a - r_1$  el semi-eje mayor de la órbita del segundo cuerpo.

### 9.4.1 Ejercicios

1. Una mujer de 59 kg y un hombre de 71 kg se sientan en un balancín de 3,5 m de largo. ¿Dónde está su centro de masa?
2. El volcán Osorno (Chile) tiene aproximadamente la forma de un cono. El ángulo en el vértice de este cono es de 60 grados aproximadamente, y la altura del vértice es de 2.652 m. ¿A qué altura está el centro de masa? Supón que el material en el volcán Osorno tiene la densidad del cobre. Haz uso de simetrías. Este no es un problema de integrales.



Figura 9.15: Centro de masa del volcán Osorno

3. Considera una estructura que se compone de tres masas,  $m_1 = 1,0$  kg,  $m_2 = 2,0$  kg y  $m_3 = 3,0$  kg, conectados rígidamente por varillas sin masa, como muestra la Fig. 9.16. Las coordenadas de las tres masas son  $\vec{r}_1 = 1,35\hat{x} + 3,2\hat{y}$  m,  $\vec{r}_2 = 2,1\hat{x} + 1,8\hat{y}$  m,  $\vec{r}_3 = 0,8\hat{x} + 0,4\hat{y}$  m, respectivamente. Encuentra las coordenadas del centro de masa de la estructura,

- a) Calculando las componentes del centro de masa
- b) Por cálculo vectorial directo, a partir de la definición de  $\vec{r}_{cm}$ .

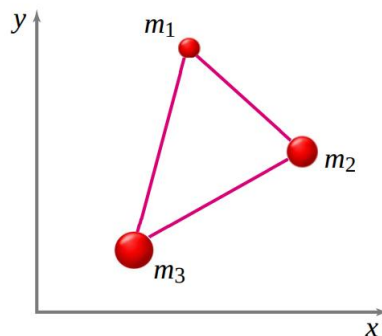


Figura 9.16: Estructura de tres masas



4. A un alumno del curso de física se le ocurre ir a un lago a pescar, solo. Arrienda un bote y como no pescaba nada se le ocurre practicar sus conceptos de centro de masa. Él tiene una masa de 50 kg y está parado en un extremo del bote de masa de 300 kg flotando en aguas tranquilas, como muestra la Fig. 9.17. Debido a que hay roce en la superficie interna del bote, camina hacia el otro extremo del bote con una velocidad constante de 2 m/s con respecto a un observador estacionario en tierra. ¿Cuál será la velocidad del bote,
- a) con respecto al observador estacionario en tierra?
  - b) con respecto al alumno que camina en el bote?
- Supón que el roce del bote con el agua es despreciable.

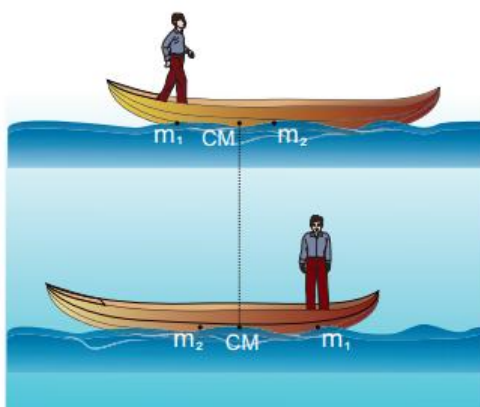


Figura 9.17: Estudiante caminando sobre bote

5. Una placa cuadrada uniforme de  $2 \times 2 \text{ m}^2$  tiene una masa  $M = 4,0 \text{ kg}$ . Una sección circular de 250 mm de radio se extrae de la placa como se muestra en la Fig. 9.18. Encuentra el centro de masa de la placa, medido desde el punto  $O$ .

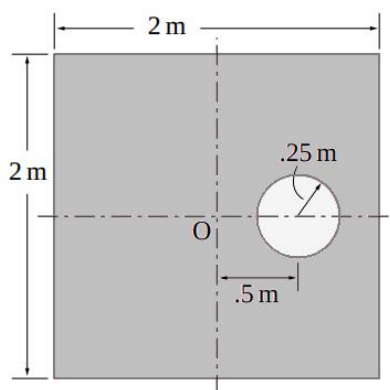


Figura 9.18: Placa con orificio circular

6. Una lámina uniforme se construye a partir de un triángulo isósceles con la base  $b = 6,0 \text{ cm}$  y la altura  $h = 6,0 \text{ cm}$ , conectada a un rectángulo de tamaño  $6,0 \text{ m}$  por  $8,0 \text{ m}$ , como se muestra en la Fig. 9.19. Determina la distancia del centro de masa desde el borde común entre el triángulo y el rectángulo, marcada con la letra  $A$ . La lámina se coloca en un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha = 15^\circ$  con la horizontal.

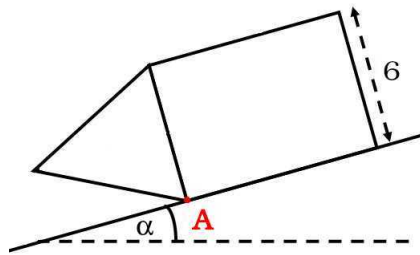


Figura 9.19: Figura en forma de lápiz

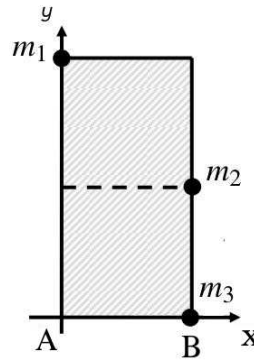


Figura 9.20: Placa con tres masas

7. Tres partículas con masas  $m_1 = 5m$  kg,  $m_2 = 3m$  kg y  $m_3 = \alpha m$  kg están unidas a una lámina rectangular uniforme, como muestra la Fig. 9.20. Los vectores de posición de las partículas son  $\vec{r}_1 = 8\hat{y}$  m,  $\vec{r}_2 = 4\hat{x} + 4\hat{y}$  m y  $\vec{r}_3 = 3\hat{x}$  m.

- Determina la posición del centro de masa para la tres partículas.
- Si la masa de la lámina uniforme es 12 m, determina la posición del centro de masa para el sistema combinado.
- Si el sistema combinado se suspende libremente de la esquina A, calcula el ángulo entre AB y la horizontal.

8. Un pescador en un bote atrapa un gran tiburón blanco con un arpón. El tiburón lucha por un tiempo y luego se debilita cuando está a una distancia de 300 m del bote. El pescador tira del tiburón por la cuerda atada al arpón. Durante esta operación, el bote (inicialmente en reposo) se mueve 45 m en dirección al tiburón. La masa del barco es de 5.400 kg. ¿Cuál es la masa del tiburón? Supón que el agua no ejerce fricción, es decir, la suma de fuerzas externas es cero.

9. Un soporte de metal con densidad uniforme de masa está diseñado como un cuadrado ABCD de lado 12 cm, con un cuadrado de lado 4 cm retirado de un cuadrante, como se muestra en el diagrama, Fig. 9.21. Encuentra la ubicación del centro de masa para el soporte desde la esquina ABC.

10. De un disco uniforme de radio  $R$ , se corta y se retira un pequeño disco de radio  $R/2$  como se muestra en el diagrama de la Fig. 9.22. Encuentra el centro de masa de la porción restante del disco.

11. Un sistema consta de tres masas en diferentes lugares cerca del origen de coordenadas, como se muestra en la Fig. 9.23. El cuerpo 1 tiene una masa de 2,0 kg y está ubicada en el eje  $x$ , en  $x_1 = -2,0$  m; la partícula 2 tiene una masa desconocida y tiene coordenadas en  $(x_2 = 4,0, y_2 = 3,0)$  m; la masa 3 está en algún lugar del eje  $y$  en una ubicación desconocida, y tiene una masa de 1,0 kg. Las coordenadas del centro de masa de este sistema son  $(x_{cm} = 0,0, y_{cm} = 2,0)$  m. Los cuadrados en la cuadrícula miden 1,0 m  $\times$  1,0 m.

- Calcula la masa de la partícula 2.
- Encuentra la ubicación de la partícula 3.

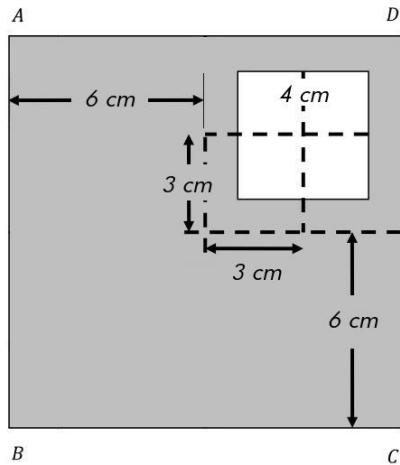


Figura 9.21: Placa con orificio cuadrado

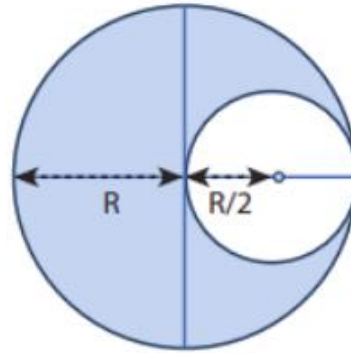


Figura 9.22: Disco con sacado circular

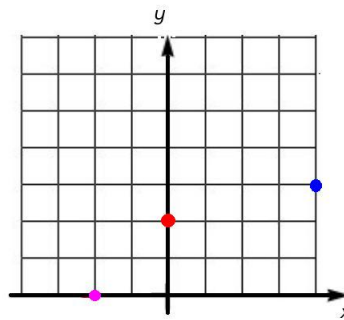


Figura 9.23: Figura para problema 11.

12. Algunas barras para gatas de autos tienen forma de una “Z” asimétrica, como se muestra en la Fig. 9.24. Consideremos una barra para gata cuya masa es 0,7 kg y está distribuida uniformemente. Localiza su centro de masa, medido desde el punto  $O$ .

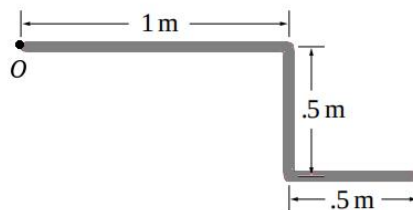


Figura 9.24: Barra para gata de autos

13. La Fig 9.25 muestra un objeto plano con densidad de masa uniforme, en forma de  $L$  con dimensiones en metros. Encuentra la posición del centro de masa usando simetrías y como un objeto compuesto, con aplicación del principio de superposición.

14. Calcula la posición del centro de masa de la figura plana en la Fig. 9.26 ,
- usando la suma de los centro de mas puntuales de la figura, y
  - partiendo del área de un rectángulo y sustrayendo de modo adecuado.

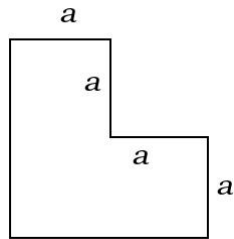


Figura 9.25: Cuadrado con un sacado

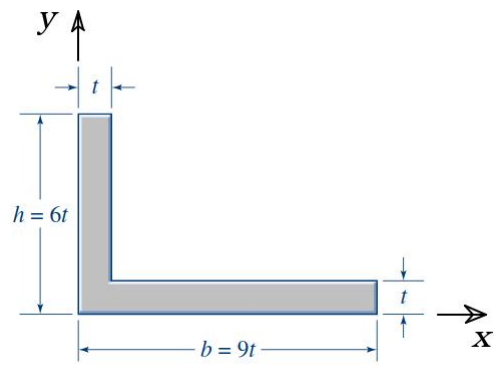


Figura 9.26: Figura en forma de L

15. ¿Como lo harías para calcular el centro de masa de una bicicleta de hombre estándar? ¿Qué aproximaciones usarías? ¿Dónde se ubica el centro de masa?



## 10. MOMENTUM LINEAL E IMPULSO

El momentum lineal juega un rol importantísimo en la física, y en cierto sentido, incluso más que la energía. Ya hemos visto cómo aparece en la segunda ley de Newton

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \vec{F}^{(neta)} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (10.1)$$

Como consecuencia de la segunda ley de Newton aparece una ley de conservación importante, la **conservación del momentum lineal**, cuando la fuerza neta actuando sobre un sistema de partículas es cero. Un sistema de este tipo se denomina **sistema aislado**. Por lo tanto, para un sistema aislado el momentum lineal se conserva:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}. \quad (10.2)$$

Es importante recalcar que el momentum lineal que aparece en la segunda ley de Newton es **el momentum total del sistema de partículas**, es decir, para un sistema de  $N$  partículas

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i. \quad (10.3)$$

Por lo tanto, la Ec. (10.2) implica que

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \dots + \vec{p}_N = \vec{cte}. \quad (10.4)$$

Consideremos un sistema con masa total constante. A partir de la definición de la posición del centro de masa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n}{M} \quad (10.5)$$

deducimos, al derivarla una vez con respecto al tiempo, que

$$\begin{aligned}\vec{v}_{cm} &= \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots m_n\vec{r}_N) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{p}_{tot}}{M}.\end{aligned}\quad (10.6)$$

Esto significa que si el momentum total se conserva, entonces la velocidad del centro de masa también se conserva, es constante. Esto, a su vez, implica si el momentum total se conserva entonces sobre el centro de masa no actúa una fuerza neta y por lo tanto éste se mueve en línea recta, con velocidad constante o está en reposo. Es decir, **el centro de masa es un sistema de referencia inercial**. Por lo tanto, las aceleraciones relativas al centro de masa son las verdaderas aceleraciones.

Recuerda que en la segunda ley de Newton, las fuerzas que aparecen son fuerzas externas que actúan sobre el sistema; las fuerzas internas se anulan de a pares de acuerdo a la tercera ley de Newton. Estas fuerzas internas no cambian el estado de movimiento del centro de masa. Como ejemplo, esto significa que para un objeto que sufre una explosión, el centro de masa seguirá su trayectoria a pesar de que los productos de la explosión salgan disparados por todas partes.

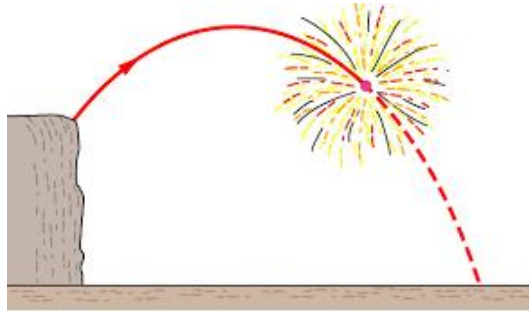


Figura 10.1: Explosión de un fuego artificial

Otra conclusión importante se sigue del análisis previo. En efecto, de la Ec. (10.6) deducimos que

$$\vec{p}_{tot} = M\vec{v}_{cm}.\quad (10.7)$$

Derivando esta ecuación respecto del tiempo obtenemos que

$$\frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt}.\quad (10.8)$$

Es decir, la fuerza neta que actúa sobre un objeto es la masa total multiplicada por la aceleración del centro de masa:

$$\vec{F}_{neta} = M\vec{a}_{cm}.\quad (10.9)$$

Es esta ecuación la que describe la dinámica del centro de masa de un sistema de partículas (un objeto macroscópico), y en particular, el de una partícula puntual.

## 10.1 Colisiones

Las colisiones tienen lugar todo el tiempo, en todas partes. Considera el fútbol, en donde los jugadores chocan todo el tiempo, pero también la pelota sufre colisiones. Eso también sucede en cualquier deporte donde se utilice una pelota. Todos los días hay colisiones entre vehículos, como el mostrado en la foto de la Fig. 10.2. La moléculas de una gas chocan constantemente, también.



Figura 10.2: Colisión entre dos partículas.

La conservación de la energía y la conservación del impulso proporcionan las herramientas necesarias para considerar el resultado de las colisiones. En la mayoría de los casos, encontraremos sistemas para los cuales las fuerzas externas están equilibradas, tal que la energía potencial no cambia, y la conservación del momentum lineal será útil para analizar la colisión. Ahora, si la energía potencial no cambia, lo que debería cambiar, en general, es la energía cinética (por supuesto, podría haber calor emitido hacia el medio ambiente).

En algunas colisiones (como las que suelen tener lugar entre las moléculas de un gas), la energía cinética total de los objetos es constante y ninguna energía se convierte en calor. Éstas se llaman **colisiones elásticas**. La energía total se conserva.

Las **colisiones inelásticas** son aquellas para las que una parte de la energía cinética se convierten en calor y se utilizan en deformar los cuerpos. En una colisión totalmente inelástica, la cantidad máxima de energía cinética se convierte en calor.

El ejemplo más simple de conservación de momentum ocurre en el choque dos partículas.

### 10.1.1 Sistemas de referencia de centro de masa y de laboratorio

Hemos visto al estudiar cinemática y dinámica cómo nos podemos hacer la vida más fácil o más difícil, o podemos ganar una mejor visión de la física del problema, dependiendo del sistema de referencia que utilicemos. Ocurre lo mismo cuando analizamos colisiones y el momentum lineal se conserva. Veamos cómo se relacionan las velocidades de los objetos en dos marcos de referencia distintos: el **sistema de laboratorio** y el **sistema de centro de masa**.

El marco de referencia del centro de masa es un marco inercial en el que el centro de masa permanece en el origen.

El marco de referencia de laboratorio es un marco de referencia centrado en el laboratorio en el que se realiza el experimento (real o experimento pensado). Este es el marco

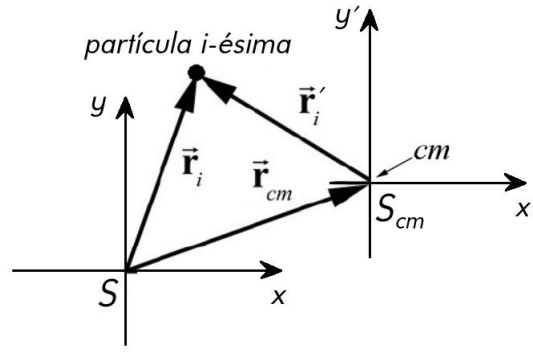


Figura 10.3: Sistema de laboratorio y el sistema de centro de masa

de referencia en el que el laboratorio está en reposo. Además, este suele ser el marco de referencia en el que se realizan las mediciones.

En la Fig. 10.3 se muestran los dos sistemas referencia inerciales,  $S$  y  $S_{cm}$ . Es claro que, la posición  $\vec{r}'_i$  de una partícula  $i$ -ésima, vista desde el sistema de referencia  $S_{cm}$  es

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}, \quad (10.10)$$

lo que implica que la velocidad de esta partícula es

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}, \quad (10.11)$$

donde  $\vec{v}_i$  es la velocidad de la misma partícula, medida desde el sistema de laboratorio y  $\vec{v}_{cm}$  es la velocidad del centro de masa medida en el sistema de laboratorio. La Ec. (10.11) representa una **transformación de velocidades de Galileo** entre dos sistemas inerciales, como ya hemos visto.

### 10.1.2 Colisión de dos partículas en 1 dimensión

Una **colisión elástica** ejemplar es aquella en la que dos objetos de igual masa se mueven uno hacia el otro con velocidades de igual magnitud y dirección opuesta. El resultado, no debería sorprender, es que después de la colisión ambas partículas se separan teniendo sus velocidades en sentidos opuestos: la velocidad final de cada uno es solo la negativa de su velocidad inicial. La conservación del momentum lineal y la conservación de la energía cinética<sup>1</sup> proporcionan dos ecuaciones con dos incógnitas (las velocidades finales de cada objeto).

Pero podemos hacer algo mejor: analizar la colisión de dos masas distintas en una dimensión. Supondremos que las partículas viajan en sentidos opuestos, pero el análisis general es independiente de esta suposición.

Veamos el cálculo explícito:

#### Conservación del momentum lineal:

Tenemos que  $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ , que implica

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}. \quad (10.12)$$

<sup>1</sup>Suponemos que la colisión ocurre en un punto, luego no hay variación de la energía potencial



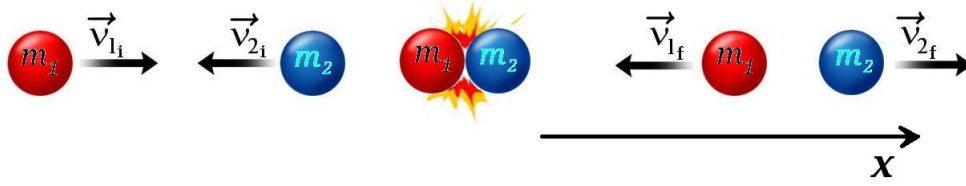


Figura 10.4: Colisión elástica entre dos partículas.

En el sistema de referencia inercial indicado, perteneciente a un observador que está haciendo mediciones en el laboratorio, esta ley de conservación se escribe

$$m_1 v_{1i} \hat{x} - m_2 v_{2i} \hat{x} = -m_1 v_{1f} \hat{x} + m_2 v_{2f} \hat{x}, \quad (10.13)$$

es decir,

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i} = -m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \quad (10.14)$$

### Conservación de la energía:

La conservación de la energía implica que la energía cinética se conserva:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (10.15)$$

De aquí,

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2), \quad (10.16)$$

o bien,

$$m_1 (v_{1i} + v_{1f}) \cdot (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} + v_{2i}) \cdot (v_{2f} - v_{2i}). \quad (10.17)$$

De la ecuación (10.14)

$$m_1 (v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2i} + v_{2f}). \quad (10.18)$$

Por lo tanto, la Ec. (10.17) resulta en

$$(v_{1i} - v_{1f}) = (v_{2f} - v_{2i}). \quad (10.19)$$

Notar que esta ecuación es igual a

$$1 = \frac{(v_{1f} + v_{2f})}{(v_{1i} + v_{2i})}. \quad (10.20)$$

Ya veremos qué significa. Paciencia.

### 10.1.3 Colisión vista desde marco de referencia en movimiento

Podemos ver esta misma colisión elástica de una manera diferente, usando otro sistema de referencia; uno en el que el sistema de laboratorio está en movimiento. Por ejemplo, podemos imaginar que la colisión anterior fue estudiada por un observador en reposo que va arriba de un tren. Podemos suponer que el tren viaja con velocidad  $\vec{v}_{1i} = c\vec{t}e$ . El nuevo observador está ahora en el andén de la estación. Ese nuevo sistema es un sistema

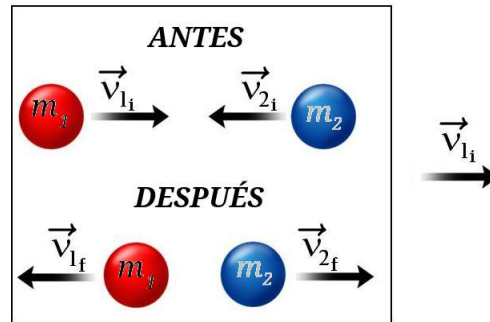


Figura 10.5: Colisión vista desde marco de referencia en movimiento

de referencia inercial y se denomina **sistema de laboratorio**. Esto es como ver que la colisión tiene lugar a través de la ventana de un tren que pasa a su lado.

La pregunta natural que aparece, entonces, es ¿qué ve el observador en el andén de la estación? Igual que en el caso anterior, debemos responder a esta pregunta antes de la colisión y después de la colisión. Para hacernos la vida fácil, por ahora podemos suponer que inicialmente  $v_{1i} = v_{2i}$ . Esto significa que  $v_{1f} = v_{2f}$ , de acuerdo a la Ec. (10.19), pero también que  $m_1 = m_2$ , según se deduce de la Ec. (10.18). Todos los módulos de las velocidades son iguales.

**Situación inicial:** La masa  $m_2$  que se mueve dentro del tren a velocidad  $\vec{v}_{2i}$ , parecerá estar detenida para ti observando desde la plataforma, porque la velocidad total de esa masa que observarás será  $v_{1i}\hat{x} - v_{2i}\hat{x} = \vec{0}$  m/s. La masa  $m_1$  que se mueve con la velocidad inicial  $\vec{v}_{1i}$  parecerá moverse hacia tu derecha con la velocidad  $2\vec{v}_{1i}$ .

**Situación final:** Después de la colisión, la masa  $m_2$  se mueve, para un observador dentro del tren, con velocidad  $\vec{v}_{2f}$ . Desde el andén se observa con velocidad  $v_{2f}\hat{x} + v_{1i}\hat{x} = 2v_{1i}\hat{x}$ . La masa  $m_1$  se mueve en el tren con velocidad  $v_{1f}$ , pero desde el andén su velocidad es  $v_{1f}\hat{x} - v_{1i}\hat{x} = 0\hat{x}$  m/s. Es decir, el observador en el andén ve que la masa  $m_1$  está en reposo.

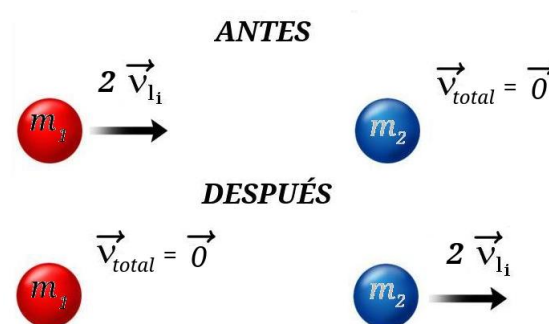


Figura 10.6: Colisión vista desde marco de referencia de laboratorio

Los Cazadores de Mitos realizaron un trabajo experimental fabuloso, similar al planteado, con un cañón de aire que dispara una pelota a la velocidad justa y en sentido opuesto que lleva una camioneta sobre la que va montado el cañón de aire. Puedes ver el video en este link <https://www.youtube.com/watch?v=BLuI118nhzc>. Una muy buena demostración de la conservación del momentum.

### 10.1.4 Marco de referencia del centro de masa

El marco del centro del masa (más general, el **marco de referencia de momentum**) es un marco de referencia inercial donde la suma de los momenta lineales de todas las partículas es igual a  $\vec{0}$ . De la Ec. (10.11) sabemos que la relación entre la velocidad de una partícula en el sistema de laboratorio,  $\vec{v}$  y la misma medida en el sistema de referencia de centro de masa  $\vec{v}'$ , está dada por

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_{cm}, \quad (10.21)$$

donde la velocidad del centro de masa está definida en la Ec. (10.6).

Entonces, el momentum total de las partículas en el sistema de centro de masa es

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{cm}) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{\sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j}{M} \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j \\ &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (10.22)$$

Es decir,  $\vec{p}_{cm} = \vec{0}$ .<sup>2</sup>

Nos podemos preguntar cómo ve una colisión un observador ubicado en este punto. Debido a que el centro de masa es un sistema inercial, las cosas se simplifican.

A medida que se produce la colisión, no se altera ni un poco el movimiento del centro de masa. Notaremos todas las variables en este nuevo sistema de la misma manera que el anterior, pero solo para recordarnos que estamos en este nuevo marco le pondremos una “prima” a las variables.

Dado que el momentum lineal total es cero, entonces su velocidad es cero y luego

$$\vec{p}'_{cmi} = \vec{0} \implies \vec{p}'_{1i} + \vec{p}'_{2i} = \vec{0} \quad (10.23)$$

y

$$\vec{p}'_{cmf} = \vec{0} \implies \vec{p}'_{1f} + \vec{p}'_{2f} = \vec{0}. \quad (10.24)$$

Las ecuaciones para la conservación del momentum lineal nos indican que los momenta iniciales (finales) de las partículas son opuestos y tienen la misma magnitud.

Supongamos que la energía se conserva, luego

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2. \quad (10.25)$$

Por lo tanto, escribiendo la energía cinética como  $K = \frac{p^2}{2m}$ , obtenemos

$$\frac{p_{1i}^2}{2m_1} + \frac{p_{2i}^2}{2m_2} = \frac{p_{1f}^2}{2m_1} + \frac{p_{2f}^2}{2m_2}. \quad (10.26)$$

<sup>2</sup>Observa que los índices en la suma son “mudos”, es decir uno les puede poner el nombre que quiera. Por eso la suma se anula.

O bien, factorizando las masas

$$p_{1i}^2 \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right) = p_{1f}^2 \left( \frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right). \quad (10.27)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

$p'_{1i} = p'_{1f}$ . Significa que antes y después, nada cambia. Esto ciertamente obedece a la conservación de la energía y el momentum lineal, pero significa que las partículas no han interactuado entre sí, y

$p'_{1i} = -p'_{1f}$ , que significa que las partículas, después del choque, regresan por donde venían.

### 10.1.5 Coeficiente de restitución

Veamos una cantidad importante en la **teoría de la elasticidad**: el coeficiente de restitución. Esta es una cantidad adimensional que indica cuánta energía cinética permanece después de una colisión de dos objetos.

Si el coeficiente es alto (muy cerca de 1) significa que se perdió muy poca energía cinética durante la colisión. Si el coeficiente es bajo (cerca de cero), sugiere que una gran parte de la energía cinética se convirtió en calor o se absorbió por deformación de los objetos.

Cuando un objeto en movimiento (por ejemplo, una bola de goma) colisiona con una superficie plana inmóvil (por ejemplo, una pared de concreto), el objeto rebotará con una fracción de su energía original. Si la colisión es **perfectamente elástica**, entonces la bola rebotará con toda la energía con la que llegó y su velocidad de rebote será la misma que la velocidad a la que se aproximó a la pared. En este caso, se dice que el coeficiente de restitución es precisamente igual a 1. Por otro lado, si hay una considerable deformación permanente del objeto o la superficie (o ambas), el objeto rebotará con mucha menos energía que con la que llegó originalmente. En este caso, el coeficiente de restitución será cercano a cero.

En este último caso, la superficie probablemente era blanda o absorbente. En el primer caso, la superficie puede haber sido particularmente dura, pero no necesariamente: también podría haber sido especialmente elástica.

Definimos el **coeficiente de restitución**,  $e$ , para esta colisión en 1-dim como

$$e = - \frac{(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}) \cdot \hat{x}}{(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}) \cdot \hat{x}}. \quad (10.28)$$

Notar que esta definición es la **razón entre las velocidades relativas finales a iniciales**. Por supuesto, se reduce al resultado de la Ec. (10.20) ya que

$$(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}) \cdot \hat{x} = (-v_{1f}\hat{x} - v_{2f}\hat{x}) \cdot \hat{x} = -(v_{1f} + v_{2f}) \quad (10.29)$$

y

$$(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}) \cdot \hat{x} = (v_{1i}\hat{x} + v_{2i}\hat{x}) \cdot \hat{x} = (v_{1i} + v_{2i}). \quad (10.30)$$

Por lo tanto, la Ec. (10.20) corresponde a un coeficiente de restitución  $e = 1$ , que significa que la colisión es completamente elástica.

Ya sabemos que el coeficiente de restitución típicamente es un número real positivo entre 0 y 1. Resulta que su definición no es única. Y tampoco es cierto que su valor siempre se encuentra en el intervalo  $[0, 1]$ . Aquí solo consideraremos este caso. Luego, tenemos que

$e = 0$ : Cuando esto ocurre hablamos de una **colisión perfectamente inelástica**. Esto significa que los cuerpos que chocan permanecen unidos después de la colisión. La energía cinética se ha convertido en calor y/o ha sido utilizada para deformar los objetos.

$0 < e < 1$ : Esta es una **colisión inelástica**, en la que algo de la energía cinética se ha disipado al medio ambiente.

$e = 1$ : Como ya hemos visto, esto corresponde a una **colisión perfectamente elástica**. En esta, no se disipa energía cinética, y los objetos rebotan con la **misma velocidad relativa** con la que se acercaron.

### Ejemplo 1:

Veamos un ejemplo que muestra cómo trabajar con coeficiente de restitución como dato. Este problema es una versión del problema analizado por G. Galperin en *Playing Pool with  $\pi$  (The number  $\pi$  from a billiard point of view)*<sup>3</sup>, pero donde la energía no se conserva en todo momento.

Una partícula de masa  $m_1 = 1,5$  kg está en reposo, mientras que otra de masa  $m_2 = 3,0$  kg se acerca con velocidad  $\vec{v}_2 = -4,5\hat{x}$  m/s, chocándola con coeficiente de restitución  $e = 0,5$ . Esto provoca la transferencia de momentum a la partícula que estaba en reposo, que choca frontalmente contra una pared fija elástica y se devuelve. Determina las velocidades finales una vez que **todos** los choques terminen.

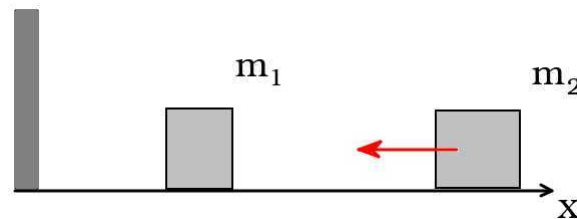


Figura 10.7: Colisión inelástica entre dos partículas frente a una pared elástica

### Solución:

Para los efectos del cálculo, llamamos  $m_3$  a la pared, que tiene claramente una masa muy grande.

Tenemos que  $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ , que implica

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}. \quad (10.31)$$

En el sistema de referencia inercial de laboratorio tenemos que

$$-m_2 v_{2i} \hat{x} = -m_1 v_{1f} \hat{x} - m_2 v_{2f} \hat{x}, \quad (10.32)$$

<sup>3</sup><https://www.maths.tcd.ie/~lebed/Galperin.Playingpoolwithpi.pdf>

es decir,

$$m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \quad (10.33)$$

Esta colisión es inelástica, luego la energía no se conserva y debemos usar el coeficiente de restitución.

$$e = - \frac{(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}) \cdot \hat{x}}{(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}) \cdot \hat{x}}.$$

Con  $\vec{v}_{1f} = -v_{1f}\hat{x}$ ,  $\vec{v}_{2f} = -v_{2f}\hat{x}$ ,  $\vec{v}_{1i} = \vec{0}$  y  $\vec{v}_{2i} = -v_{2i}\hat{x}$ , obtenemos

$$e = \frac{(v_{1f} - v_{2f})}{v_{2i}}.$$

Notar que el coeficiente de restitución es positivo, como debe ser. Luego, de la Ec. (10.33) despejamos las velocidades finales

$$v_{1f} = \frac{m_2 v_{2i}(1 + e)}{m_1 + m_2} \quad (10.34)$$

y

$$v_{2f} = \frac{v_{2i}(m_2 - em_1)}{m_1 + m_2}. \quad (10.35)$$

Evaluamos y obtenemos

$$v_{1f} = 4,5 \text{ m/s}$$

y

$$v_{2f} = 2,25 \text{ m/s}.$$

Ahora debemos analizar el choque entre la masa  $m_1$  y la pared de masa  $m_3$ . Aplicamos nuevamente conservación de momentum lineal. Por supuesto, se conserva la energía, ya que el choque con la pared es elástico.

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_3 \vec{v}_{3i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_3 \vec{v}_{3f}. \quad (10.36)$$

Resulta que ahora  $v_{3i} = v_{3f} = 0$  y  $\vec{v}_{1i} = v_{1f}\hat{x}$ . Luego,

$$-m_1 v_{1f}\hat{x} = m_1 \vec{v}_{1f}\hat{x}. \quad (10.37)$$

La interpretación de esta ecuación es que los módulos de las velocidades antes y después del choque son iguales, digamos  $v$ . Esto inmediatamente implica que la energía cinética se conserva y que la variación de momentum antes y después de la colisión es

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m_1 v \hat{x}. \quad (10.38)$$

Entonces, la velocidad de retroceso de la partícula  $m_1$  es  $\vec{v}_{1f} = 4,5 \text{ m/s}$ .

Ahora tenemos la siguiente situación: la partícula  $m_1$  viaja hacia la derecha con velocidad  $\vec{v}_{1i} = 4,50\hat{x} \text{ m/s}$  y la partícula  $m_2$  lo hace con velocidad  $\vec{v}_{2i} = 2,25\hat{x} \text{ m/s}$ . La conservación del momentum conduce a

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}.$$

En el sistema de referencia inercial de laboratorio tenemos que

$$m_1 v_{1i} \hat{x} - m_2 v_{2i} \hat{x} = -m_1 v_{1f} \hat{x} - m_2 v_{2f} \hat{x},$$

es decir,

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i} = -m_1 v_{1f} - m_2 v_{2f}. \quad (10.39)$$

Notar que se ha supuesto que la partícula  $m_2$  viaja hacia a la izquierda después de la colisión.

Nuevamente debemos ver qué relación ofrece la expresión del coeficiente de restitución

$$e = -\frac{(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}) \cdot \hat{x}}{(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}) \cdot \hat{x}}.$$

Ahora  $\vec{v}_{1f} = -v_{1f} \hat{x}$ ,  $\vec{v}_{2f} = -v_{2f} \hat{x}$ ,  $\vec{v}_{1i} = v_{1i} \hat{x}$  y  $\vec{v}_{2i} = -v_{2i} \hat{x}$  y luego obtenemos

$$e = \frac{(v_{1f} - v_{2f})}{(v_{1i} + v_{2i})}. \quad (10.40)$$

Antes de evaluar, reemplazamos en la Ec. (10.39) y obtenemos para  $v_{1f}$  y  $v_{2f}$

$$v_{1f} = \frac{m_2 v_{2i} - m_1 v_{1i} + m_2 e (v_{1i} + v_{2i})}{m_1 + m_2} = 2,250 \text{ m/s} \quad (10.41)$$

y

$$v_{2f} = \frac{m_2 v_{2i} - m_1 v_{1i} - m_1 e (v_{1i} + v_{2i})}{m_1 + m_2} = -1,125 \text{ m/s} \quad (10.42)$$

Vemos que nuestra suposición de que la masa  $m_2$  viaja hacia la izquierda estaba equivocada, ya que  $v_{2f} < 0$ . Por lo tanto,  $\vec{v}_{1i} = -2,250 \hat{x}$  m/s (curioso valor, pero es coincidencia) y  $\vec{v}_{2i} = 1,125 \hat{x}$  m/s.

La partícula  $m_1$  viaja hacia la izquierda, así que debemos analizar la colisión con la pared. Claramente, debido a que esta colisión es elástica  $\vec{v}_{1f} = 2,250 \hat{x}$  y debemos analizar la colisión con  $m_2$ . Luego,

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}.$$

En el sistema de referencia inercial de laboratorio tenemos que

$$m_1 v_{1i} \hat{x} + m_2 v_{2i} \hat{x} = -m_1 v_{1f} \hat{x} + m_2 v_{2f} \hat{x},$$

es decir,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = -m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \quad (10.43)$$

Con  $\vec{v}_{1f} = -v_{1f} \hat{x}$ ,  $\vec{v}_{2f} = v_{2f} \hat{x}$ ,  $\vec{v}_{1i} = v_{1i} \hat{x}$  y  $\vec{v}_{2i} = v_{2i} \hat{x}$ , el coeficiente de restitución es

$$e = \frac{(v_{1f} + v_{2f})}{(v_{1i} - v_{2i})}. \quad (10.44)$$

Luego,

$$v_{1f} = -\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} + e m_2 (v_{2i} - v_{1i})}{m_1 + m_2} = -1,125 \text{ m/s}. \quad (10.45)$$

y

$$v_{2f} = \frac{m_2 v_{2i} + m_1 v_{1i} + e m_1 (v_{1i} - v_{2i})}{m_1 + m_2} = 1,688 \text{ m/s.} \quad (10.46)$$

Por lo tanto,  $\vec{v}_{1f} = -1,125\hat{x}$  m/s y  $\vec{v}_{2f} = 1,688\hat{x}$  m/s.

Dado que la masa  $m_2$  tiene mayor velocidad que la partícula  $m_1$ , ya no podrá ser alcanzada y los choques se han terminado.

Tarea para la casa: Encuentra la razón de por qué la velocidad de  $m_1$  resulta ser siempre la velocidad de  $m_2$  después del primer choque, **en este problema**.

### 10.1.6 Definición general para el coeficiente de restitución

La definición del coeficiente de restitución Ec. (10.28) es correcta para choques frontales. Si el movimiento de las partículas ocurre en un plano, es necesario generalizarla.

En la Fig. 10.8 se muestra una colisión entre dos partículas en un plano. En ella se ha agregado un sistema de referencia que contiene dos direcciones definidas por los vectores unitarios  $\hat{t}$  y  $\hat{n}$ . La dirección normal queda definida como la dirección que une los centros de masa de las partículas en el momento del choque. La dirección tangencial, entonces, queda definida por la dirección normal a ésta, encontrándose sobre el plano de contacto de las partículas. Los vectores velocidad se descomponen entonces según estas direcciones.

El coeficiente de restitución se define como menos la razón entre la componentes normales de las velocidades relativas final e inicial. Esto es,

$$e = -\frac{(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_{2f}) \cdot \hat{n}}{(\vec{v}_{1i} - \vec{v}_{2i}) \cdot \hat{n}}. \quad (10.47)$$

¿Qué hacemos con las componentes tangenciales? ¡También tienen que utilizarse! Resulta que **las componentes de las velocidades de las partículas, perpendiculares a la línea de centros, no se modifican en el impacto**.

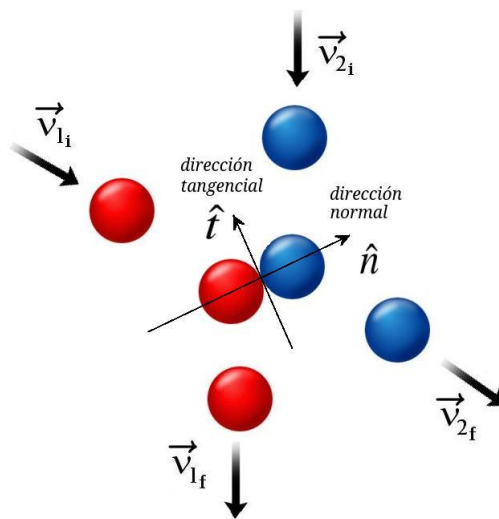


Figura 10.8: Colisión bidimensional entre dos partículas.



### 10.1.7 Colisiones en 2 dimensiones

Con todo lo que hemos aprendido, ya tenemos suficientes elementos para analizar colisiones en dos dimensiones. Por conservación de momentum, la *dispersión* (incluso en castellano se usa mucho la versión inglesa de la palabra: *scattering*) de dos partículas debe ocurrir en un plano. Medita al respecto.

En la Fig. 10.9 representamos el scattering entre dos partículas puntuales. Este sería un ejemplo simplificado de la colisión de dos bolas de pool o billar, pero también una colisión a baja energía de protón contra protón. Hacemos la suposición de que una de ellas está en reposo en el sistema de laboratorio. Luego, la conservación del momentum lineal implica

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}. \quad (10.48)$$

O bien,

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} \hat{x} &= m_1 v_{1fx} \hat{x} - m_1 v_{1fy} \hat{y} + m_2 v_{2fx} \hat{x} + m_2 v_{2fy} \hat{y}, \\ &= m_1 v_{1f} \cos \theta_1 \hat{x} - m_1 v_{1f} \sin \theta_1 \hat{y} + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \hat{x} + m_2 v_{2f} \sin \theta_2 \hat{y} \end{aligned} \quad (10.49)$$

es decir,

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2 \quad (10.50)$$

y

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin \theta_1 + m_2 v_{2f} \sin \theta_2. \quad (10.51)$$

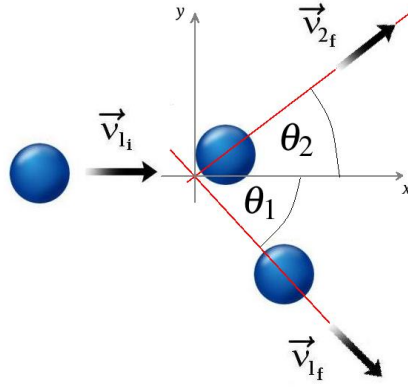


Figura 10.9: Colisión bidimensional entre dos partículas.

Si el scattering es elástico, entonces la energía se conserva y luego

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (10.52)$$

Como hemos visto, una colisión se puede observar usualmente en dos sistemas de referencia: sistema de laboratorio y sistema de centro de masa. Vista en este último sistema, la colisión de las partículas se ve como muestra la Fig. 10.10. Recuerda que el centro de masa o está en reposo o moviéndose a velocidad constante.

#### Ejemplo 1:

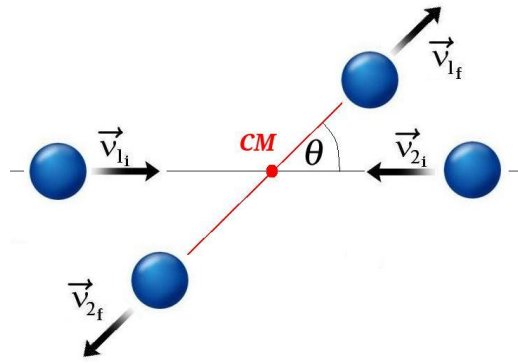


Figura 10.10: Colisión elástica en sistema de centro de masa

Un protón que se mueve a una velocidad  $v_{1i} = 5,0 \text{ km/s}$  tiene una colisión elástica con otro protón inicialmente en reposo. Dado que  $\theta_1 = 37^\circ$ , encuentra  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$  y  $\theta_2$ .

**Solución:**

Antes de resolver el problema específico, demostraremos que  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$  **para colisiones elásticas**. Para ello, usaremos las ecuaciones (10.50), (10.51) y (10.52). Dado que las masas son iguales, tenemos que

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \theta_1 + v_{2f} \cos \theta_2, \quad (10.53)$$

$$0 = -v_{1f} \sin \theta_1 + v_{2f} \sin \theta_2 \quad (10.54)$$

y

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \quad (10.55)$$

Elevando al cuadrado las Ecs. (10.53), (10.54) obtenemos

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 \cos^2 \theta_1 + v_{2f}^2 \cos^2 \theta_2 + 2 v_{1f} v_{2f} \cos \theta_1 \cos \theta_2, \quad (10.56)$$

y

$$0 = v_{1f}^2 \sin^2 \theta_1 + v_{2f}^2 \sin^2 \theta_2 - 2 v_{1f} v_{2f} \sin \theta_1 \sin \theta_2. \quad (10.57)$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} v_{1i}^2 = & v_{1f}^2 \{ \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \} + v_{2f}^2 \{ \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \} \\ & + 2 v_{1f} v_{2f} \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \}. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Usamos la Ec. (10.55) y que  $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$ . Luego,

$$0 = \{ \cos(\theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad (10.59)$$

que implica que  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ .

Un poco de trabajo previo nos puede hacer la vida más fácil.

Resolvemos ahora nuestro problema. Ya sabemos que  $\theta_2 = 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$ , luego sumando

$$5 = v_{1f} \cos(37^\circ) + v_{2f} \cos(53^\circ), \quad (10.60)$$

y

$$0 = -v_{1f} \sin(37^\circ) + v_{2f} \sin(53^\circ) \quad (10.61)$$

obtenemos

$$5 = v_{1f} 0,197 + v_{2f} 1,4, \quad (10.62)$$

y

$$v_{1f} = 1,33 v_{2f}. \quad (10.63)$$

Es decir,  $v_{1f} = 4,0 \text{ km/s}$  y  $v_{2f} = 3,0 \text{ km/s}$ .

Notar que las magnitudes de los vectores velocidad forman un triángulo rectángulo; la conservación de la energía no es nada más, en este caso, que una expresión del Teorema de Pitágoras.

### Ejemplo 2:

Podemos repetir este cálculo en el “sistema n-t”. Para ello elegimos el sistema de referencia como muestra la Fig. 10.11.

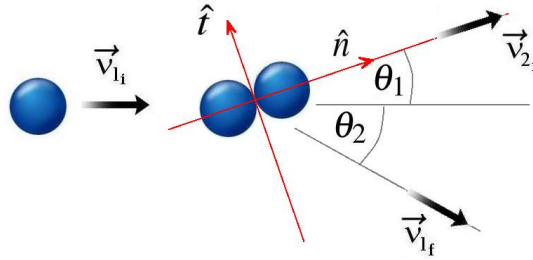


Figura 10.11: Colisión elástica en el sistema n-t

**Solución:** Conservación del momentum lineal implica que

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}, \quad (10.64)$$

o bien,

$$\begin{aligned} m_1 v_{1i} \cos \theta_1 \hat{n} - m_1 v_{1i} \sin \theta_1 \hat{t} &= m_1 v_{1f} \cos(\theta_1 + \theta_2) \hat{n} \\ &\quad - m_1 v_{1f} \sin(\theta_1 + \theta_2) \hat{t} + m_2 v_{2f} \hat{n}. \end{aligned} \quad (10.65)$$

De aquí, usando el producto punto, obtenemos

$$m_1 v_{1i} \cos \theta_1 = m_1 v_{1f} \cos(\theta_1 + \theta_2) + m_2 v_{2f} \quad (10.66)$$

$$m_1 v_{1i} \sin \theta_1 = m_1 v_{1f} \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (10.67)$$

Consideramos, al igual que antes, que la energía se conserva y que las masas son iguales. Luego,

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \quad (10.68)$$

Elevando al cuadrado las Ecs. (10.66) y sumándolas obtenemos

$$\begin{aligned} v_{1i}^2 \{ \cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 \} &= v_{1f}^2 \{ \cos^2(\theta_1 + \theta_2) + \sin^2(\theta_1 + \theta_2) \} + v_{2f}^2 \\ &\quad + 2 v_{1f} v_{2f} \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \quad (10.69)$$

De aquí,

$$0 = 2v_{1f} v_{2f} \cos(\theta_1 + \theta_2). \quad (10.70)$$

Es decir,  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ .

Queda para ti continuar el cálculo.

## 10.2 Impulso

Es cosa de ver el resultado de una colisión entre dos vehículos para dare cuenta que las colisiones no necesariamente son fáciles de describir. Por un lado, las colisiones tienen un tiempo de duración, a pesar de que hay algunas que parecen instantáneas. Por otro, las fuerzas involucradas en las colisiones pueden variar durante el tiempo en que actúan.

Para colisiones inelásticas podemos definir una cantidad vectorial llamada **impulso**,  $\vec{I}$ , que entrega información relevante acerca de una colisión. Es usual darle un nombre particular a las fuerzas que aparecen en este contexto: se les llama **fuerzas impulsivas**.



Figura 10.12: Colisión inelástica sobre una pelota de golf

A partir de la segunda ley de Newton podemos escribir

$$d\vec{p} = \vec{F}^{(neta)} dt, \quad (10.71)$$

o bien, si integramos esta expresión entre instantes inicial y final de la colisión encontramos

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_i^f d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}^{(neta)} dt. \quad (10.72)$$

Claramente, el impulso es una cantidad vectorial que tiene el mismo sentido que la fuerza neta. También, de su definición, observamos que el impulso aumenta a medida que el tiempo en que dura la colisión aumenta, incluso si el módulo de la fuerza no varía.

La forma cómo varía la fuerza durante el impacto puede ser muy complicada, aún así podemos obtener algo de información si promediamos la fuerza en el tiempo, como se muestra en la Fig. 10.13. Por definición, la fuerza promedio,  $\vec{F}_m$ , es constante. Eso significa que su expresión puede salir del signo de integral y por lo tanto, podemos escribir el impulso promedio como

$$\vec{I}_m = \vec{F}_m \Delta t. \quad (10.73)$$

Dado el nivel de dificultad de este libro, esta es la expresión que utilizaremos normalmente.

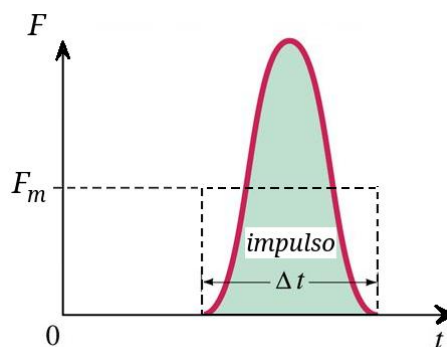


Figura 10.13: Promedio temporal de la fuerza durante un impacto

### Observación:

Siempre suponemos conservación del momentum lineal durante un choque, aún cuando actúen fuerzas externas sobre el sistema.



Figura 10.14: Fuerza impulsiva actuando sobre pelota de béisbol

Cuando la cabeza de un jugador de fútbol le pega a la pelota, un bastón de golf le pega a una pelota de golf, o una bola de billar le pega a otra es evidente que actúan fuerzas externas sobre el sistema. Por ejemplo, la gravedad o la fricción ejercen fuerzas sobre esos cuerpos; esas fuerzas externas pueden no ser las mismas sobre cada cuerpo que choca, ni necesariamente se anulan por otras fuerzas externas durante el choque. Por eso, suponer conservación del momentum lineal puede sonar extraño. Sin embargo, resulta que normalmente las fuerzas externas son insignificantes en comparación con las fuerzas impulsivas del choque. Como resultado de ello, el cambio del momentum lineal de una partícula que sufre un choque, cambio que provenga de una fuerza externa, es insignificante en comparación con el cambio del momentum lineal de una partícula producido por la fuerza impulsiva de choque. Por supuesto, puede suceder que aún cuando existan fuerzas externa éstas se anulen.

Por ejemplo, cuando un bate le pega a una pelota de béisbol el choque dura sólo una fracción de segundo, ya que el cambio de cantidad de movimiento es grande y el tiempo de choque es mas pequeño, se deduce de la Ec. (10.76) que, dado que el impulso permanece constante, mientras más corto sea el tiempo de interacción, mayor será la fuerza impulsiva.

En la práctica, todo lo que se requiere para justificar el uso del principio de la con-

servación del momentum lineal de un sistema de partículas es que el momentum lineal **poco antes** de la colisión es igual al momentum lineal del sistema, **poco después** de que las partículas han chocado.

### Ejemplo 1

Consideremos el scattering de dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ . Una camioneta de masa  $m_1 = 1.000 \text{ kg}$  viaja al Este a  $30 \text{ m/s}$ , y choca con un camión de  $m_2 = 3.000 \text{ kg}$  que viaja al Oeste a  $20 \text{ m/s}$ .

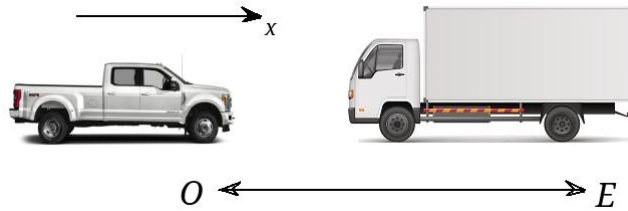


Figura 10.15: Colisión elástica entre dos vehículos

- Si la colisión es completamente inelástica, ¿a qué velocidad van la camioneta y el camión, y en qué dirección, después de la colisión?
- ¿Qué porcentaje de la energía cinética se pierde en la colisión?
- ¿Qué pasa si la colisión es elástica?

### Solución:

a) Los choques automovilísticos suelen ser inelásticos, y gran parte de la energía cinética va a deformar los automóviles. En una colisión completamente inelástica ambos cuerpos permanecen unidos después del choque, con una velocidad final  $\vec{v}_f$ . Sin embargo, **siempre se conserva el momentum lineal**, por lo tanto, la ecuación de conservación del momentum es:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}. \quad (10.74)$$

En el sistema de referencia inercial indicado, perteneciente a un observador que está haciendo mediciones en el laboratorio, esta ley de conservación se escribe

$$m_1 v_{1i} \hat{x} - m_2 v_{2i} \hat{x} = -(m_1 + m_2) v_f \hat{x}, \quad (10.75)$$

donde hemos supuesto que los cuerpos se mueven juntos hacia el Oeste. Luego,

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i} = -(m_1 + m_2) v_f. \quad (10.76)$$

Por lo tanto,

$$v_f = -\frac{m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2)} = 7,5 \text{ m/s}, \quad (10.77)$$

que implica que  $\vec{v}_f = -7,5 \hat{x} \text{ m/s}$ .

b) El cambio en la energía cinética se puede encontrar sumando la energía cinética antes y después de la colisión:

$$\Delta K = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 - \frac{1}{2}(m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{1f}^2) = 1,125 \times 10^5 - 1,05 \times 10^6 = -9,375 \times 10^5 \text{ J}$$

Entonces, el porcentaje de pérdida de la energía cinética es

$$100\% \frac{9,375 \times 10^5}{1,05 \times 10^6} = 89,3\%.$$

Como ves, gran parte de la energía cinética se pierde en la colisión.

c) ¿Qué pasaría si el automóvil y el camión estuvieran hechos de goma y la colisión fuera elástica, sin pérdida de energía cinética? En este caso debemos combinar la ecuación de conservación de energía con la ecuación de conservación del momentum lineal. Pero ya hemos hecho este cálculo anteriormente.

De la Ec. (10.20) obtenemos que  $v_{1f} + v_{2f} = 50$  m/s. Reemplazamos  $v_{1f}$  en la Ec. (10.14) y obtenemos

$$v_{2f} = \frac{v_{2i}(4m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = 5 \text{ m/s},$$

que significa que  $v_{1f} = 45$  m/s.

¿Por qué los autos se deben deformar en un choque?

¡Para salvar a los ocupantes!

Si estuvieras conduciendo el automóvil, experimentarías una fuerza mucho mayor en el caso de una colisión elástica que en una colisión completamente inelástica, en la que gran parte de la energía es absorbida por la deformación del automóvil, como ya hemos visto.

Digamos que tienes una masa de 50 kg y que la colisión dura 0,1 segundos. En el caso de la colisión completamente inelástica, su impulso cambiaría en

$$\Delta \vec{p} = (-50 \cdot 7,5\hat{x}) - 50 \cdot 30\hat{x} = -1875\hat{x} \text{ kg m/s},$$

Este cambio en el momentum lineal se produce por una fuerza promedio que actúa durante los 0,1 s de la colisión, por lo que la fuerza promedio es

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -18750\hat{x} \text{ N}.$$

En la colisión elástica, su momentum lineal cambiaría

$$\Delta \vec{p} = (-50 \cdot 45\hat{x}) - 50 \cdot 30\hat{x} = -3750\hat{x} \text{ kg m/s},$$

que es exactamente el doble que en el caso completamente inelástico. La fuerza que experimentarías también se duplicaría.

## Ejemplo 2

Un automóvil que viaja a 26 m/s choca contra un edificio, como muestra la Fig. 10.16. La colisión con el edificio hace que el automóvil se detenga en aproximadamente 1 segundo. El conductor, que pesa 900 N, está protegido por una combinación de un cinturón de seguridad de tensión variable y una bolsa de aire, como muestra la figura. La bolsa de aire y el cinturón de seguridad disminuyen su velocidad, por lo que se detiene en aproximadamente 2,3 s.

a) ¿Qué fuerza promedio experimenta el conductor durante la colisión?

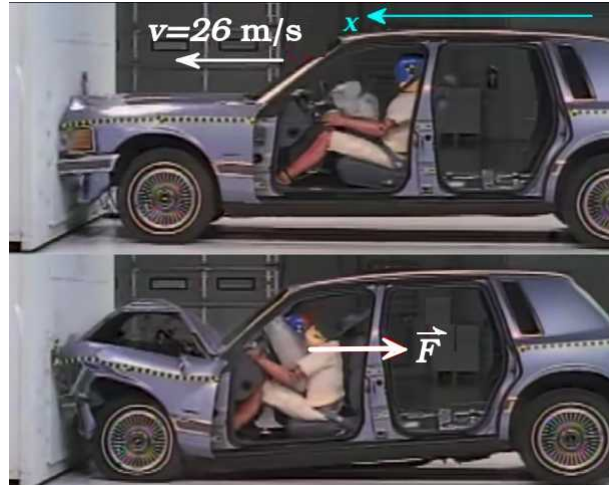


Figura 10.16: Choque de auto contra edificio

b) Sin el cinturón de seguridad y la bolsa de aire, su tiempo de colisión (con el volante) habría sido de aproximadamente 0,21 s, ¿qué fuerza experimentaría en este caso?

### Solución

a) A partir de la definición de fuerza promedio tenemos que

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{900}{9,8} \left( \frac{0\hat{x} - 26\hat{x}}{2,3} \right) = -1.078\hat{x} \text{ N}$$

b) De manera similar, si el conductor no lleva cinturón de seguridad y/o bolsa de aire:

$$\frac{900}{9,8} \left( \frac{0\hat{x} - 26\hat{x}}{0,21} \right) = -11.807\hat{x} \text{ N}$$

¡No te olvides usar cinturón de seguridad!

### Ejemplo 3

Un auto de masa  $m_B = 900 \text{ kg}$  circula a  $18 \text{ km/h}$  por una carretera y se salta una señal de pare. Debido a la infracción, choca lateralmente con un auto de  $m_A = 1,500 \text{ kg}$  que circula perpendicularmente a  $36 \text{ km/h}$ . Si quedan enganchados después del choque, calcula el módulo, dirección y sentido de la velocidad.

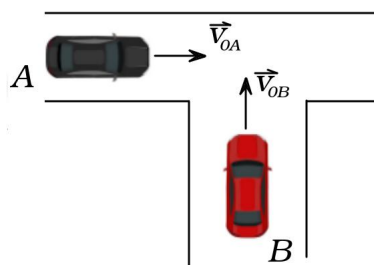


Figura 10.17: Dos autos se aproximan a una intersección

### Solución



La conservación del momentum lineal implica que

$$m_A \vec{v}_{0A} + m_B \vec{v}_{0B} = m \vec{v} \quad (10.78)$$

donde  $m = m_A + m_B$  es la masa total porque los autos quedan enganchados. Luego, con ayuda de la Fig. 10.19 tenemos

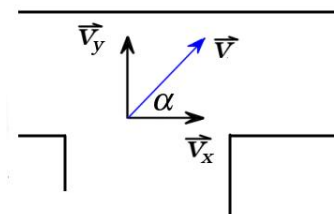


Figura 10.18: Vectores velocidad

$$m_A v_{0A} \hat{x} + m_B v_{0B} \hat{y} = m v \cos \alpha \hat{x} + m v \sin \alpha \hat{y} \quad (10.79)$$

De aquí, usando el producto punto, obtenemos

$$\begin{aligned} m_A v_{0A} &= m v \cos \alpha \\ m_B v_{0B} &= m v \sin \alpha. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Por lo tanto, el ángulo en el cual salen los autos (es decir, el ángulo de scattering) es

$$\tan \alpha = \frac{m_A v_{0A}}{m_B v_{0B}} \implies \alpha = 16,7^\circ. \quad (10.81)$$

Ahora entonces podemos conocer la magnitud de la velocidad usando las Ecs. (10.80):

$$v = \frac{m_A v_{0A}}{m \cos \alpha} = 23,5 \text{ km/h} \quad (10.82)$$

### 10.2.1 Ejercicios

1. Durante el Busan Open Challenger Tennis de 2012, el tenista Sam Groth alcanzó el servicio más rápido registrado en un partido de tenis, con una velocidad de 263,4 km/h. ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida sobre la pelota de tenis de 0,057 kg por la raqueta de Groth, suponiendo que la velocidad de la pelota justo después del impacto es de 263,4 km/h, que la componente horizontal inicial de la velocidad antes del impacto es despreciable y que la pelota se mantuvo en contacto con la raqueta durante 5,0 ms (milisegundos)?

2. Un martillo de 0,450 kg se mueve horizontalmente a 7,00 m/s cuando golpea un clavo y se detiene después de introducir el clavo 1,00 cm en una tabla.

a) Calcula la duración del impacto.

b) ¿Cuál fue la fuerza promedio ejercida sobre el clavo?

3. Dos bolas de billar idénticas golpean una pared rígida con la misma velocidad y se reflejan sin ningún cambio de velocidad. La primera bola golpea perpendicular a la pared.

La segunda bola golpea la pared en un ángulo de  $30^\circ$  desde la perpendicular, y rebota en un ángulo de  $30^\circ$  desde la perpendicular a la pared.

- a) Determina la dirección de la fuerza en la pared debido a cada bola.
- b) Calcula la relación de las magnitudes de los momenta impartidos las dos bolas por la pared.

4. Los vagones de tren se acoplan al chocar entre sí. Supongamos que dos vagones cargados se mueven uno hacia el otro, el primero con una masa de  $150.000 \text{ kg}$  y una velocidad de  $\vec{v}_1 = 0,300\hat{x} \text{ m/s}$ , y el segundo con una masa de  $110.000 \text{ kg}$  y una velocidad de  $\vec{v}_2 = -0,120\hat{x} \text{ m/s}$ . ¿Cuál es su velocidad final?

5. Calcula las velocidades de dos objetos después de una colisión elástica, dado que  $m_1 = 0,50 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3,50 \text{ kg}$ ,  $\vec{v}_1 = 4,0\hat{x} \text{ m/s}$ , y  $\vec{v}_2 = 0,0\hat{x} \text{ m/s}$

6. Las sondas espaciales pueden separarse de sus lanzadores explotando pernos. Supongamos que un satélite de  $4.800 \text{ kg}$  utiliza este método para separar los restos de  $1.500 \text{ kg}$  de su lanzador, y que se suministran  $5.000 \text{ J}$  de energía cinética a las dos partes. ¿Cuáles son sus velocidades posteriores utilizando el marco de referencia en el que estaban en reposo antes de la separación?

7. Dos discos idénticos chocan en una mesa de hockey de aire, como muestra la Fig. 10.19. Un disco estaba originalmente en reposo.

- a) Si el disco entrante tiene una velocidad de  $6,00 \text{ m/s}$  y se dispersa a un ángulo de  $30,0^\circ$ , ¿cuál es la velocidad (magnitud y dirección) del segundo disco?
- b) Confirma que la colisión es elástica.



Figura 10.19: Mesa de hockey de aire

8. Un cañón de  $3.000 \text{ kg}$  está montado de modo que solo puede retroceder en dirección horizontal.

- a) Calcula su velocidad de retroceso cuando dispara una bala de  $15 \text{ kg}$  a  $480 \text{ m/s}$  en un ángulo de  $20^\circ$  por encima de la horizontal.
- b) ¿Cuál es la energía cinética del cañón? Esta energía se disipa como transferencia de calor en amortiguadores que detienen su retroceso.
- c) ¿Qué sucede con la componente vertical del impulso que se imparte al cañón cuando se dispara?

9. Una bola de bolos de  $5,5 \text{ kg}$  que se mueve a  $9,0 \text{ m/s}$  choca con un boliche de  $0,85 \text{ kg}$ , que se dispersa en un ángulo de  $85^\circ$  con respecto a la dirección inicial de la bola y con una velocidad de  $15 \text{ m/s}$ .

- a) Calcula la velocidad final (magnitud y dirección) de la bola de boliche.

b) ¿Es la colisión elástica?

c) La energía cinética es mayor después de la colisión. Discute cómo el giro de la bola podría convertirse en energía cinética lineal en la colisión.

10. Dos autos chocan en una intersección helada y se unen después. El primer automóvil tiene una masa de 1.200 kg y se aproxima a 8 m/s en dirección Sur. El segundo automóvil tiene una masa de 850 kg y se acerca a 17 m/s en dirección Oeste.

a) Calcula la velocidad final (magnitud y dirección) de los autos.

b) ¿Cuánta energía cinética se pierde en la colisión? (Esta energía entra en la deformación de los autos).

11. Sobre un cuerpo de 75 kg actúa una fuerza de 55 N durante 14 s. Calcula:

a) El impulso de la fuerza.

b) La variación de la cantidad de movimiento del cuerpo.

c) Su velocidad final si en el momento de actuar la fuerza, el cuerpo se mueve a 9 m/s.

12. El cuerpo humano es fantástico. ¿Sabías que la fuerza de compresión que puede soportar la tibia de una persona sin romperse es 50.000 N?. Un estudiante que no ha tomado el curso de física y cuya masa es de 70 kg no cree lo que le han contado sobre flexionar las piernas al caer e intenta caer en un salto con las piernas rígidas, pasando un tiempo de 3,5 ms hasta que se detiene el choque. ¿Desde qué altura podrá saltar para no lesionarse si sigue con su testarudez?

13. Después de tomar el curso de física, el estudiante del problema anterior se da cuenta de su error y flexiona las piernas al caer. El tiempo en que actúan las fuerzas aumenta hasta 0,125 s. En este caso son los tendones y ligamentos los responsables de parar al cuerpo. La fuerza que pueden soportar es 20 veces menor que la que soportan los huesos. ¿Cuál será la altura en este caso?

14. En 1742, Benjamin Robins ideó un dispositivo simple, pero ingenioso, llamado **péndulo balístico**, para medir la velocidad de una bala. Supongamos que una bala, de masa  $m = 10$  g y la velocidad  $v$ , se dispara en un bloque de masa  $M = 2$  kg suspendido como en la Fig. 10.20. La bala se incrusta en el bloque y la eleva a una altura  $h = 5$  cm.

a) ¿Cómo puede uno determinar  $v$  conociendo  $h$ ?

b) ¿Cuánta energía térmica se ha generado?

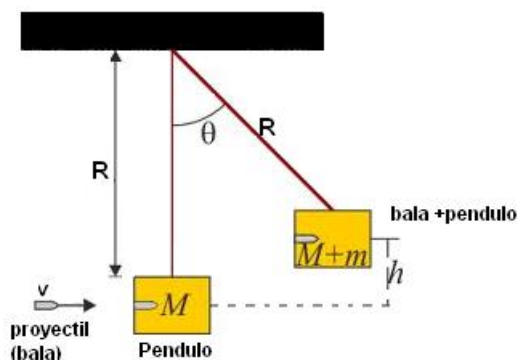


Figura 10.20: Péndulo balístico

15. Un niño de 45 kg, que está subido en su monopatín de 3 kg de masa, lleva en las manos una pelota de 2 kg. Está parado y lanza la pelota a un compañero con una velocidad de 5 m/s.

- a) ¿Qué le sucederá al muchacho?
- b) Calcula el cambio de momentum lineal.

16. Dos patinadores, uno de 60 kg y el otro de masa desconocida, se encuentran juntos, en reposo, antes de empezar a patinar. Empiezan el movimiento empujándose uno a otro. El primero sale con una velocidad de 18 km/h y el segundo con una velocidad de 4 m/s en sentido contrario. ¿Cuál es la masa del segundo patinador?

17. Un niño de 45 kg y una niña de 35 kg están patinando en la pista de hielo. La niña está inicialmente detenida y el niño se mueve con una velocidad  $v$ . El niño choca accidentalmente de forma frontal con la niña, que recorre 10 m hasta detenerse. Si el niño recorre 5 m hasta que se detiene, en el mismo sentido, y ambos tardan 10 s en hacerlo, ¿cuál es la velocidad del niño cuando choca con la niña?

18. Un cuerpo de masa 14 kg que se mueve con una velocidad de  $\vec{v}_{1i} = 5\hat{x}$  m/s choca elásticamente con otro de 7 kg que se mueve a con una velocidad  $\vec{v}_{2i} = -7\hat{x}$  m/s. Si tras el choque el segundo cuerpo se mueve con una velocidad de 9 m/s ¿con qué velocidad se moverá el primero?

19. Dos cuerpos de masas 5 kg y 10 kg se mueven uno hacia el otro con velocidades iguales en módulo, de 6 m/s. Si después del choque se mueven juntos, ¿cuál es la velocidad de ambos después del choque?

20. Sobre el tapete verde de la mesa de billar se encuentran dos bolas de la misma masa. Una de ellas se mueve con una velocidad de 4 m/s y la segunda se encuentra en reposo. Después del choque la primera bola se mueve con una velocidad de  $\vec{v} = 2\hat{x} + 3\hat{y}$  m/s. ¿Cuál es la velocidad de la segunda bola después del choque?

21. Una carcasa de fuegos artificiales se lanza verticalmente hacia arriba, y en el punto más alto explota en tres fragmentos iguales. El primero continúa moviéndose con una velocidad de 20 m/s hacia arriba. El segundo se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad de 90 km/h. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

22. Una patinadora de 65 kg que se desliza sobre el hielo hacia el Norte, choca con un niño de 30 kg que patina hacia el Este. Después del choque ambos se mueven juntos con una velocidad de 2 m/s en una dirección que forma  $37^\circ$  con el Este. ¿Cuáles eran las velocidades del niño y de la patinadora antes de la colisión?

23. Una pelota de béisbol que pesa 0,125 kg y se mueve horizontalmente con una velocidad de 24 m/s es golpeada por un bate. Su velocidad después de abandonar el bate es de 30 m/s, en sentido opuesto al de su movimiento inicial. ¿Cuál es el impulso mecánico del golpe?

24. Una pelota de tenis de 0,06 kg llega a un jugador con una velocidad de 28 m/s. Después de ser golpeada por el jugador sale con una velocidad de 42 m/s en sentido contrario. Si la fuerza que ha ejercido la raqueta sobre la pelota es de 290 N, calcula el tiempo que ha estado en contacto la pelota con la raqueta.

25. Una bola de billar de 0,24 kg que se mueve a 3 m/s golpea perpendicularmente la banda de una mesa de billar y rebota a 2,4 m/s (80 % de su velocidad original). La colisión dura 0,015 s.

- Calcula la fuerza promedio ejercida sobre la pelota por el parachoques.
- ¿Cuánta energía cinética en joules se pierde durante la colisión?
- ¿Qué porcentaje de la energía original permanece?

26. Sobre un cuerpo de 2 kg que inicialmente se mueve con velocidad horizontal de actúa una fuerza de 4 N, en la misma dirección y sentido, durante 5 ms.

- ¿Cuánto vale el impulso de la fuerza?
- ¿Cuál es la variación de velocidad del cuerpo?

27. Dos bloques de masas  $m_1 = 1$  kg y  $m_2 = 3$  kg se juntan de manera forzada, comprimiendo entre ellos un resorte de masa despreciable, como muestra la Fig. 10.21. Luego, el sistema se suelta del reposo en una superficie plana sin fricción. El resorte está suelto y luego cae a la superficie después de descomprimirse. El bloque  $m_2$  adquiere una rapidez de 1,4 m/s.

- ¿Qué rapidez final tiene el bloque  $m_1$ ?
- ¿Cuánta energía potencial se almacenó en el resorte comprimido?

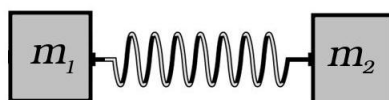


Figura 10.21: Dos masas con un resorte entre ellas

28. Un sistema está formado por una partícula de masa  $m_1 = 2$  kg que tiene una velocidad  $\vec{v}_1 = 2\hat{x} - 10t\hat{y}$  m/s, estando  $t$  en segundos, y otra partícula de masa  $m_2 = 3$  kg que se mueve con velocidad constante  $\vec{v}_2 = 4\hat{x}$  m/s. Determina, en  $t = 5$  s:

- la velocidad del centro de masa;
- la aceleración del centro de masa;
- el momento lineal total del sistema.

29. Una bola de billar cuya masa es de 125 g y que se desplaza con una velocidad de 1,8 m/s choca perpendicularmente con una de las bandas de la mesa y rebota con una velocidad de 1,3 m/s. Si la bola ha estado en contacto con la banda durante un tiempo de 0,04 s, calcula:

- La variación del momentum de la bola.
- La fuerza media que ejerce la banda sobre la bola.

30. Un automóvil que se desplaza con una velocidad de 30 m/s se detiene bruscamente en 3,8 s. Si la masa del conductor es de 80 kg, calcula la fuerza media que ejerce el cinturón de seguridad sobre el conductor durante el tiempo de frenada.

31. Un astronauta se encuentra fuera de su nave espacial y estando en reposo lanza un martillo cuya masa es de 550 g con una velocidad de 10 m/s. Sabiendo que la masa del astronauta y su equipo es de 124 kg,

- determina la velocidad con que retrocede y

b) calcula la distancia recorrida en un minuto.

32. La Fig. 10.22 muestra un bloque de masa  $m_1 = 2 \text{ kg}$  se desliza sobre una mesa sin rozamiento con una velocidad de  $10 \text{ m/s}$ . Directamente enfrente de este bloque y moviéndose en el mismo sentido con una velocidad de  $3 \text{ m/s}$  hay otro bloque de masa  $m_2 = 5 \text{ kg}$ , conectado a un resorte de masa despreciable y constante elástica  $k = 1.120 \text{ N/m}$ :

a) Antes de que  $m_1$  choque contra el resorte, ¿cuál es la velocidad del centro de masas del sistema?

b) Después del choque, el resorte se comprime hasta un valor máximo  $\Delta x$ . Determina dicho valor.

c) Los bloques eventualmente se separan de nuevo, ¿Cuáles son las velocidades finales de los bloques medidas en el sistema de referencia de la mesa?

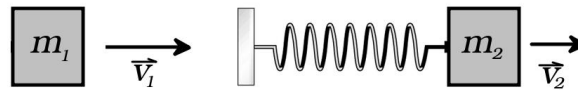


Figura 10.22: Masa choca con otra a través de un resorte

33. Una bola de  $2 \text{ kg}$  sujeta al extremo de una cuerda ligera e inextensible de longitud  $L = 1,5 \text{ m}$  (formando un péndulo), como muestra la Fig. 10.23, se suelta desde una posición horizontal. En la parte más baja de la oscilación la bola choca contra un bloque de  $0,3 \text{ kg}$  que está en reposo sobre una superficie horizontal lisa.

a) Si la colisión es elástica, calcula la rapidez de la bola y el bloque inmediatamente después de la colisión;

b) si la colisión es completamente inelástica, determina la altura a la que sube el centro de masa después de la colisión.

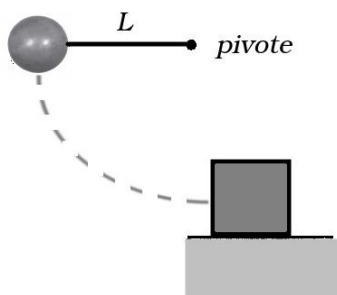


Figura 10.23: Péndulo choca contra bloque

34. Dos bloques de masas  $0,1 \text{ kg}$  y  $0,2 \text{ kg}$ , se mueven uno hacia el otro sobre una superficie horizontal lisa con velocidades de  $1 \text{ m/s}$  y  $0,4 \text{ m/s}$  respectivamente. Si los dos bloques chocan y permanecen unidos, calcula la velocidad final.

35. Una bola de billar se mueve con velocidad de  $20 \text{ m/s}$  y golpea a otra bola igual que está detenida. Como resultado del choque la bola detenida sale despedida con una velocidad que forma un ángulo de  $30^\circ$  con la dirección y sentido inicial del movimiento. A

su vez la bola en movimiento se desvía  $45^\circ$  de su trayectoria. Calcula la velocidad de cada bola después del choque.

36. En la invasión de Naboo algunos droides de combate volaban sobre vehículos ligeros STAP. Uno de ellos, con una masa total de 50 kg, se dirige hacia las fuerzas Gungan con una velocidad horizontal constante de 54 km/h. En cierto momento, cuando su cañón forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal, dispara un proyectil de 250 g con una velocidad de 110 m/s.

a) Establece un sistema de referencia y determina la velocidad del droide-STAP después del disparo.

b) Si el droide-STAP hubiera estado quieto en el momento del disparo y su cañón estuviera horizontal, ¿cuál habría sido su velocidad de retroceso?

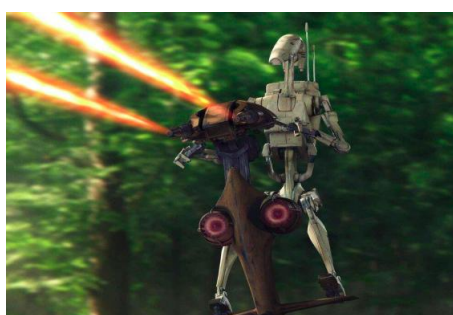


Figura 10.24: A droide on a STAP during the battle of Naboo ante la Batalla de Naboo

37. Un fusil dispara una bala de 30 g sobre un bloque de 5 kg de masa, incrustándose la bala en él. Como consecuencia del impacto, el conjunto bloque-bala se desplaza sobre una superficie sin rozamiento una distancia de 3 m en un tiempo de 1,67 s. Calcula la velocidad de la bala.

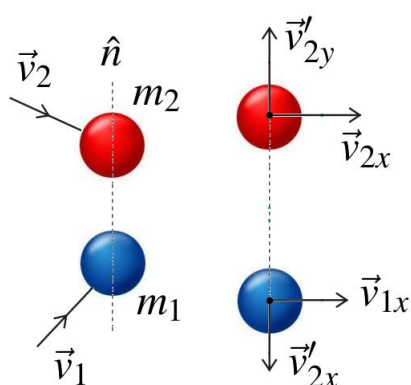


Figura 10.25: Colisión inelástica en dos dimensiones

38. En la Fig. 10.25 se muestra una esfera lisa de masa  $m_1 = 5,0$  kg que se mueve sobre una superficie horizontal lisa con velocidad  $\vec{v}_1 = 2\hat{x} + 3\hat{y}$  m/s. Otra esfera lisa de masa  $m_2 = 3,0$  kg y el mismo radio que  $m_1$  se está moviendo la misma superficie con velocidad  $\vec{v}_2 = 4\hat{x} - 2\hat{y}$  m/s. Las esferas chocan cuando su línea de centros es paralela al

eje  $y$ , como muestra la Fig. 10.25. El coeficiente de restitución entre las esferas es  $e = 0,6$ . Encuentra las velocidades de ambas esferas después del impacto.

**Ayuda:** Las velocidades transversales se conservan, como se muestra en la figura. Necesitas conocer  $\vec{v}'_{2y}$   $\vec{v}'_{2x}$ .

39. Una roca se rompe en tres fragmentos por efecto de una explosión. El primer fragmento de 2 kg sale despedido con una velocidad de 10 m/s, el segundo fragmento de 3 kg sale despedido con una velocidad de 6 m/s, formando un ángulo de  $90^\circ$  con el primero. El tercer fragmento sale con una velocidad de 25 m/s. Determina la masa de este tercer fragmento y el ángulo que forma con la horizontal.

40. Se dispara horizontalmente una bala de 20 g de masa sobre un bloque de madera de 1 kg situado sobre una mesa suave. Después del impacto el sistema bala-bloque se desplaza con una velocidad de 5 m/s. Calcula la velocidad del proyectil antes del impacto.





## 11. SISTEMAS CON MASA VARIABLE

Hasta ahora hemos estudiado la dinámica de una partícula con masa constante. Sin embargo, hay muchos fenómenos en la vida real donde la masa del sistema aumenta o disminuye. Piensa en un camión que va perdiendo su carga, o una correa sinfín sobre la cual va cayendo material de la minería, o la pérdida de masa de un cohete Saturno V a medida que se va elevando. A propósito de esto último, hay un video corto donde se muestra gráficamente la pérdida de combustible de un Saturno V, medida en elefantes (algo sangriento, sí): <https://www.youtube.com/watch?v=bZTSGyIsLzQ>

Para estudiar este tipo de sistema debemos utilizar la expresión general de la segunda ley de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}. \quad (11.1)$$

Esta ecuación se puede estudiar para el caso de pérdida continua de masa, pensemos en un líquido que se vierte de un contenedor, o en el caso de pérdida discreta de masa, como el caso de los elefantes en el video mencionado; o más realista, cuando un arma de fuego dispara una bala.

Así escrita, sin embargo, no es demasiado útil, como veremos en el ejemplo de variación continua de masa. Por eso, antes de ver ejemplos, desarrollaremos en más detalle qué se entiende por la Ec. (11.1)

Para estudiar en general tales sistemas de masa variable, consideraremos un sistema, de masa  $m$  en cierto instante  $t$ , cuyo centro de masa se está moviendo con una velocidad  $\vec{v}$ , medida por un observador inercial. La masa se encuentra sometido a una fuerza neta externa  $\vec{F}^{ext}$ , que no se muestra en la Fig. 11.1. En un cierto instante posterior,  $t + dt$ , esta masa habrá sido alcanzada por una masa infinitesimal  $dm$  que llevaba una velocidad  $\vec{u}$ , medida también en el mismo sistema de referencia inercial. La pregunta que nace es qué forma toma la segunda ley de Newton para el sistema de masa variable. Es claro que el momentum lineal inicial del sistema es

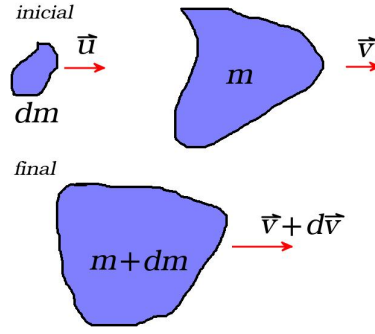


Figura 11.1: Cambio de movimiento en un sistema de masa variable

$$\vec{p}_i = m\vec{v} + \vec{u}dm \quad (11.2)$$

y que el momentum final es

$$\vec{p}_f = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}). \quad (11.3)$$

Por lo tanto la variación infinitesimal del momentum lineal es

$$\begin{aligned} d\vec{p}_{total} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - m\vec{v} + dm\vec{u} \\ &= m\vec{v} + m d\vec{v} + dm\vec{v} + dm d\vec{v} - m\vec{v} - dm\vec{u} \\ &= m d\vec{v} + dm\vec{v} - dm\vec{u}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

donde hemos despreciado el término  $dm d\vec{v}$  por ser muy pequeño (recuerda que ambos por separado ya son pequeños). Por lo tanto, dividiendo por  $dt$ <sup>1</sup>, obtenemos

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v} - \frac{dm}{dt} \vec{u}. \quad (11.5)$$

Arreglamos un poco para obtener

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} (\vec{v} - \vec{u}). \quad (11.6)$$

Observa que en el segundo término del lado derecho aparece la velocidad relativa  $\vec{u} - \vec{v}$  del elemento de masa  $dm$  relativo a la masa original  $m$ . El término

$$\frac{dm}{dt} (\vec{v} - \vec{u}), \quad (11.7)$$

es lo que se denomina **empuje de un motor a reacción**.

Interesante resulta escribir esta expresión de la segunda ley como

$$\vec{F}^{ext} + \frac{dm}{dt} (\vec{u} - \vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}_{cm}, \quad (11.8)$$

que interpretamos como sigue: El primer término del lado izquierdo no es más que las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de masa variable, mientras que el segundo

<sup>1</sup> Sí, ya sabemos que no es correcto decir eso

término representa la rapidez con que se está transfiriendo momentum al sistema por la masa que se le incorpora o que sale del mismo. Este segundo término lo interpretamos entonces como la fuerza que actúa sobre el sistema de masa variable por la masa que se le incorpora o sale de él.

Pero esta no es la única forma en que podemos arreglar este resultado. Podemos escribir también,

$$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \frac{dm}{dt} \vec{u}, \quad (11.9)$$

que no es sino la expresión de la segunda ley de Newton, que define la fuerza externa que actúa sobre un sistema material cuya masa no permanece constante en el transcurso del tiempo, por estar recibiendo un aporte de masa y, por supuesto, decantidad de movimiento desde el exterior.

## 11.1 Pérdida discreta de masa: Saturno V y los elefantes

Consideremos el video del Saturno V. Denotamos  $M$  a la masa total del cohete y  $m$  a la masa de cada elefante.

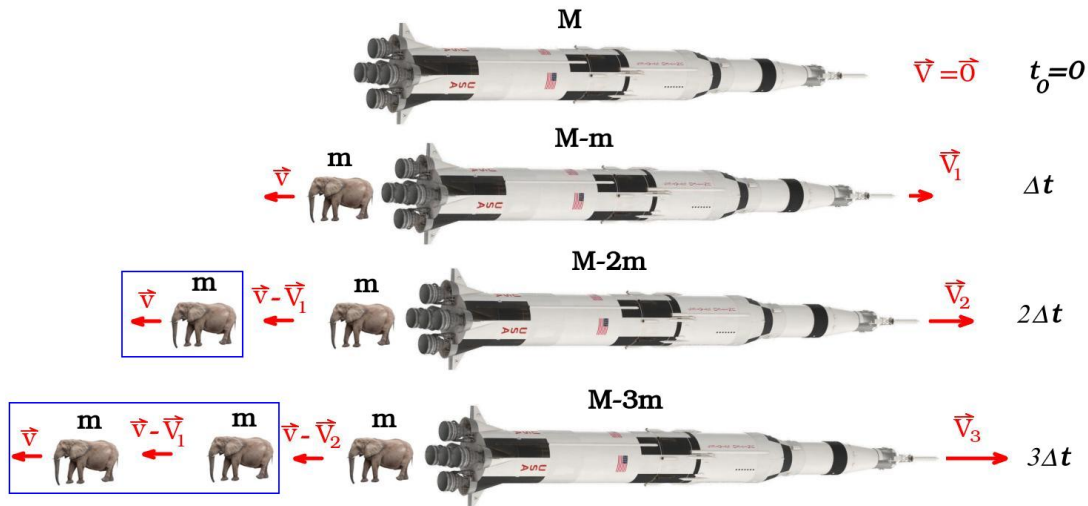


Figura 11.2: Saturno V

Para analizar este despegue debemos utilizar la conservación del momentum lineal. En el intervalo  $\Delta t$

$$\vec{p}_{SV} + \vec{p}_c = \vec{0} \implies \vec{p}_{SV,i} + \vec{p}_{c,i} = \vec{p}_{SV,f} + \vec{p}_{c,f}, \quad (11.10)$$

es decir

$$0 = (M - m)V_1 - mv \implies V_1 = \frac{1}{M - m}mv. \quad (11.11)$$

Para el intervalo  $2\Delta t$ , la conservación del momentum da <sup>2</sup>

$$(M - m)V_1 = (M - 2m)V_2 - m(v - V_1) \implies V_2 = \left( \frac{1}{M - m} + \frac{1}{M - 2m} \right)mv \quad (11.12)$$

<sup>2</sup>He encuadrado en azul a los elefantes ya considerados

Puedes darte cuenta rápidamente que para el intervalo  $3\Delta t$  se obtiene

$$V_3 = \left( \frac{1}{M-m} + \frac{1}{M-2m} + \frac{1}{M-3m} \right) m v \quad (11.13)$$

y luego, en general

$$V_n = m v \sum_{k=1}^n \frac{1}{M-km}. \quad (11.14)$$

Con este resultado podemos obtener la energía cinética durante el intervalo  $n\Delta t$

$$K_n = M_{total} V_n^2 = (M - nm) V_n^2. \quad (11.15)$$

## 11.2 Pérdida continua de masa

Como un ejemplo masa variable de modo continuo, consideremos una máquina de Atwood formada con dos baldes llenos de agua, de masas distintas  $m_1$  y  $m_2$ . Uno de los baldes tiene orificios del que puede fluir el agua, como muestra la Fig. 11.3. Suponemos, por simplicidad, que el agua escurre vertical hacia abajo.

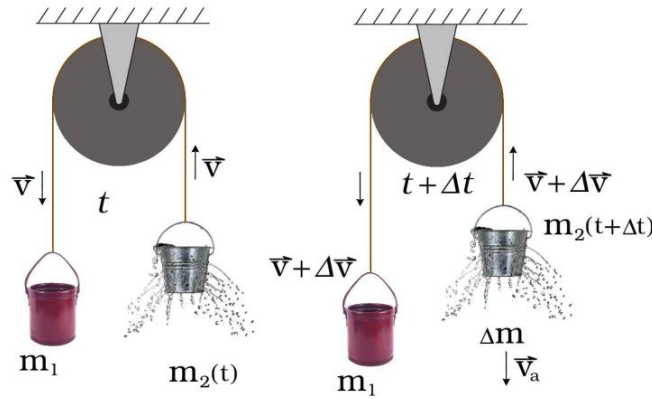


Figura 11.3: Máquina de Atwood con impulso adicional

Supongamos que la masa del balde perforado tiene una dependencia temporal  $m_2(t) = m_0 - \beta t$ . Consideraremos por un momento que la variación de masa es finita, durante un intervalo  $\Delta t$ , para al final tomar el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Usamos momentum lineal, que debido a que existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, no se conserva.

El momentum total inicial es

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ti} &= \vec{p}_{2i} - \vec{p}_{1i} \\ &= m_2(t) v \hat{y} - m_1 v (-\hat{y}) \\ &= [m_2(t) v + m_1 v] \hat{y} \end{aligned} \quad (11.16)$$

mientras que el momentum total final es

$$\begin{aligned} \vec{p}_{tf} &= \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{1f} + \vec{p}_a \\ &= m_2(t + \Delta t) (v + \Delta v) \hat{y} - m_1 (v + \Delta v) (-\hat{y}) - \Delta m v_a \hat{y}, \end{aligned} \quad (11.17)$$

donde  $\vec{p}_a$  es el momentum lineal de la masa de agua que está siendo expelida desde el balde, **medida respecto del suelo** (sistema de referencia inercial).

Resulta que la masa del balde perforado en el instante  $t + \Delta t$  es  $m_2(t) - \Delta m$ , luego la variación del momentum lineal, el impulso, es

$$\begin{aligned}\Delta \vec{p} &= \vec{p}_{tf} - \vec{p}_{ti} \\ &= m_2(t + \Delta t) [v + \Delta v] \hat{y} - m_1 [v + \Delta v] (-\hat{y}) - \Delta m v_a \hat{y} - (m_2(t) v + m_1 v) \hat{y} \\ &= (m_1 + m_2(t)) \Delta v \hat{y} - \Delta m v \hat{y} - \Delta m v_a \hat{y},\end{aligned}\quad (11.18)$$

donde en la última línea hemos desechado el producto  $\Delta m \Delta v$  porque estamos pensando en tomar el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  y entonces este producto se convertirá en un término infinitesimal al cuadrado, por tanto despreciable en ese límite.

Falta relacionar  $\vec{v}_a$  con la velocidad del fluido medida respecto del balde  $m_2$ ,  $\vec{v}'_a$ . De la Fig. 11.4,

$$\vec{y}_2 + \vec{y}'_a = \vec{y}_a. \quad (11.19)$$

Si derivamos respecto del tiempo, obtenemos

$$\vec{v}_2 + \vec{v}'_a = \vec{v}_a \implies v_a = v'_a - v - \Delta v. \quad (11.20)$$

Reemplazando en Ec. (11.18) obtenemos

$$\Delta p = (m_1 + m_2(t)) \Delta v - \Delta m v - \Delta m v'_a + \Delta m v, \quad (11.21)$$

donde nuevamente hemos despreciado el producto  $\Delta m \Delta v$ .

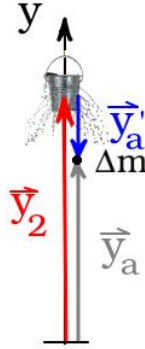


Figura 11.4: Relacionando velocidades de la masa de agua

Por lo tanto, la variación del momentum lineal es

$$\Delta p = [m_1 + m_2(t)] \Delta v - \Delta m v'_a \quad (11.22)$$

y dividiendo toda la ecuación por  $\Delta t$  obtenemos

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = [m_1 + m_2(t)] \frac{\Delta v}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t} v'_a. \quad (11.23)$$

En el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  obtenemos

$$F = [m_1 + m_2(t)] \frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt} v'_a. \quad (11.24)$$

Como  $\frac{dm}{dt} = \beta$ , la fuerza que actúa sobre el sistema es

$$F = [m_1 + m_2(t)] a - \beta v'_a. \quad (11.25)$$

Podríamos haber intentado usar directamente la Ec. (11.1), pero habríamos encontrado alguna dificultad. En efecto, con  $m \rightarrow m_1 + m_2(t)$  y

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(m_1 + m_2(t))}{dt} = \frac{dm_2(t)}{dt} = -\beta \quad (11.26)$$

tendríamos

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext} = [m_1 + m_2(t)] \frac{d\vec{v}}{dt} - \beta \vec{v} \quad (11.27)$$

y aparecería la pregunta de qué es la variable  $v$  en esta ecuación. Luego, precaución.

### Pausa matemática

Hay integrales cuyo resultado es un logaritmo natural.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + cte. \implies \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln \left( \frac{x_2}{x_1} \right) \quad (11.28)$$

Una leve generalización de esta integral es

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{Ax+B} dx, \quad (11.29)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. Para resolverla, basta con hacer un cambio de variable <sup>3</sup>

$$u = Ax + B \implies du = A dx, \quad (11.30)$$

que a su vez implica un cambio en los límites de la integral

$$u_i = Ax_i + B \quad i = 1, 2. \quad (11.31)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{A} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{u} du = \frac{1}{A} \ln \left( \frac{u_2}{u_1} \right) = \frac{1}{A} \ln \left( \frac{Ax_2 + B}{Ax_1 + B} \right) \quad (11.32)$$

Con esto terminamos nuestra pausa matemática

**Ejemplo** Consideremos un cohete de masa  $M$  que solo tiene una etapa, donde se almacena el combustible de masa  $m$ . Suponemos que parte del reposo desde la superficie

<sup>3</sup>En el segundo paso es como haber aplicado una derivada  $d$  sobre  $u$  y usar la regla de la derivada. En realidad esta operación es prima hermana de la derivada; se denomina diferencial. Para nuestras aplicaciones, no hay mucha diferencia, ¡pero ís la hay!

terrestre, subiendo verticalmente. Determinemos la ecuación de movimiento, despreciando la fricción del aire.

### Solución

Suponemos que el consumo de combustible es constante. Lo llamamos  $\beta = dm/dt > 0$ . Elegimos nuestro sistema de referencia con  $+y$  hacia arriba. Luego, la fuerza externa actuando sobre el cohete es  $\vec{F}^{(ext.)} = -(M - \beta t)g\hat{y}$ . Luego, de la Ec. (11.25)

$$-(M - \beta t)g\hat{y} = [M - \beta t] \frac{dv}{dt} \hat{y} - \beta v'_a \hat{y}, \quad (11.33)$$

donde  $v'_a$  es la velocidad eyección de los gases del cohete, con respecto al cohete. Esta velocidad se relaciona con la velocidad absoluta de los gases,  $v_a$  por

$$\vec{v}_a = \vec{v}'_a + \vec{v}. \quad (11.34)$$

De aquí, la aceleración es

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{\beta v'_a}{M - \beta t}. \quad (11.35)$$

El intervalo de tiempo para el cual esta ecuación es válida es  $(0, t_f)$ , donde  $t_f = m/\beta$ , esto es, cuando el combustible se ha acabado. Claramente el segundo término del lado derecho debe ser mayor que el primer término en el instante  $t = 0$ , de modo tal que  $dv/dt > 0$  allí. Esto significa que  $\beta v'_a/M > g$ .

Para obtener la velocidad debemos integrar esta ecuación diferencial. Luego, integramos ambos lados de la ecuación

$$\int_{v_0}^v dv = - \int_0^{t_f} g dt + \int_0^{t_f} \frac{\beta v'_a}{M - \beta t} dt. \quad (11.36)$$

La integral más difícil por supuesto es la segunda del lado derecho. Pero nuestra pausa matemática anterior nos ayuda. Si hacemos el cambio de variable  $\tau = \frac{\beta t}{M}$ , tenemos que

$$v'_a \int_0^{\tau_f} \frac{d\tau}{1 - \tau} = v'_a \ln \left[ \frac{1}{1 - \frac{\beta}{M} t_f} \right]. \quad (11.37)$$

Considerando que el cohete parte del reposo,  $v_0 = 0$  tenemos que

$$v = -g t_f + v'_a \ln \left[ \frac{1}{1 - \frac{\beta}{M} t_f} \right] = -g \frac{m}{\beta} + v'_a \ln \left[ \frac{1}{1 - \frac{m}{M}} \right]. \quad (11.38)$$

Por supuesto, podemos integrar esta ecuación nuevamente, para un instante arbitrario, antes de evaluar en  $t = t_f$ , para encontrar la ecuación itinerario. Te lo dejo como tarea, para lo cual puedes ayudarte con un software para calcular las integrales.



## 11.2.1 Ejercicios

1. Un hombre de 60 kg de pie fijo en el suelo, puede lanzar una pelota de béisbol de masa  $m = 150$  g horizontalmente, con una velocidad máxima de  $v_0 = 25$  m/s.

a) ¿Cuánta energía mecánica pone en el tiro?

b) Supón que el hombre se encuentra fijo en una plataforma de 9,25 kg que se puede mover sin fricción con respecto al suelo, como muestra la Fig. 11.5. Tiene cinco pelotas de béisbol de 150 g y lanza una de las pelotas de béisbol horizontalmente como se muestra, poniendo la misma cantidad de energía mecánica que se encuentra en la parte (a). La colisión de la pelota con la pared de la plataforma es elástica.

i) ¿Cuál es su velocidad (magnitud y dirección) después del lanzamiento?

ii) ¿Cuál es la velocidad de la plataforma móvil después de haber lanzado las cinco pelotas y después de éstas chocaron con la pared?

c) ¿Cómo cambian tus respuestas si el choque de las pelotas es completamente inelástico?

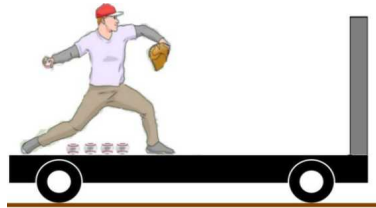


Figura 11.5: Beisbolista sobre carro

2. Un vagón de carbón vacío y sin fugas está acelerando en dirección Este debido a una fuerza constante de magnitud  $F$ . Comienza a llover, y la lluvia tiene una velocidad que tiene un componente horizontal  $v_0$ , en dirección Oeste. La lluvia llena el vagón a una tasa constante de  $\alpha$  unidades de masa por unidad de tiempo. En estas condiciones, el vagón alcanzará una velocidad máxima.

a) Encuentra la velocidad máxima y exprese en términos de  $F$ ,  $v_0$  y  $\alpha$ .

b) Encuentra la velocidad del tren  $v(t)$ .

3. Agua comienza a emerger horizontalmente desde un tubo, con la velocidad  $v_0$ , y llega al extremo más alejado de una caja con una masa  $m_0$  y una longitud  $L$  que descansa sobre una superficie sin fricción. El caudal másico<sup>4</sup> del agua es  $\alpha$ . Encuentra la velocidad de la caja en función del tiempo siempre que el agua se vierta en la caja.

4. La Princesa Leia y Chewbacca viajan en el Halcón Milenario, de masa  $m_0$  y área de sección transversal  $A$ , avanzando con velocidad  $v_0$ . En el instante  $t = 0$  se encuentran con una nube de polvo estacionaria de densidad  $\rho$ . Si el polvo se adhiere a la nave espacial, encuentra la velocidad del Halcón Milenario en función del tiempo. Supón que  $A$  es constante en el tiempo.

5. Un vagón de carga de masa  $M$  contiene una masa de arena  $m$ . En  $t = 0$  una fuerza horizontal constante de magnitud  $F$  se aplica en la dirección de rodadura y al mismo tiempo se abre una puerta en la parte inferior para permitir que la arena fluya a la velocidad constante  $dm/dt = \beta$ . Encuentra la velocidad del vagón de carga cuando toda la arena se haya ido (ver Fig. 11.6). Supón que el vagón de carga está en reposo a  $t = 0$

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Mass\\_flow\\_rate](https://en.wikipedia.org/wiki/Mass_flow_rate)





Figura 11.6: Descarga de un vagón de granos

6. Considera el mismo vagón del problema anterior. El vagón va lleno de arena y rueda con rapidez inicial de  $10 \text{ m/s}$  sobre vías horizontales rectas sin fricción. La masa total del vagón y la arena es de  $80.000 \text{ kg}$ . La puerta inferior no cierra bien, por lo que se fuga arena por el fondo. Después de 20 minutos, se han perdido  $12.000 \text{ kg}$  de arena. ¿Qué rapidez tiene el vagón en ese instante?

7. En la foto de la Fig. 11.7 se muestra un carro de carbón de masa  $M$  que ha avanzado partiendo desde el reposo bajo una fuerza aplicada de magnitud  $F$ . Al mismo tiempo, carbón ha comenzado a fluir hacia el carro a una velocidad constante desde una tolva de carbón (no mostrada) en reposo a lo largo de la vía. Encuentra la velocidad en el momento en que se transfirió una masa  $m$  de carbón.



Figura 11.7: Cargando un vagón con carbón

8. Una nave espacial se mueve en un espacio libre de gravedad a lo largo de un camino recto cuando el astronauta decide acelerar hacia adelante. Enciende los propulsores, y el combustible quemado se expulsa a una velocidad constante de  $2,0 \times 10^2 \text{ kg/s}$ , a una velocidad (en relación con el cohete) de  $2,5 \times 10^2 \text{ m/s}$ . La masa inicial de la nave espacial y su combustible no quemado es de  $2,0 \times 10^4 \text{ kg}$ , y los propulsores están encendidos durante  $30 \text{ s}$ .

a) ¿Cuál es el empuje (la fuerza aplicada al cohete por el combustible expulsado) en la nave espacial?

b) ¿Cuál es la aceleración de la nave espacial en función del tiempo?

c) ¿Cuál es la aceleración de la nave espacial en los instantes  $t = 0, 15, 30$  y  $35 \text{ s}$ ?

9. La arena de una tolva estacionaria cae a razón de  $5 \text{ kg/s}$  sobre una cinta transportadora en movimiento, como se muestra en la Fig. 11.8. La cinta transportadora está soportada por rodillos sin fricción y se mueve a una velocidad constante de  $v = 0,8 \text{ m/s}$  bajo la acción de una fuerza externa horizontal constante  $\vec{F}$  suministrada por el motor que acciona la correa. Encuentra

- a) La tasa de cambio de momentum lineal de la arena en la dirección horizontal.
- b) La fuerza de fricción ejercida por la correa sobre la arena,
- c) La fuerza externa  $F$ .
- d) El trabajo realizado por  $F$  en 1 s.
- e) La energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal.
- f) ¿Por qué las respuestas a las partes d) y e) son diferentes?

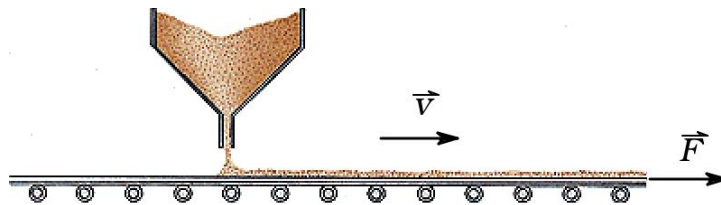


Figura 11.8: Cargando una cinta transportadora

10. Un astronauta, en reposo respecto a su nave, utiliza para moverse un propulsor que lanza 15 g de gas cada segundo a 200 m/s. Calcula el impulso que el astronauta recibirá cada segundo si su masa (con el equipo incluido) es de 170 kg.

11. Alguien tuvo la maravillosa idea de instalar una piscina de hule enorme dentro del remolque de un camión para llevarla a niños pobres que no tiene piscina. El remolque tiene una masa  $m_0$ . Cuando se llena la piscina la masa del sistema aumenta al doble. Supón que el remolque rueda sin roce por una vía recta, sin ayuda del camión, a una velocidad  $v_0$  m/s. Hay 40°C de temperatura. Comienza a llover torrencialmente de forma que la tasa con que se llena la piscina es de  $n$  kg/s. En esta situación podrás afirmar que:

- a) ¿Mantiene la piscina su velocidad constante?
- b) ¿Adquiere la piscina un movimiento acelerado?
- c) ¿Se detiene el remolque?
- d) ¿Cuál es la mínima velocidad alcanzada por el remolque?
- e) ¿Qué distancia recorrió el remolque hasta que se llenó la piscina?

12. Supón ahora que en problema anterior el remolque sin ruedas se conecta al camión. El remolque es arrastrado sobre una superficie con coeficiente de roce estático  $\mu_k$ . El camión logra mantener su velocidad constante mientras la piscina se va llenando. El camión deberá aplicar una fuerza horizontal sobre el remolque. Calcula la potencia desarrollada por esa fuerza, expresada en watt

13. Los camiones aljibe que en las madrugadas suelen limpiar nuestras calles, son un claro ejemplo de un sistema que debe procurar mantener una velocidad constante  $v$  pese a la pérdida continua de masa. El camión cisterna tiene una masa  $M$  cuando está completamente cargado. Va lanzando un chorro de agua en sentido opuesto al movimiento del camión y a velocidad  $\vec{u}$  respecto de éste. Si la tasa a la que sale el agua es de  $n$  kg/s, calcula la potencia disipada en watt para lograr que el camión mantenga su velocidad constante.

14. Imaginemos que el camión del problema anterior, con una masa bruto de 12 t, y una tara de 6.000 kg, sólo se moviera, por efecto de la salida del agua de riego, con un

ritmo continuo de 20 litros por minuto, y una velocidad de 1 m/s respecto del camión. Si inicialmente la velocidad del camión era de 5 km/h,

- a) ¿Cuánto tiempo podrá regar?
- b) ¿Cuál es la velocidad máxima del camión?
- c) ¿Cuál fue su aceleración media?
- d) ¿Cuál es su velocidad después de 2 horas?

15. Los núcleos atómicos inestables, se desintegran espontáneamente emitiendo partículas a gran velocidad, lo cual provoca una gran variación de la cantidad de movimiento del núcleo inicial. Si un núcleo de masa  $M$ , emite una partícula de masa cinco veces menor, con una velocidad  $\vec{u}$ , calcula la velocidad a la que desplazará el núcleo residual.:

16. Considera una nave espacial en el espacio tal que no existe gravedad efectiva. Supón que la nave tiene una masa de  $2,6 \times 10^5$  kg, de los cuales  $1,8 \times 10^5$  kg son de combustible. El motor consume combustible a razón de 480 kg/s, y la velocidad de eyección es de 3,3 km/s. El motor se enciende durante 250 s.

- a) ¿Cuál es el empuje del motor de la nave?
- b) ¿Cuál es la velocidad final alcanzada?

17. Consideremos un cohete en reposo en el espacio. ¿Cual debe ser la razón de masa (razón de la masa inicial a la masa final) para que, después de haberse encendido el motor, la velocidad del cohete sea

- a) igual a la velocidad de los gases expulsados? y
- b) igual al doble de la velocidad de los gases expulsados?

18. Durante una misión lunar es necesario hacer una corrección a medio camino de 22,6 m/s en la velocidad de la nave espacial, la cual se mueve a razón de 390 m/s. La velocidad de los gases de escape del motor del cohete es de 1.230 m/s. ¿Qué fracción de la masa inicial de la nave espacial debe ser lanzada como gases de escape?

19. Un jet vuela a 184 m/s. El motor absorbe  $68,2 \text{ m}^3$  de aire, que representa una masa de 70,2 kg/s. El aire se emplea para quemar 3,0 kg de combustible por segundo. La energía se emplea para comprimir los productos de combustión y expulsarlos en la parte posterior del motor a 497 m/s en relación al avión. Encuentra

- a) el empuje del motor a propulsión y
- b) la potencia desarrollada, en caballos de fuerza (hp).

20. Un tobogán de 5.4 kg que transporta 35 kg de arena se desliza desde el reposo por una pendiente congelada de 93 m de longitud, inclinada a  $26^\circ$  bajo la horizontal. La arena se fuga de la parte trasera del tobogán a razón de 2.3 kg/s. ¿Cuánto tiempo le tomará al tobogán alcanzar el fondo de la pendiente?

21. Un rocket tiene una masa de 2.000 kg y lleva una carga de combustible de 12.000 kg. Parte del reposo desde la superficie terrestre y adquiere una velocidad constante de 5.000 km/h, relativa a los gases expulsados. Sabiendo que la máxima aceleración que adquiere es  $7g$  y despreciando tanto la resistencia del aire como las variaciones en la gravedad, calcula

- a) la rapidez máxima de consumo de combustible,
- b) el tiempo en el que alcanza la velocidad final, y
- c) el valor de la velocidad final, relativa a la Tierra.

22. El espacio interestelar no está vacío, sino que hay polvo cósmico en distintas densidades. Luego, no es extraño que una nave interplanetaria recoja parte de ese polvo estacionario a medida que viaja. Supongamos que la variación de su masa es  $dM/dt = cv$ , donde  $c$  es una constante y  $v$  su velocidad. Suponiendo que no hay fuerzas externas actuando sobre la nave, determina su aceleración.



## 12. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

Hasta ahora hemos analizado la dinámica de cuerpos con dimensiones como si fuesen puntos. Pero claro, esos cuerpos no son puntos. No es lo mismo hacer girar una escoba que una pelota; abrir una puerta desde la manilla, que empujarla desde su centro. Para entender cómo se mueve un objeto con dimensiones, rígido, debemos extender lo que hemos estudiado.

Un **cuerpo rígido** se define como un conjunto de partículas tales que la distancia relativa entre cualquier par de partículas en el cuerpo permanece fija.

Antes de comenzar a analizar el movimiento de un sólido rígido, necesitamos avanzar un paso más en el conocimiento del álgebra vectorial porque para analizar el movimiento de un sólido rígido en general debemos usar vectores en tres dimensiones.

### 12.1 Producto vectorial

El producto vectorial, también llamado **producto cruz** entre dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  se define como

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad (12.1)$$

y como vemos es un **producto antisimétrico**; no da igual el orden en que se hace el producto. Existe una forma nemotécnica para dar cuenta de forma rápida de esta operación. Como toda regla nemotécnica, está basada en matemática bien definida. Esta forma nemotécnica se denomina **regla de la mano derecha** y se muestra en la Fig. 12.1. En la misma figura se observa que el resultado de la operación es un vector que es perpendicular al plano definido por los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Es claro que los factores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  no necesitan ser perpendiculares entre sí.

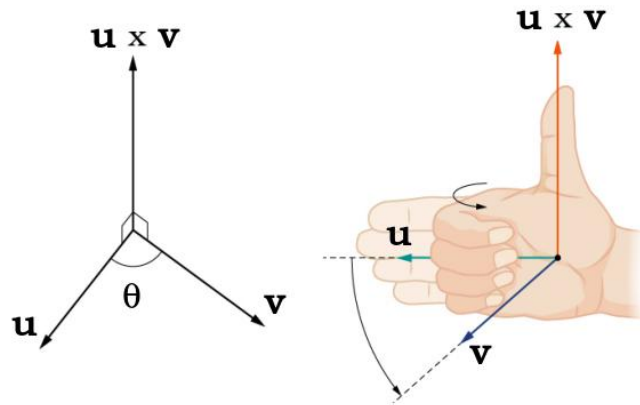


Figura 12.1: Producto vectorial y regla de la mano derecha

El módulo del producto vectorial está definido por<sup>1</sup>

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin \theta. \quad (12.2)$$

Esta expresión también tiene una representación gráfica, como se muestra en la Fig. 12.2, donde se han descompuesto el vector  $\vec{A}$  ( $\vec{B}$ ) en sus componentes paralelas y perpendiculares a la dirección definida por el vector  $\vec{B}$  ( $\vec{A}$ ).

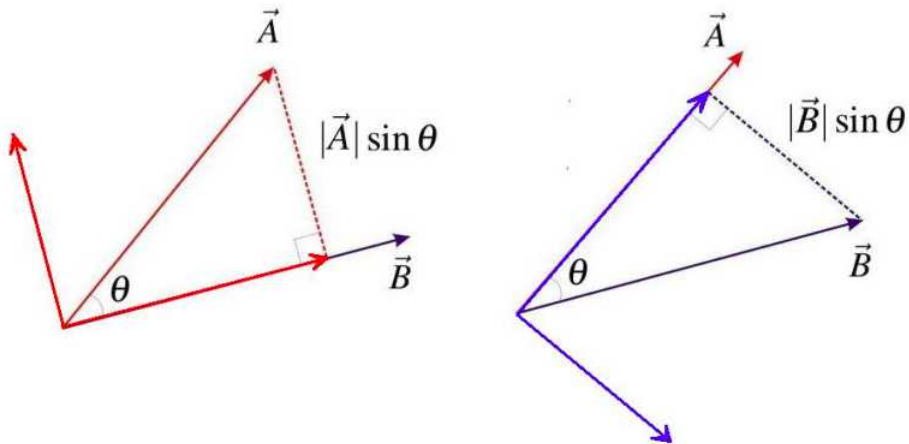


Figura 12.2: Representación gráfica del módulo del producto vectorial

Con esto podemos definir la **dirección perpendicular**

$$|\vec{A}|_{\perp} = |\vec{A}| \sin \theta, \quad (12.3)$$

o

$$|\vec{B}|_{\perp} = |\vec{B}| \sin \theta, \quad (12.4)$$

para escribir el módulo del producto vectorial como

$$|\vec{C}| = |\vec{A}|_{\perp} |\vec{B}| = |\vec{B}|_{\perp} |\vec{A}|. \quad (12.5)$$

<sup>1</sup>En realidad este es un teorema en matemáticas

Un ejemplo importante de aplicación del producto cruz es en la definición del vector velocidad angular,  $\vec{\omega}$ . Ya hemos introducido el concepto de velocidad angular, pero solo su módulo, y lo hemos relacionado con el módulo de la velocidad tangencial en un movimiento circular:  $v = \omega r$ .

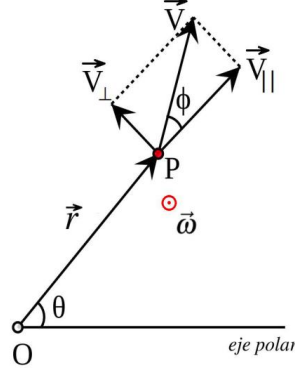


Figura 12.3: Descomposición del vector velocidad

En la Fig. 12.3 se muestra el vector velocidad de una partícula en el punto  $P$ . Observamos que la única componente de la velocidad que se relaciona con el giro de la partícula es  $v_{\perp} = v \sin \phi$ . Luego, de lo que ya sabemos acerca de la velocidad angular, podemos escribir

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\perp}}{r}. \quad (12.6)$$

Podemos argumentar del siguiente modo: tenemos que  $v_{\perp} = \omega r$  y sabemos que estas tres cantidades son los módulos de tres vectores  $\vec{v}_{\perp}$ ,  $\vec{\omega}$  y  $\vec{r}$ . Para que combinadas den la expresión anterior no queda otra opción que

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (12.7)$$

Esta expresión es consistente con el módulo  $v_{\perp} = \omega r \sin \phi = \omega r$  si y solo si los vectores  $\vec{\omega}$  y  $\vec{r}$  son perpendiculares entre sí. Esto es efectivamente así. Dado que  $\vec{\omega}$  y  $\vec{r}$  son perpendiculares a  $\vec{v}_{\perp}$ , resulta entonces que  $\vec{\omega}$  apunta saliendo del plano en la Fig. 12.3, de acuerdo a la regla nemotécnica.

**Observación:** He introducido una nueva notación: un vector que sale del plano se denota como un círculo con un punto en el centro,  $\odot$ . Así también, un vector que entra en el plano se denota como un círculo con una cruz,  $\otimes$ .

Podemos derivar la Ec. (12.7) respecto del tiempo y obtener la aceleración total

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\perp} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (12.8)$$

donde hemos usado la Ec. (12.7) para escribir el segundo término en la última igualdad. Es importante seguir la regla ya aprendida que es mantener el orden de los factores al derivar; es una buena política, pensando en el futuro.

Se puede demostrar que el **producto vectorial triple** entre tres vectores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  se puede escribir como

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}. \quad (12.9)$$



Por lo tanto, la aceleración se escribe como

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}, \quad (12.10)$$

que es consistente con lo que hemos aprendido anteriormente acerca de la aceleración total de un punto a lo largo de una curva: es la suma vectorial de la aceleración tangencial,  $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ , y la aceleración normal o centrípeta,  $\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$ .

Recuerda que ya habíamos obtenido el valor absoluto de  $\vec{a}_t$  vector en la Ec. (6.42).

Otro ejemplo importante es la relación entre los vectores unitarios cartesianos,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ . Este es un ejemplo donde los factores del producto vectorial sí son perpendiculares entre sí, como se muestra en la Fig. 12.4. Esto es mejor que te lo aprendas; el uso de la regla nemotécnica es útil para ello.

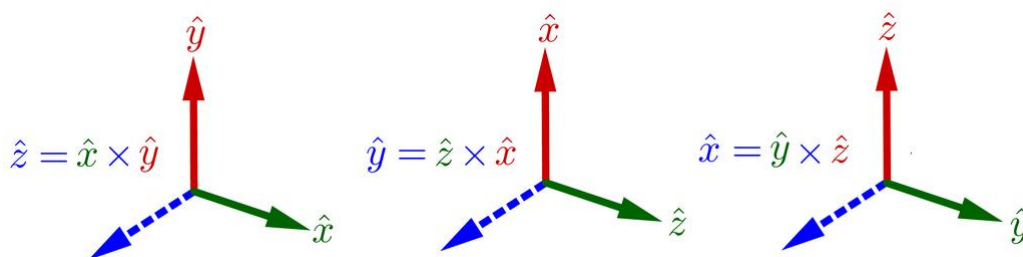


Figura 12.4: Producto vectorial de los vectores unitarios cartesianos

## 12.2 Torque

Debido a que el movimiento de un sólido rígido involucra también rotaciones alrededor de algún punto, debemos agregar más ecuaciones para describir el movimiento completo. Para esto, debemos incorporar el concepto de **torque**. Cuando abrimos o cerramos una puerta, tiramos o empujamos de ella desde un punto dado y ésta rota alrededor de su eje, lo que estamos realizando sobre la puerta es un torque. Por supuesto, no necesitamos que el eje esté fijo; podemos tirar al aire una raqueta de tenis, como lo hacen algunos furiosos tenistas, y ésta girará de algún modo en general complejo. Como ejemplo, mire este video acerca del **efecto Dzhanibekov**<sup>2</sup>. Interesante, ¿no? Entonces, **en general, los torques generan rotaciones**.

En este libro solo estudiaremos rotaciones alrededor de un eje fijo. En un libro más avanzado de Mecánica usted podrá estudiar casos más complicados, como el efecto Dzhanibekov.

El torque debido a una fuerza externa  $\vec{F}$ , actuando sobre un cuerpo rígido en un punto  $P$ , localizado por un vector de posición  $\vec{r}$  desde el origen  $O$  de un sistema de referencia inercial  $S$ , se define como

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (12.11)$$

<sup>2</sup><https://www.youtube.com/watch?v=r-TnCMZF3fA>. También mira este video: [https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ\\_XzisU](https://www.youtube.com/watch?v=1VPfZ_XzisU)



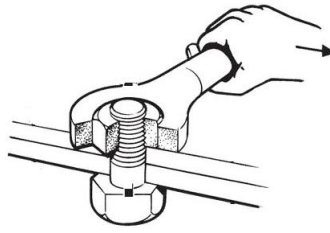


Figura 12.5: Aplicación de un torque sobre una tuerca

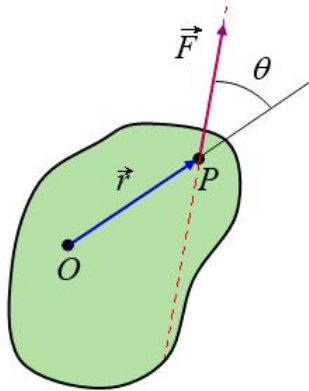
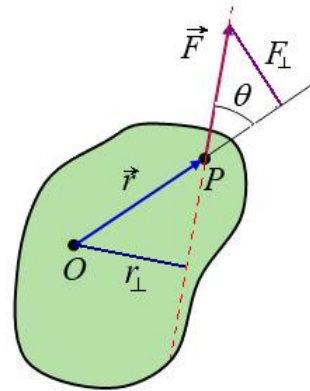
Figura 12.6: Torque alrededor de origen  $O$ 

Figura 12.7: Proyecciones perpendiculares

donde  $\times$  representa el producto vectorial entre vectores. El torque se mide en Nm (se lee “Newton metro”).

Observa que la fuerza actúa en un punto en particular,  $P$ , pero a lo largo de una dirección dada, como muestra la Fig. 12.6. De acuerdo a lo que hemos aprendido acerca del producto vectorial, el módulo del vector torque lo podemos escribir

$$|\vec{\tau}_O| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta = |\vec{r}_\perp||\vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}_\perp|. \quad (12.12)$$

Estas proyecciones perpendiculares se muestran en la Fig. 12.7. El saber hacer rápidamente estas proyecciones perpendiculares es muy útil. Practica.

**Ejemplo** La figura 12.8 muestra un disco vertical de masa  $m$  y radio  $R$ , con tres fuerzas aplicadas. Supón que la fuerza  $\vec{F}'$  se aplica a  $R/2$ , formando un ángulo  $\pi - \alpha$  con el eje polar, con  $\alpha = 30^\circ$ . Además, la posición donde se aplica la fuerza  $\vec{F}$ , tangente al disco, forma un ángulo de  $\theta = 45^\circ$  con el eje polar. Calcula la suma de todos los torques alrededor del centro de masa.

### Solución

En la figura ya hemos dibujado los vectores de posición de las tres fuerzas. Por supuesto, el vector de posición del peso,  $\vec{P}$  es el vector nulo. Por lo tanto, el torque aplicado por  $\vec{P}$  alrededor del centro de masa es cero.

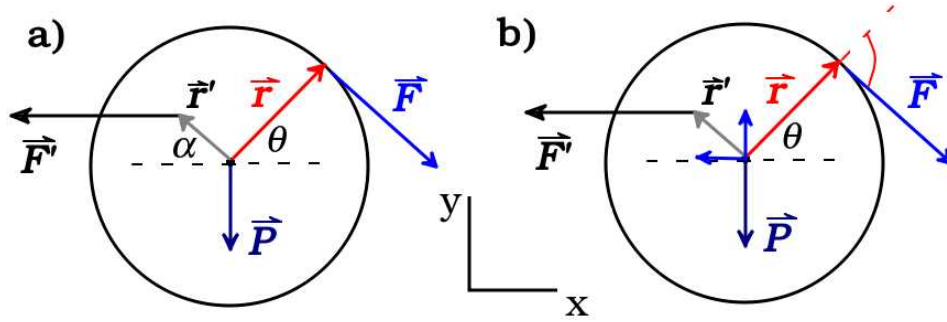


Figura 12.8: Fuerzas en un disco vertical

Usando la regla de la mano derecha, vemos que el torque aplicado por  $\vec{F}$  es un vector que apunta hacia dentro de la página, a lo largo del eje  $(-z)$ . Entonces

$$\vec{\tau}_{F,cm} = \vec{r} \times \vec{F} = -RF \sin \frac{\pi}{2} \hat{z} = -RF \hat{z} \quad (12.13)$$

porque el ángulo entre  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  es  $\pi/2$ , como se muestra en la figura b). El torque generado por  $\vec{F}'$  es

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{F',cm} &= \vec{r}' \times \vec{F}' = (r' \cos \alpha (-\hat{x}) + r' \sin \alpha \hat{y}) \times F' (-\hat{x}) \\ &= r' \sin \alpha \hat{y} \times F' (-\hat{x}) = \\ &= \frac{R}{4} F' \hat{z}, \end{aligned} \quad (12.14)$$

cuando se usa el producto vectorial de vectores unitarios. Por supuesto, podríamos haber obtenido la dirección  $+z$  utilizando la regla de la derecha, pero también es bueno practicar el producto vectorial. Notar que como era de esperar, solo la componente de la fuerza perpendicular al vector de posición contribuye, o dicho de otro modo, solo la componente del vector de posición perpendicular a la fuerza da un torque no nulo.

Por lo tanto, el torque total es:

$$\vec{\tau}_{cm} = R \left( \frac{1}{4} F' - F \right) \hat{z}. \quad (12.15)$$

### 12.2.1 Ejercicios

1. Usando el producto cruz de los vectores unitarios, calcula el producto vectorial entre los siguientes dos vectores:

- $\vec{A} = \hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}$  y  $\vec{B} = -2\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$ .
- $\vec{u} = 2\hat{x} + 4\hat{y} - 5\hat{z}$  y  $\vec{v} = -3\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z}$ .
- $\vec{C} = 2\hat{x} - 7\hat{z}$  y  $\vec{D} = -3\hat{x} - 4\hat{y}$ .

2. En la Fig. 12.9 se muestra una barra de 6.5 m de largo a la que se le están aplicando fuerzas de distinta magnitud, con direcciones variadas. Calcula los vectores torque de cada una de las fuerzas y el torque total respecto de

- el punto A,

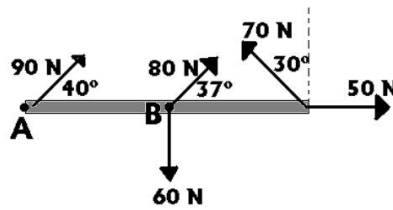


Figura 12.9: Fuerzas sobre una barra

b) el punto B.

3. Para quitar el perno de una rueda de auto se necesita diferentes tipos de torque, dependiendo de la rueda. Supongamos que tenemos una rueda para la que se necesita un torque de 90 Nm. ¿Cuánta fuerza debe aplicar con su mano si utiliza una llave de longitud

- a) 30 cm?,
- b) 40 cm?



Figura 12.10: Torque para cambiar una rueda

4. El brazo de un pedal de bicicleta mide 16 cm de longitud. Si una ciclista de 52 kg de masa apoya  $\frac{2}{3}$  de su peso sobre el pedal en cada pedaleada, calcula el torque que aplicado si el pedal

- a) está horizontal,
- b) forma un ángulo de  $30^\circ$  sobre la horizontal,
- c) está a  $25^\circ$  del punto mas alto.

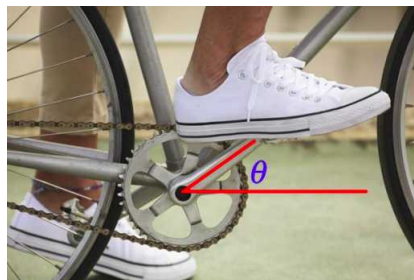


Figura 12.11: Torque aplicado al pedal de una bicicleta

5. Un ciclista ejerce una fuerza vertical de 120 N sobre una barra de pedal de 20 cm de longitud que está inclinada en un ángulo  $\theta$  respecto de la horizontal. Encuentra el torque sobre el eje para los siguientes valores de  $\theta$ :

- a)  $0^\circ$ ;

- b)  $30^\circ$ ;
- c)  $45^\circ$ ;
- d)  $60^\circ$ .

6. Determina el valor del torque, respecto del punto  $O$ , de la fuerza oblicua de módulo  $F = 100 \text{ N}$  que actúa sobre la barra de la Fig. 12.12

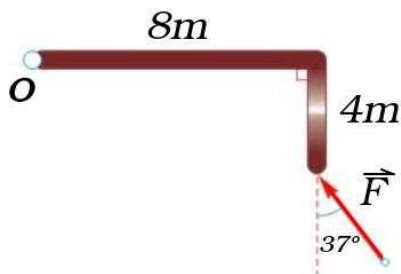


Figura 12.12: Torque sobre barra

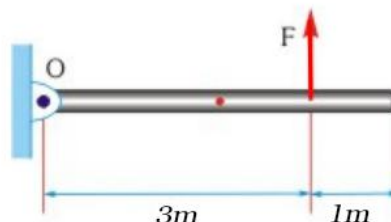


Figura 12.13: Torque sobre barra

7. Si la barra mostrada en la Fig. 12.13 pesa  $30 \text{ N}$  y a esta se le aplica una fuerza vertical cuyo módulo es  $F = 25 \text{ N}$ , determina el valor del torque resultante respecto del punto  $O$ .

8. La biomecánica es muy útil para comprender cómo ocurre el movimiento y las fuerzas involucradas en sistemas vivos. Se utiliza para poder hacer terapia de rehabilitación a personas accidentadas, pero también para diseñar sistemas robóticos cada vez más avanzados. La Fig. 12.14 muestra el diagrama de fuerzas sobre la cadera izquierda de una persona de  $60 \text{ kg}$ . La persona está de pie solo en esa pierna. Los músculos de la cadera izquierda deben contraerse para mantener la pelvis horizontal contrarestando el peso del cuerpo. Usando los valores de distancias y ángulos dados en la figura, calcula la fuerza  $\vec{F}$  realizada por los músculos de la cadera.

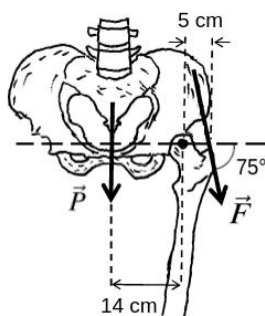


Figura 12.14: Torque sobre un esqueleto humano

9. En la Fig. 12.15 se muestra la situación de equilibrio de un brazo humano. Calcula la fuerza  $\vec{F}_m$  que ha de ejercer el bíceps para contrarrestar el peso del antebrazo, con masa  $m = 2,4 \text{ kg}$ , y del objeto sostenido por la mano (masa  $3,0 \text{ kg}$ ). Puede suponerse que el centro de masa del antebrazo está a  $20 \text{ cm}$  de la articulación del codo.

Ayuda: calcula el torque de todas las fuerzas respecto de la articulación del codo (punto C).

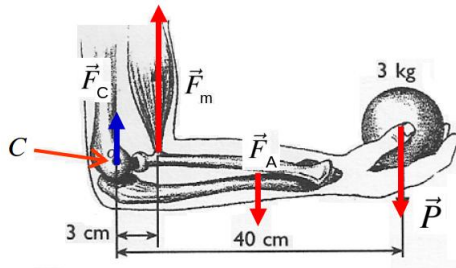


Figura 12.15: Torque al hacer un ejercicio de brazos

10. En la Fig. 12.16 se muestra un brazo robótico que está sosteniendo una caja cuyo peso es 2 kN. Los brazos  $l_1$  y  $l_2$  miden 0,8 m y 0,4 m, respectivamente. La distancia entre la conexión  $B$  y el eje que pasa por el centro de masa de la caja es  $l_3 = 0,1$  m. Calcula el torque de la carga en el brazo del robot sobre

- la conexión en  $A$ , y
- la conexión en  $B$ .

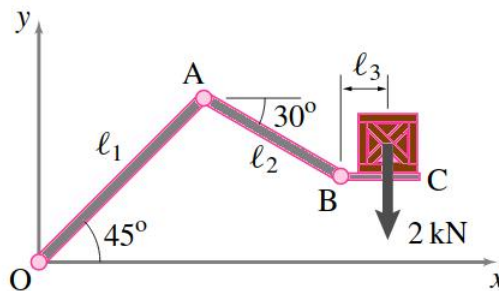


Figura 12.16: Torque en brazo robótico

11. En la foto de la Fig. 12.17 se muestra una grúa y el modelo simplificado del brazo de la grúa. Suponemos que el brazo de la grúa se modela con un bloque de acero, uniforme, macizo y de forma cilíndrica, largo  $D = 8$  m y radio 0,2 m. Supón que la densidad media del acero es  $7.850 \text{ kg/m}^3$ . El pistón que ayuda a levantar la grúa actúa a una distancia  $L = D/3$ . Determina el torque producido por el pistón alrededor del punto  $O$

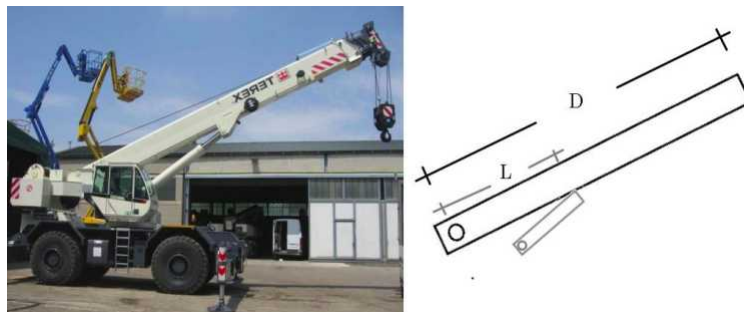


Figura 12.17: Torque en grúa

12. Un voladizo (*cantilever*) es un elemento estructural rígido que está apoyado solo por un lado a un elemento del que sobresale. Se utilizan mucho en construcción, pero

también en el campo de los sistemas microelectromecánicos (MEMS), para su uso como, por ejemplo, biosensores. En la Fig. 12.18 se muestra un voladizo de largo 100 micrones ( $\mu\text{m}$ ), que suponemos de forma cilíndrica, con radio despreciable. En un extremo se aplica una fuerza de  $F = 20 \mu\text{N}$ . Determina el torque debido a esa fuerza alrededor del punto  $B$ .



Figura 12.18: Cantilever

### 12.3 Momentum Angular

Ya que hablamos de rotaciones, se hace necesario definir una cantidad muy importante en física, el **momentum angular**. Ya conocemos otra cantidad relacionada, el momentum lineal  $\vec{p}$ . Hemos visto que cuando el sistema está aislado, es decir, cuando la fuerza neta actuando sobre el sistema es cero, esta cantidad se conserva. Que se conserve significa que es el sistema es invariante bajo traslaciones espaciales, como hemos visto. Esto lo hace una cantidad muy interesante en física: ¡resulta que todas las leyes de conservación en física son realmente importantes!

El momentum angular  $\vec{L}$  respecto de un origen  $O$  en un sistema de referencia inercial se define como

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (12.16)$$

Claramente, el momentum angular se mide en  $\text{kg m}^2/\text{s}$ .

Dado que dos vectores siempre se pueden ubicar en un plano, resulta que  $\vec{L}_O$  es un vector perpendicular a ese plano.

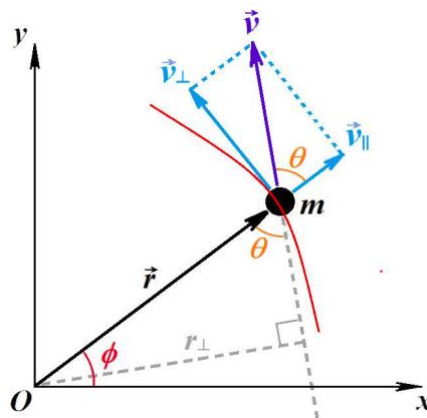


Figura 12.19: Momentum angular orbital

Si el origen  $O$  resulta ser el centro de masa, entonces a este momentum angular se le denomina **momentum angular de spin** o simplemente spin, y lo denotamos como  $\vec{S}$  (¡no es el spin de la Mecánica Cuántica!).

El **momentum angular orbital**,  $\vec{L}$ , de un sistema de partículas respecto de un origen  $O$ , en cambio, se define como el momentum angular del centro de masa del sistema, respecto de  $O$ . Teniendo ambos momenta angulares, podemos definir el **momentum angular total del sistema**, que denotamos por  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ . En lo que resta, usaremos como notación solo  $\vec{L}_O$ .

Notar que

$$\vec{L}_O = m\vec{r} \times \vec{v}, \quad (12.17)$$

cuyo módulo es

$$|\vec{L}_O| = rp \sin \theta = mrv_{\perp}. \quad (12.18)$$

Observa que en el caso de una órbita circular,  $v_{\perp}$  es el módulo de la velocidad tangencial.

#### Observación:

Al momentum angular le hemos puesto una flechita para denotar que es un vector. Te tengo buena noticia: no es un vector.

¿Cómo eso va a ser una buena noticia?

Es buena noticia porque eso significa que aprenderás algo nuevo, interesante e importante. Existe una simetría en la Naturaleza llamada **simetría de paridad**, simetría que no se satisface, se rompe, en las interacciones débiles de la física de partículas. ¿Y qué tiene que ver con el momentum angular? Una **operación de paridad**,  $P$ , es aquella que aplicada sobre la coordenada espacial, cambia  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ , es decir,  $P\vec{x} = -\vec{x}$ . Todas las mañanas, cuando entramos al baño y nos vemos al espejo aplicamos una operación de paridad. Cuando aplicamos esta operación sobre momentum angular  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  y  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  (recuerda que  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ). Luego, es claro que el momentum angular es invariante bajo una operación de paridad<sup>3</sup>. Esquemáticamente, esto se muestra en la Fig. 12.20. Vectores que son invariantes bajo operación de paridad se denominan **vectores axiales**.

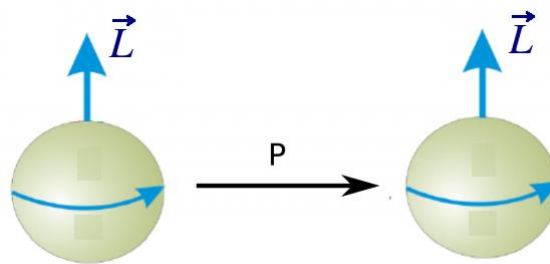


Figura 12.20: Operación de paridad sobre el momentum angular

¿Qué hemos aprendido, además? Que no por ponerle una flechita a una cantidad se convierte en un vector. Es importante repetir algo que ya hemos dicho: **Un vector queda definido según la forma cómo cambia bajo transformaciones de coordenadas.**

<sup>3</sup>Te aconsejo que te pares frente a un espejo, con una pelota a la que le has marcado una flecha y hagas girar la pelota en el sentido de esa flecha. ¿Cómo se ve en tu mundo ese giro? ¿Qué ves en el mundo más allá del espejo? ¿Cómo se comparan?



## 12.3.1 Ejercicios

1. Con este problema aprenderás que a pesar del nombre “momentum angular”, éste no está siempre relacionado con un movimiento que contiene un giro.

Una partícula de masa 2 kg, y cuya posición respecto al origen en un determinado instante viene dada por  $\vec{r} = 3\hat{x} + \hat{y}$  m, se mueve en ese mismo instante con una velocidad  $\vec{v} = 2\hat{x}$  m/s. Calcula:

- el momentum lineal de la partícula,
- el momentum angular respecto al origen.
- Repite el problema si  $\vec{v} = \hat{x} - 2\hat{y} + 3\hat{z}$  m/s.

2. Un vinilo de 30 cm de diámetro gira en sentido horario a 33 rpm. Una mosca se posa en el lado exterior del disco, y da vueltas a la misma velocidad. Calcula el momento angular de la mosca respecto al centro del disco, suponiendo que su masa es de 0,05 g.

3. Supón que la Tierra, cuya masa es  $5,97 \times 10^{24}$  kg, orbita alrededor del Sol en una órbita circular de radio 149,587 millones de km, con rapidez constante, tardando 365,25 días para completar una órbita. Calcula el momentum angular de la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol.

4. Un tren de juguete, de 40 g, da vueltas en una pista circular de 0,5 m de radio. Si tiene una aceleración tangencial de  $2 \text{ m/s}^2$ , calcula, respecto al centro de la circunferencia:

- El momento angular.
- El torque de las fuerzas que obran sobre el tren.

5. Un meteorito ingresa a la atmósfera de la Tierra y es observado por alguien en el suelo antes de que se queme en la atmósfera, como se muestra en la Fig. 12.21. El vector  $\vec{r} = 25\hat{x} + 25\hat{y}$  da la posición del meteorito con respecto al observador. En el instante en que el observador ve el meteorito, tiene un momento lineal  $\vec{p} = -30\hat{y}$  kg m/s, y está acelerando con aceleración constante de  $a = -2\hat{y} \text{ m/s}^2$  a lo largo de su trayectoria, que para nuestros propósitos pueden tomarse como una línea recta.

a) ¿Cuál es el momento angular del meteorito respecto del origen, que se encuentra en el observador?

b) ¿Cuál es el torque sobre el meteorito respecto del origen?

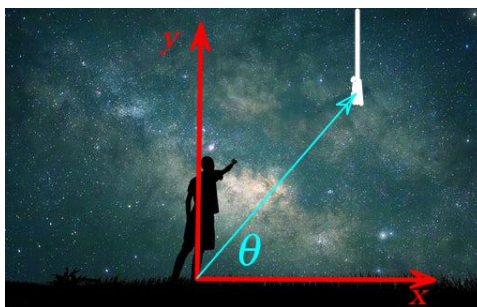


Figura 12.21: Meteorito cayendo verticalmente a la Tierra



## 12.4 Momento de inercia

El modo cómo un cuerpo gira depende de su forma y de cómo está distribuida su masa. Una pelota gira de un modo diferente a una vara o un hula hoop. Pero también el giro de un cuerpo depende desde qué punto se gira el mismo cuerpo. Por ejemplo, resulta más fácil girar a una persona alrededor de un eje que va desde su cabeza hasta sus pies, que hacerlo alrededor de un eje que cruza por la mitad de su cuerpo.

Para cuantificar esta característica se introduce una cantidad denominada **momento de inercia**,  $I$  (no confundas con impulso), cuyo valor depende del eje desde donde se define, y que viene dado por una suma ponderada sobre su masa, con cada elemento de masa ponderado por el cuadrado de su **distancia desde el eje de rotación**. Esto es,

$$I_O = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (12.19)$$

donde hemos usado el mismo razonamiento que aplicamos al estudiar el centro de masa. Para un sistema de masas puntuales  $m_i$ , cada una posicionada con vector de posición  $\vec{r}_i$ , ésta ecuación se convierte en

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2. \quad (12.20)$$

Para comprender de dónde proviene la expresión para el momento de inercia, podemos suponer una partícula de masa  $m$  que rota con movimiento arbitrario, describiendo una circunferencia. La segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_c + m\vec{a}_t. \quad (12.21)$$

Ahora, podemos calcular el torque respecto del origen:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F} \implies \vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{a}_c + \vec{r} \times m\vec{a}_t. \quad (12.22)$$

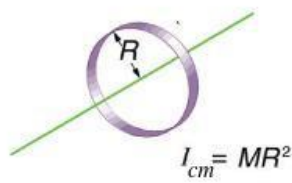
Ahora bien, usando el hecho que los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{a}_c$  yacen en la misma dirección, resulta que el primer término se anula

$$\tau_O = r m a_t \implies \tau = r m \alpha r, \quad (12.23)$$

debido a que los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{a}_t$  son perpendiculares entre sí. Por lo tanto, hemos demostrado que

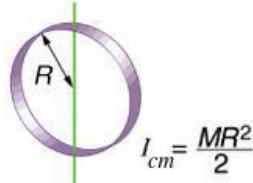
$$\tau_O = m r^2 \alpha = I_O \alpha. \quad (12.24)$$

Es importante tener presente que  $O$  es el punto por donde pasa el eje de rotación. Claramente, por un punto pueden pasar múltiples ejes, luego necesitamos ser más precisos acerca de a qué nos referimos. En un curso de Mecánica avanzada se puede estudiar este tópico con mayor profundidad. Por ahora, nos conformaremos con determinar o conocer los momentos de inercia de algunos cuerpos, respecto de algunos ejes importantes, llamados **ejes principales de rotación**. Más aún, nos ocuparemos de problemas de dinámica donde el cuerpo rígido tiene un eje (principal) fijo y su masa no cambia en el tiempo. La Fig. 12.22 muestra diferentes objetos con ejes de rotación que pasan por el centro de masa, excepto por el último en el que el eje pasa por un extremo de la barra.



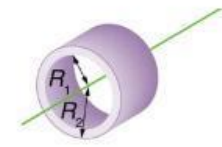
Anillo delgado de radio  $R$ .

Eje por el centro, perpendicular al anillo



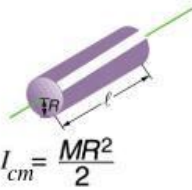
Anillo delgado de radio  $R$ .

Eje por un diámetro



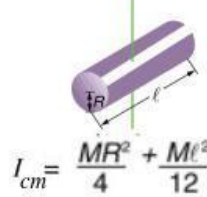
$$I_{cm} = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$$

Anillo con radio interno no despreciable



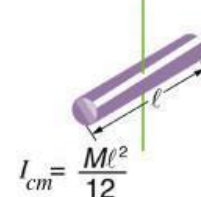
Cilindro o disco,

con eje a lo largo de su eje



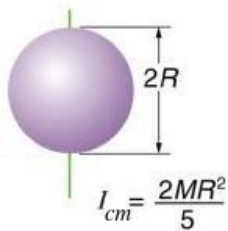
Cilindro o disco,

con eje perpendicular a su eje

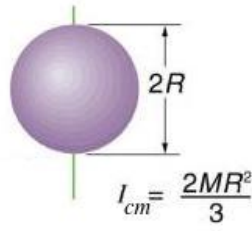


Cilindro delgado,

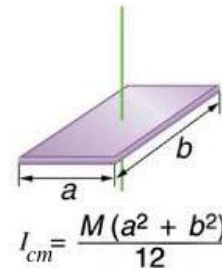
con eje perpendicular a su eje



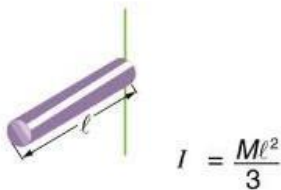
Esfera maciza



Esfera hueca, de radio interno despreciable



Placa rectangular, con eje perpendicular al plano



Cilindro delgado, con eje perpendicular en un extremo

Figura 12.22: Momentos de inercia de algunos cuerpos respecto del centro de masa

Como resultado adicional, se puede demostrar usando integrales en dos dimensiones que el momento de inercia de una figura plana triangular, cuya base es  $b$  y su altura es  $h$ , respecto de un eje que coincide con la base es

$$I_o = \frac{bh^3}{12}. \quad (12.25)$$

Si quieres saber más, puedes visitar esta página de Wikipedia: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_second\\_moments\\_of\\_area](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_second_moments_of_area).

### 12.4.1 Teorema de Steiner

El teorema de Steiner, también llamado **teorema de ejes paralelos**, es una fórmula que nos permite calcular el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje de rotación que pasa por un punto  $O$ , cuando conocemos el momento de inercia respecto a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro de masa del cuerpo. El momento de inercia del sólido respecto de un eje que pasa por  $O$  es

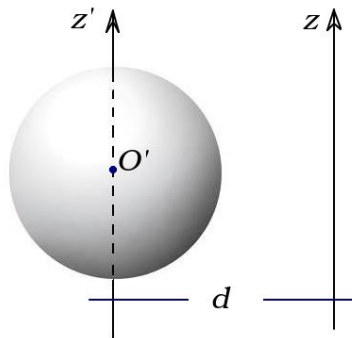


Figura 12.23: Momento de inercia alrededor de un eje paralelo

$$I_O = I_{cm} + Md^2 \quad (12.26)$$

Podemos demostrar este teorema usando por simplicidad un conjunto de masas puntuales unidas a un eje, alrededor del cual rotan. La Fig. 12.24 muestra dos sistemas coordenados donde una de esas masas, la  $i$ -ésima, se localiza en el sistema  $O$  y el sistema  $O'$ , que es el centro de masa. Los vectores de posición están dados por

$$\vec{r}_i = x_i \hat{x} + y_i \hat{y} \quad (12.27)$$

$$\vec{R}_i = x'_i \hat{x}' + y'_i \hat{y}'. \quad (12.28)$$

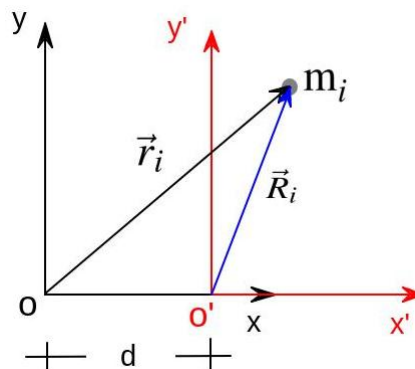


Figura 12.24: Sistema de referencia  $O$  y de centro de masa

El momento de inercia, visto en ambos sistemas de referencia es

$$I_{iO} = m_i r_i^2 = m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (12.29)$$

$$I_{iO'} = m_i R_i^2 = m_i (x_i'^2 + y_i'^2). \quad (12.30)$$

Pero resulta que  $x_i = d + x_i'$  y que  $y_i = y_i'$ , y luego

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 = (d + x_i')^2 + y_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 + 2d x_i' + d^2 = R_i^2 + 2d x_i' + d^2. \quad (12.31)$$

Por lo tanto, multiplicando esta ecuación por  $m_i$  y sumando sobre todas las masas

$$I_O = I_{cm} + 2d \sum_i m_i x_i' + d^2 \sum_i m_i = I_{cm} + M d^2, \quad (12.32)$$

donde el segundo término en la primera igualdad se anula porque es proporcional a la posición del centro de masa, medido desde el centro de masa.

### 12.4.2 Ejercicios

1. Un objeto consiste en cuatro partículas puntuales de masa  $m$  unidas mediante varillas ligeras sin masa<sup>4</sup> que forman un rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ , como se ve en la Fig. 12.25 (a)<sup>5</sup>. El sistema gira alrededor de un eje situado en el plano de la figura, pasando por el centro. Calcula el momento de inercia respecto del eje de rotación.

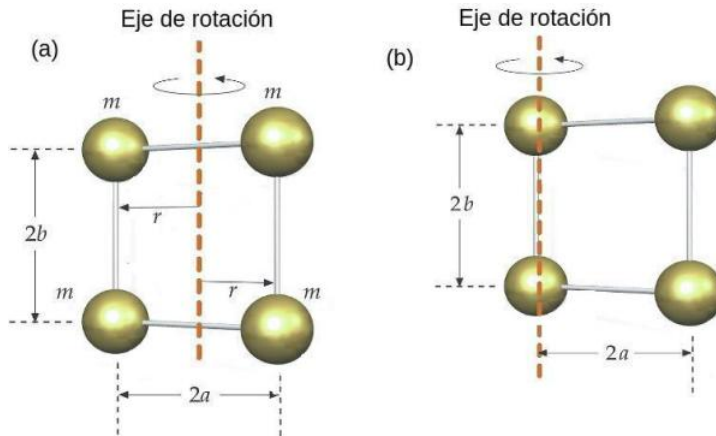


Figura 12.25: Cuatro masas unidas por barras sin masa

2. Calcula el momento de inercia del sistema de 4 masas, calculado ahora desde el eje que pasa por dos de ellas, como muestra la Fig. 12.25 (b).

3. Repite los problemas 1. y 2., suponiendo que las 4 masas son ahora esferas sólidas.

4. En la Fig. 12.26 se muestra una barra delgada que gira por uno de sus extremos. Utiliza el teorema de Steiner para encontrar el momento de inercia respecto del eje de rotación.

<sup>4</sup>Sin masa significa que su masa es despreciable con respecto a todas las otras masas del sistema.

<sup>5</sup>Basadas en figuras de libro de Tipler

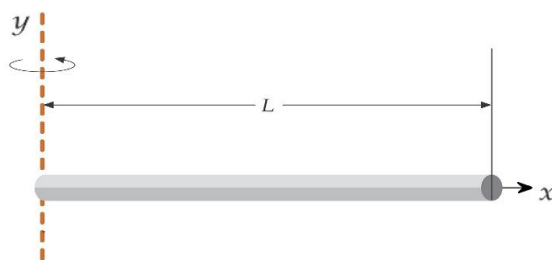


Figura 12.26: Momento de inercia de una barra

5. Se unen cuatro partículas de masa  $m$  mediante varillas sin masa, formando un rectángulo de lados  $2a$  y  $2b$ . El sistema gira alrededor de eje  $y'$  en el plano de la figura que pasa por su centro, como muestra Fig. 12.27

- Determina el momento de inercia respecto de este eje.
- Calcula el momento de inercia respecto de un eje paralelo al anterior, que pase por las masas.
- Determina el momento de inercia respecto a un eje perpendicular al anterior y que pase por una masa.

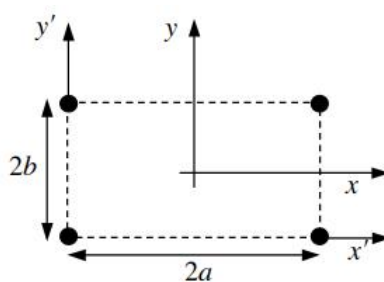


Figura 12.27: Cuatro masas unidas por barras sin masa

6. Calcula el momento de inercia respecto de un eje que pase por su centro de un disco de radio  $R$  y masa  $M$ , al cual se le practica un agujero circular de radio  $R/4$  centrado a una distancia  $R/2$  del centro del disco, como muestra la Fig 12.28.

Ayuda: ¿Recuerdas cómo pensamos problemas de centro de masa cuando el objeto tenía algún sacado?

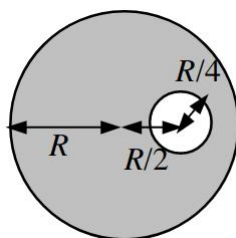


Figura 12.28: Disco con sacado circular

7. Calcula el momento de inercia de una esfera maciza de radio  $R$  y masa  $m$  respecto de un eje que pasa tangente a su superficie.

8. En la Fig. 12.29 se muestra una barra que está compuesta por dos discos delgados de masa de 3.0 kg, diámetro de 20 cm y ancho de 2,5 cm unidos por un eje de 1,0 m de largo con una masa de 2,0 kg. ¿Cuál es el momento de inercia sobre el eje a través del centro de masa perpendicular al eje?

Ayuda: Debes hacer una pequeña investigación y buscar el momento de inercia de un disco que gira por un eje que pasa por su diagonal

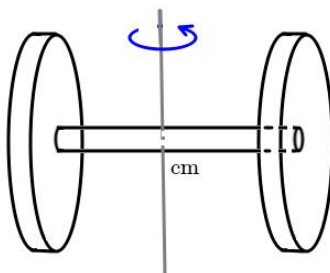


Figura 12.29: Dos discos unidos por barra con masa

9. ¿Cómo cambia el resultado anterior si la barra rígida que une los discos no tiene masa?

10. Calcula el momento de inercia respecto de los ejes  $AB$  y  $CD$  de la figura plana en la Fig 12.30.

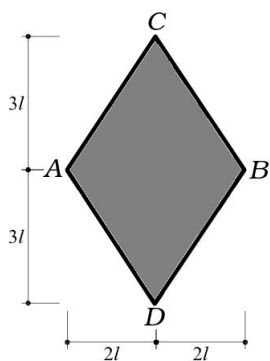


Figura 12.30: Figura plana en forma de rombo

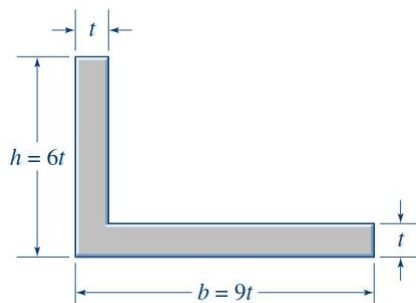


Figura 12.31: Figura plana en forma de L

11. Calcula el momento de inercia de la figura en la Fig. 12.31 respecto del centro de masa. Recuerda que ya haz calculado su centro de masa en el Capítulo 9, problema 13.

12. Calcula el momento de inercia de la figura plana, la Fig. 12.32, respecto de un eje que pasa por su eje de simetría vertical.

13. Calcula el momento de inercia de la figura triangular adjunta, Fig. 12.33 respecto del eje  $x$ .

14. Calcula el momento de inercia de la figura plana en la Fig. 12.34 respecto de

- a) eje  $y$ ,
- b) eje  $x$

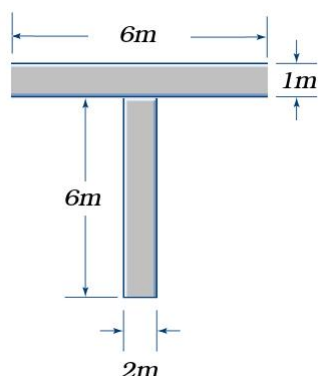


Figura 12.32: Figura plana en forma de T

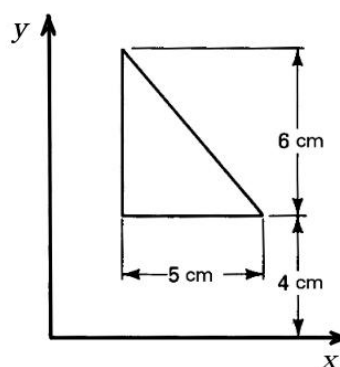


Figura 12.33: Figura plana triangular

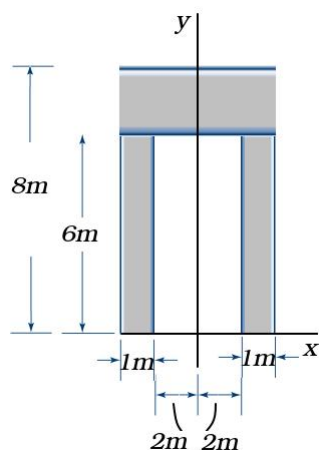


Figura 12.34: Figura plana

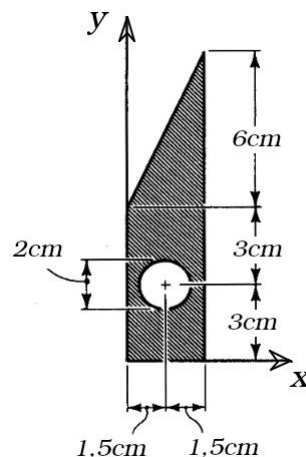


Figura 12.35: Cuña con orificio circular

15. Calcula el momento de inercia de la Fig. 12.35 respecto del eje  $x$
16. Calcula el momento de inercia de una esfera maciza de radio  $R$  y masa  $m$  respecto de un eje que pasa tangente a su superficie.
17. En las carreras de bicicletas, los corredores buscan las bicicletas más livianas. Algunos creen que basta con que el marco de la bicicleta sea liviano, sin embargo el mayor beneficio se obtiene al reducir la masa de los neumáticos y los aros. ¿Por qué esto permite que un ciclista logre mayores aceleraciones que una reducción idéntica en la masa del marco de la bicicleta?

## 12.5 Ecuaciones de Newton para el cuerpo rígido

Hasta ahora hemos analizado la dinámica del centro de masa. Por eso tanta insistencia en que los cuerpos que hemos usado para esos efectos los consideráramos puntuales.

La segunda ley de Newton sigue siendo válida para un sólido, claro, pero hasta ahora especificamos la dinámica solo para el centro de masa:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt}. \quad (12.33)$$

Veamos la variación del momentum angular respecto del tiempo:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (12.34)$$

El primer término se anula porque incluye  $\vec{v} \times \vec{v}$ . Luego,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}_O. \quad (12.35)$$

Esta es la ecuación que necesitamos para poder describir completamente el movimiento del cuerpo rígido. Describe cómo un torque produce una rotación en un cuerpo rígido. En esta ecuación, si  $\vec{p}$  representa el momentum lineal total del sistema, entonces  $\vec{\tau}_O$  es la suma de todos los torques externos que actúan sobre el sistema, calculados respecto de un origen dado. Debo insistir en esto: no existe el torque debido a ...; lo que existe es el torque debido a ..., calculado respecto de ... Y lo mismo con el momentum angular.

Entonces, el conjunto de ecuaciones necesario para resolver un problema de sólido rígido (en un sistema de referencia inercial) es:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} \quad (12.36)$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{iO}^{(ext.)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \quad (12.37)$$

## 12.6 Momentum angular alrededor de un eje fijo

Consideremos una placa circular que gira alrededor de su eje, como muestra la Fig. 12.36. El momento angular total es la suma de los momenta angulares de cada elemento de masa,

$$\vec{L}_O = \int \vec{r} \times dm \vec{v} = \int dm \vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (12.38)$$

Para el caso nuestro, usando nuevamente el producto vectorial triple, Ec. (12.9), obtenemos que

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} = r^2 \vec{\omega}, \quad (12.39)$$

donde hemos usado el hecho que  $\vec{\omega}$  es perpendicular a  $\vec{r}$  para desechar el segundo término. Por lo tanto, reemplazando en la Ec. (12.38) obtenemos que **para rotaciones alrededor**



de un eje principal, fijo, el momentum angular se relaciona con la velocidad angular como

$$\vec{L}_O = \int dm r^2 \vec{\omega} = I_O \vec{\omega}. \quad (12.40)$$

El vector velocidad angular ha sido sacado fuera de la integral debido a que el sólido se mueve como un todo y por la tanto  $\omega$  tiene un valor único para todo elemento de masa.

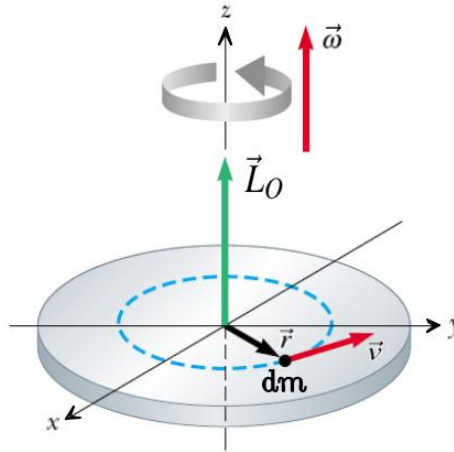


Figura 12.36: Placa circular rotando

Podemos derivar la Ec. (12.40) respecto del tiempo y obtener (¡ya que  $I_O$  lo suponemos constante!)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_O \vec{\alpha}. \quad (12.41)$$

De la Ec. (12.35),

$$\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}, \quad (12.42)$$

que demuestra que el vector aceleración angular también es un vector que yace a lo largo del eje de rotación, paralelo al vector torque (en la descripción simplificada donde  $I = cte$ ).

## 12.7 Estática del cuerpo rígido

Para aplicar las ecuaciones de Newton a la estática solo necesitamos establecer el lado derecho de las Ecs. (12.36) y (12.37) a cero.

Por supuesto, tales ecuaciones también son válidas para un cuerpo en reposo en un punto dado y girando con un momento angular constante alrededor de un eje que pasa a través de dicho punto. Esto se denomina **equilibrio rotacional**.

Consideremos el siguiente ejemplo.

Una viga uniforme de largo  $L = 2,0$  m y masa  $M = 4,0$  kg, se encuentra articulada en la pared en el punto A, y a su vez esta amarrada a la pared en el punto C mediante una cuerda ideal, tal como se muestra en la Fig. 12.37 (a). En el extremo B cuelga un cuerpo de

masa  $m = 1,0 \text{ kg}$ . Si el sistema se encuentra en equilibrio, calcula la tensión en la cuerda BC y las reacciones horizontal  $R_h$  y vertical  $R_v$ . Supón que desde el punto A al C hay 1,4 m y que los ángulos  $\alpha$  y  $\theta$  son conocidos.

### Solución

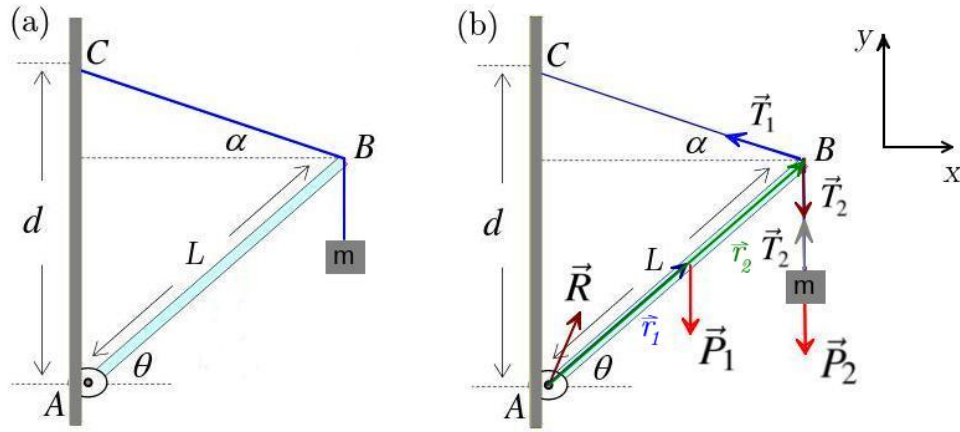


Figura 12.37: Viga pivoteada, estática

Debemos escribir las ecuaciones de la dinámica, que para el caso estático se convierten en

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} = \vec{0} \quad (12.43)$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{iO}^{(ext.)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}. \quad (12.44)$$

En la figura (b) ya tenemos el diagrama de cuerpo libre.

### Observación:

Es importante tener en mente que **el vector  $\vec{R}$ , que da cuenta de la reacción en el pivote, en general no es perpendicular a la superficie de apoyo, en este caso, la pared, ni tampoco paralela a ésta.**

De la Ec. (12.43) y del diagrama de cuerpo libre obtenemos

a) Para la barra

### Suma de todas las fuerzas externas

$$\vec{R} + \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}.$$

Luego,

$$R_h \hat{x} + R_v \hat{y} - P_1 \hat{y} - T_2 \hat{y} - T_{1x} \hat{x} + T_{1y} \hat{y} = 0 \hat{x} + 0 \hat{y}. \quad (12.45)$$

Es decir, después de reagrupar los vectores unitarios y usar independencia lineal

$$R_h - T_{1x} = 0 \quad (12.46)$$

y

$$R_v - P_1 - T_2 + T_{1y} = 0. \quad (12.47)$$

Luego,

$$\boxed{R_h - T_1 \cos \alpha = 0} \quad (12.48)$$

y

$$\boxed{R_v - P_1 - T_2 + T_1 \sin \alpha = 0.} \quad (12.49)$$

### Suma de todos los torques externos

Notar que en el diagrama de cuerpo libre hemos dibujado también los vectores de posición de las fuerzas. Esto es una buena política, ¡hazlo siempre! Calculamos los torques externos desde la posición del pivote.

$$\vec{r}_R \times \vec{R} + \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 = \vec{0}.$$

Recuerda que el ángulo en la definición del producto vectorial se define entre las direcciones positivas de los vectores. Recuerda, además, que el resultado del producto cruz es un vector perpendicular al plano de los vectores en el producto, y para conocer hacia dónde apunta, usamos la regla de la mano derecha. Dado que  $\vec{r}_R$  es el vector nulo, obtenemos que

$$-r_1 P_1 \sin(\pi/2 + \theta) \hat{z} + r_2 T_1 \sin(\pi - \alpha - \theta) \hat{z} - r_2 T_2 \sin(\pi/2 + \theta) \hat{z} = 0 \hat{z}. \quad (12.50)$$

Tenemos que  $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$  y  $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$ . Además,  $r_1 = L/2$  y  $r_2 = L$ , entonces, simplificando  $L$  obtenemos

$$\boxed{-\frac{1}{2} P_1 \cos \theta + T_1 \sin(\alpha + \theta) - T_2 \cos \theta = 0.} \quad (12.51)$$

b) Para la la masa colgante

### Suma de todas las fuerzas externas

De la Ec. (12.44)

$$T_2 \hat{y} - P_2 \hat{y} = 0 \hat{y}. \quad (12.52)$$

Es decir,

$$\boxed{T_2 - P_2 = 0.} \quad (12.53)$$

### Suma de todos los torques externos

Sobre la masa que cuelga actúan dos fuerzas. La pregunta que nace es cuál es el vector de posición que debemos utilizar. Si observamos la definición de torque, queda claro que debemos utilizar un vector de posición  $\vec{r}$  que va desde el pivote hasta el centro de masa de la masa colgante, como indica la figura a). Incluso podríamos ir más allá y dibujar las componentes paralela y perpendicular a las fuerzas que actúan sobre  $m$ . Y tendríamos un problema de cómo evaluar el ángulo requerido, el que forma el vector  $\vec{r}$  con la horizontal.

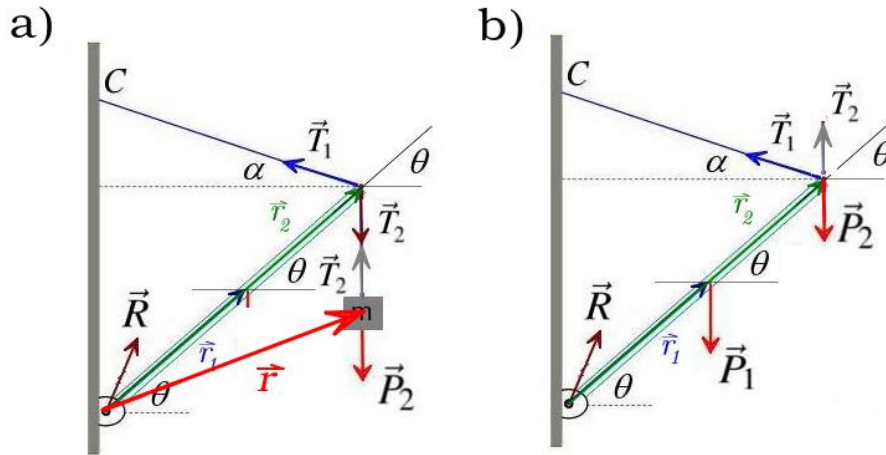


Figura 12.38: Viga pivoteada, estática

Sin embargo, nos podemos hacer la vida mucho más fácil si recordamos que **lo importante es que las fuerzas actúan a lo largo de una línea de acción**. Por lo tanto, podemos suponer que ambas fuerzas actúan en la posición definida por el vector  $\vec{r}_2$ , como indica la figura b). Esto tiene la ventaja de que el módulo de  $\vec{r}_2$  es el largo de la barra. Entonces,

$$\vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{T}_2 = \vec{0}.$$

O bien,

$$-r_2 P_2 \sin(\pi/2 + \theta) \hat{z} + r_2 T_2 \sin(\pi/2 - \theta) \hat{z} = 0 \hat{z}. \quad (12.54)$$

Luego, al simplificar  $r_2$  y utilizar la igualdad  $\sin(\pi/2 \pm \theta) = \cos \theta$  obtenemos

$$-P_2 + T_2 = 0, \quad (12.55)$$

que es la Ec. (12.53), así que no da información adicional.

### Álgebra

Ahora podemos hacer el álgebra con las ecuaciones encuadradas. Donde haya  $T_2$  reemplazamos  $P_2$ . De la Ec. (12.51),

$$T_1 = \frac{(P_2 + \frac{1}{2} P_1) \cos \theta}{\sin(\alpha + \theta)}. \quad (12.56)$$

Ahora podemos usar las ecuaciones Ecs. (12.48) y (12.49) para obtener las reacciones. Entonces,

$$R_h = \frac{(P_2 + \frac{1}{2} P_1) \cos \theta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \theta)} \quad (12.57)$$

y

$$R_v = P_1 + P_2 - \frac{(P_2 + \frac{1}{2} P_1) \cos \theta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)}. \quad (12.58)$$

¿No te parece curioso que el largo de la barra no aparezca por ninguna parte en el cálculo final?

Adicionalmente, conocidos  $R_h$  y  $R_v$  podemos determinar el ángulo que forma el vector reacción con la horizontal. Te lo dejo para que te entretengas.

**Ejemplo 2****Dinámica**

Un disco de radio  $r = 30$  cm de diámetro y que tiene una masa de 900 g se desmonta para que pueda girar alrededor de un punto fijo que pasa por su centro, como en la Fig. 12.39. Una masa  $m$  de 200 g cuelga de una cuerda delgada que está enrollada en el disco. Determina

- la aceleración de la masa,
- la aceleración angular del disco,
- la tensión de la cuerda, y
- la fuerza normal en el eje del disco.

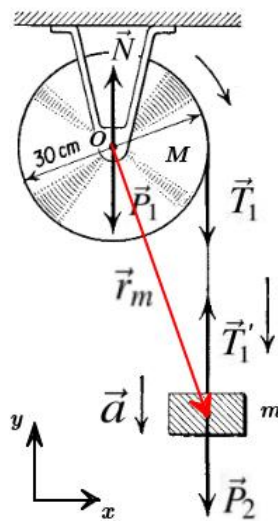


Figura 12.39: Polea con masa colgando

**Solución**

Debemos escribir las ecuaciones de la dinámica,

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} = m\vec{a}_{cm} \quad (12.59)$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{iO}^{(ext.)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \vec{\alpha}, \quad (12.60)$$

donde la segunda igualdad es válida solo para rotaciones respecto de eje fijo.

**Suma de todas las fuerzas externas**

En la figura ya tenemos el diagrama de cuerpo libre. Observa que la normal (reacción) en el eje del disco está en el eje  $y$ . Piensa y argumenta por qué es así. Y piensa cuándo no podría ser así.

a) Para el disco

De la Ec. (12.59) obtenemos

$$\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{T}_1 = \vec{0}, \quad (12.61)$$

debido a que el centro de masa del disco está fijo. Luego,

$$-P_1 \hat{y} + N \hat{y} - T_1 \hat{y} = 0 \hat{y}. \quad (12.62)$$

Es decir,

$$-P_1 + N - T_1 = 0. \quad (12.63)$$

### Suma de todos los torques externos

Para calcular los torques usamos el centro del disco como origen. Dado que el vector de posición del punto donde actúan ambas fuerzas,  $\vec{P}_1$  y  $\vec{N}$ , es el vector nulo, entonces la suma de esos torques es cero. Sin embargo, la tensión sí realiza un torque no nulo:

$$\vec{r} \times \vec{T}_1 = I_{D,cm} \vec{\alpha} \implies r T_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) (-\hat{z}) = \frac{1}{2} M r^2 \alpha (-\hat{z}),$$

debido a que el resultado de la operación producto cruz es un vector que apunta hacia el eje  $-z$ . Además, hemos reemplazado la expresión para el momento de inercia del disco, alrededor del centro de masa,  $\frac{1}{2} M r^2$ , que obtenemos de la Fig. 12.22. Luego, después de multiplicar por  $\hat{z}$  y simplificar por  $r$ , obtenemos

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{2} M r \alpha}. \quad (12.64)$$

b) Para la masa colgante

### Suma de todas las fuerzas externas

Tenemos que

$$\vec{T}'_1 + \vec{P}_2 = m \vec{a} \quad (12.65)$$

En términos de los vectores unitarios,

$$T'_1 \hat{y} - P_2 \hat{y} = -m a \hat{y}. \quad (12.66)$$

Es decir,

$$\boxed{T_1 - P_2 = -m a}, \quad (12.67)$$

donde hemos reemplazado  $T'_1$  por  $T_1$ .

### Suma de todos los torques externos

Para calcular los torques, tomamos el mismo origen,  $O$ . En la figura se ha dibujado el vector de posición de la masa  $m$ .

Veamos cómo se hace al usar la definición del momentum angular. El cambio del momentum angular está dado por

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} + \vec{r}_m \times \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{r}_m \times \vec{a}. \quad (12.68)$$

¿Por qué aparece ese cero? Medita y comenta con tus compañeros de clase.

#### Observación:

Veamos cómo podríamos usar  $I_{m,O} \vec{\alpha}$ . Primero, debemos determinar el momento de inercia respecto de  $O$ ; esto es simplemente el momento de inercia de una masa puntual,  $I_{m,O} = mr_m^2$ . ¿Cómo calculamos  $\vec{\alpha}$ ? Recordamos que este vector es perpendicular al plano de rotación. Luego, en este caso,  $\vec{\alpha} = \alpha(-\hat{z})$ . Sabemos que  $a = \alpha r$ , ¿pero qué  $a$  es ésta?, ¿qué  $r$  es éste? Sabemos que el  $a$  que aparece en esta expresión es la aceleración tangencial,  $a_t$ . Observa la Fig. 12.40. Allí se han dibujado los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$  y  $\vec{a}_n$ . Parece que esto nos da un pista de cómo resolver el problema. Sin embargo, hay una dificultad, esta es una foto, un instante del movimiento ya que  $\vec{r}_m$  va cambiando en el tiempo. Es esto lo que atenta con continuar por este camino, ya que las expresiones que hemos determinado para rotaciones alrededor de ejes fijos consideraban un radio de giro fijo.

**Sugerencia:** cuando quieras usar el segundo conjunto de ecuaciones para una partícula que se mueve de una forma más general, usa  $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ .

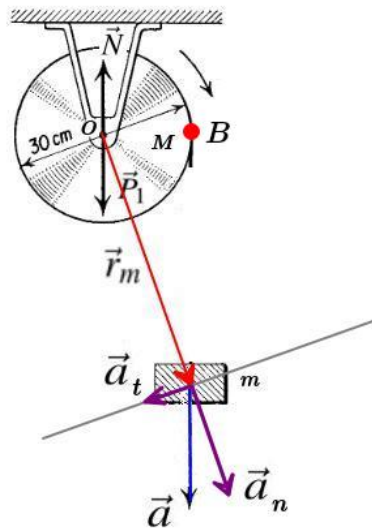


Figura 12.40: Polea con masa colgando: aceleraciones

Entonces,

$$\vec{r} \times \vec{T}'_1 + \vec{r} \times \vec{P}_2 = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = m\vec{r}_m \times \vec{a}. \quad (12.69)$$

Como recordaremos de la definición del producto vectorial, para determinar el módulo basta obtener la componente perpendicular del vector de posición, el brazo. El módulo de esa componente para  $\vec{r}_m$  es simplemente  $r$ . El resultado del producto cruz, entonces, son vectores que apuntan en el eje  $z$ , que al multiplicar por  $\hat{z}$  da

$$T_1 - P_2 = -ma, \quad (12.70)$$

donde hemos simplificado  $r$  y reemplazado  $T_1'$  por  $T_1$ .

Vemos que hemos obtenido la misma información que ya obtuvimos en la Ec. (12.67).

**Cuidado, no vayas a creer que siempre va a ser así y no completar tu trabajo.**

### Álgebra

Luego, de la Ec. (12.64), usando que  $a = r\alpha$ , obtenemos

$$T_1 = \frac{1}{2}Ma. \quad (12.71)$$

De la Ec. (12.67), y reemplazando la expresión para la tensión, la aceleración es

$$a = \frac{mg}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)}. \quad (12.72)$$

Observa que la aceleración es independiente del radio de la polea. Interesante, ¿no?

Ahora podemos obtener una expresión para la tensión dada en términos de las cantidades conocidas (como debe ser, claro)

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{Mmg}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)}. \quad (12.73)$$

Claro, como la aceleración no depende del radio de la polea, la tensión tampoco lo hace.

### Observación:

Ahora tenemos mucha más información, así que podemos volver al punto de cómo usar  $I_{m,O} \vec{\alpha}$  para resolver este problema. Veamos qué nos dice la Ec. (12.72). Multipliquemos y dividamos el lado derecho por  $R^2$ . Obtenemos

$$a = \frac{mgR^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}. \quad (12.74)$$

Esto es interesante, porque lo que tenemos en el denominador es un momento de inercia de un sistema formado por un disco de masa  $M$  y radio  $R$  y una partícula puntual de masa  $m$  que se encuentra a una distancia  $R$  del eje de giro, es decir en el punto  $B$ , en la Fig. 12.40. Además, esta expresión podemos reescribirla como

$$\frac{a}{R} = \frac{mgR}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}. \quad (12.75)$$

Notar que en el lado izquierdo hemos formado una velocidad angular,  $\alpha$ . La aceleración  $a$  es la aceleración tangencial del punto  $B$ , así que  $a = \alpha R$ . Por último, el numerador  $mgR$  es



el torque de la fuerza de peso de la masa  $m$ . Por lo tanto, hemos demostrado que  $\tau = I_0 \alpha$ , donde

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 \quad (12.76)$$

es el momento de inercia total del sistema, calculado desde el origen  $O$ , en este caso el centro del disco, suponiendo que la masa puntual se encuentra, en cada instante, en el punto  $B$  del disco.

¿Qué hemos aprendido? Hemos aprendido que es bueno revisar y analizar los cálculos finales, sin pasar por arriba las conclusiones. Además, insisto que en este tipo de problemas, cuando hay una partícula moviéndose, es clarificador usar momentum angular para resolver.

Para terminar, una observación también muy importante:

### Observación:

Debido a que los estudiantes han aprendido que la masa parece concentrarse en el centro de masa, es usual encontrarse con la suposición de que si consideran un cuerpo rígido y encuentran su centro de masa, entonces su movimiento se puede analizar solo estudiando la dinámica del centro de masa. Obviamente, esto olvida el hecho de que el cuerpo rígido tiene un momento de inercia. Dicho de otro modo, olvida el hecho de que para la descripción de sólido se necesitan dos conjuntos de ecuaciones.

## 12.7.1 Ejercicios

1. Un hombre sujeta un poste de 10 kg, que tiene una longitud de 4 m, tirando de una cuerda, como muestra la Fig. 12.41. Encuentra la tensión en el cable y la reacción en A.

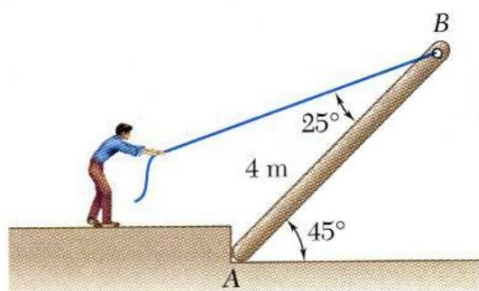


Figura 12.41: Hombre soportando un poste

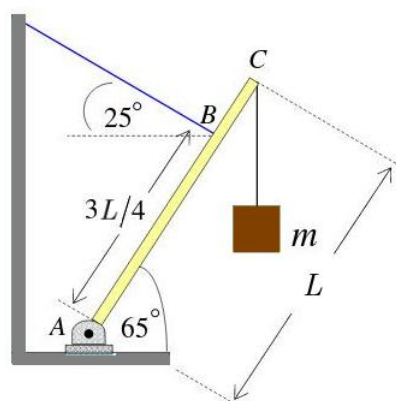


Figura 12.42: Viga pivoteada, estática, con masa colgando

2. Una viga uniforme de masa  $M = 120$  kg y largo  $L$ , se sostiene en equilibrio por medio de un cable en el punto  $B$ , el cual está ubicado a una distancia  $3L/4$  del punto  $A$ , como muestra la Fig. 12.42. La viga puede girar alrededor de una bisagra en  $A$ , y un cuerpo de masa  $m = 200$  kg se cuelga en su parte superior en el punto  $C$ . Encuentra

a) la tensión en el cable

b) las componentes horizontal y vertical de la reacción sobre la viga en A .

3. Un puente levadizo de madera mide 5 m y tiene una masa de 400 kg, y está dispuesto como indica la Fig. 12.43. Suponemos que la distribución de masa es uniforme.

a) Calcula la tensión del cable y las reacciones que ejerce la bisagra.

b) Si al puente levadizo se le corta el tensor, ¿qué aceleración tangencial tendrá el extremo del puente cuando va en la horizontal?

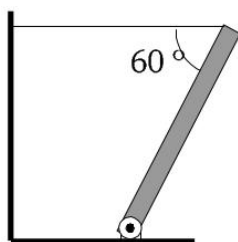


Figura 12.43: Puente levadizo

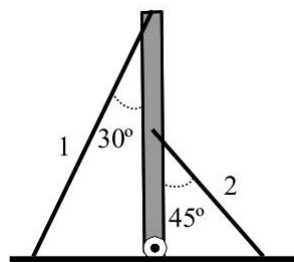


Figura 12.44: Antena de radiotransmisor

4. Las antenas de transmisión necesitan estabilizarse en la posición vertical con “vientos”, es decir cables tensores. Considera una antena de 100 kg y 20 m de altura está sostenida por dos cables 1 (unido al extremo de la antena) y 2 (unido a su punto medio), como indica la Fig. 12.44 . La tensión que ejerce el cable 1 es de 500 N. Calcula la tensión del cable 2 y las reacciones que ejerce la bisagra con que se une al suelo.

5. La Fig. 12.45 muestra un letrero luminoso de masa  $m = 40$  kg que cuelga de una barra cilíndrica de masa  $M = 70$  kg que se mantiene horizontal con la ayuda de una cuerda. Además, está pivoteada contra la pared por medio de una bisagra. Calcula la tensión de la cuerda y la fuerza ejercida por la barra contra la pared.

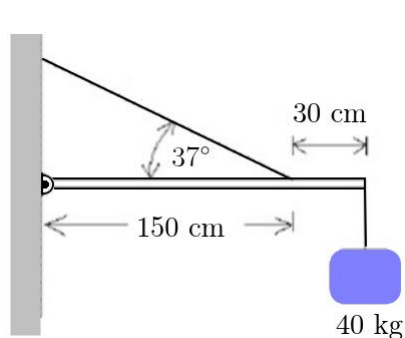


Figura 12.45: Letrero de casa comercial

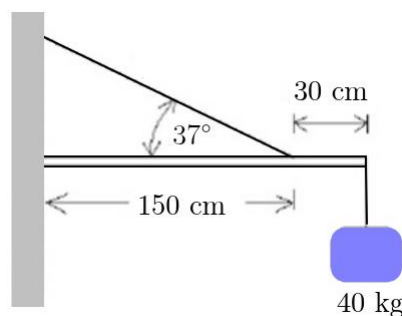


Figura 12.46: Letrero de casa comercial, pero mal colocado

6. La Fig. 12.46 muestra un letrero luminoso de masa  $m = 40$  kg que cuelga de una viga cilíndrica de masa  $M = 70$  kg que se mantiene horizontal con la ayuda de una cuerda. Lamentablemente, quienes fueron responsables de colocarlo olvidaron fijarlo a la pared y el letrero solo quedó sobrepuesto contra la pared. ¿Cuál debería ser el coeficiente de roce estático para que la viga no deslice sobre la pared y el letrero no se caiga?

7. Determina la reacción horizontal, la reacción vertical y el torque total que actúan sobre la sección transversal en el punto C de la viga en voladizo que se muestra en la Fig. 12.47. Supón  $F_1 = 2,0 \text{ kN}$ ,  $F_2 = 4,0 \text{ kN}$ ,  $a = 5 \text{ m}$ ,  $b = 9 \text{ m}$  y  $c = 3 \text{ m}$ .

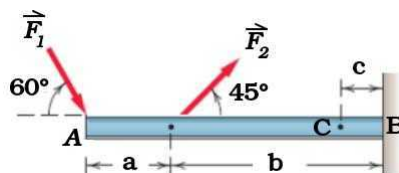


Figura 12.47: Voladizo fijo a una pared

8. Una barra homogénea, de 3 m de longitud y 10 kg de peso, está articulada en uno de sus extremos y soportada por una cuerda ligera como se muestra en la Fig. 12.48. La cuerda pasa por una pequeña polea fija situada 2 m por encima de la articulación y en la misma vertical. Del extremo libre de la cuerda cuelga una pesa de 8 kg. Determina la posición de equilibrio del sistema y la reacción en la articulación.

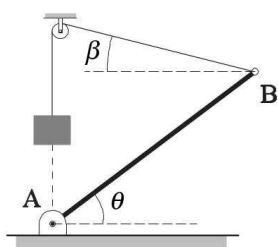


Figura 12.48: Barra suspendida por polea

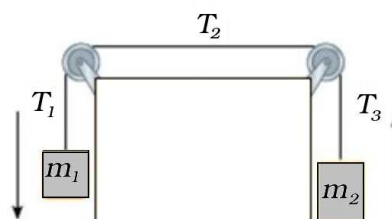


Figura 12.49: Máquina de Atwood con dos poleas

9. En la Fig. 12.49 se muestran dos bloques que tienen masas  $m_1$  y  $m_2$  están conectados entre sí por una cuerda ligera que pasa sobre dos poleas idénticas sin fricción en sus ejes, cada una de las cuales tiene momento de inercia  $I$  y radio  $R$ . Encuentra

- la aceleración de cada bloque, y
- las tensiones en cada sección de la cuerda.

10. Un bloque homogéneo, de forma de paralelepípedo rectangular de 50 cm de altura y  $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$  de base, descansa sobre un tablero, como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre el tablero y el bloque es 0,50.

a) Cuando vamos inclinando lentamente el tablero, ¿comenzará a deslizar el bloque o bien volcará? Determina los ángulos críticos, es decir mínimos, para que ocurra deslizamiento y volcamiento, respectivamente.

b) ¿Cuál sería la respuesta a la pregunta anterior si el coeficiente de rozamiento estático fuese 0,70?

11. Una caja de 500 kg de masa está siendo levantada por el mecanismo que muestra la Fig. 12.51. Los dos cables están enrollados en torno a sus respectivas poleas, que tienen un radio de 0,6 y 0,2 m, respectivamente. Las poleas están unidas como una doble polea, como una sola unidad. Sobre el eje que pasa por su centro, la combinación tiene un momento de inercia de  $46 \text{ kg m}^2$ . Los cables no resbalan en la polea dual. Una tensión de magnitud

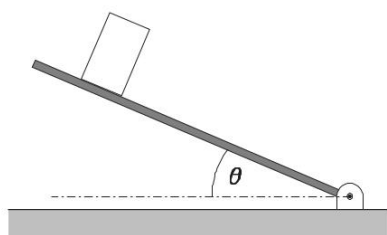


Figura 12.50: Levantando un bloque hasta que vuelque o deslice

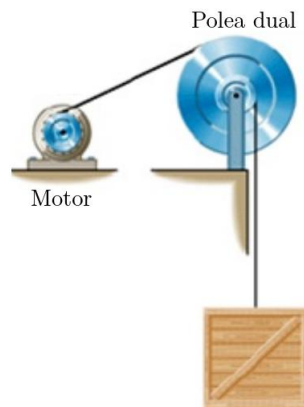


Figura 12.51: Motor con polea dual

2.150 N se mantiene en el cable de conexión al motor. Encuentra la aceleración angular de la doble polea y la tensión en el cable conectado a la caja.

12. Dos bloques de masa  $m$  y  $M$  están conectados mediante una cuerda ideal que pasa por una polea de masa  $M_P$  y radio  $R$ , con una configuración como se muestra en la Fig. 12.52 (a). El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie es  $\mu_e$ . Supón que la polea es un disco.

- ¿Cuál es la masa máxima  $m$  para que no se produzca deslizamiento? Supón ahora que el coeficiente de roce estático es tal que el sistema acelera.
- Calcula las tensiones.
- Calcula la aceleración del sistema.

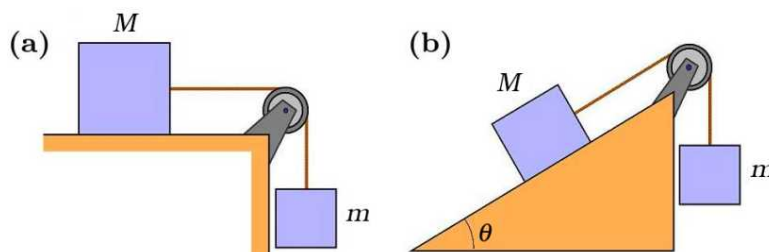


Figura 12.52: Dos masas con polea

13. En la Fig. 12.53 se muestra un bloque de masa  $m = 20$  kg, unido mediante una cuerda a una polea sin masa que desliza a lo largo de una mesa horizontal, con coeficiente de roce cinético  $\mu_k = 0,1$ . La polea está conectada, a través de otra polea ideal, mediante otra cuerda al centro de un carrete cilíndrico de masa  $M = 5$  kg, y radio  $R = 0,1$  m que rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado  $\theta = 30^\circ$ .

- Relaciona la aceleración del bloque y del centro de masas del cilindro.
- Calcula la aceleración del centro de masas del cilindro y las tensiones de las cuerdas.

14. Dos bloques de masa  $m$  y  $M$  están conectados mediante una polea de masa  $M_P$  y radio  $R$ , con una configuración como se muestra en la Fig. 12.54 (a). El coeficiente de fricción estática es  $\mu_e$ , entre bloques y superficie.

- ¿Cuál es la masa máxima  $m$  para que no se produzca deslizamiento?

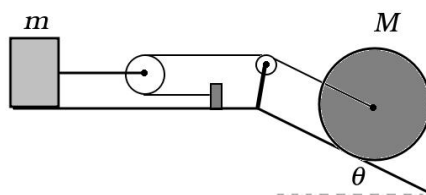


Figura 12.53: Bloque y cilindro relacionados por dos poleas ideales

Si el coeficiente de roce estático es tal que el sistema acelera,

- b) ¿cuál es la tensión, y
- c) la aceleración de cada masa?

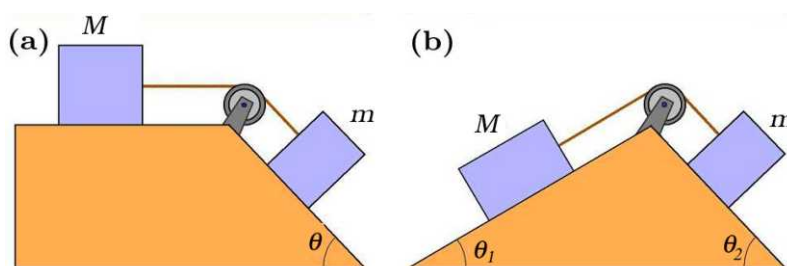


Figura 12.54: Dos masas en plano inclinado con polea

15. Dos bloques de masa  $m$  y  $M$  están una polea de masa  $M_p$  y radio  $R$ , con una configuración como se muestra en la Fig. 12.54 (b). El coeficiente de fricción estática es  $\mu_e$ , entre el bloque y la superficie.

- a) ¿Cuál es la masa mínima y máxima  $M$  para que no ocurra deslizamiento?

Si el coeficiente de roce estático es tal que el sistema acelera,

- b) ¿cuál es la tensión, y
- c) la aceleración de cada masa?

16. Dos bloques de masa  $m$  y  $M$  están conectados mediante una polea con una configuración como se muestra en la Fig. 12.54 (b). El coeficiente de fricción estática entre el bloque izquierdo y la superficie es  $\mu_{1e}$ , y el coeficiente de roce estático entre el bloque derecho y la superficie es  $\mu_{2e}$ . Formula una desigualdad matemática para la condición de que no ocurra deslizamiento. Puede haber más de una desigualdad.

17. La Fig. 12.55 muestra una masa  $m$  que yace sobre un plano inclinado en ángulo  $\theta$ , atada a dos poleas con igual masa  $m_p$  y radio  $R$ . La masa se mueve a velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es  $\mu_k$ . Determina la fuerza de tracción  $\vec{F}$ .

18. Un bloque de masa  $m$  se levanta a velocidad constante, a través de dos poleas con igual masa  $m_p$  y radio  $R$ , como se muestra en la Fig. 12.56 (a). Determina la fuerza de tracción  $\vec{F}$ .

19. En la Fig. 12.56 (b) el motor está en reposo cuando alguien activa un interruptor y comienza a tirar de la cuerda. La aceleración de la cuerda es uniforme y de tal manera que se necesita 1 s para lograr una tasa de retracción de 1,0 m/s. Después de 1 s, la tasa de

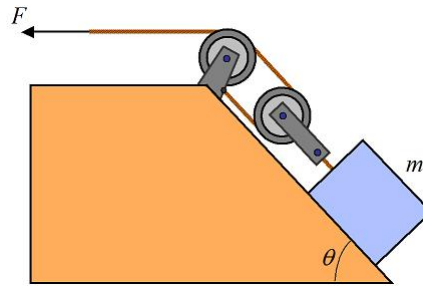


Figura 12.55: Dos poleas con masa en plano inclinado

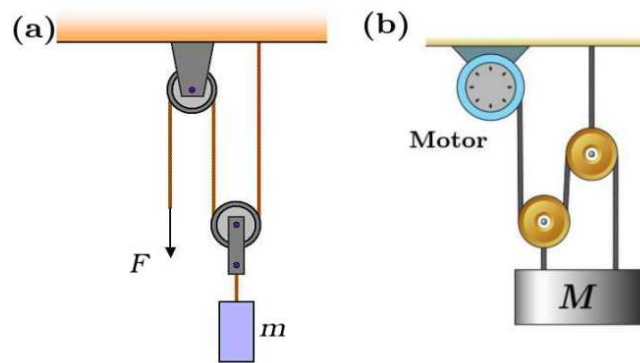


Figura 12.56: Dos poleas y masa

retracción se vuelve constante. Determina la tensión en la cuerda durante y después del intervalo inicial de 1 s. La masa colgante es de  $M = 70 \text{ kg}$ . Supón que ambas poleas son iguales, de radio  $R$  y tienen una masa  $m_p$ . No consideres la fricción en las poleas.

20. El objeto en el diagrama de la Fig. 12.57 está en un eje fijo sin fricción. Tiene un momento de inercia de  $I = 50 \text{ kg m}^2$ . Las fuerzas que actúan sobre el objeto son  $F_1 = 100 \text{ N}$ ,  $F_2 = 200 \text{ N}$  y  $F_3 = 250 \text{ N}$  actuando en diferentes radios  $R_1 = 60 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 42 \text{ cm}$  y  $R_3 = 28 \text{ cm}$ . Supón que la fuerza  $F_3$  forma un ángulo  $\theta = 25^\circ$  con la vertical. Encuentra la aceleración angular del objeto.

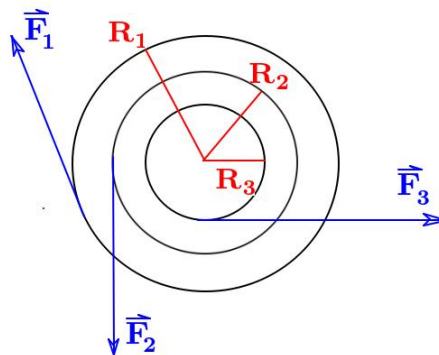


Figura 12.57: Cilindro con múltiples radios y fuerzas actuando

21. En la Fig. 12.58 (a) se muestra un cabrestante que tiene un momento de inercia de  $I = 10,0 \text{ kg m}^2$ . Dos masas  $M_1 = 4,0 \text{ kg}$  y  $M_2 = 2,0 \text{ kg}$  están unidas a cuerdas que se

envuelven alrededor de diferentes partes del cabrestante, que tienen radios  $R_1 = 40,0$  y  $R_2 = 25,0$  cm.

- Determina la aceleración angular de la polea, suponiendo que la cuerda no desliza.
- ¿Cuáles son las tensiones en las cuerdas?

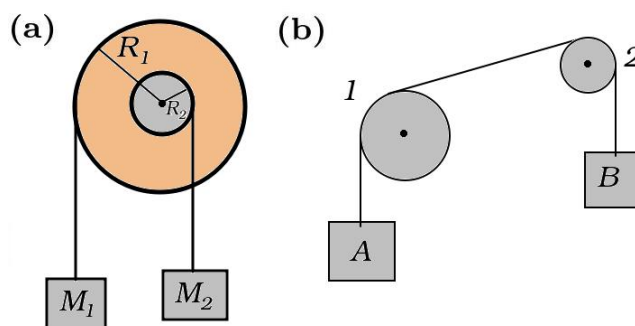


Figura 12.58: Máquina de Atwood

23. Una cuerda que conecta dos bloques se coloca sobre dos poleas reales como se muestra en la Fig. 12.58 (b). Determina la aceleración de los bloques y la aceleración angular de las poleas, considerando que la cuerda no desliza. El bloque A tiene una masa de 10 kg y el bloque B tiene una masa de 6 kg. La polea 1 es un disco sólido, tiene una masa de 0,55 kg y un radio de 0,12 m. La polea 2 también es un disco sólido con masa de 0,2 kg y un radio de 0,06 m.

24. Lucas necesita subir una escalera high-tech, muy liviana, que está contra una pared. La masa de Lucas es  $m$ , la escalera tiene una longitud  $L$  y forma un ángulo de  $\theta$  con el suelo. El coeficiente de roce estático entre la escalera y el suelo es  $\mu_e$ , y no hay fricción entre la escalera y la pared. ¿Qué tan arriba de la escalera puede subir Lucas antes de que la base de la escalera se deslice y Lucas se estrelle contra el suelo (sin sufrir daño alguno)?

25. Repite el mismo problema, pero ahora con la escalera con masa  $M = \frac{m}{5}$

26. Una escalera de 3 m de longitud y 10 kg de peso está apoyada en una pared lisa, inclinada en un ángulo de  $10^\circ$  respecto de la vertical, y en un suelo horizontal rugoso, con coeficiente de roce estático  $\mu_e = 0,2$ . Esta situación se muestra en la Fig. 12.59.

a) Calcula la reacción de la pared y del suelo cuando Cristian de 70 kg ha subido 50 cm a lo largo de la escalera

b) ¿Cuánto podrá subir como máximo por la escalera?

27. Una placa rectangular uniforme de masa  $m = 200$  kg y lados 3 y 4 m, como muestra la Fig 12.60, está suspendida por dos pasadores A y B que pueden deslizar a lo largo de una barra inclinada que forma un ángulo  $\theta = 60^\circ$  con la horizontal. El coeficiente de roce cinético entre los pasadores y la barra es  $\mu_k = 0,25$  y la placa inicia su movimiento descendente partiendo del reposo. Determina:

a) la aceleración de la placa;

b) las reacciones en los pasadores.

28. Se coloca un tablón de 3 m sobre la plataforma de un camión tal como se muestra en la Fig 12.61. El extremo A está fijo a la plataforma y se apoya en el punto B sobre la



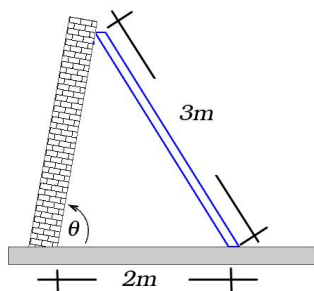


Figura 12.59: Escalera apoyada sobre pared inclinada

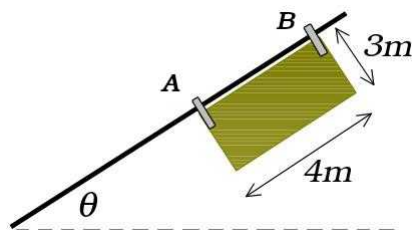


Figura 12.60: Placa con dos pasadores

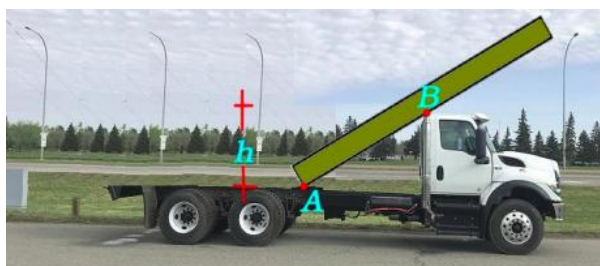


Figura 12.61: Camión con carga

caja del camión. La distancia  $AB = 2,1$  m y la altura de la caja es  $h = 2,5$  m. Determina la aceleración máxima del camión para que el tablón no vuelque.

29. Una barra  $OP$  de 30 kg de peso y 2 m de longitud, articulada en  $O$ , se apoya sobre una caja rectangular de 10 kg de peso y de dimensiones  $a = 0,5$  y  $b = 0,75$  m, como se muestra en la Fig 12.62. La caja puede deslizarse sobre el plano horizontal. Sabiendo que el ángulo entre la barra y el plano horizontal es de  $\theta = 30^\circ$ . Calcula:

- La reacción sobre la articulación  $O$ .
- La fuerza que ejerce el plano horizontal sobre la caja y su punto de aplicación.
- ¿Deslizará o no la caja? Razona la respuesta.

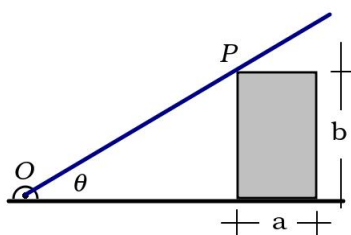


Figura 12.62: Barra pivoteada sobre caja

30. La caja que se muestra en la Fig 12.63 se acelera tirando de ella con la cuerda.

- Supón que el piso no tiene fricción. ¿Cuál es la fuerza máxima que se puede aplicar sin hacer que la caja se voltee?
- Repite la parte a), pero ahora considera que la superficie tiene un coeficiente de roce  $\mu_k$ .



c) ¿Qué sucede con tu respuesta a la parte b) cuando la caja es lo suficientemente alta? ¿Cómo interpretas esto?

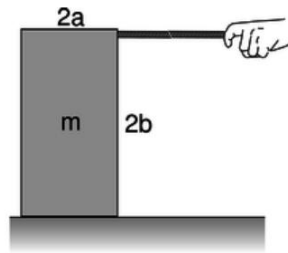


Figura 12.63: Caja siendo tirada sobre superficie

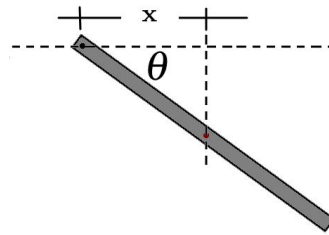


Figura 12.64: Barra rotando alrededor de pivote

31. La Fig 12.64 muestra una barra uniforme de masa  $m = 5,0 \text{ kg}$  y longitud  $L = 1,5 \text{ m}$  gira alrededor de un pivote fijo sin fricción ubicado en uno de sus extremos. La barra se libera del reposo en un ángulo  $\theta = 35^\circ$  debajo de la horizontal. ¿Cuál es la aceleración angular de la barra inmediatamente después de soltarla?

## 12.8 Rodadura sin deslizamiento

El rodamiento sin deslizamiento ocurre comúnmente cuando un objeto como una rueda, cilindro o bola rueda sobre una superficie. Para definir tal movimiento tenemos que relacionar la traslación del objeto con su rotación. Por ejemplo, consideremos una rueda (cilíndrica) rodando sobre una superficie horizontal plana, como se muestra a continuación, Fig. 12.65 (a). En la figura, aparte de  $\omega$  y  $\alpha$ , hemos indicado los vectores velocidad  $\vec{v}_{cm}$  y aceleración  $\vec{a}_{cm}$  del centro de masa respecto del suelo. Por razones estéticas solo hemos dibujado un vector. También se ha indicado el punto  $P$  donde la rueda toca el suelo. Suponemos que este es realmente un punto.

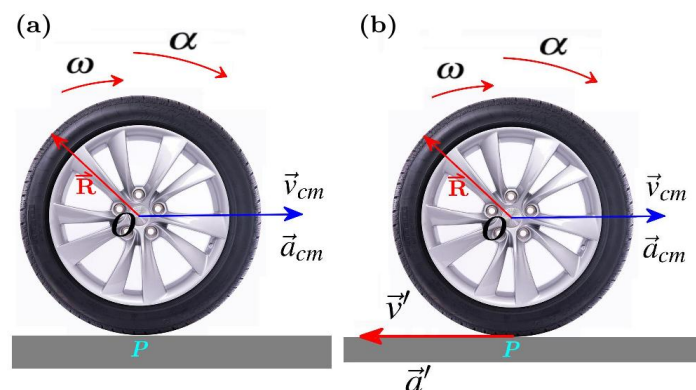


Figura 12.65: Dinámica de rodadura

La rueda rota sin deslizarse solo si no hay movimiento horizontal de la rueda en el punto de contacto  $P$  con respecto a la superficie. Eso significa que el punto de contacto  $P$ , que va

cambiando a medida que el cuerpo rueda, también debe tener un movimiento horizontal cero con respecto a la superficie. Es decir, ese punto de contacto está instantáneamente en reposo. Dado que es un punto especial, se le da un nombre: **eje instantáneo de rotación** porque pensamos que por allí pasa un eje paralelo a la superficie, y perpendicular a la dirección de movimiento. Notar que, debido a que está en reposo, es un buen sistema de referencia inercial.

Por otro lado, si la rueda se moviera hacia la derecha o hacia la izquierda, pero sin rotación, la rueda se deslizaría a lo largo de la superficie. Y como resultado, el punto de contacto  $P$  también se movería hacia la derecha o hacia la izquierda. En ese caso, cada punto de la rueda se movería con la velocidad del centro de masa.

Recordemos, además, que el movimiento de un sólido rígido se describe como el movimiento de traslación del centro de masa más el movimiento de rotación alrededor del centro de masa. Luego, si pensamos solo en la rotación alrededor del centro de masa, cada punto de la rueda rotará con velocidad tangencial  $v = \omega r$ , para un radio dado. En particular, los puntos externos de la rueda tiene una velocidad tangencial  $v' = \omega R$ . Esta velocidad horizontal del punto  $P$ , en la rueda, en relación con el punto  $O$ , es la que se muestra en la Fig. 12.65 (b).

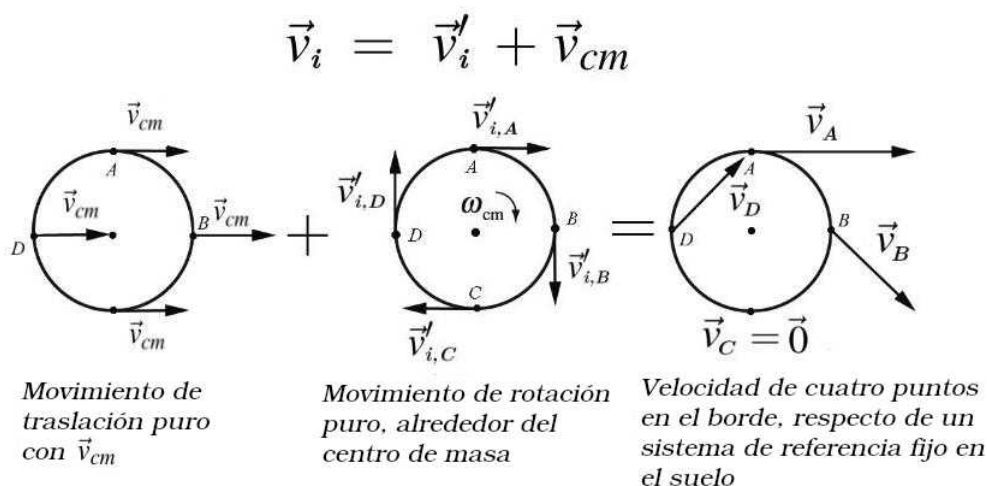


Figura 12.66: Rotación pura más traslación pura

Para mayor precisión aún, observa la Fig. 12.66, donde se muestra el movimiento como una traslación pura, más una rotación pura alrededor del centro de masa. A partir de aquí, la velocidad del punto  $P$  con respecto a la superficie es la suma vectorial de las velocidades del centro de masa y tangencial:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{cm} + \vec{v}' \implies \vec{0} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}', \quad (12.77)$$

ya que el punto  $P$  no se mueve respecto del suelo. Por lo tanto,

$$v_{cm} = v' = \omega R. \quad (12.78)$$

Para el caso de rodar sin resbalar, esta es la ecuación que relaciona la velocidad del centro de masa con la velocidad angular  $\omega$ .

Derivando esta ecuación respecto del tiempo obtenemos la ecuación que relaciona la aceleración del centro de masa de la rueda  $O$  con la aceleración angular de la rueda:

$$a_{cm} = \alpha R. \quad (12.79)$$

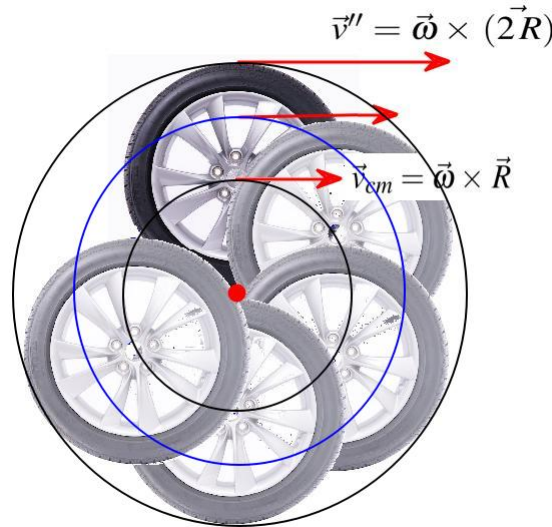


Figura 12.67: Rotación del cuerpo completo alrededor de eje instantáneo de rotación

Las Ecs. (12.78) y (12.79) también se aplican a otras superficies, como la superficie de una esfera, ya que la velocidad del punto de contacto  $P$  seguiría siendo cero en la condición de rodadura. Para una superficie curva, la velocidad  $\vec{v}_{cm}$  es paralela a la tangente a la superficie en el punto de contacto  $P$ , y la aceleración  $\vec{a}_{cm}$  es paralela a la tangente a la superficie en el punto de contacto  $P$ .

Resulta interesante ver la dinámica de rotación sin deslizamiento desde un punto de vista distinto. Dado que el punto  $P$  es un punto que está instantáneamente en reposo y que hemos demostrado que la aceleración lineal del centro de masa  $a_{cm}$  tiene el valor dado en la Ec. (12.79), entonces podemos pensar que **todo el cuerpo** está girando en ese momento con velocidad angular  $\omega$  y aceleración angular  $\alpha$  alrededor del eje instantáneo de rotación. Esto se intenta mostrar en la figura Fig. 12.67, donde cada circunferencia representa la trayectoria de un punto de la rueda que gira alrededor del punto  $P$ . Desde este punto de vista, vemos por qué el centro de masa tiene una velocidad igual a  $v_{cm} = \omega R$ ; es simplemente la velocidad tangencial de ese punto respecto del eje instantáneo de rotación. Vemos, además, que la parte superior de la rueda tiene una velocidad angular  $v'' = 2\omega R$ , calculada desde el mismo eje.

En la Fig. 12.65 (a) hemos supuesto que la rueda no se deforma, lo que es irreal, y que tampoco el suelo se deforma, lo que también es irreal. Supongamos que el piso se deforma y el objeto que rueda por él es muy rígido, entonces la situación se vería como en la Fig. 12.68.

Observamos que en la figura se muestran varias fuerzas normales a la superficie deformada, con diferentes módulos y que apuntan en distintas direcciones. Esta es una situación

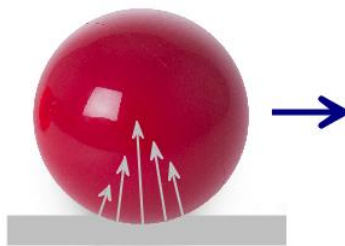


Figura 12.68: Esfera rodando por superficie, deformándola

más real que suponer, ¡como lo haremos aquí, en este libro!, que existe solo una fuerza normal y es perpendicular en un solo punto a la superficie. La existencia de este tipo de fuerzas es importante, pero forma parte de un libro más avanzado de mecánica. Si desea dar un vistazo, al menos, puede leer [https://en.wikipedia.org/wiki/Frictional\\_contact\\_mechanics#Solution\\_of\\_rolling\\_contact\\_problems](https://en.wikipedia.org/wiki/Frictional_contact_mechanics#Solution_of_rolling_contact_problems).

En conclusión, resulta que es la deformación de los cuerpos involucrados la que es responsable, a nivel macroscópico, de la pérdida de velocidad, y posterior detenimiento de un cuerpo que rueda sobre una superficie.<sup>6</sup> En el ejemplo siguiente veremos qué sucede en el caso ideal.

### Ejemplo 1

Consideremos una esfera de masa  $M$  y radio  $R$  que rueda sin deslizar por una superficie rugosa, con coeficiente de roce estático  $\mu_e$ , como muestra la figura. Estas superficies son ideales, perfectas, no se deforman. Sobre ella actúan tres fuerzas: la normal, el peso y la fuerza de roce. Supongamos que se mueve con aceleración constante y calculemos la fuerza de roce.

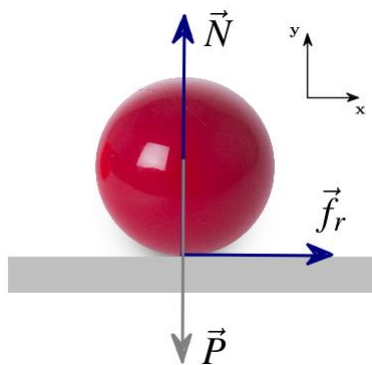


Figura 12.69: Esfera rodando por plano con roce

### Solución

Debemos escribir las ecuaciones de la dinámica

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = M \vec{a}_{cm}$$

<sup>6</sup>Por supuesto estamos despreciando el efecto del roce con el aire.

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{icm}^{(ext.)} = I_{cm} \vec{\alpha}.$$

De aquí,

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{re} = M \vec{a} \implies (-P + N) \hat{y} + f_{re} \hat{x} = M a_{cm} \hat{x}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P &= N \\ f_{re} &= M a_{cm}. \end{aligned} \quad (12.80)$$

Notar que la segunda ecuación ya es extraña. Nos dice que bastará tener un roce estático para que el cuerpo acelere (!).

Además, vemos que la única fuerza que posee un torque no nulo respecto del centro de masa es la fuerza de roce:

$$\vec{R} \times \vec{f}_{re} = I_{cm} \vec{\alpha} \implies -R f_{re} \hat{z} = I_{cm} \alpha \hat{z}.$$

Usamos la condición de rodadura sin deslizamiento

$$v = \omega R \implies a_{cm} = \alpha R \quad (12.81)$$

para escribir

$$R f_{re} = -I_{cm} \alpha = -I_{cm} \frac{a_{cm}}{R}. \quad (12.82)$$

Usando el momento de inercia de una esfera maciza respecto del centro de masa,  $\frac{2}{5} M R^2$ , obtenemos de (12.80) y (12.82) que

$$f_{re} = -\frac{2}{5} M a_{cm}. \quad (12.83)$$

que contradice el resultado anterior para  $f_{re}$ . Esta contradicción se resuelve imponiendo que la aceleración del centro de masa sea cero  $a_{cm} = 0 \text{ m/s}^2$ . Esto, a su vez, implica que la fuerza de roce estático debe ser cero para un sólido rígido. ¿Rota el cuerpo?

es interesante, pero no es sorprendente, aunque parezca, ya que es consistente con la primera ley de Newton.

Lo que debes comprender es que este ejemplo es una idealización.

### Ejemplo 2

Un cilindro uniforme de radio  $R = 0,25$  tiene una velocidad angular de  $\omega_0 = 35 \text{ rad/s}$  alrededor de su eje que pasa por el centro de masa. El cilindro se baja suavemente sobre una mesa horizontal, con coeficiente de fricción  $\mu_k = 0,15$ .

a) ¿Cuánto tiempo lleva antes de que el cilindro comience a rodar sin resbalar?

b) ¿Qué distancia recorre el cilindro entre su punto de liberación y el punto en el que comienza a rodar sin deslizarse?

### Solución

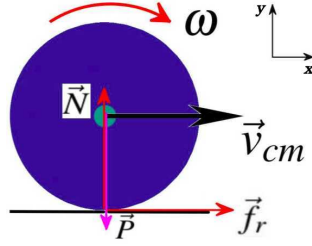


Figura 12.70: Cylinder on a plane surface, with friction

Este es un ejemplo donde ocurre rotación y traslación en parte del movimiento. Es importante tener en cuenta que cuando esto sucede no es correcto usar el eje instantáneo de rotación para hacer cálculos, porque ahora el punto de contacto no está en reposo.

Aplicamos las ecuaciones de la dinámica:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = M \vec{a}_{cm}$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{icm}^{(ext.)} = I_{cm} \vec{\alpha}.$$

Si hacemos el trabajo vectorial, ¡hazlo!, obtenemos

$$P = N \quad (12.84)$$

$$f_{rk} = M a_{cm}. \quad (12.85)$$

Este resultado no es extraño, como en el caso de la Ec. (12.80), porque ahora estamos analizando cómo el cilindro resbala sobre la superficie. También, la ecuación de movimiento rotacional del cilindro toma la forma

$$R f_{rk} = I_{cm} \alpha = -I_{cm} \alpha. \quad (12.86)$$

La fuerza de roce actúa para **desacelerar** el movimiento de rotación del cilindro. Debido a que el cilindro está deslizando con respecto a la superficie, resulta que  $f_{rk} = \mu_k N = \mu_k M g$ . Por lo tanto, las Ecs. (12.84) y (12.86) se convierten en <sup>7</sup>

$$a = \frac{dv}{dt} = \mu_k g \quad (12.87)$$

$$R \alpha = R \frac{d\omega}{dt} = -2 a_{cm}. \quad (12.88)$$

Podemos integrar estas ecuaciones en el tiempo, entre 0 y  $t$ :

$$\int_0^v dv = \mu_k g \int_0^t dt \quad (12.89)$$

$$R \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = -2 a_{cm} \int_0^t dt, \quad (12.90)$$

<sup>7</sup>Este tipo de ecuación se denomina ecuación diferencial y resolverlas es integrarlas

(recuerda que una constante puede salir fuera del símbolo de integral). Es decir,

$$v = \mu_k g t \quad (12.91)$$

$$R(\omega - \omega_0) = -2a_{cm}t. \quad (12.92)$$

Por lo tanto, restando estas ecuaciones obtenemos la velocidad del centro de masa del cilindro que no rueda:

$$v = R(\omega - \omega_0) + 3\mu g t. \quad (12.93)$$

La condición para no deslizamiento (rodadura) es

$$v = \omega R \quad (12.94)$$

y se satisface cuando

$$R\omega_0 = 3\mu g t, \quad (12.95)$$

es decir, en el instante

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu g} = 2s \quad (12.96)$$

el cilindro comienza a rodar. Durante el tiempo en que el cilindro desliza, éste ha recorrido

$$x = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 = \frac{1}{2}\mu g t^2 = 2,9m. \quad (12.97)$$

### Ejemplo 3

Considera una esfera maciza de masa  $M$ , radio  $R$  y momento de inercia  $I_{cm}$ , rodando sin deslizarse hacia abajo por un plano inclinado. ¿Cuál es la aceleración lineal del centro de masa del objeto,  $a_{cm}$ , por la pendiente?

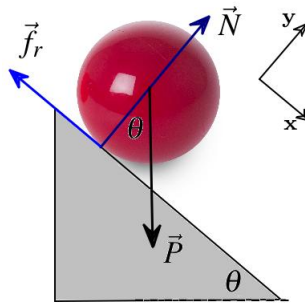


Figura 12.71: Esfera bajando por una pendiente con roce

### Solución

Las ecuaciones de la dinámica son:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = M \vec{a}_{cm}$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{icm}^{(ext.)} = I_{cm} \vec{\alpha}.$$

Como puedes ver del diagrama de cuerpo libre, la fuerza de roce se ha dibujado opuesta al sentido de movimiento de la esfera. **Esto puede producir alguna confusión**, ya que en el ejemplo anterior la fuerza de roce apuntaba en sentido contrario. Lo que debes hacer es analizar cuál será el efecto que la fuerza de roce tendrá sobre el movimiento y si durante el cálculo aparece alguna contradicción por la elección realizada.

Del diagrama de cuerpo libre,

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{f}_{re} = M \vec{a}_{cm} \implies (-P \cos \theta + N) \hat{y} + (P \sin \theta - f_{re}) \hat{x} = M a_{cm} \hat{x}.$$

Es decir,

$$P \cos \theta = N \quad (12.98)$$

$$P \sin \theta - f_{re} = M a_{cm}. \quad (12.99)$$

La suma de los torques externos respecto del centro de masa es

$$\vec{R} \times \vec{f}_{re} = I_{cm} \vec{\alpha} \implies R f_{re} \hat{z} = I_{cm} \alpha \hat{z}.$$

Este resultado significa que la pelota está rodando en sentido horario. Entonces, la elección de la dirección de la fuerza de fricción es correcta. Con  $I_{cm} = \frac{2}{5} M R^2$

$$f_{re} = \frac{2}{5} M R \alpha = \frac{2}{5} M a \quad (12.100)$$

al usar la condición de rodadura  $a = \alpha R$ . Por lo tanto, usando  $f_{re} = \mu_e N = \mu_e P \cos \theta$  con ayuda de la Ec. (12.98), obtenemos

$$\mu_e g \cos \theta = \frac{2}{5} a_{cm}. \quad (12.101)$$

De la Ec. (12.99) obtenemos

$$g \sin \theta - \mu_e g \cos \theta = a_{cm}. \quad (12.102)$$

Por lo tanto, de Ec. (12.100) y Ec. (12.101)

$$g \sin \theta = a_{cm} + \frac{2}{5} a_{cm} = \frac{7}{5} a_{cm} \quad (12.103)$$

y luego, la aceleración del centro de masa es

$$a_{cm} = \frac{5}{7} g \sin \theta. \quad (12.104)$$

Notar que para  $\theta = 0^\circ$  recuperamos el resultado anterior de la esfera moviéndose sobre un plano, en que el cuerpo se mueve con velocidad constante ya que  $a_{cm}=0$ .

Queda de tarea obtener el mismo resultado, pero calculando los torques respecto del eje instantáneo de rotación. Para ello, ayudará usar el teorema de Steiner. Te lo dejo como entretenimiento para la casa.

#### Ejemplo 4



Este ejemplo va un poco más allá de lo que se exige en un libro de este nivel. Probablemente al leer estas palabras dirás que debes saltarlo. Mi recomendación es que lo estudies, analices y comprendas. Aparte de ser un bonito desafío, aprenderás mucho.

La Fig. 12.72 (a) muestra una varilla delgada (también podría ser una escalera) de peso  $P$  y longitud  $L$  que se encuentra apoyada en una pared y un suelo lisos, es decir, sin roce, se desliza hasta que finalmente cae al suelo. Supón que todo el movimiento tiene lugar en el plano de la figura y que la varilla no se ha despegado aún de la pared. En el instante presentado en el esquema, cuando el ángulo formado por la parte superior de la varilla con la pared es  $\theta$ , su velocidad angular es  $\omega$  (al tiempo que desliza sobre el suelo y la pared, la varilla está girando en sentido contrario a las agujas del reloj).

Determina la aceleración del centro de masa de la varilla y su aceleración angular.

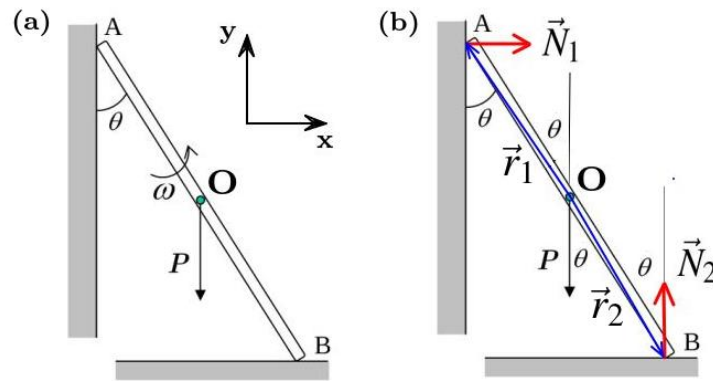


Figura 12.72: Escala apoyada en pared, deslizando

### Solución

Consideremos

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = M \vec{a}_{cm}$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{i cm}^{(ext.)} = I_{cm} \vec{\alpha}.$$

En el diagrama de la Fig. 12.72 (b) no se muestra la aceleración del centro de masa, pero debería quedar claro hacia donde apunta. Además, despreciamos el espesor de la varilla, de modo que la longitud de los vectores de posición es  $L/2$ . Luego,

$$\vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = M \vec{a}_{cm} \implies (-P + N_2) \hat{y} + N_1 \hat{x} = M a_{cm,x} \hat{x} - M a_{cm,y} \hat{y}.$$

Es decir,

$$-P + N_2 = -M a_{cm,y} \quad (12.105)$$

$$N_1 = M a_{cm,x}. \quad (12.106)$$

Además, las normales son las únicas fuerzas que tienen un torque distinto de cero respecto del centro de masa, por lo tanto

$$\vec{r}_1 \times \vec{N}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{N}_2 = I_{cm} \vec{\alpha}.$$

Para hacer el producto cruz, notamos que el ángulo entre  $\vec{r}_1$  y  $\vec{N}_1$  es  $\pi/2 + \theta$ , mientras que aquel entre  $\vec{r}_2$  y  $\vec{N}_2$  es  $\pi - \theta$ . Entonces,

$$-\frac{L}{2} N_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \hat{z} + \frac{L}{2} N_2 \sin(\pi - \theta) \hat{z} = I_{cm} \alpha \hat{z}.$$

Es decir,

$$-\frac{L}{2} N_1 \cos \theta + \frac{L}{2} N_2 \sin \theta = I_{cm} \alpha. \quad (12.107)$$

Hasta aquí, todo bien. El problema es que nos faltan ecuaciones para resolver el sistema porque tenemos más incógnitas que ecuaciones. Pero no hay que desesperar, ya que no hemos considerado dos restricciones o ligaduras. La aceleración del punto  $A$  es siempre hacia abajo (recuerda que suponemos que no se despegas de la pared). Esto es  $\vec{a}_A = -a_A \hat{y}$ . La aceleración del punto  $B$  es siempre hacia la derecha,  $\vec{a}_B = a_B \hat{x}$ . ¿Cómo ayuda esto?

Recordemos la Ec. (12.10) que da cuenta de la aceleración total **de un punto cualquiera**  $P$  en el sólido rígido que rota respecto de un punto **fijo**, digamos  $O'$ .

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}. \quad (12.108)$$

Notar que este punto fijo  $O'$  se puede encontrar en cualquier lugar, no necesariamente en el sólido. Si el mismo punto  $O'$ , además, se mueve aceleradamente respecto de otro punto  $O$ , entonces debemos agregar la aceleración debido a la traslación. De la Fig. 12.73 vemos que

$$\vec{r}_P = \vec{r}_{O'} + \vec{r}.$$

Si derivamos esta ecuación dos veces respecto del tiempo, obtenemos

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

donde hemos usado la Ec. (12.108) para escribir los últimos dos términos.

Ahora, consideremos que el punto  $P$  es el centro de masa de la varilla (!) y que el punto  $O'$  es el punto  $A$ , luego el vector  $\vec{r}$  anterior es el vector de posición del centro de masa medido desde el punto  $A$ , luego

$$\vec{a}_{cm} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{cm,A} - \omega^2 \vec{r}_{cm,A}.$$

Algo similar obtenemos para la aceleración del centro de masa medida desde el punto  $B$ ,

$$\vec{a}_{cm} = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{cm,B} - \omega^2 \vec{r}_{cm,B}.$$

Ahora tenemos todo para proseguir con nuestro cálculo. Los vectores de posición se escriben

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm,A} &= \frac{L}{2} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}) \\ \vec{r}_{cm,B} &= \frac{L}{2} (-\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}). \end{aligned}$$

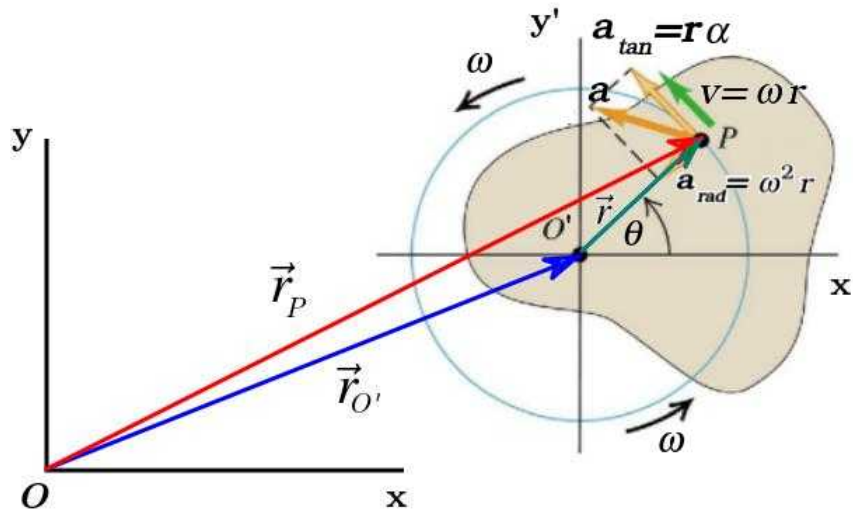


Figura 12.73: Sólido rotando y desplazándose respecto de un sistema inercial de referencia

Además,  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$  y  $\vec{\alpha} = \alpha \hat{z}$ . Por lo tanto, obtenemos (¡haz los cálculos!)

$$\vec{a}_{cm} = -\vec{a}_A \hat{y} + \frac{L}{2} \left\{ \hat{x} (\alpha \cos(\theta) - \omega^2 \sin \theta) + \hat{y} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \right\} \quad (12.109)$$

y

$$\vec{a}_{cm} = a_B \hat{x} + \frac{L}{2} \left\{ \hat{x} (\omega^2 \sin \theta - \alpha \cos \theta) - \hat{y} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta) \right\}. \quad (12.110)$$

Te podrás preguntar por qué necesitamos dos veces una ecuación para la aceleración del centro de masa. Se debe a que no conocemos las aceleraciones  $a_A$  y  $a_B$ . Veamos: sabemos que

$$\vec{a}_{cm} = a_{cm,x} \hat{x} - a_{cm,y} \hat{y}. \quad (12.111)$$

De esta ecuación y la Ec. (12.109) resulta que

$$a_{cm,x} = \frac{L}{2} (\alpha \cos \theta - \omega^2 \sin \theta) \quad (12.112)$$

y de las Ecs. (12.111) y (12.110),

$$a_{cm,y} = \frac{L}{2} (\alpha \sin \theta + \omega^2 \cos \theta). \quad (12.113)$$

Ahora tenemos las dos ecuaciones que nos faltaban. Puedes seguir y terminar el problema. Estoy seguro que lo puedes hacer.

### Ejemplo 5

Un yoyo de masa  $M$  tiene un eje de radio  $r$  y un disco de radio  $R$ . Considera que su momento de inercia respecto del centro de masa es  $I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$  y se puede despreciar el grosor de la cuerda. El yoyo se libera desde el reposo y cae verticalmente.

a) ¿Cuál es la tensión en el cordón cuando desciende el yoyo?

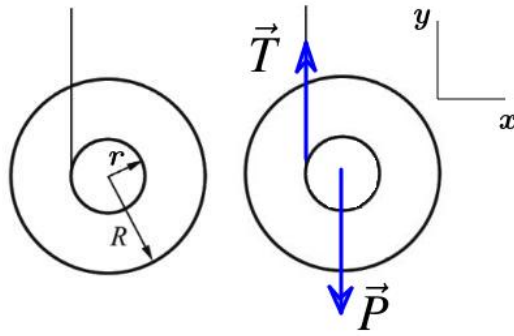


Figura 12.74: Yoyo bajando

b) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración angular y la magnitud de la aceleración lineal a medida que el yo-yo desciende ?

### Solución

Debemos partir por las ecuaciones de Newton:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = M \vec{a}_{cm}$$

y

$$\sum_i \vec{\tau}_{icm}^{(ext.)} = I_{cm} \vec{\alpha}.$$

Luego, del diagrama de cuerpo libre

$$\vec{P} + \vec{T} = M \vec{a}_{cm} \implies (-P + T) \hat{y} = -M a_{cm} \hat{y}.$$

Es decir,

$$T - P = M a_{cm}.$$

La suma de los torques externos, respecto del centro de masa, da

$$\vec{r} \times \vec{T} = I_{cm} \vec{\alpha} \implies r T = I_{cm} \alpha.$$

Ahora podemos resolver para la tensión. Obtenemos,

$$T = \frac{m g R^2}{2r^2 + R^2}$$

Con la condición de rodadura  $a_{cm} = \alpha r$  podemos encontrar las aceleraciones angular y lineal. Ésta última es

$$a_{cm} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}. \quad (12.114)$$

Esta es la respuesta de por qué un yoyo dejado caer de este modo cae con una aceleración menor que la aceleración de gravedad.

## 12.8.1 Ejercicios

1. Un anillo, un cilindro y una esfera ruedan sin deslizar por un plano inclinado. Partiendo de la misma posición inicial, ¿en qué orden llegarán a la parte inferior del plano inclinado? Si el plano tiene una altura  $h$ , ¿con qué velocidad llegan cada uno de ellos al final del plano inclinado?

2. El festival del queso rodante (Cooper's Hill Cheese-Rolling and Wake) and Gloucester es un evento tradicional donde desde lo más alto de la colina se lanza un queso Double Gloucester cuya masa es de 4 kg, aproximadamente. Los competidores deben correr por él bajando el cerro. La primera persona que agarra el queso (o quien estuvo más cerca de atraparlo) y alcanza la línea de meta gana el queso. Supón que la colina tiene una pendiente de  $45^\circ$  y longitud de 200 m. El queso se puede modelar por un cilindro de altura 15 cm, radio 35 cm y masa 4 kg. Determina la velocidad final del queso, suponiendo que nunca se despega de la superficie.



Figura 12.75: Queso del festival del queso de Gloucester

3. Un cilindro homogéneo pesado tiene una masa  $m$  y un radio  $R$ . Se ve acelerado por una fuerza  $T$  que se aplica mediante una cuerda enrollada a lo largo de un tambor ligero de radio  $r$ , unido al cilindro, como indica la figura. El coeficiente de roce estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizar.

- Halla la fuerza de rozamiento.
- Encuentra la aceleración del centro de masa del cilindro.
- ¿Es posible escoger el radio  $r$  de modo que la aceleración sea mayor que  $T/m$ ?
- ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento que aparece en la pregunta anterior?

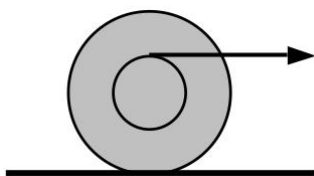


Figura 12.76: Cilindro jalado desde un radio interior

4. Un cilindro sólido rueda por un plano inclinado sin deslizarse, comenzando desde el reposo. Tiene masa  $m$  y radio  $R$ .

- ¿Cuál es su aceleración?

b) ¿Qué condición debe cumplir el coeficiente de fricción estática  $\mu_e$  para que el cilindro no se deslice?

5. Un cilindro sólido rueda desde un plano inclinado desde el reposo y se desliza. Tiene masa  $m$  y radio  $R$ .

a) ¿Cuál es su aceleración lineal?

b) ¿Cuál es su aceleración angular sobre un eje a través del centro de masa?

6. Una cuerda envuelve un cilindro uniforme de masa  $M$  y radio  $R$ , que descansa en un plano fijo en ángulo  $\theta$ , como indica la Fig. 12.77. La cuerda es paralela al plano y pasa sobre una polea sin masa y está conectada a una masa  $m$ . Supón que el cilindro rueda sin deslizarse sobre el plano y que la cuerda es paralela al plano.

a) ¿Cuál es la aceleración de la masa  $m$ ?

b) ¿Cuál debe ser la relación de masas  $M/m$  para que el cilindro acelere en el plano?

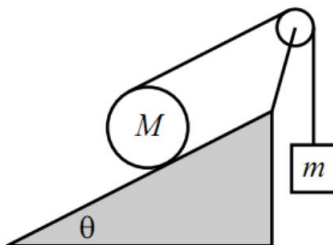


Figura 12.77: Cilindro con soga enrollada que pasa por polea

7. Repite el problema anterior, ahora con una polea cilíndrica de radio  $r = R/2$  y masa  $M_P = M/4$

8. Un cascarón cilíndrico de radio  $R$  y masa  $M$  rueda por un plano inclinado sin resbalar. La inclinación forma un ángulo de  $25^\circ$  respecto a la horizontal, el coeficiente de fricción estática es  $\mu_e = 0,4$  y el momento de inercia  $I_{cm} = MR^2$ .

a) Encuentra su aceleración.

b) Encuentra el ángulo para el cual el cilindro comenzará a deslizarse.

9. Un automóvil de juguete tiene un bastidor de masa  $M$  y cuatro ruedas de masa  $m$  cada una. Las ruedas son discos sólidos. El automóvil se coloca en una pendiente y se suelta. Supón que cada neumático soporta un cuarto del peso del automóvil.

a) Encuentra la aceleración del automóvil de juguete.

b) Si el coeficiente de fricción estática es  $\mu_e$ , encuentra una expresión para el ángulo en el que las ruedas comienzan a deslizarse.

9. Un carrete consta de dos discos de radio  $R$  unidos por sus centros a un cilindro de radio  $R/2$ . Está en una pendiente, con una cuerda envuelta alrededor del cilindro y unida a un poste, como indica la Fig. 12.79. La masa total del carrete es  $m$  y su momento de inercia sobre su eje de simetría es  $\frac{1}{3}mR^2$ .

a) Si el plano no tiene fricción, el carrete se moverá hacia abajo, desenrollando la cuerda mientras la parte inferior de los discos se desliza sobre la superficie inclinada. Encuentra su aceleración en términos de  $\theta$ .

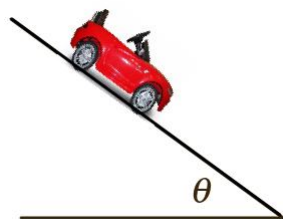


Figura 12.78: Auto bajando por pendiente

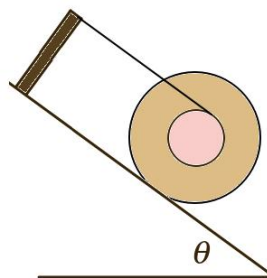


Figura 12.79: Carrete de hilo sobre plano inclinado

b) Si hay fricción estática, ¿qué sentido tiene la fuerza de roce estática  $\vec{f}_e$  para mantener el carrete inmóvil? ¿Por qué?

c) Encuentra el valor mínimo de  $\mu_e$  que lo permita, en términos de  $\theta$ .

10. Una persona tira del mango de una máquina cortadora de césped con una fuerza horizontal  $\vec{F}$  para que ruede sin resbalar. El mango está unido al eje del rodillo cilíndrico sólido y forma un ángulo  $\theta$  con respecto a la horizontal. El rodillo tiene una masa de  $M$  y un radio  $R$ . Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el rodillo y el suelo son  $\mu_e$  y  $\mu_k$ , respectivamente.

a) ) Encuentra la aceleración del rodillo.

b) ) Encuentra la fuerza de fricción que actúa sobre el rodillo.

c) Si la persona tira demasiado fuerte, el rodillo deslizará. Encuentra el valor de  $F$  para que esto ocurra.

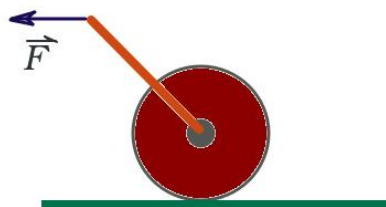


Figura 12.80: Cortadora de césped cilíndrica

11. Un yo-yo de masa  $M$ , momento de inercia  $I$ , y radios interno y externo  $r$  y  $R$ , es arrastrado suavemente por una cuerda con tensión  $\vec{T}$ , como se muestra en el siguiente diagrama. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el yo-yo y el suelo son  $\mu_e$  y  $\mu_k$ , respectivamente.

a) Encuentra la aceleración.

b) Encuentra la fricción que actúa sobre el yo-yo.

c) ¿A qué valor de  $T$  comenzará a resbalar el yo-yo?

12. Un cilindro uniforme y sólido con masa  $M$  y radio  $2R$  descansa sobre una mesa horizontal. Un mecanismo sujeta una cuerda al eje sin fricción a través del centro del cilindro para que el cilindro pueda girar alrededor del eje. La cuerda pasa por una polea en forma de disco con masa  $M$  y radio  $R$  que se monta en un eje sin fricción a través de

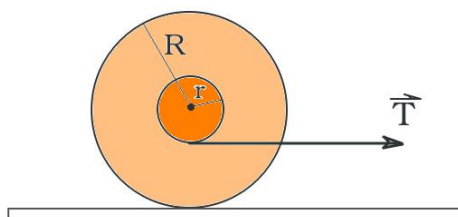


Figura 12.81: Yo-yo en plano

su centro. Se suspende un bloque de masa  $M$  desde el extremo libre de la cuerda, como muestra la Fig. 12.82. La cuerda no se desliza sobre la superficie de la polea, y el cilindro rueda sin deslizarse sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué aceleración hacia abajo tendrá el bloque?

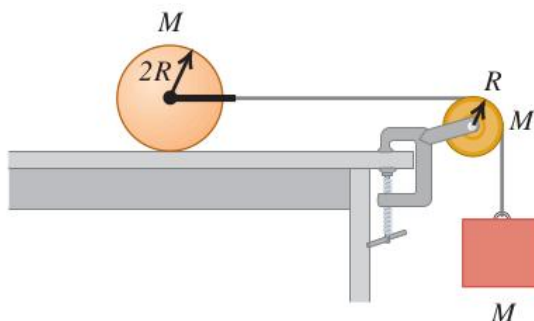


Figura 12.82: Cilindro en plano, con polea

13. Un yo-yo descansa sobre el piso, con un coeficiente de fricción estática  $\mu_e$ . La porción interna (sombreada) del yo-yo tiene un radio  $R_1$ , los dos discos externos tienen un radio  $R_2$ . Una cuerda está envuelta alrededor de la parte interna. Alguien tira de la cuerda en un ángulo  $\alpha$ , como muestra la Fig. 12.83. El “tirón” es muy suave y se aumenta cuidadosamente hasta que el yo-yo comienza a rodar. ¿Para qué ángulo  $\alpha$  el yo-yo rodará hacia la izquierda y para qué ángulo hacia la derecha?

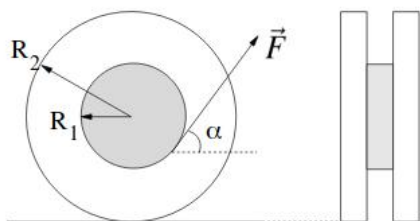


Figura 12.83: Yo-yo realista

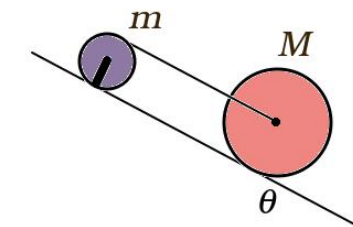


Figura 12.84: Cilindro atado a polea

14. En la Fig. 12.84 se muestra un cilindro de 4,5 kg que rueda sin deslizarse, a lo largo de un plano inclinado  $42^\circ$  con la horizontal. El centro del cilindro está unido mediante una cuerda al borde de una polea en forma de disco de 2,2 kg de masa y 8,5 cm de radio.



Sabiendo que en el eje de la polea existe una fuerza de roce cuyo torque es de  $1,3 \text{ Nm}$ . Calcula la aceleración del cilindro y la tensión de la cuerda.

15. Un disco de masa  $M = 2 \text{ kg}$  y radio  $30 \text{ cm}$  rueda sin deslizar a lo largo de un plano horizontal. Una cuerda que pasa por una polea de radio  $15 \text{ cm}$  y masa  $0,5 \text{ kg}$  a un bloque de  $m = 10 \text{ kg}$ , que pende del extremo de la misma tal como se indica en la Fig. 12.85 . Calcula

- La aceleración del bloque, del centro de masas del disco y la(s) tensión(es) de la cuerda.
- La velocidad del bloque una vez que haya descendido  $5 \text{ m}$  partiendo del reposo

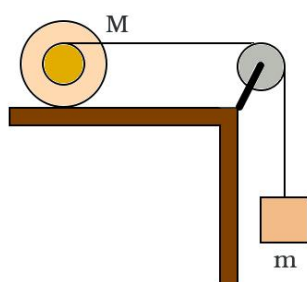


Figura 12.85: Disco atado a masa colgante

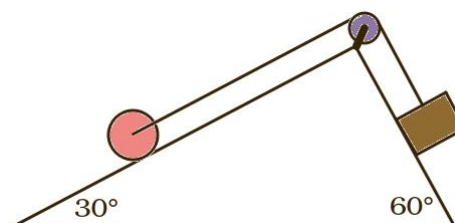


Figura 12.86: Bloque y cilindro sobre planos inclinados

16. La Fig. 12.86 muestra un bloque y un cilindro de  $2$  y  $8 \text{ kg}$  respectivamente, que están unidos por una cuerda inextensible y sin masa que pasa por una polea en forma de disco de  $0,5 \text{ kg}$  de masa y  $20 \text{ cm}$  de radio, situada en la unión de dos planos inclinados de  $30^\circ$  y  $60^\circ$  de inclinación. Sabiendo que el coeficiente de roce cinético entre el bloque y el plano es  $\mu = 0,6$  y que el cilindro rueda sin deslizar, calcula la(s) tensión(es) de la cuerda y la aceleración del sistema.

17. Dos discos iguales de masa  $m$  y radio  $R$ , están dispuestos como se indica en la figura. Calcula la aceleración del centro de masa del disco inferior.

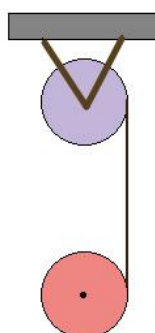


Figura 12.87: Dos discos iguales

18. Haz ido a probar jugar boliche con tus compañeros de curso. Como estás haciendo el curso de física observas que la bola de boliche primero desliza y después rueda. Decides

hacer un modelo de la situación y te planteas lo siguiente: Una esfera sólida se desliza sobre de una superficie sin fricción con velocidad  $v_0$ . Luego la bola entra a una superficie donde el coeficiente de fricción cinética es  $\mu_k$  y el el coeficiente de fricción estática es  $\mu_e$ . Eventualmente, la bola comenzará a rodar sin resbalar.

- ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción? Explica.
- ¿Durante cuánto tiempo se desliza la esfera antes de comenzar a rodar sin deslizarse?
- ¿Cuál es la velocidad de la esfera cuando comienza a rodar sin deslizarse?
- ¿Qué distancia desliza la esfera y comienza a rodar sin deslizarse?

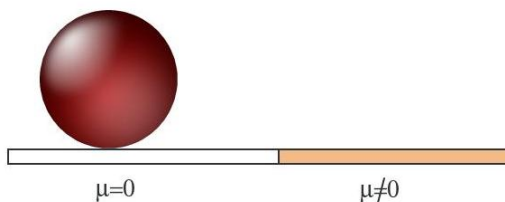


Figura 12.88: Esfera deslizando y luego rodando

19. Como estaban tan interesados haciendo teoría y experimento, se les ha ocurrido repetir el experimento, pero ahora en un plano inclinado, con ángulo de inclinación  $\theta = 20^\circ$ , como muestra la Fig. 12.89. Han colocado la bola de boliche sobre un plano cuya parte superior no tiene fricción; allí la bola solo se desliza. En el punto A, cuando su velocidad es de 4,5 m/s, alcanza una porción de la pendiente donde el coeficiente de roce cinético es  $\mu_k = 0,2$  y el coeficiente de roce estático es  $\mu_e = 0,3$ . Aquí la bola comienza a rodar sin deslizar. Tú y tus comañeros se preguntan:

- ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en rodar sin resbalar?
- ¿A qué distancia de la pendiente del punto A ocurre esto?
- ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando comienza a rodar sin resbalar?

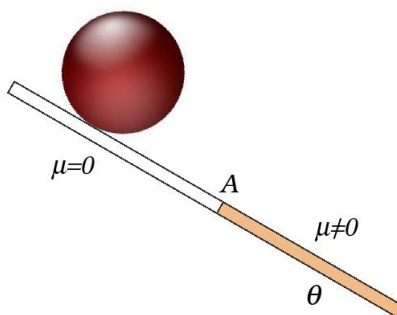


Figura 12.89: Esfera deslizando y luego rodando por un plano inclinado

20. Una esfera maciza y homogénea de radio  $r = 5$  cm está situada inicialmente en reposo en el punto más alto de una superficie semicilíndrica cuyo radio es  $R = 20$  cm, como se muestra en la Fig. 12.90. El coeficiente de roce estático entre esfera y cilindro es  $\mu_e = 0,7$ . Si la esfera rueda sobre la superficie cilíndrica, ¿qué valor debería tener la fuerza de roce, en términos de  $\theta$ , para que la esfera rodase hasta su separación de la superficie cilíndrica?

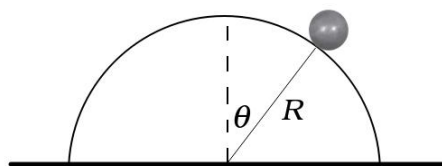


Figura 12.90: Esfera rodando sobre cilindro

21. Considera un cilindro sobre un plano inclinado. El cilindro tiene masa  $M$  y radio  $R$ . Se suelta el cilindro desde el reposo. Determina para qué ángulo el cilindro comenzará a deslizar

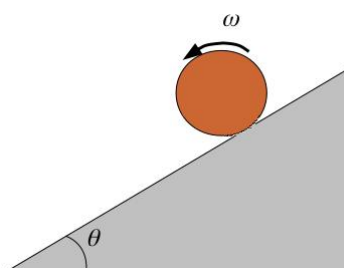


Figura 12.91: Cilindro sobre plano inclinado

22. Un rodillo cilíndrico macizo homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  puede rodar sin deslizar sobre una superficie horizontal. El rodillo se encuentra impulsado por una fina plataforma horizontal de masa  $m$  cuyo contacto con el rodillo es también de rodadura sin deslizamiento. En un instante dado en que la plataforma está centrada sobre el rodillo y el sistema se halla en reposo se tira de ella con una fuerza  $\vec{F} = F_0 \hat{x}$ . Determina, en el orden que estimes necesario:

- La aceleración angular del rodillo, la aceleración del centro del rodillo, y la aceleración de la plataforma.
- Las fuerzas que actúan sobre el rodillo en el punto  $A$ , de contacto con el suelo y el punto  $B$ , donde se apoya la plataforma.
- Si el coeficiente de roce estático entre el rodillo y el suelo, y entre el rodillo y la plataforma, vale  $\mu_e$ , ¿cuál es valor máximo de  $F_0$  para que el rodillo no deslice? ¿Por dónde empezará a deslizar, por el punto  $A$  o por el punto  $B$ ?

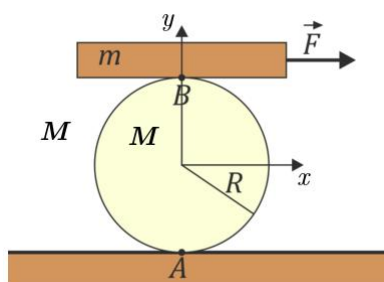


Figura 12.92: Cilindro entre placas

23. Una bola hueca uniforme de masa  $M$  y radio  $R$  gira alrededor de rodamientos verticales sin fricción, como muestra la figura. Una cadena delgada de masa insignificante pasa por el ecuador de la esfera y sobre una polea de momento de inercia  $I_{cm} = \frac{1}{2} M_p r^2$ . Está unido a un objeto de masa  $m$  que puede caer libremente bajo la influencia de la gravedad. ¿Cuál será la velocidad de la masa  $m$  después de que haya caído la distancia  $h$  a partir del reposo?

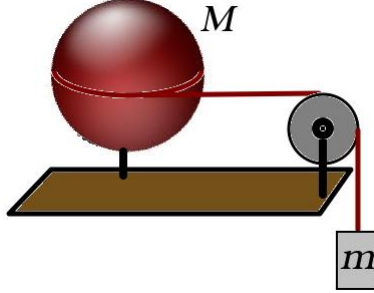


Figura 12.93: Bola girando con masa atada a cuerda que pasa por polea

## 12.9 Teorema Trabajo-Energía

El teorema trabajo-energía para la rotación de un sólido rígido es el mismo que ya hemos estudiado para partículas puntuales:

$$W_{i \rightarrow f} = \Delta K. \quad (12.115)$$

Dado que estamos analizando un cuerpo rígido, para la energía potencial gravitacional debemos considerar la energía asociada al centro de masa. Para el caso de la energía potencial elástica, consideraremos siempre que la fuerza elástica actúa sobre el centro de masa. Por supuesto, la energía cinética de traslación corresponde a la del centro de masa.

El mayor cambio está en la definición de la energía cinética de rotación. Para descubrir cómo, comencemos por el trabajo realizado por el torque:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{\tau}_O \cdot d\vec{\theta}. \quad (12.116)$$

Resulta de interés deducir esta igualdad a partir de la definición de trabajo mecánico

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (12.117)$$

Para una rotación en un movimiento circular, sabemos que  $\vec{v}_\perp = \vec{\omega} \times \vec{r}$  que, dado que  $r$  permanece fijo, podemos escribir <sup>8</sup>

$$\vec{v}_\perp = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r}. \quad (12.118)$$

<sup>8</sup>Observa lo que hemos deducido: que si  $r = cte.$ , entonces el vector longitud de arco  $\vec{s}$  se escribe como un producto vectorial. Es decir,  $\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$

Recuerda que el módulo de la frecuencia angular es  $d\theta/dt$ , luego  $d\vec{\theta}/dt$  es un vector perpendicular al plano, así como  $d\vec{\theta}$ . La Ec. (12.118) se puede reescribir

$$d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r}. \quad (12.119)$$

**Esta ecuación es la forma vectorial de la ecuación para la longitud de arco que hemos usado anteriormente,  $ds = r d\theta$ .** Ahora, el **producto triple** entre tres vectores  $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$  tiene la propiedad (cíclica) de que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}. \quad (12.120)$$

Observa que la primera operación que se debe hacer es el producto vectorial. No tiene sentido hacer primero el producto punto, pues su resultado es un escalar. Recuerda, además, que el producto escalar es conmutativo.

Luego podemos escribir

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{\theta} \times \vec{r} = \int_i^f \vec{r} \times \vec{F} \cdot d\vec{\theta} = \int_i^f \vec{\tau}_O \cdot d\vec{\theta}. \quad (12.121)$$

Ahora podemos proseguir y reemplazar la Ec. (12.42) para obtener, **en el caso de una rotación alrededor de un eje fijo**, cuando  $\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}$ ,

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f \vec{\tau}_O \cdot d\vec{\theta} = I_O \int_i^f \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot d\vec{\theta}, \quad (12.122)$$

que, pensando que  $dt$  está dividiendo  $d\vec{\omega}$ <sup>9</sup>, lo podemos mover dividiendo a  $d\vec{\theta}$ . Luego,

$$W_{i \rightarrow f} = I_O \int_i^f \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = I_O \int_i^f \omega d\omega = \frac{1}{2} I_O (\omega_f^2 - \omega_i^2) \quad (12.123)$$

siguiendo pasos similares a lo usados en la Ec. (8.30).

Por lo tanto, la energía cinética rotacional es<sup>10</sup>

$$K = \frac{1}{2} I_O \omega^2. \quad (12.124)$$

Por lo tanto, para un sólido rígido, la energía cinética total está dada por la suma de las energía cinética de traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación alrededor del centro de masa

$$K_{total} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2. \quad (12.125)$$

La energía potencial es más fácil, ya que solo debemos preocuparnos de encontrar la posición del centro de masa del objeto y considerar luego la energía potencial del centro de masa,  $U$ .

<sup>9</sup>Ya sabemos que no lo está; este paso se puede hacer muy rigurosamente matemático

<sup>10</sup>Si la rotación no ocurre alrededor de un eje fijo, entonces se debe generalizar esta ecuación, pero aquello está más allá del objetivo de este libro.

**Ejemplo 1**

Enrollamos un cable ideal en un cilindro sólido de masa  $M$  y radio  $R$ . El cilindro gira con fricción despreciable alrededor de un eje horizontal fijo. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa  $m$  y soltamos el bloque a partir del reposo a una distancia  $h$  sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin resbalar.

Obtén las expresiones para la rapidez del bloque que cae y la rapidez angular del cilindro en el momento en que el bloque golpea el suelo.

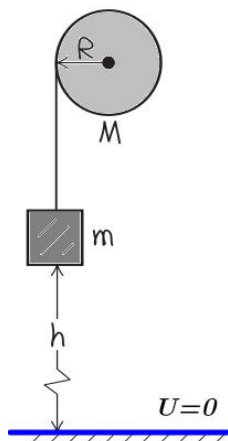


Figura 12.94: Cilindro con masa colgando

**Solución**

Primero, siempre debemos preguntarnos si existen fuerzas conservativas y si realizan trabajo distinto de cero. No lo he hecho en la figura adjunta, pero **recomiendo que dibujes las fuerzas que actúan en su sistema, como si estuvieses haciendo un problema aplicando directamente las ecuaciones de Newton.**

En este caso, no hay roce en el eje de rotación y la cuerda no resbala. Sobre el eje actúa el peso del disco, que no realiza trabajo pues ese punto no se traslada. Además, en el eje actúa una normal y la cuerda agrega la tensión. Ambas fuerzas son no conservativas. Sin embargo, la normal no realiza trabajo debido a que no hay desplazamiento asociado. Por otro lado, la tensión se puede considerar una fuerza interna y luego no entra en la definición de trabajo de las fuerzas externas. Otra forma de expresarlo es que la tensión sí realiza trabajo, pero tenemos un par acción-reacción y el trabajo neto de ambas es cero.

**Este es el típico problema, que ocurre a menudo en física, de preguntarse cuál es el sistema de interés. Si estuviésemos interesados en saber qué pasa con la polea, para ésta la tensión sería una fuerza externa.**

En la conservación de la energía debemos agregar la energía cinética de movimiento de la masa a la energía cinética de rotación del disco. Por lo tanto,

$$E_i = E_f \implies mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2. \quad (12.126)$$

Resulta que la velocidad del centro de masa de la masa que cuelga es igual a la velocidad tangencial del punto externo del disco, luego  $v_{cm} = \omega R$  y entonces la ecuación

anterior se transforma en

$$mgh = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}I_0 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right). \quad (12.127)$$

Por lo tanto,

$$\omega^2 = \frac{2mgh}{\left(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2\right)}. \quad (12.128)$$

Observa el denominador. Es el momento de inercia total del sistema. ¿Recuerdas el Ejemplo 2. del disco y la masa colgante que hemos revisado anteriormente en la sección 12.7? Aquí tenemos otra demostración de la forma que adquiere el momento de inercia y cómo entra en la solución.

### Ejemplo 2

Un disco de radio  $R$  y masa  $M = 8,0$  kg se le ha enrollado una cuerda ideal, que a su vez pasa por una polea ideal, y que termina atada a una masa  $m$  de 1,5 kg, como muestra la figura. El disco rueda sin deslizar a lo largo de un plano horizontal. La aceleración del centro de masa del disco es  $a_{cm}$  y la aceleración angular de rotación alrededor del centro de masa es  $\omega$ . Determina la velocidad del bloque cuando ha descendido 2,0 m partiendo desde el reposo.

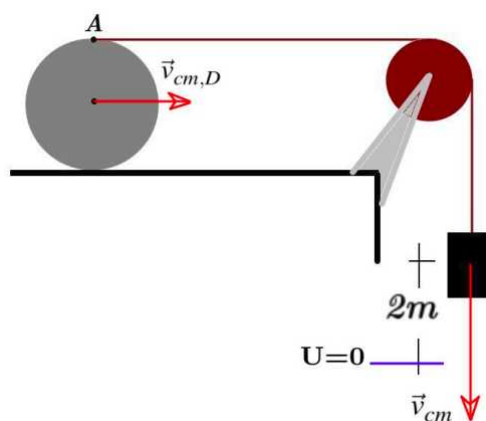


Figura 12.95: Cilindro con masa colgando

### Solución:

La única fuerza conservativa que actúa sobre el sistema es la fuerza gravitatoria. El peso que actúa sobre el disco no efectúa trabajo, sin embargo, debido a que es perpendicular a la dirección de movimiento. Lo mismo ocurre para la fuerza normal. Nuevamente las tensiones son fuerzas internas y luego no aparecen en la definición de trabajo neto. Debido a que el disco rueda sin resbalar, la fuerza de roce no realiza trabajo ya que no hay desplazamiento asociado. Por la misma razón, debido a que la cuerda no resbala por la polea, el roce que allí hay tampoco realiza trabajo. Luego, lo único que queda es la fuerza de peso actuando sobre la masa que cuelga. Como es una fuerza conservativa, el trabajo debido a ella es igual a menos la diferencia de energía potencial gravitatoria.

Con respecto a la energía cinética del sistema. Existen dos energía cinéticas de traslación, una asociada al disco y la otra a la masa que cuelga. Pero además, debido a que

el disco de la polea tiene masa, y por tanto momento de inercia, también existe energía cinética de rotación. Por lo tanto,

$$-\Delta U_g = \Delta K \implies mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm,D}^2. \quad (12.129)$$

Ahora, la velocidad del bloque es igual a la velocidad tangencial del disco en el punto A, debido a la cuerda que pasa por allí, que es inextensible. Además, de nuestro estudio del movimiento circular sabemos que la velocidad del punto A es el doble de la velocidad del centro de masa. Luego,  $v_{cm} = 2v_{cm,D}$  y con la condición de rodadura,  $v_{cm,D} = \omega R$ , obtenemos

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{16}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{8}Mv_{cm}^2. \quad (12.130)$$

Por lo tanto, la velocidad del bloque es

$$mgh = \frac{1}{2}v_{cm}^2 \left( m + \frac{3}{8}M \right) \implies v_{cm} = 3,6 \text{ m/s}^2. \quad (12.131)$$

Si usas cinemática puedes encontrar la aceleración del bloque. Entretiénete con eso.

### Ejemplo 3

La Fig. 12.96 muestra un cilindro de masa  $M$  y radio  $R$ , en un plano inclinado de elevación  $\theta$  y coeficiente de roce estático  $\mu_e$ , está unido a un resorte de constante  $k$ . El sistema está inicialmente en su posición de equilibrio. Encuentra la velocidad del cilindro cuando ha rodado, sin resbalar, una distancia  $d$  por la pendiente.

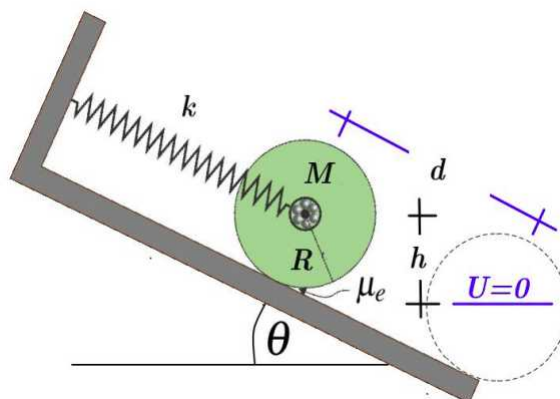


Figura 12.96: Cilindro con resorte en un plano inclinado

### Solución:

Observa de la figura que hemos elegido el valor cero de la energía potencial. Esto es imprescindible porque siempre medimos energías relativas.

Debido a que el cilindro no resbala y la fuerza normal no está asociada a un desplazamiento, solo existen fuerzas conservativas: el peso y la fuerza de Hooke. Luego, la energía se conserva. Entonces,

$$-\Delta U_g = \Delta K \implies Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}kx^2. \quad (12.132)$$



Recuerda que estamos midiendo el desplazamiento desde la posición de equilibrio del resorte. Debido a la condición de rodadura;  $v_{cm} = \omega R$ , y al hecho que el disco rueda una distancia  $d$  hacia abajo, obtenemos

$$Mgd \sin \theta = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{4} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} k d^2, \quad (12.133)$$

donde hemos reemplazado  $h = d \sin \theta$ . Por lo tanto, la velocidad del centro de masa está dada por

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4Mgd \sin \theta - 2kd^2}{3M}}. \quad (12.134)$$

#### Ejemplo 4

Un yoyo de masa  $M$  tiene un eje de radio  $r$  y un disco de radio  $R$ . Considera que su momento de inercia respecto del centro de masa es  $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$  y que se puede despreciar el grosor de la cuerda. El yoyo se libera desde el reposo y cae verticalmente. Encuentra la magnitud de la velocidad angular del yoyo cuando llega al fondo de la cuerda, cuando se ha desenrollado una longitud  $h$  de la cuerda.

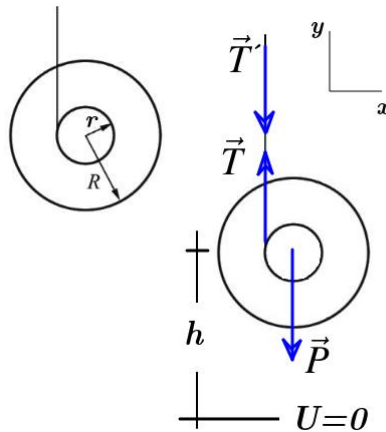


Figura 12.97: Yoyo descending vertically

#### Solución:

Este ejemplo ya lo hemos visto antes, pero ahora lo analizamos desde el punto de vista del teorema Trabajo-Energía.

Dado que la cuerda no resbala y que la tensión es una fuerza interna, la energía se conserva. Luego,

$$-\Delta U_g = \Delta K \implies Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2.$$

Como no hay resbalamiento,  $v_{cm} = \omega r$  y

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{4} M v_{cm}^2 \frac{R^2}{r^2}.$$

Por lo tanto,

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)}. \quad (12.135)$$

Podemos derivar esta ecuación respecto del tiempo

$$\frac{dv_{cm}^2}{dt} = 2v_{cm} \frac{dv_{cm}}{dt} = 2v_{cm}a_{cm} = \frac{2gv_{cm}}{\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)},$$

donde hemos usado el hecho de que la derivada de  $h$  respecto del tiempo es la velocidad del centro de masa. Luego,

$$a_{cm} = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}.$$

Que es el resultado de la Ec. (12.114), encontrada usando las ecuaciones de Newton. Ahora escribimos entonces la frecuencia angular reemplazando  $v_{cm} = \omega r$  en la Ec. (12.135):

$$\omega = \sqrt{\frac{4gh}{2r^2 + R^2}}. \quad (12.136)$$

### Ejemplo 5

En la figura, una bola de acero sólido con una masa de 0,3 g rodará suavemente a lo largo de una pista cuando se libere del reposo a lo largo de la sección recta. El loop circular tiene un radio  $R = 15,0$  cm y la bola tiene un radio  $r = 5$  cm.

a) Obtén una expresión para la altura  $h$  para la que la bola estará a punto de despegarse de la pista cuando llegue a la parte superior del loop. Luego evalúa.

b) Si la bola se suelta desde la altura  $h = 5R$ , obtén una expresión para el vector de la componente de fuerza horizontal que actúa sobre la bola en el punto  $Q$ . Luego evalúa.

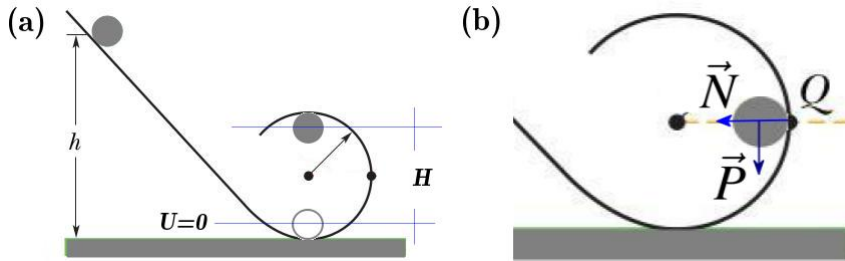


Figura 12.98: Esfera rodando hacia un loop

### Solución:

a) Aparte de la fuerza normal, que no realiza trabajo, existe otra fuerza no conservativa, que es el roce estático, responsable que la bola ruede. Sin embargo, asociada a esta fuerza no hay ningún desplazamiento. Por lo tanto, la energía se conserva en todo el movimiento. Entonces,

$$K_i + U_i = K_f + U_f \implies mgh = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + mg(2R - 2r). \quad (12.137)$$

Ahora, el momento de inercia de la bola, respecto de su centro de masa es  $I_{cm} = \frac{2}{5} m r^2$ , luego, usando la condición de no deslizamiento  $v_{cm} = \omega r$ , obtenemos que la energía cinética de rotación es

$$\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{5} m v_{cm}^2. \quad (12.138)$$

Reemplazando en la Ec. (12.137)

$$m g h = \frac{7}{10} m v_{cm}^2 + m g (2R - r). \quad (12.139)$$

De aquí deducimos una expresión para  $h$

$$h = \frac{7}{10 g} v_{cm}^2 + (2R - r). \quad (12.140)$$

Debemos conocer ahora la velocidad de la bola en el punto más alto del loop. Para ellos usamos las ecuaciones de la dinámica. Basta ver cómo se desplaza el centro de masa de la bola. Esto es, del diagrama en la figura, solo interesa observar qué nos dice la ecuación radial:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}_c \implies -N \hat{r} - P \hat{r} = -m \frac{v_{cm}^2}{R - r} \hat{r}. \quad (12.141)$$

Por lo tanto, con la condición de que en el punto superior la bola se haya recién separado del loop, es decir que justo en ese punto la fuerza de reacción se anule,  $N = 0$ , obtenemos que la velocidad del centro de masa es

$$v_{cm}^2 = g (R - r). \quad (12.142)$$

Luego, la altura necesaria para que esto ocurra es

$$h = \frac{7}{10} (R - r) + (2R - r) \implies h = \frac{7R}{10} + 2R - \frac{17r}{10} = 0,40 \text{ m} \quad (12.143)$$

b) En este caso, la conservación de la energía implica que

$$K_i + U_i = K_f + U_f \implies m g (5R - r) = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + m g (R - r), \quad (12.144)$$

que conduce a

$$m g 4R = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{7}{10} m v_{cm}^2 \quad (12.145)$$

al usar la condición de rodadura  $v_{cm} = \omega r$ . Por lo tanto, la velocidad del centro de masa en el punto  $Q$  es

$$v_{cm}^2 = \frac{40 g R}{7}. \quad (12.146)$$

Las ecuaciones de la dinámica en el punto implican que

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}_c \implies -N \hat{r} = -m \frac{v_{cm}^2}{R - r} \hat{r}. \quad (12.147)$$

De aquí obtenemos que el módulo de la fuerza normal en ese punto es

$$N = \frac{40 m g R}{7 (R - r)} = 0,017 \text{ N}. \quad (12.148)$$

## 12.9.1 Ejercicios

- Una esfera rueda sin deslizar por un plano horizontal rugoso con velocidad  $\vec{v}_0$ , y empieza a subir por un plano inclinado.
  - ¿Cuál es la altura que alcanzará si el plano inclinado es también rugoso y la esfera sube rodando sin deslizar?
  - ¿Y si el plano fuese liso y la esfera subiese deslizando?
  - En este segundo caso cuando vuelva al plano inclinado y empiece a moverse por el plano horizontal ¿cómo será inicialmente el movimiento ¿se deslizará o rodará?
  - ¿Cuál será la velocidad final de traslación que alcanzará la esfera?
- Un aro, un cilindro homogéneo y una esfera homogénea, todos de masa  $m$  y radio  $r$  ruedan sin deslizar por un plano inclinado un ángulo  $\theta$ . Determina:
  - cuál de estos cuerpos bajará más rápidamente y cuales serán las aceleraciones respectivas.
  - el valor mínimo del coeficiente de roce compatible con el movimiento de rodadura.
- Los cuerpos del problema 2. deben realizar un rizo vertical de radio  $R$ . ¿Desde que altura mínima  $h$  deben dejarse caer para que consigan realizarlo?

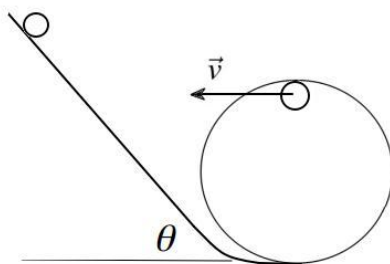


Figura 12.99: Objeto realizando un rizo

- Un helicóptero de rescate pequeño típico tiene cuatro palas: cada una mide 4,0 m de largo y tiene una masa de 50,0 kg, como se muestra en la Fig. 12.100. Las palas se pueden imaginar como barras delgadas que giran alrededor de un extremo de un eje perpendicular a su longitud. El helicóptero tiene una masa total de 1000 kg.
  - Calcula la energía cinética rotacional en las palas cuando giran a 300 rpm.
  - Calcula la energía cinética de traslación del helicóptero cuando vuela a 20,0 m/s, y compáralo con la energía rotacional en las palas.
- En la Fig. 12.101 se muestra un cilindro uniforme de radio  $R$  y masa  $M$ , con momento de inercia alrededor del centro de masa  $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$ , parte desde el reposo y rueda sin deslizar por un plano inclinado con inclinación  $\beta$  y coeficiente de roce estático  $\mu_e$ . ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del centro de masa del cilindro cuando alcanza el fondo de la pendiente?
- En la Fig. 12.102 (a), el péndulo de un reloj está formado por una varilla de 500 g y 40 cm de longitud y una lenteja (sí, así se llama) de forma esférica de 200 g de masa y 5 cm de radio, tal como se indica en la figura. El punto de suspensión  $O$  está a 10 cm del extremo de la varilla. Calcula

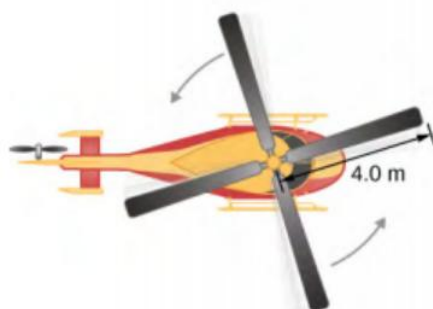


Figura 12.100: Helicóptero visto desde arriba

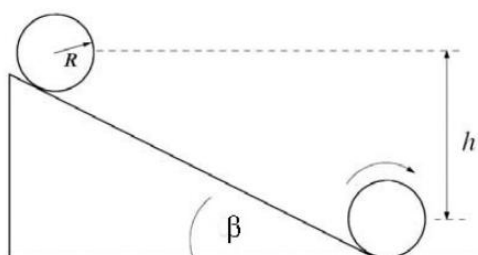


Figura 12.101: Cilindro rodando por plano inclinado

- a) La distancia al centro de masas medida desde  $O$ .  
 b) el momento de inercia respecto de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por  $O$ ,  
 c) el péndulo se desvía  $60^\circ$  de la posición de equilibrio. Calcula la velocidad angular de rotación cuando pasa por la posición de equilibrio.

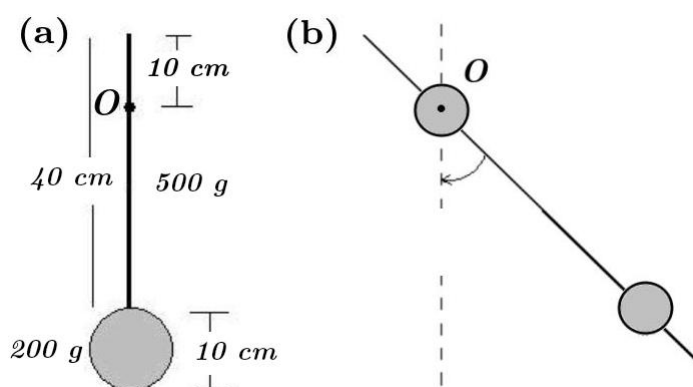


Figura 12.102: Péndulo físico

7. Un péndulo compuesto de la Fig. 12.102 (b) está formado por una varilla de 200 g de masa y 40 cm de longitud y dos esferas macizas de 500 g y 5 cm de radio, equidistantes 8 cm de los extremos de la barra. El péndulo se encuentra suspendido de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de una de las esferas, y es desviado  $65^\circ$  de la posición de equilibrio estable. Determina la velocidad angular del péndulo cuando, una vez soltado, va pasando por la posición de equilibrio estable.

8. La Fig. 12.103 muestra una polea homogénea constituida por dos ruedas capaces de girar solidariamente alrededor del mismo eje. El momento de inercia de las dos ruedas juntas es  $I_{cm} = 40 \text{ kg m}^2$ . Los radios son:  $R_1 = 1,2 \text{ m}$  y  $R_2 = 0,4 \text{ m}$ . Las masas que cuelgan a ambos lados de la polea son  $m_1 = 36 \text{ kg}$  y  $m_2 = 12 \text{ kg}$ , como se observa en la Fig. 12.103. La altura inicial de la masa  $m_1$  es  $h = 5 \text{ m}$ . Calcula

- la altura que asciende la masa  $m_2$ .
- la velocidad angular de la polea.

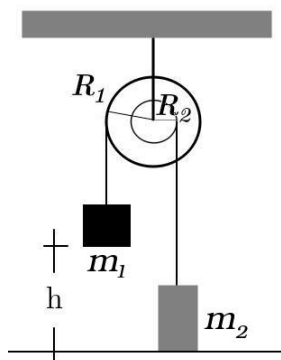


Figura 12.103: Máquina de Atwood

9. Una viga homogénea de masa  $M$  y longitud  $L$  está sujeta a la pared mediante una articulación y una cuerda como se indica en la Fig. 12.104. El ángulo que forma la viga con la vertical es  $\theta$ . Si se rompe la cuerda, determina en función de los datos del problema la velocidad angular de la viga cuando llega a la horizontal.

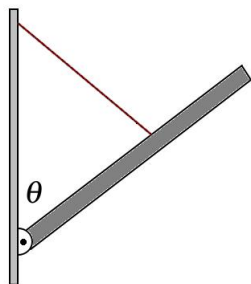


Figura 12.104: Barra atada

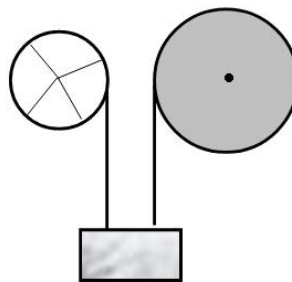


Figura 12.105: Polea doble formada por anillo y cilindro

10. En un sistema como el de la Fig. 12.105 constituido por un anillo de radio  $r_1 = 0,1 \text{ m}$  y masa  $m_1 = 5 \text{ kg}$ , con rayos de masa despreciable, un cilindro homogéneo de radio  $r_2 = 0,15 \text{ m}$  y masa  $m_2 = 13 \text{ kg}$ , y una masa  $m$  de  $12 \text{ kg}$ , soltamos ésta última desde el reposo y la dejamos descender  $6 \text{ m}$ , de modo tal que las cuerdas no resbalan. Despreciando el rozamiento calcula:

- la velocidad final de la masa  $m$ ,
- su aceleración,
- las aceleraciones angulares del anillo y del cilindro,
- la(s) tensión(es) en la(s) cuerda(s).

11. Una bolita de radio despreciable, inicialmente en reposo en el punto más alto de un semi-cilindro fijo, comienza a rodar sin deslizamiento por la superficie de la esfera, como se muestra en el esquema de la Fig. 12.106. Determina el ángulo desde la parte superior del cilindro hasta el punto donde la bolita pierde el contacto con aquella.

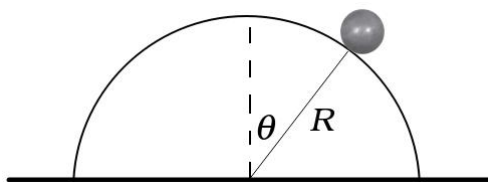


Figura 12.106: Esfera rodando sobre cilindro

12. Una esfera maciza y homogénea de radio  $r = 5$  cm está situada inicialmente en reposo en el punto más alto de una superficie semicilíndrica cuyo radio es  $R = 20$  cm, como se muestra en el esquema de la Fig. 12.106. Si la esfera rueda sobre la superficie cilíndrica,

a) Determina la velocidad del centro de masa de la bolita desde que empieza a rodar hasta que pierde contacto con el cilindro, determinando el ángulo  $\theta$ , medido con respecto a la vertical, para el que se produce dicha pérdida de contacto.

Ayuda: Supón que la fuerza de roce es suficiente para mantener la rodadura en todo el trayecto de la bolita sobre la cilindro.

b) Representa gráficamente el cuadrado de la velocidad del centro de masas de la bolita en unidades  $gR$ .

c) Determina la velocidad angular de la bolita en el momento en que pierde contacto con la superficie semiesférica.

d) ¿Cuántas vueltas da la bolita hasta ese instante?

13. La barra de la Fig. 12.107 se separa muy ligeramente de la posición vertical de forma que empieza a caer. Calcula en función del ángulo de inclinación  $\theta$ :

a) su velocidad angular,

b) su aceleración angular,

c) la aceleración de su centro de masas,

d) la fuerza de rozamiento y la reacción en el punto de apoyo.

Si el punto de contacto de la barra con el suelo comienza a deslizarse cuando el ángulo de inclinación es de  $30^\circ$ , calcula

e) el coeficiente de rozamiento estático con el suelo.

14. En la Fig. 12.108 se muestra el péndulo de reloj formado por un disco homogéneo de radio  $R$  y masa  $M$  y una barra también homogénea de longitud  $L$  y masa  $m$ , unidos entre sí. El péndulo tiene un eje de rotación en el punto A, donde no hay roce. Calcula:

a) la posición del centro de masa de dicho péndulo,

b) su momento de inercia respecto del eje de rotación,

c) Si en el instante  $t = 0$  s el péndulo se suelta desde un ángulo  $\theta_0$  con la vertical, calcula la fuerza que el enganche A realiza sobre dicho péndulo cuando pase por la vertical.

15. Una escalera de longitud  $L$  y masa  $M$  se sitúa en posición casi vertical contra una pared. Lucas le ha pedido a Luis que suba a la escalera, dada su experiencia anterior.

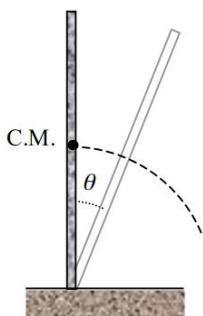


Figura 12.107: Barra rotando

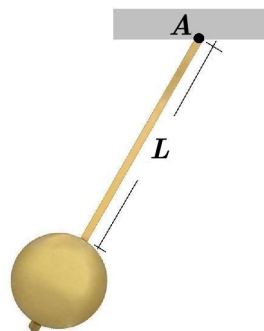


Figura 12.108: Péndulo de reloj

Luis, de pie sobre un peldaño, tiene su centro de masa a la altura de la parte más alta de la escalera. Al inclinarse ligeramente, la escalera comienza a girar alrededor de su base alejándose la parte superior de la pared. Determina la relación entre la velocidad de la Luis agarrado a la escalera cuando llega al suelo y la velocidad que tendría si saltara inmediatamente, en función de la relación  $M/m$  siendo  $m$  la masa de la persona. ¿Qué situación es más segura para Luis (siendo ambas una desgracia)?

16. A un disco de radio  $R = 50$  cm y masa  $M = 8$  kg se le ha enrollado una cuerda ideal, que a su vez pasa por una polea ideal y termina atada a una masa  $m$  de 2,5 kg, como muestra la Fig. 12.109. El cilindro rueda hacia arriba sin deslizar a lo largo de un plano inclinado, con inclinación  $\theta$ . Sabiendo que la aceleración del centro de masas es  $a_{cm}$  y la aceleración angular de rotación alrededor del centro de masa es  $\alpha$ ,

- determina la aceleración del punto A.
- Usando el hecho de que la energía se conserva (¿por qué? Analiza), calcula la velocidad del bloque una vez que haya descendido 2 m partiendo del reposo.
- ¿Cómo cambia el problema si la polea tiene masa  $m_P = 0,8$  kg?

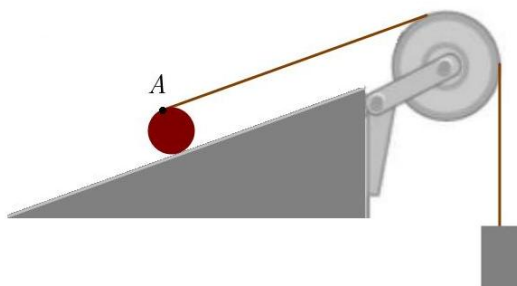


Figura 12.109: Cilindro con polea en planos inclinado

17. Una barra delgada uniforme de longitud  $L$  y masa  $M$ , pivotada en un extremo, como se muestra en la Fig. 12.110, se mantiene horizontal y luego se libera del reposo. Suponiendo que los efectos debidos a la fricción y la resistencia al aire son insignificantes, encuentra

- la velocidad angular de la barra, a medida que avanza, en la posición vertical, y
- la fuerza ejercida sobre la barra por el pivote en este instante.



c) ¿Qué velocidad angular inicial se necesitaría para que la barra alcanzara una posición vertical en la parte superior de su giro?

d) Típicamente los alumnos resuelven las parte a) y c) del problema viéndolo de modo “natural”, es decir, considerando que la barra solo rota alrededor del pivote. Obvio, ¿no?, ¡si es lo que hace! Sin embargo, sabemos que el movimiento de un sólido rígido se puede entender en general como la traslación del centro de masa más la rotación alrededor del centro de masa. Piensa el problema de este modo y vuelve a responder las preguntas a) y c).

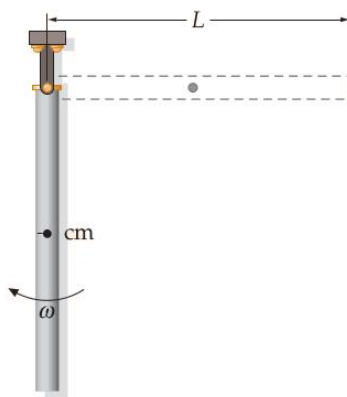


Figura 12.110: Barra rotando alrededor de uno de sus extremos

18. Un rodillo cilíndrico macizo de radio  $R$  y masa  $M$  se encuentra apoyado sobre una superficie horizontal, cuyo coeficiente de roce estático  $\mu_e$  y  $\mu_k$  el cinético. El eje del rodillo está fijo a la pared mediante un resorte de constante  $k$  y longitud natural  $x_0$ , como muestra la Fig. 12.111.

Se separa el rodillo de la posición de equilibrio una distancia  $d$  y se suelta desde el reposo. El rodillo rueda sin deslizar.

a) Encuentra la velocidad del centro de masa del rodillo y la velocidad angular para el instante en que su centro pasa por la posición de equilibrio.

b) Calcula la fuerza de rozamiento estático que ejerce el suelo sobre el rodillo

(i) en la posición inicial y

(ii) al pasar por la posición de equilibrio.

c) ¿Cuál es el máximo valor de  $d$  que se puede alejar el rodillo si no se quiere que este empiece a deslizar sobre el suelo?

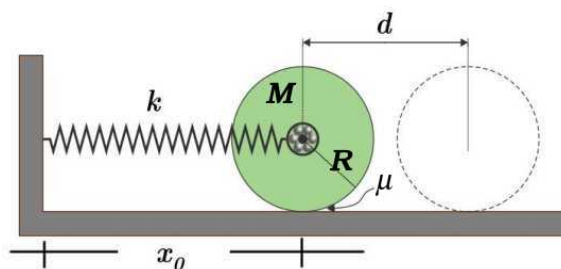


Figura 12.111: Cilindro con resorte

19. Un bloque de masa  $m$  está conectado por una cuerda de masa insignificante a un resorte, con constante elástica  $k$ , que a su vez está fijado a una pared. El resorte es horizontal y la cuerda se cuelga sobre una polea de tal manera que la masa cuelga verticalmente, como muestra la Fig. 12.112. La polea es un disco sólido de masa  $M$  y radio  $R$ . Como se muestra en el siguiente diagrama, el resorte está inicialmente en su posición de equilibrio y el sistema no se mueve. Usa métodos de energía para determinar la velocidad  $v$  del bloque después de que haya caído una distancia  $h$ . Expresa tu respuesta en términos de  $g$ ,  $m$ ,  $k$ ,  $M$  y  $h$ .

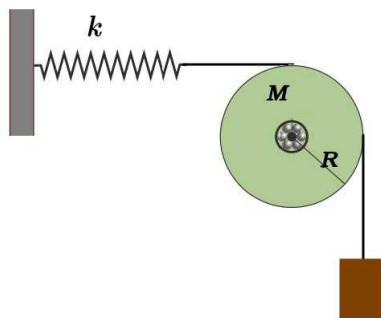


Figura 12.112: Masa que cuelga de una polea, con resorte

20. Una pequeña esfera sólida de radio  $R = 1$  cm y masa  $m = 0,1$  kg en el punto se ubica en el punto A, como muestra la Fig. 12.113. La bola se presiona contra un resorte y se libera del reposo, con el resorte comprimido a 20 cm de su longitud natural. El resorte tiene una constante elástica  $k = 20$  N/m. La esfera rueda sin deslizarse a lo largo de una superficie horizontal hasta el punto B, donde continúa suavemente sobre una pista circular de radio  $R = 2$  m. La esfera finalmente abandona la superficie de la pista en el punto C. Encuentra el ángulo  $\theta$  donde la esfera se despegue de la pista.

Ayuda: Encuentra una expresión para la velocidad de la esfera en el punto C.

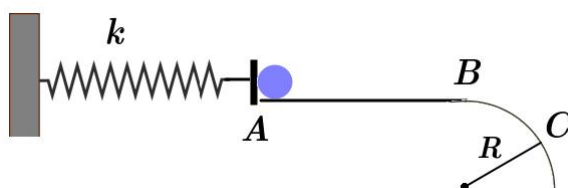


Figura 12.113: Pinball curvo

21. Una persona con un hacha está usando una piedra de afilar, como se muestra en la foto de la Fig. 12.114. La piedra de afilar está conectada a un motor que la mantiene girando sin roce a 85 rpm. La piedra de afilar es un cilindro sólido hecho de un tipo especial de piedra de masa 45 kg y radio 20 cm. La pesada hoja del hacha está siendo presionada sobre la piedra de afilar con una fuerza constante de 25 N dirigida hacia el centro de la piedra de afilar. De repente, el poder del motor se corta pero la persona mantiene la fuerza del hacha sobre la piedra de afilar. El coeficiente de roce cinético entre el hacha y la piedra es 0,60.

a) Calcula el torque de la fuerza de roce sobre la rueda.

- b) Calcula el ángulo total que gira la rueda desde el momento en que se corta la energía hasta el momento en que la piedra de afilar deja de girar.
- c) ¿Cuánto tiempo tarda la rueda en detenerse después del corte de energía?



Figura 12.114: Afilando un hacha

22. En el diagrama de la Fig. 12.115, el bloque  $M_1$  está conectado a  $M_2$  por una cuerda muy ligera que pasa por tres poleas idénticas, de masa  $M_p$ . La cuerda no se desliza. El coeficiente de fricción cinética para la superficie horizontal en la que está la masa  $M_1$  es  $\mu_k$ . Encuentra una expresión para la velocidad  $v$  del bloque  $M_2$  en términos de la distancia  $d$  que el bloque  $M_1$  se mueve hacia la derecha. Su respuesta debe expresarse en términos de  $d$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_p$ ,  $\mu_k$  y  $g$  solamente.

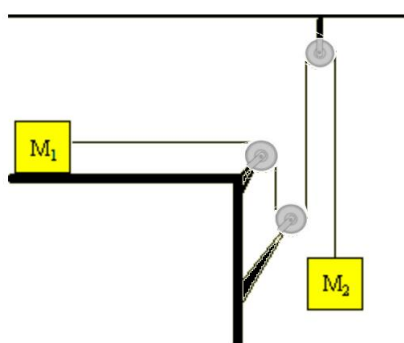


Figura 12.115: Tres poleas y dos masas

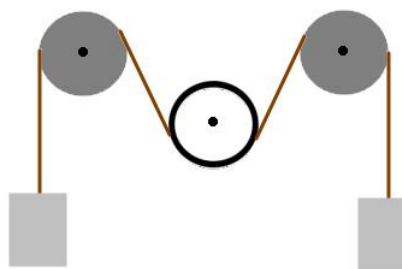


Figura 12.116: Tres poleas y dos masas

23. Se ensambla un sistema de pesas y poleas como se muestra en la Fig. 12.116. Las poleas son todas fijas. Las poleas a los lados son discos de masa  $M$  y radio  $R$ ; la polea central es un aro de masa  $m$  y radio  $r$ . Una cuerda ideal pasa alrededor de las poleas y une las dos pesas. La cuerda no se desliza. Los dos pesos tienen masas  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente. Encuentra la velocidad de los pesos en función del desplazamiento,  $x$ .

24. Una bola compacta de masa  $m$  y radio  $r$  rueda sin deslizarse a lo largo de la pista curva que se muestra en la Fig. 12.117 y ha sido abandonada en reposo en algún lugar de la parte superior de la pista.

a) ¿A qué altura mínima, desde la base del riel, se debe dejar caer la bola para atravesar la parte superior de la curva? (El radio de la curva es  $R$ ; supón que  $R \gg r$ ).

b) Si la bola se libera desde la altura  $6R$  por encima de la base del riel, ¿cuál es el componente horizontal de la fuerza que actúa sobre ella en el punto  $Q$ ?

c) ¿Cómo cambia todo si  $r = R/4$ ?

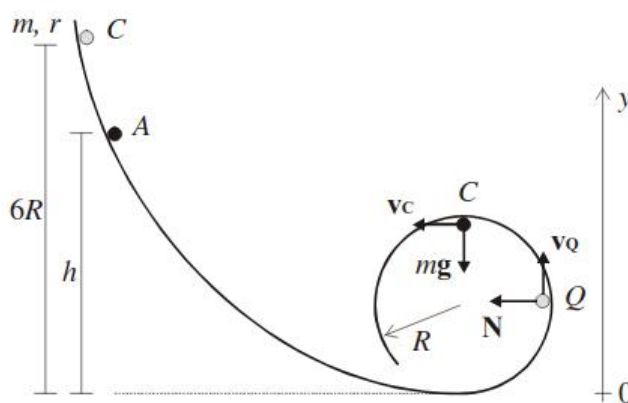


Figura 12.117: Atravesando el loop

25. Un disco  $A$  gira a una velocidad angular  $\omega_A$ , otro disco  $B$  tiene un momento de inercia 3 veces menor que el de  $A$  y gira con una velocidad angular dos veces mayor y en sentido contrario. Se deja caer el disco  $B$  sobre el  $A$  de modo que sus ejes de rotación coincidan. En el acoplamiento, cuando ambos discos terminan rotando a la misma velocidad angular, se pierde 315 J en forma de calor. Calcula las energías cinéticas iniciales de ambos discos.

## 12.10 Conservación del momentum angular

Ya conocemos dos leyes de conservación importantes en Física: la conservación de la energía y la conservación del momentum lineal. Esta última, recordemos, se obtiene cuando sobre un sistema de partículas la suma de todas las fuerza externas que actúan sobre él se anulan. El sistema es invariante bajo traslaciones espaciales.

Pero ya sabemos que de la Ec. (12.37), la variación del momentum angular está dada por

$$\sum_i \vec{\tau}_{iO}^{(ext.)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \quad (12.149)$$

Luego, vemos que si la suma de todos los torques externos es cero, entonces

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}, \quad (12.150)$$

que implica que el momentum angular total se conserva. **Los torques generan rotaciones**, luego la conservación del momentum angular se debe a la invariancia del sistema bajo rotaciones, es decir  $\theta \rightarrow \theta + \theta'$ .

Como aplicación de este resultado general, observamos que la expresión para el momentum angular respecto de un eje fijo,

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega}, \quad (12.151)$$



Figura 12.118: Giro de patinadora sobre hielo

conduce a la conclusión importante siguiente: **si el momento angular de un sistema se conserva, entonces a medida que el momento de inercia se reduce, la velocidad angular debe aumentar.** Un ejemplo de este efecto ocurre cuando los patinadores en hielo extienden o recogen sus brazos para disminuir o aumentar la velocidad de giro.

### Resolviendo problemas de sólido rígido con momentum angular

Para resolver la dinámica de un cuerpo rígido rotante usando la conservación del momentum angular **debes asegurarte primero que la suma de todos los torques externos se anula.** Es importante que practiques argumentar al respecto y no te aproximes a este (u otro) problema como si fuese solo asunto de aplicar ecuaciones o igualdades.

Otro aspecto que debes tener en cuenta es que **la conservación del momentum angular es una igualdad vectorial** y por lo tanto debes trabajar de ese modo, vectorialmente. Y para finalizar estas precauciones, la conservación del momentum angular se refiere al **momentum angular inicial y final del sistema, justo antes y justo después.** Esto puede a veces ser sutil de ver y para ello se debe practicar.

#### Ejemplo 1

Una patinadora en hielo es un excelente ejemplo de conservación del momento angular. La patinadora comienza a girar con los brazos extendidos y tiene un momento de inercia  $I_i$  y una velocidad angular inicial de  $\omega_i$ . Cuando mueve sus brazos cerca de su cuerpo, gira más rápido. Su momento de inercia disminuye, por lo que su velocidad angular debe aumentar para mantener constante el momento angular.

Una patinadora gira a 22.0 rad/s con los brazos y las piernas extendidos hacia afuera. En esta posición, su momento de inercia con respecto al eje vertical sobre el que está girando es de  $I_i = 45,5 \text{ kg m}^2$ . Acerca sus brazos y piernas cerca de su cuerpo, cambiando su momento de inercia a  $I_f = 31 \text{ kg m}^2$ . ¿Cuál es su nueva velocidad angular?

El momento angular se conserva porque no hay torques externos actuando sobre el sistema, o son despreciables (en este caso, el torque producido por el roce). Luego,

$$\vec{L}_{O,i} = \vec{L}_{O,f} \implies I_{O,i}\vec{\omega}_i = I_{O,f}\vec{\omega}_f. \quad (12.152)$$

Por lo tanto,

$$\omega_f = \frac{I_{O,i}\omega_i}{I_{O,f}} = \frac{45,5 \cdot 22}{31} = 32,4 \text{ rad/s}. \quad (12.153)$$

Además, en este proceso, en este caso, la energía cinética aumenta.

$$K_i = \frac{1}{2} I_{O,i} \omega_i^2 = \frac{1}{2} (I_{O,i} \omega_i) \omega_i = \frac{1}{2} L_{O,i} \omega_i \quad (12.154)$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_{O,f} \omega_f^2 = \frac{1}{2} (I_{O,f} \omega_f) \omega_f = \frac{1}{2} L_{O,f} \omega_f \quad (12.155)$$

Calcula el cambio. ¡Pero cómo! ¿De dónde proviene esa energía extra? Resulta que la patinadora artística realiza trabajo en sus brazos y manos para acelerarlos a medida que los acerca a su cuerpo, de ahí proviene la energía extra.

Una entretencción extra para tí.

En este video puedes ver a la patinadora en hielo Olivia Oliver romper el record de revoluciones por minuto en un giro sobre hielo, todo con la ayuda de la conservación de momentum angular. ¡Ella logró llegar a 342 rpm!: <https://www.youtube.com/watch?v=3HrhC6Oq6rw>

### Para entretenerse:

Dado que Olivia Oliver tenía 11 años cuando rompió su record, haz un análisis de ordenes de magnitud, es decir, masa, estatura, etc, para determinar el momento de inercia final de esa niña, como indica el video, y cuando está de pie con los brazos estirados hacia el costado.

Con esto, determina la velocidad angular inicial de Olivia Oliver.

### Ejemplo 2

La Fig. 12.119 muestra una barra uniforme de longitud  $L = 1,2$  m y masa  $M = 0,8$  kg que puede pivotar libremente en su parte superior. La barra, inicialmente en reposo recibe el choque de una partícula de masa  $m = 0,3$  kg en un punto a una distancia  $d = 0,8L$  por debajo del pivote. Supón que el choque es totalmente inelástico. ¿Cuál debe ser la magnitud de la velocidad  $v$  de la partícula para que el ángulo máximo entre la barra y la vertical sea de  $60^\circ$ ?

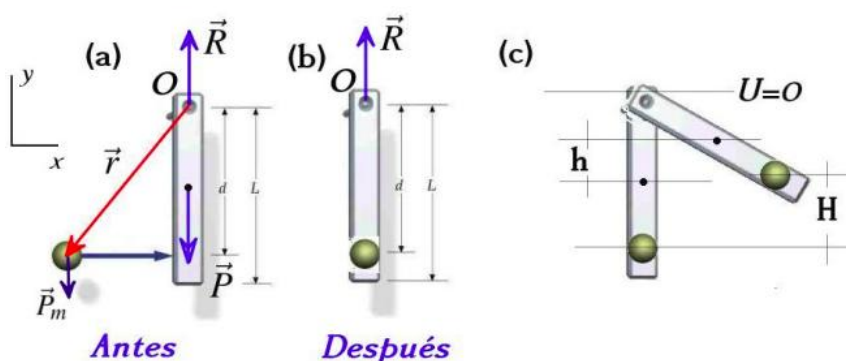


Figura 12.119: Bala sobre barra colgando

### Solución:

En la figura (a) se muestran las fuerzas actuando sobre el sistema justo antes de la colisión. Para el caso de la barra, es claro que las dos fuerzas que actúan sobre ella no

realizan torque debido que el vector de posición  $\vec{r}$  es cero, como es el caso de la reacción en el pivote,  $\vec{R}$ , o es paralelo a la fuerza, como sucede con el peso de la barra,  $\vec{P}$ .

Más cuidado hay que tener con la fuerza de peso que actúa sobre la bala. La situación se aclara cuando observamos que la bala se supone se mueve en línea recta. Esta es una buena aproximación para trayectorias cortas; pero esto es justo lo que queremos decir aquí con justo antes de la colisión. Para comprender mejor el resultado final, es mejor calcular el momentum angular de la bala respecto de  $O$ :

$$\vec{L}_{Om} = \vec{r} \times \vec{p} = d p \hat{z}, \quad (12.156)$$

de donde queda claro que si el momentum lineal (el vector) de la bala es constante, entonces el momentum angular no depende del tiempo y por lo tanto el torque es cero, debido a que  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .

Para el análisis justo después, debemos aclarar qué significa esto. Veamos la figura (b). En ésta vemos la bala incorporada a la barra, con lo que cambia la posición del centro de masa. También observamos que la barra mantiene su posición vertical. Luego debemos pensar que esto ha ocurrido muy rápido. Debido a esto, el torque total sobre el sistema después de la colisión es cero. Incluso si consideramos las fuerzas de roce o involucradas en la deformación de la bala, resulta lo mismo dado que aquellas fuerzas son internas. Por lo tanto, el momentum angular total se conserva y entonces

$$\vec{L}_{Oi} = \vec{L}_{Of}. \quad (12.157)$$

El momentum angular inicial ya lo hemos calculado; es la contribución de la bala. El momentum angular final lo podemos calcular de dos formas. Una es seguir considerando la barra y la bala como objetos separados y luego

$$\vec{L}_{Of} = \{I_{O,bala} + I_{O,barra}\} \vec{\omega}_f = \left\{ m d^2 + \frac{1}{3} M R^2 \right\} \vec{\omega}_f. \quad (12.158)$$

Dado que estos vectores tienen sentido  $\hat{z}$ , la conservación de momentum angular conduce a

$$d p = \left\{ m d^2 + \frac{1}{3} M L^2 \right\} \omega_f. \quad (12.159)$$

Esta es toda la información que la conservación de momentum angular nos puede entregar.

Ahora podemos usar conservación de la energía. **Un error común es pensar que se puede aplicar la conservación de energía en todo el movimiento, desde antes de la colisión hasta que el sistema termina su movimiento.** El fallo ocurre al no darse cuenta que hay una parte del movimiento donde no se conserva la energía. En este caso, en la colisión misma, dado que es inelástica. En este problema sí se conserva la energía antes y después de la colisión. Por lo tanto, usando la figura (c) tenemos que

$$\frac{1}{2} I_{O,i} \omega_i^2 - m g d - M g \frac{L}{2} = \frac{1}{2} I_{O,f} \omega_f^2 - M g (d - d \cos \theta) - m g \left( \frac{L}{2} - \frac{L}{2} \cos \theta \right). \quad (12.160)$$

En esta ecuación  $\omega_i$  es la velocidad angular que obtuvimos en la Ec. (12.159). También, el momento de inercia calculado anteriormente es el mismo,  $I_{O,i} = I_{O,f} = I_O$ . Además, dado

que la barra-bala se detiene, se debe cumplir que  $\omega_f = 0$  rad/s. Por lo tanto, simplificando obtenemos que

$$\frac{1}{2} I_O \omega_i^2 = m g d \cos \theta + M g \frac{L}{2} \cos \theta. \quad (12.161)$$

Es decir, teniendo en cuenta que  $p = m v_i$  y que  $v_i = \omega_i d$ ,

$$\frac{d^2 m^2 v_i^2}{2 I_O} = m g d \cos \theta + M g \frac{L}{2} \cos \theta \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{(m d^2 + \frac{1}{3} M L^2) (2 m g d + M g L) \cos \theta}{m^2 d^2}}. \quad (12.162)$$

Evaluando obtenemos que la velocidad inicial es  $v_i = 7,7$  m/s.

Notar que si hubiese elegido que  $v_i = \omega_i d$  habría cometido un error. ¿Por qué? Medita.

Te dejo como ejercicio ver cómo hacer el mismo cálculo considerando primero calcular la posición del nuevo centro de masa. Sí, esta es la segunda forma.

### Ejemplo 2 <sup>11</sup>

**Este ejemplo va un poco más allá de lo que se exige en este curso. Probablemente al leer estas palabras te dirás que debes saltarlo. Mi recomendación es que lo estudies, analices y comprendas. Aparte de ser un bonito desafío, aprenderás mucho.**

Dos objetos puntuales de masas  $m_a = 2M$  y  $m_b = M$  se ubican como se muestra en la Fig. 12.120. Los dos objetos están inicialmente orientados a lo largo del eje  $y$  y conectados por una barra de masa despreciable de longitud  $d$ , formando un cuerpo rígido. Sobre el objeto de masa  $M$  se aplica una fuerza de magnitud  $F$  a lo largo de la dirección  $x$ , en el instante  $t = 0$  durante un corto intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Supón que no hay gravedad en este problema. **Recuerda que siempre debes dar tu respuesta en términos de los parámetros y datos conocidos.**

¿Cuál es la magnitud de la velocidad angular del sistema después de la colisión?

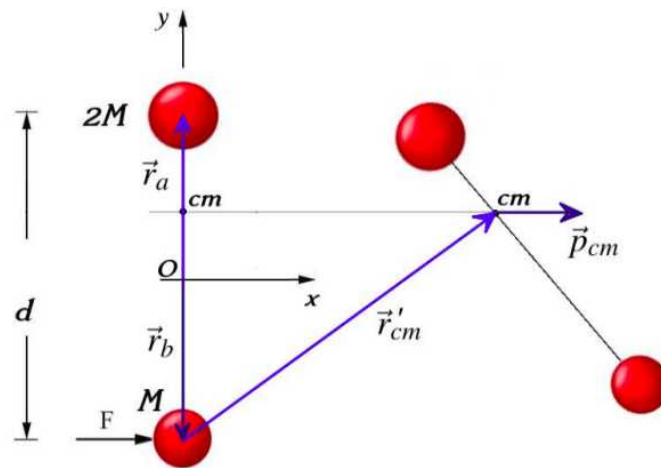


Figura 12.120: Dos masas unidas por una barra sin masa

### Solución

<sup>11</sup>Basado en un problema de un curso del MIT



Primero, ubiquemos la posición del centro de masa respecto del origen  $O$  en la figura. Por la definición, es

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_a \vec{r}_a + m_b \vec{r}_b}{m_a + m_b} = \frac{d}{6} \hat{y}. \quad (12.163)$$

El impulso producido por la fuerza externa es

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t \hat{x} = \Delta \vec{p}_{cm} = m_{total} \vec{v}_{cm} = 3M \vec{v}_{cm}. \quad (12.164)$$

De aquí obtenemos entonces la velocidad del centro de masa. Notar que después del choque no hay más fuerzas externas actuando sobre el sistema, luego la velocidad del centro de masa debe permanecer constante. Esto está indicado en la figura, donde se ha marcado la trayectoria del centro de masa.

Debido a que la única fuerza actuando durante el choque es  $\vec{F}$ , y dado que actúa sobre la masa  $m_b$ , el torque alrededor de ese punto será cero. El momentum angular calculado alrededor de ese punto, inicialmente es cero. Por otro lado, el momentum angular orbital final respecto del mismo punto es la **suma del momentum angular debido a la traslación del centro de masa, más el momentum angular calculado alrededor del centro de masa**<sup>12</sup>. Esto es,

$$\vec{L}_f = \vec{r}'_{cm} \times \vec{p}_{cm} + \vec{L}_{cm} = \vec{r}'_{cm} \times 3M \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}. \quad (12.165)$$

Por conservación de momentum angular, este vector es cero. Por lo tanto,

$$\vec{0} = \vec{r}'_{cm} \times 3M \vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}. \quad (12.166)$$

Para el producto vectorial, solo contribuye la componente de  $\vec{r}'_{cm}$  a lo largo del eje  $y$ . Su módulo es  $r'_{cm} = d/2 + d/6 = 2d/3$ . Entonces,

$$\frac{2d}{3} M v_{cm} \hat{z} = \vec{L}_{cm}. \quad (12.167)$$

Por otro lado, el momentum angular alrededor del centro de masa es

$$\vec{L}_{cm} = I_{cm} \vec{\omega}, \quad (12.168)$$

es decir,

$$\vec{L}_{cm} = \left\{ 2M \left( \frac{d}{3} \right)^2 + M \left( \frac{2d}{3} \right)^2 \right\} \omega \hat{z} = \frac{2}{3} M d^2 \omega \hat{z} \quad (12.169)$$

Por lo tanto, reemplazando en (12.166) y usando (12.164) obtenemos que la frecuencia angular es

$$\omega = \frac{F \Delta t}{M d}. \quad (12.170)$$

¿Cómo cambia el problema si en vez de una barra delgada, de masa despreciable, se usa una barra de masa  $m$ ? Te dejo esta pregunta para tu entretenimiento.

<sup>12</sup>Como ves, esto no es más que la expresión de la dinámica de un sólido rígido: el movimiento de un sólido rígido se descompone en el movimiento de traslación del centro de masa más una rotación alrededor del centro de masa

## 12.11 El giróscopo

El trompo es un juguete muy antiguo que se hace girar sobre una punta que se equilibra gracias al giro alrededor de un eje que pasa por su centro de masa.



Figura 12.121: Trompo rotando

El giróscopo o giroscopio es un “juguete” que funciona de modo similar al trompo. Fue inventado en 1852 por el físico francés Jean-Bernard-Léon Foucault <sup>13</sup> como parte de una investigación acerca de la rotación de la Tierra. Éste es un dispositivo mecánico que sirve para medir, mantener o cambiar la orientación en el espacio de algún aparato o vehículo. Su diseño consiste en un disco de rotación libre llamado rotor, montado en un eje giratorio en el centro de masa de una rueda más grande y estable, como muestra la Fig. 12.122. Si está montado sobre un soporte tal que minimiza cualquier momento angular externo, o si simplemente gira libre en el espacio, el giróscopo conserva la orientación de su eje de rotación. En cambio, cuando el giróscopo se somete a un torque que tiende a cambiar la orientación de su eje de rotación, el giróscopo cambia de orientación.

El siguiente es un muy buen video que muestra un giróscopo; recomiendo que lo veas con detenimiento: [https://www.youtube.com/watch?v=cquvA\\_IpEsA](https://www.youtube.com/watch?v=cquvA_IpEsA).

Si nos sentamos en una silla giratoria, cuyo eje de giro no posee fricción, y sostenemos una rueda de bicicleta que gira rápidamente, con su eje horizontal, el momentum angular apuntará por supuesto en la dirección horizontal, como indica la Fig. 12.123 (a). Si giramos el eje de la rueda hacia la vertical, entonces la rueda tendría un momento angular sobre el eje vertical, porque ahora está girando alrededor este eje, como indica la Fig. 12.123 (b). Esto significa que habrá un cambio de momentum angular en el tiempo  $\Delta \vec{L}/\Delta t$ , lo que implica que debe aparecer un torque sobre el sistema, es decir, la rueda, nosotros mismos y la silla. Debido a que **inicialmente** no hay momentum angular alrededor del eje vertical, y sí hay momentum angular **final** alrededor del eje vertical, necesariamente debe haber una rotación del sistema que es contraria a la rotación final de la rueda. Esa rotación, llamada **precesión**, se origina por acción del torque antes mencionado, de modo tal que el momentum angular final alrededor del eje vertical es cero y el momentum angular del sistema se conserva.

Más detalladamente, la Fig. 12.124 muestra la rueda girando a lo largo del eje  $y$ . Por lo tanto, su velocidad angular y momentum angular yacen en esa dirección. Ahora, la persona de la figura anterior rota la rueda alrededor del eje  $x$  a una pequeña velocidad angular  $\omega$  (ver Fig. 12.123 (b)). Después de un intervalo pequeño  $\Delta t$ , el eje ha girado a una

<sup>13</sup><http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Foucault.html>



Figura 12.122: Gir6scopo de juguete

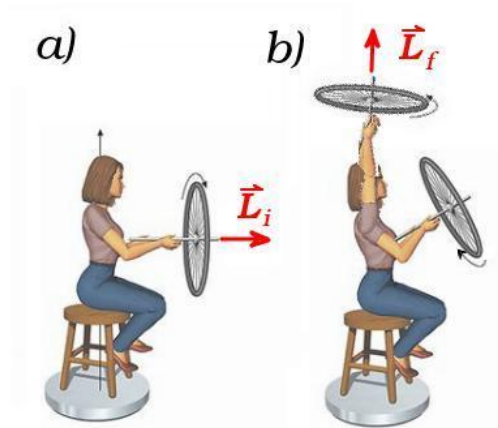


Figura 12.123: Giroscopio con rueda de bicicleta

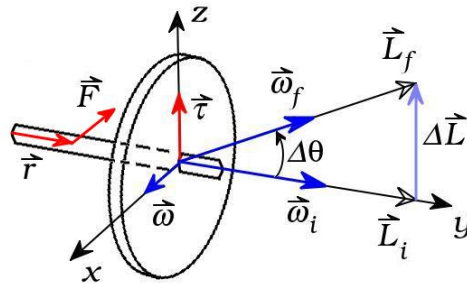


Figura 12.124: Cambio de momentum angular y torque sobre rueda rotante que est1 siendo lavantada

nueva posici3n, inclinada en un 1ngulo peque1o  $\Delta\theta$  con la horizontal. Despreciamos el momentum angular debido a ese giro, por ser un giro lento. Como muestra la Fig. 12.124, el momentum angular ha cambiado de  $\vec{L}_i$  a  $\vec{L}_f$ , sin cambiar su magnitud. Luego,

$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i \implies \Delta L = L_i \Delta\theta, \quad (12.171)$$

de donde deducimos que el torque que provoca la contrarotaci3n es

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L_i \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = L_i \omega. \quad (12.172)$$

Claramente, el vector  $\vec{\tau}$  tiene el mismo sentido que el vector  $\Delta\vec{L}$ . De la expresión anterior no queda otra opción que escribir

$$\vec{\tau} = \vec{\omega} \times \vec{L}_i. \quad (12.173)$$

En la figura se muestran estos tres vectores.

Este torque lo realiza quien tiene tomada la rueda por el eje, al intentar mover la rueda hacia arriba. Parte de ese torque se muestra en la Fig. 12.124, con una fuerza  $\vec{F}$  aplicada. Por la tercera ley de Newton, tiene que haber un torque opuesto sobre las manos, y por tanto el sistema completo, que hace nos hace rotar.

### Aplicaciones:

En 1905, Hermann Anschütz-Kaempfe desarrolló el primer girocompás, un instrumento usado en navegación, que utiliza entre otras cosas un giróscopo que rota muy rápidamente. Este instrumento permite encontrar la dirección geográfica de forma automática, con la ayuda de la rotación de la Tierra. El girocompás está diseñado para utilizar el efecto de la precesión del giróscopo.

Mientras todavía era un estudiante de pregrado en física, en 1907, Robert H. Goddard<sup>14</sup>, el padre de la cohetaría en USA, escribió un artículo en el que proponía un método para equilibrar los aviones mediante el giróscopo.

En 1912, Lawrence Sperry desarrolló el piloto automático giroscópico. Éste ayuda a estabilizar un avión y mejora la estabilidad del mismo.

### 12.11.1 Ejercicios

1. Una pequeña partícula de masa de 3 kg se mueve en el plano x-y. Su velocidad es  $\vec{v} = 5\hat{x}$  m/s. Cuando está en la posición  $\vec{r} = -3\hat{x} + 2\hat{y}$  m, ¿cuál es el momento angular de la partícula respecto del origen?

2. Un disco con un momento de inercia de  $1 \text{ kg m}^2$  gira alrededor de un eje a través de su centro de masa con una velocidad angular de 10 rad/s. Un disco idéntico que no gira se desliza a lo largo del eje hasta que hace contacto con el primer disco, como muestra la Fig. 12.125. Si los dos discos se pegan, ¿cuál es su velocidad angular combinada?

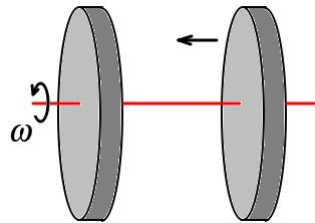


Figura 12.125: Dos discos rotando

3. Un disco plano de masa  $M$  y radio  $R$  gira inicialmente con una velocidad angular de  $\omega_0$ . Se deja caer un anillo de masa  $m$  y radio  $r$  sobre el disco giratorio, cuidando que

<sup>14</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Robert\\_H.\\_Goddard](https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_H._Goddard)

los ejes coincidan. Despu6s de un un corto tiempo de deslizamiento, los dos objetos rotan coaxialmente (es decir, con un mismo eje) junto con una velocidad angular final de  $\omega_f$ . Encuentra una expresi3n para  $\omega_f$  en t6rminos de los otros par6metros del sistema.

4. Un sat6lite artificial se coloca en una 3rbita el6ptica sobre la tierra. Su punto de aproximaci3n m6s cercana es  $8,37 \times 10^6$  m del centro de la tierra, y su punto de mayor distancia es  $25,1 \times 10^6$  m del centro de la Tierra. La velocidad del sat6lite en el perigeo es 8.450 m/s. Encuentra la velocidad del sat6lite en el apogeo.

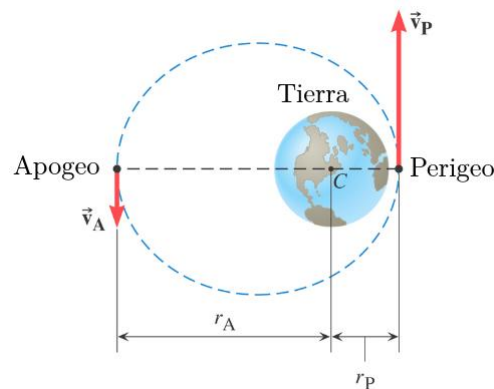


Figura 12.126: Sat6lite orbitando la Tierra

5. Una part6cula de masa  $m$  se mueve con una velocidad constante  $v_0$ ; en una circunferencia de radio  $r_0$  sobre la superficie de una mesa sin rozamiento, como lo muestra la Fig 12.128. La part6cula est6 atada a una cuerda que pasa a trav6s de un agujero de la mesa. Tirando de la cuerda lentamente hacia abajo, la part6cula se mueve en una circunferencia de menor radio  $r_f$ :

- Determina la velocidad final en funci3n de  $r_0$ ,  $v_0$  y  $r_f$ .
- Determina la tensi3n de la cuerda cuando la part6cula se mueve en una circunferencia de radio  $r$  en funci3n de  $m$ ,  $r$  y el momento angular inicial  $L_0 = m v_0 r_0$ .
- Calcula el trabajo realizado sobre la part6cula por la tensi3n  $T$  integrando  $T dr$  desde  $r_0$  a  $r_f$ . Expresar la respuesta en funci3n de  $r$  y  $L_0$

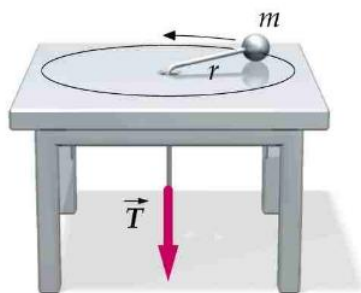


Figura 12.127: Masa rotando en una mesa



Figura 12.128: Rueda de alfarero

6. La rueda de alfarero gira alrededor de un eje vertical a trav6s de su centro a una frecuencia de 2 rev/s. La rueda puede considerarse un disco uniforme de masa 4,8 kg y

diámetro 0,36 m. Luego, el alfarero arroja un trozo de arcilla de 3,1 kg, aproximadamente con forma de disco plano de radio 11 cm, en el centro de la rueda giratoria.

- ¿Cuál es la frecuencia de la rueda después de que la arcilla se adhiere a ella?
- ¿Qué fracción de la energía mecánica original de la rueda se pierde por fricción después de la colisión con la arcilla?

7. Supongamos que un niño se baja de un carrusel giratorio, como muestra la Fig. 12.129. ¿La velocidad angular del carrusel aumenta, disminuye o permanece igual si:

- Salta radialmente?
- Salta hacia atrás para aterrizar inmóvil en el suelo?
- Salta hacia arriba y se cuelga de la rama de un árbol?
- Salta hacia adelante, tangencial al borde? Explica tus respuestas.

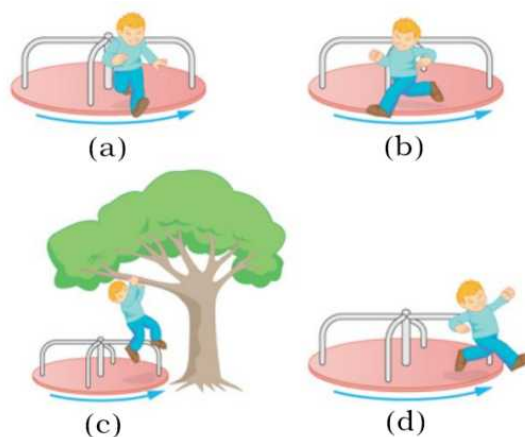


Figura 12.129: Niño saliendo de formas distintas desde un carrusel.

8. Por dos discos sólidos uniformes con pequeños agujeros en sus centros pasa un eje vertical sin fricción, como muestra la Fig. 12.130. El disco inferior, de radio  $2R$ , gira a una velocidad  $\omega_0$  alrededor del eje, mientras que el otro disco superior, de radio  $R$ , se mantiene en reposo directamente encima de él. Ambos discos están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor. El disco más pequeño se deja caer encima del más grande, y después de un corto tiempo la fuerza de roce cinética entre los dos discos los lleva a ambos a la misma velocidad de rotación, que es una fracción de la velocidad original del disco más grande. Encuentra esta fracción, y la fracción de la energía cinética original que se ha perdido.

9. En la Fig. 12.131 se muestra un pequeño proyectil de masa  $m$  viaja a una velocidad constante  $v_0$  hacia un disco estacionario de masa  $M$  y radio  $R$  que puede girar libremente sobre un pivote a través de su eje en  $O$ . Antes del impacto, el proyectil viaja a lo largo de una línea desplazada una distancia  $b$  por debajo del centro del disco. El proyectil golpea el disco y se pega al punto  $B$ .

- Antes del impacto, ¿cuál es el momento angular total  $L_0$  del proyectil sobre  $O$ ?
- ¿Cuál es la velocidad angular  $\omega$  del disco y del sistema de proyectiles justo después del impacto?
- ¿Cuál es la energía cinética del sistema después del impacto?
- ¿Cuánta energía mecánica se pierde en la colisión?

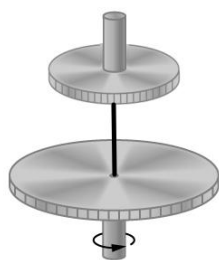


Figura 12.130: Dos discos rotando

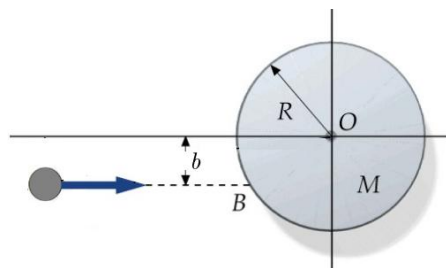


Figura 12.131: Proyectil sobre disco estacionario

10. Mientras se reduce la masa de una bicicleta de carreras, el mayor beneficio se obtiene al reducir la masa de los neumáticos y las llantas. ¿Por qué esto permite que un ciclista logre mayores aceleraciones que una reducción idéntica en la masa del cuadro de la bicicleta?

11. Una varilla rígida de masa  $M$  y longitud  $L$  es pivotada sin fricción en su centro. Dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$  están conectadas a sus extremos. La combinación gira en un plano vertical con una velocidad angular  $\omega$ , como muestra la Fig. 12.132.

- Encuentra una expresión para la magnitud del momento angular del sistema.
- Encuentra una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando la barra forma un ángulo con la horizontal

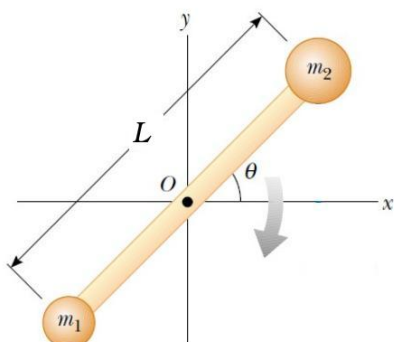


Figura 12.132: Dos esferas unidas por barra

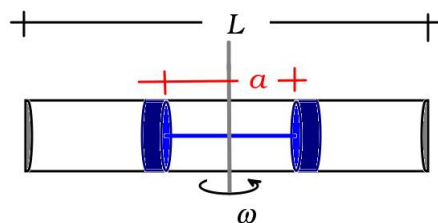


Figura 12.133: Tubo cilíndrico girando

12. La Fig. 12.133 muestra un tubo cilíndrico hueco de masa  $M$ , longitud  $L$  y momento de inercia  $\frac{ML^2}{10}$ . Dentro del cilindro se encuentran dos masas  $m$ , separadas una distancia  $a$  y atadas a un vástago central por una cuerda delgada. El sistema puede girar alrededor de un eje vertical a través del cilindro. Cuando el sistema gira con la velocidad angular  $\omega$ , las cuerdas mantienen las masas se rompen súbitamente. Encuentra las expresiones correspondientes a la velocidad angular final y a las energías inicial y final del sistema. Supón que en las paredes interiores del cilindro no hay roce.

Ayuda: Para resolver este problema necesitas conocer el momento de inercia de un disco alrededor de un eje pasa por su diámetro.



13. En una pesadilla sueñas que eres un hámster llamado Neutrini corriendo en una rueda de ejercicio, como muestra la foto de la Fig. 12.134. Los hámsters típicos tienen una masa de 300 g y pueden correr a velocidades de 3,2 m/s. Una rueda de ejercicio típica tiene un momento de inercia sobre su centro de  $0,25 \text{ kg m}^2$  y un radio de 12,0 cm. Puedes suponer que el hámster es una masa puntual. ¿Qué tan rápido debería haber girado la rueda en tu sueño?



Figura 12.134: La pesadilla del hámster

14. Una barra cilíndrica de radio  $r = 2,0 \text{ cm}$ , largo  $L = 25,0 \text{ cm}$  y masa  $m = 125 \text{ g}$  está en posición vertical en el borde de un disco de masa  $M = 10,0 \text{ kg}$  y radio  $R = 25,0 \text{ cm}$  que está girando con velocidad angular  $15,0 \text{ rad/s}$ , como se muestra desde arriba en la figura (a) y lateralmente en la figura (b). La barra cae de lado como se muestra en el diagrama (c), de modo que cae justo sobre el diámetro. ¿Cuál es la nueva velocidad angular del sistema?

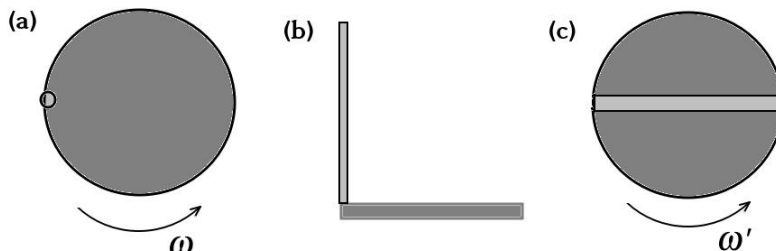


Figura 12.135: Barra que cae sobre cilindro rotante

15. Dos objetos,  $A$  y  $B$ , están inicialmente en reposo. Los objetos tienen la misma masa y radio. El objeto  $A$  es un disco sólido uniforme, mientras que el objeto  $B$  es una rueda de bicicleta que puede, para este propósito, ser considerado como un anillo. Cada rueda gira sin fricción alrededor de un eje a través de su centro, perpendicular al plano del disco / rueda. Los torques aplicados son idénticos y resultan de tirar de una soga enrollada en cada rueda, como muestra la figura. Cada torque neto se elimina una vez que el objeto al que se aplica se ha acelerado y hecho una rotación completa.

- Después de eliminar los torques netos, ¿qué objeto tiene más energía cinética?
- Después de que se eliminan los torques netos, ¿qué objeto tiene más velocidad angular?
- Después de eliminar los torques netos, ¿qué objeto tiene más momentum angular?

16. Se dispara una flecha de masa de 0,5 kg contra una puerta de masa  $M$ , sin cerrojo, y golpea la puerta perpendicularmente a su cara, a una distancia de 1,0 m de las bisagras y a



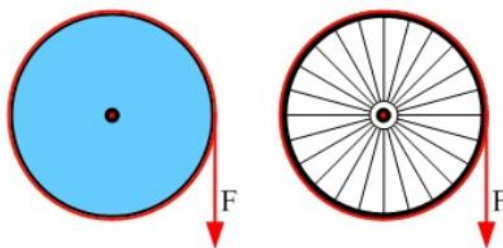


Figura 12.136: Dos ruedas son rotadas por el mismo torque

una velocidad de impacto de 60 m/s. La flecha se incrusta en la puerta, que tiene un ancho de 1,3 m y una masa de 600 kg. Encuentra la velocidad angular de la puerta y la velocidad lineal de la flecha justo después del impacto. El momento de inercia de la puerta respecto un borde es  $I = \frac{1}{3} M a^2$ , donde  $a$  es el ancho de la puerta. Ignora la fricción en las bisagras.

17. Una persona sentada en una silla que puede girar está inicialmente en reposo y sosteniendo una rueda de bicicleta que gira con su vector de momento angular en la dirección verticalmente hacia arriba y con una magnitud de 20 rad/s. La masa y el radio de la rueda de bicicleta son 5,0 kg y 0,30 m, respectivamente, aproximados como un disco sólido. La masa y el radio promedio de la persona a través de un eje vertical son 90 kg y 0,35 m, respectivamente, aproximados como un cilindro sólido. Si la persona ahora gira la rueda giratoria para que el vector de momento angular esté verticalmente hacia abajo, ¿cuál es la velocidad angular de la persona?



Figura 12.137: Jugando con un giroscopio

18. Supongamos que un niño de masa  $m$  está en el borde del carrusel de radio  $R$  y masa  $M$ , girando junto con el carrusel a velocidad angular  $\omega_i$ . Luego, el niño se mueve a lo largo del pasamanos, es decir radialmente, hasta que está a una distancia  $\frac{R}{3}$  del centro.

a) Encuentra la expresión de la velocidad angular final en término de los parámetros. ¿Cuánto es si  $M = 6m$

b) Si la masa del niño es  $m = 25$  kg, la masa del carrusel es 150 kg, la velocidad angular inicial fue  $\omega_i = 2,0$  rad/s y  $R = 1,5$  m. ¿Cuánto trabajo hizo el niño para moverse a  $\frac{R}{3}$ ?

19. En varios cientos de millones de años a partir de ahora, nuestro Sol comenzará las últimas etapas de su ciclo de vida. Como primer paso, se expandirá en una estrella

gigante roja. El Sol de hoy tiene un radio  $R_{Sol} = 7,0 \times 10^8$  m, un período de rotación  $T = 25,3$  días y una masa  $M_{Sol} = 2,0 \times 10^{30}$  kg. Como gigante roja, tendrá un radio de aproximadamente  $R_{red} = 1,0 \times 10^{11}$  m, pero su masa esencialmente no cambiará.

a) ¿Cuál es el momento angular del Sol hoy? Supón que la densidad del Sol es constante en todo su volumen y que gira como una bola rígida (no es cierto).

b) Suponiendo que la densidad de una gigante roja también es constante en todo su volumen, calcula el período de rotación de la gigante roja.



## 13. GRAVITACIÓN

En el manuscrito de lo que se convertiría en una biografía de Isaac Newton (1642-1727) titulada *Memorias de la vida de Sir Isaac Newton*, escrita por William Stukeley <sup>1</sup>, uno de los primeros biógrafos de Newton, y publicada en 1752, Newton le contó la historia de la manzana a Stukeley, quien la transmitió como tal:

*“Después de la cena, cuando el clima era cálido, salimos al jardín & bebimos té a la sombra de algunos manzanos, & solo él y yo. En medio de otro discurso, me dijo, estaba en la misma situación, como cuando antes, la noción de gravitación le vino a la mente. “¿Por qué esa manzana siempre debe descender perpendicularmente al suelo?”, Pensó para sí mismo: ocasionada por la caída de una manzana, mientras estaba sentado en un estado de ánimo contemplativo: “¿Por qué no debería ir de lado o hacia arriba? pero constantemente al centro de la tierra? Seguramente, la razón es que la tierra la atrae. Debe haber un poder de atracción en la materia. & la suma del poder de atracción en la materia de la tierra debe estar en el centro de la tierra, no en ningún lado de la tierra. por lo tanto, esta manzana cae perpendicularmente o hacia el centro. Si la materia atrae así a la materia; debe ser en proporción a su cantidad. Por lo tanto, la manzana atrae la tierra, así como la tierra atrae la manzana.”*

La historia de la gravitación comenzó mucho antes, sin embargo.

Nicolaus Copernicus <sup>2</sup>, se interesó en la astronomía la matemática cuando a las 18 años entró a la Universidad de Cracovia, en 1491. Sin embargo sus estudios en astronomía principalmente fueron autodidactas y nunca a tiempo completo. Entre los años 1510 y 1514 aproximadamente produjo su libro *Commentariolus* en donde planteó su teoría heliocéntrica del “universo”(sistema solar), contraria a las ideas de la mayoría de los griegos antiguos, liderados por Aristoteles<sup>3</sup>. En aquel trabajo hizo una crítica al intrincado

<sup>1</sup> <http://ttp.royalsociety.org/ttp/ttp.html?id=1807da00-909a-4abf-b9c1-0279a08e4bf2&type=book>

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus\\_Copernicus](https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus)

<sup>3</sup> No fue Copernicus el primero en hacer esa hipótesis; Aristarco de Samos (310 AC-230 AC) ya lo había



Figura 13.1: Manzano de la casa de Newton

modelo de Ptolomeo, crica que ya había sido realizada por el astrónomo, matemático y físico Ibn al-Haytham en el siglo XI <sup>4</sup>. La hipótesis heliocéntrica fue perfeccionada en su libro *De revolutionibus orbium coelestium*.



Figura 13.2: Nicolaus Copernicus



Figura 13.3: Johannes Kepler

Johannes Kepler <sup>5</sup> fue un talentoso matemático y convencido del modelo copernicano, incluso más allá de la posición copernicana estándar, según la cual el nuevo sistema debía considerarse simplemente como un dispositivo computacional y no necesariamente una realidad física. Para buscar apoyo empírico, Kepler hizo uso y estudió los datos astronómicos de Tycho Brahe. Kepler es recordado en la historia de las ciencias sobre todo por sus tres leyes planetarias.

Antes de introducir las leyes de Kepler, hagamos una pausa matemática y hablemos de las curvas cónicas.

## 13.1 Curvas cónicas

Curvas cónicas son aquellas curvas que se forman por la intersección de un plano con un cono recto o doble cono, como se muestra en la Fig. 13.4. La **circunferencia** se obtiene

propuesto

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ibn\\_al-Haytham](https://en.wikipedia.org/wiki/Ibn_al-Haytham)

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes\\_Kepler](https://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler)

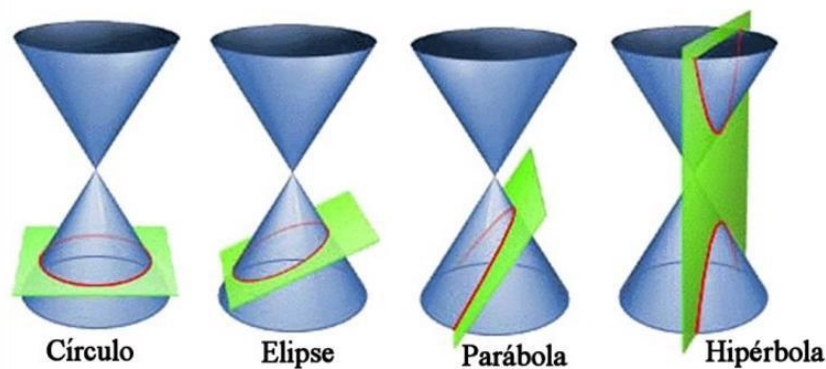


Figura 13.4: Curvas cónicas

cuando se intersecta el cono con un plano paralelo a la base del cono. La **elipse** se obtiene cuando esa intersección ocurre en un ángulo menor que el que forma la base del cono con su generatriz. Una **parábola** se genera cuando el plano que intersecta lo hace con un ángulo paralelo a la generatriz del cono. Finalmente, una **hipérbola** es una curva que se obtiene cortando un (o ambos, si hay dos conos, como en la figura) cono con un plano que tiene un ángulo respecto de la base que es mayor que el ángulo formado por la generatriz.

Nos enfocamos en la elipse que mostramos en la Fig. 13.5, con los parámetros que la definen. La elipse tiene dos ejes de simetría, mostrados como los segmentos  $(-b)b$ , y  $(-a)a$ . Los segmentos  $a$  y  $b$  se llaman **semi-eje mayor** y **semi-eje menor**, respectivamente. Los puntos  $F_1$  y  $F_2$  son los **focos de la elipse** y se ubican a una **distancia focal**  $f$  del centro de la elipse. Ahora, para un punto  $P$  cualquiera sobre la elipse, la suma de las longitudes de sus dos radios vectores desde cada foco es una cantidad constante igual a la longitud  $2a$  del eje mayor. De la figura vemos que

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a. \quad (13.1)$$

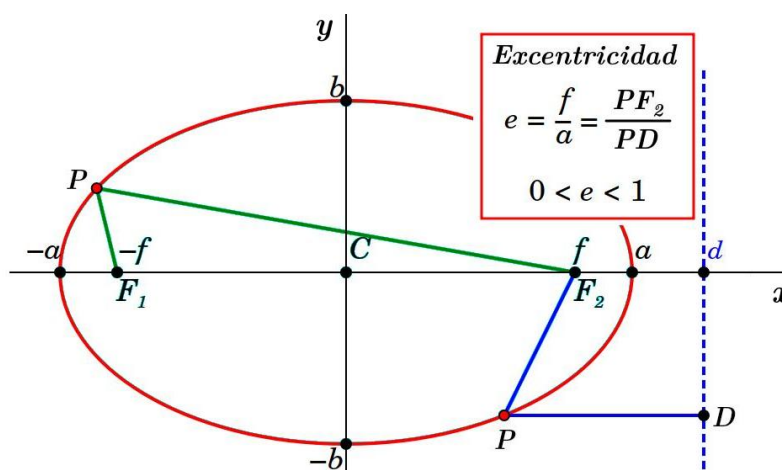


Figura 13.5: Elipse y sus parámetros

La elipse puede ser más o menos “achatada” y esto se cuantifica con el valor que toma



un parámetro llamado **excentricidad**, denotado por  $e$ . La excentricidad de la elipse se define como

$$e = \frac{f}{a} = \frac{\overline{PF_2}}{\overline{PD}}, \quad (13.2)$$

donde  $\overline{PD}$  es la distancia desde el punto  $P$  en la elipse a la **directriz**.

**Observación:** Si una elipse tiene centro  $(0,0)$ , excentricidad  $e$  y eje semi-mayor  $a$  en la dirección  $x$ , entonces sus focos están en  $(\pm ae, 0)$  y sus directrices son líneas paralelas al eje  $y$  que pasan por los puntos  $d = \pm \frac{a}{e}$ .

Una ecuación particular, pero útil para los cálculos, se deduce de la Ec. (13.1) al considerar el punto  $P$  en cualquiera de las posiciones  $-a$  y  $a$  en la Fig. 13.5. Si suponemos que el centro de fuerzas se ubica en el foco  $F_1$ , entonces el punto más cercano, llamado **periapsis** (**perihelio**, en el caso de que el foco es el Sol y **perigeo** en el caso de el punto más cercano a la órbita terrestre), está a una distancia  $r_p = \overline{PF_1}$ , mientras que el punto más alejado, llamado **apoapsis** (**afelio**, en el caso de que el foco es el Sol y **apogeo** en el caso en que el foco es la Tierra), se ubica en  $r_a = \overline{F_1 a} = \overline{PF_2}$ . Luego,

$$r_p + r_a = 2a. \quad (13.3)$$

Notemos que podemos hacer algo más. Sabemos que la excentricidad es  $e = f/a$ , pero  $f = a - r_p$ . Es decir,  $ea = a - r_p$ . Por lo tanto,

$$ea = a - r_p \implies r_p = a(1 - e). \quad (13.4)$$

Reemplazando en la Ec. (13.3), obtenemos

$$r_a = a(1 + e). \quad (13.5)$$

Resulta que la excentricidad se puede escribir solo en términos de los semi-ejes menor y mayor, expresión que resulta ser muy útil en las aplicaciones.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (13.6)$$

Dejamos este resultado sin demostración. ¡Entretiénete con ello!

Observamos de esta expresión que la excentricidad de una elipse es un parámetro tal que  $0 < e < 1$ . Nota que si los semi-ejes mayor y menor son iguales, entonces lo que tenemos es una circunferencia y luego aprendemos que la excentricidad de una circunferencia es  $e = 0$ .

La excentricidad no sólo se puede definir para una circunferencia o elipse. Se puede demostrar que para una órbita parabólica la excentricidad es  $e = 1$ , mientras que para una hipérbola,  $e > 1$ .

## 13.2 Leyes de Kepler

El magnífico trabajo observacional, de minería de datos y su propio intelecto llevó a Kepler a establecer tres leyes para el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

**Primera Ley de Kepler:**

Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.

Con esta ley, Kepler incluso fue más allá de la visión copernicana, que establecía órbitas circulares para el movimiento de los planetas.

**Segunda Ley de Kepler:** El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales.

La descripción gráfica de esta ley se muestra en la Fig. 13.6.

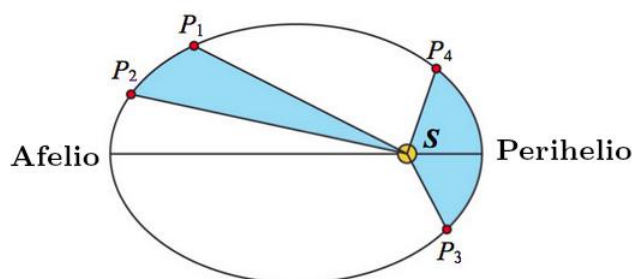


Figura 13.6: Representación gráfica de la segunda ley de Kepler

Como veremos luego, esta ley es simplemente una consecuencia de la conservación del momentum angular.

**Tercera Ley de Kepler:** Para cualquier planeta, el cuadrado del período de la órbita,  $T$  es directamente proporcional al cubo de la longitud del semi-eje mayor,  $a$  de su órbita elíptica.

$$\frac{T^2}{a^3} = C = \text{constante}, \quad (13.7)$$

Para el movimiento de la Tierra,  $a$  es la distancia media de la Tierra al Sol, esto es, 149.597.871 km. Esta distancia es lo que se define como 1 **unidad astronómica**, (AU).

El movimiento de los cuerpos celestes ocurre en órbitas más generales que solo elipses, o su caso particular, la circunferencia. En general, las órbitas forman curvas cónicas, como muestra la Fig. 13.7 (a). Data real de la órbita del recientemente descubierto cometa Borisov muestra que su órbita es hiperbólica <https://www.youtube.com/watch?v=vqMJ03DHOfg>, como muestra la figura (b); ¡es un objeto que proviene desde fuera del sistema Solar!

## 13.3 Ley de Gravitación Universal de Newton

La ley gravitación universal de Newton establece que cada partícula con masa atrae a todas las demás partículas del universo, de forma instantánea, con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

Gracias al apoyo y ayuda de Edmond Halley, su resultado fue publicado en 1687 en su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Sin embargo, Newton al parecer

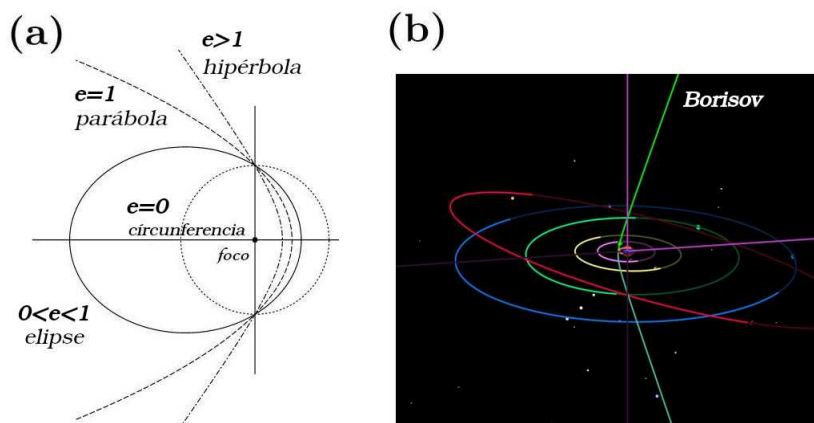


Figura 13.7: (a) Órbitas elíptica, parabólica, hiperbólica y circular. (b) Órbita hiperbólica del cometa Borisov

gestó la gravitación universal alrededor de 1680 y durante 1684 la completó. La historia no ha podido dilucidar si las conversaciones entre Robert Hooke y Newton tuvieron efecto en la formulación de la ley de gravitación universal, cosa que Newton negó, afirmando que esas ideas las concibió antes de 1667. En octubre de 1684 Newton envió a Halley un resumen de los principios de su teoría de la gravedad, *De Motu Corporum in Gyrum* (Sobre el movimiento de los cuerpos en órbita), donde enuncia sus ideas.

La ecuación para la gravitación universal se expresa matemáticamente como

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (13.8)$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza gravitacional que actúa entre dos **objetos puntuales**,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de los objetos,  $r$  es la distancia entre los centros de sus masas y  $G$  es la constante de gravitación universal. El signo menos en la expresión indica que la fuerza de gravedad es atractiva. Si elegimos un sistema de referencia con origen en la partícula 1, de modo que el vector de posición posiciona a la partícula 2, entonces eso define también el sentido del vector unitario,  $\hat{r}$ .

Henry Cavendish <sup>6</sup> fue un magnífico químico y físico británico, hombre de mucha fortuna (en libras esterlinas), que ideó una forma experimental de chequear la ley de gravitación universal de Newton ... sin proponérselo. Durante los años 1797 y 1798, Cavendish se propuso medir la densidad de la Tierra, y para ello ideó una balanza de torsión, con la cual podía medir el torque causado por la atracción entre dos masas. Con un experimento muy bien diseñado y tomando en cuenta las fuentes de posibles perturbaciones, logró medir la fuerza entre las masas y con ello, por primera vez, dar un valor para la constante de gravitación universal:  $6,754 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ . Podemos comparar este valor con el valor más preciso que se tiene hoy en día:  $6,67428 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ . Impresionante, ¿verdad? Efectivamente lo es. Debemos pensar en un experimento hecho con mucha imaginación, con pocos recursos experimentales comparados a los actuales, y hace más de 200 años. Sin embargo, aún cuando es impresionante la comparación, la precisión actual del valor de  $G$  es poco precisa (solo se conoce con una precisión de  $10^{-4}$ , como puedes deducir del valor dado) comparada con el valor de la **constante de**

<sup>6</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Henry\\_Cavendish](https://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Cavendish)



**estructura fina**,  $\alpha$ . Esta constante es adimensional y caracteriza la fuerza de la interacción electromagnética entre partículas cargadas. Se conoce con una precisión de  $10^{-10}$ .

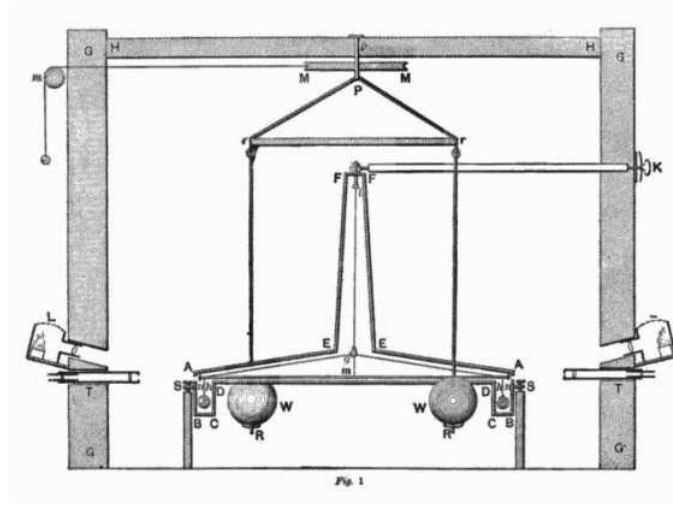


Figura 13.8: Experimento de Cavendish

Por otro lado, la dependencia de la gravedad con la distancia al cuadrado entre las fuentes (masas) permanece sin ser testada a muy cortas y muy largas distancias. A la distancia entre la Tierra y la Luna, sí ha sido probada con muy buena precisión, de  $10^{-10}$ . Esto que es muy bueno, se debe comparar con la precisión de  $q < 10^{-16}$  para la **ley de Coulomb** entre cargas puntuales cargadas eléctricamente, en reposo relativo,  $F \propto \frac{1}{r^{2+q}}$ , que obviamente también es una ley de fuerza que va como el inverso del cuadrado de la distancia.

En la Fig. 13.9 (a) se muestra  $\vec{F}_{12}$ , la fuerza con la que la partícula 1 atrae a la partícula 2. De acuerdo a la ley de gravitación, se escribe

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}. \quad (13.9)$$

En la Fig. 13.9 (b),  $\vec{F}_{21}$  es la fuerza con la que la partícula 2 atrae a la partícula 1. En este caso

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}. \quad (13.10)$$

De la figura, vemos que  $r_{12} = r_{21} = r$  y que  $\hat{r}_{21} = -\hat{r}_{12}$ . Por lo tanto,  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Es decir, la fuerza con la que la partícula 1 atrae a la partícula 2 tiene la misma magnitud que la fuerza con la que la partícula 2 atrae a la partícula 1. Además, ambas actúan sobre la misma línea de acción y actúan simultáneamente. Lo que estamos demostrando es que **la fuerza gravitatoria satisface la tercera ley de Newton**. Observa que la simultaneidad de la interacción es un aspecto importante aquí; sin ella, no se satisfaría la tercera ley.

Es interesante recordar una cita de Newton, sacada de una carta a Richard Bentley, el 25 de febrero de 1693<sup>7</sup>:

“Que un cuerpo pueda actuar sobre otro a distancia a través del vacío sin la mediación de ninguna otra cosa ... es para mí un absurdo tan grande que creo que ningún hombre

<sup>7</sup><http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/THEM00258>

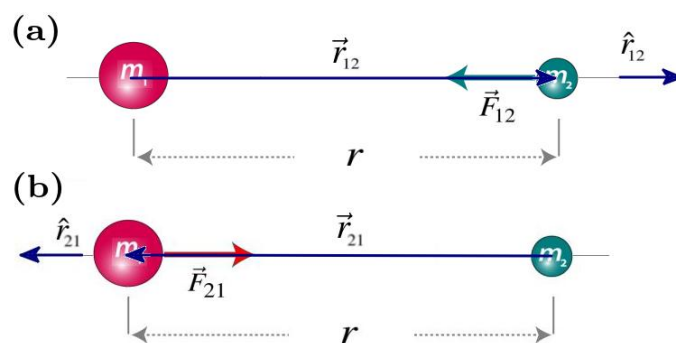


Figura 13.9: Ley de gravitación universal

que tenga en cuestiones filosóficas alguna facultad competente de pensamiento puede caer jamás en eso.”

Ya ves, hasta Newton tenía dudas de acerca de su propia teoría.

## 13.4 Teorema del cascarón esférico

En la Fig. 13.9 se muestran dos objetos esféricos que se atraen por gravedad. Esos cuerpos no necesitan ser puntuales, como tampoco lo son la Tierra y la Luna o la Tierra y el Sol. Para comprender por qué se puede utilizar esta ley para objetos no puntuales, pero con simetría esférica, analizamos el llamado teorema del cascarón esférico.

Este teorema debido a Isaac Newton establece que:

*Un objeto esféricamente simétrico afecta a otros objetos gravitacionalmente como si toda su masa estuviera concentrada en su centro. Si el objeto es un cascarón esféricamente simétrico (es decir, una bola hueca), entonces la fuerza gravitacional neta sobre un cuerpo dentro de él es cero.*

En palabras de Newton <sup>8</sup>

textit Si a cada punto de una superficie esférica hay fuerzas centrípetas iguales que disminuyen en la proporción duplicada de las distancias desde esos puntos; Digo que un corpúsculo colocado dentro de esas superficies no será atraído por esas fuerzas de ninguna manera.

y

textit Las mismas cosas que supuse anteriormente, digo, que un corpúsculo colocado fuera de las superficies esféricas es atraído hacia el centro de la esfera con una fuerza recíprocamente proporcional al cuadrado de su distancia desde ese centro.

Usar un cascarón con simetría esférica tiene que ver con el hecho de que una esfera se puede generar sumando cascarones esféricos concéntricos infinitesimales, como las capas de una cebolla. Ya sabemos que sumar elementos infinitesimales significa hacer una suma continua, es decir una integral.

<sup>8</sup>[https://The\\_Mathematical\\_Principles\\_of\\_Natural\\_Philosophy\\_\(1846\)/BookI-XII](https://The_Mathematical_Principles_of_Natural_Philosophy_(1846)/BookI-XII)

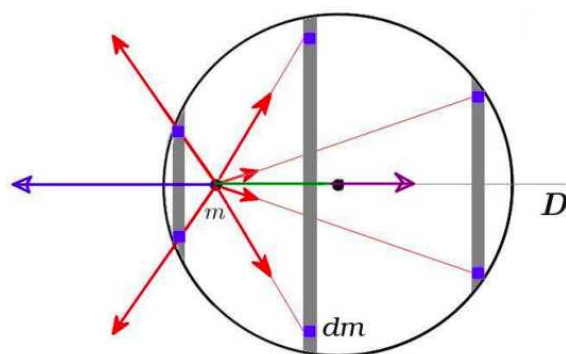


Figura 13.10: Cascarón esférico con masa puntual en su interior.

Consideremos la Fig. 13.10. En ella se muestran tres franjas de un cascarón esférico<sup>9</sup>. En cada franja se ha elegido un punto y su simétrico, correspondiente a un determinado elemento de masa,  $dm$ . Alejado del centro del cascarón esférico se encuentra una masa puntual  $m$ . Sobre ella, cada elemento de masa de cada una de las franjas ejerce una fuerza dada por la ley de gravitación de Newton, las que han sido dibujadas en color rojo. Dado que los elementos de masa en cada franja son simétricos, las contribuciones de las fuerzas, perpendiculares a la línea que une el punto central y la masa  $m$  (denotada por  $D$ ), se anulan de a pares. Luego, la resultante de las fuerzas se ubican a lo largo de la línea  $D$ . Esquemáticamente, se observa que las fuerzas resultantes, en color azul y morado se anulan.

Dado que una esfera puede considerarse como una colección de cascarones esféricos infinitesimalmente delgados, concéntricos, se puede demostrar como un Corolario que la fuerza ejercida en un objeto dentro de una esfera sólida depende solo de la masa de la esfera dentro del radio en el que se encuentra el objeto. Es decir toda la masa ubicada a un radio mayor que aquel en el que se encuentra el objeto no contribuye con una fuerza a un objeto dentro de ellos. ¡Si la Tierra fuese hueca, nos moveríamos de modo similar a un astronauta!

La fuerza gravitacional neta que una capa esférica de masa  $M$  ejerce sobre un cuerpo de masa  $m$  fuera de esa capa es la suma vectorial de las fuerzas gravitacionales actuadas por cada elemento del cascarón, de masa  $dM$ , sobre el objeto exterior, como muestra la Fig. 13.11. Estas fuerzas se suman (integran) para dar una fuerza neta que es tal como si la masa  $M$  se concentrara en punto, el centro de masa. Luego, el problema se convierte en la interacción gravitacional entre dos masas puntuales.

Este teorema da cuenta de una característica general que puede ser demostrada realizando un cálculo matemático exacto, sin importar en qué posición dentro del cascarón esférico se encuentra la masa puntual o qué distribución de masa tenga el cascarón o la masa  $M$ . De hecho, forma parte de un teorema muy importante de la física-matemática que fue formulado por Joseph-Louis Lagrange<sup>10</sup> en 1773 e independientemente por Carl Friedrich Gauss<sup>11</sup> en 1813, conocido como **Ley de Gauss**<sup>12</sup>. De hecho, la ley de Gauss,

<sup>9</sup>Puedes hacer el siguiente experimento en casa, para imaginarte estas franjas: toma una naranja y un cuchillo y pélala con cortes horizontales paralelos, de ancho pequeño. Esas son las franjas.

<sup>10</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis\\_Lagrange](https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange)

<sup>11</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Friedrich\\_Gauss](https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss)

<sup>12</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss's Law>

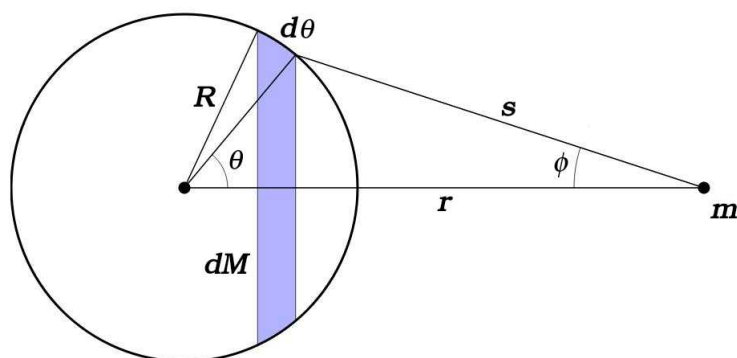


Figura 13.11: Cascarón esférico con masa puntual en su exterior.

que es un **resultado geométrico** es equivalente a la ley de gravitación universal. La clave de su validez radica en la potencia 2 de  $r$ . Probablemente te acordarás de haber visto la ley de Coulomb de la electrostática. Bueno, ¡en el electromagnetismo también es válida la ley de Gauss, como veremos en el Vol. 2 de este libro.

### 13.5 Aceleración de gravedad y campo gravitatorio

Como hemos visto anteriormente en este libro, Newton realizó un maravilloso bosquejo en su *Principia* describiendo el movimiento de un proyectil desde una alta montaña (ver Fig. 13.12), inicialmente tangencial a la superficie de la Tierra, con velocidad inicial cada vez mayor. Observamos que en este diagrama solo falta la órbita hiperbólica de todas las curvas cónicas. Todos estos movimientos son caídas libres si despreciamos cualquier otra fuerza distinta a la gravedad. En efecto, por definición en la física newtoniana, la **caída libre es cualquier movimiento de un cuerpo donde la gravedad es la única aceleración que actúa sobre él**. Luego, lo que hace un satélite o la estación espacial internacional es caer todo el tiempo.

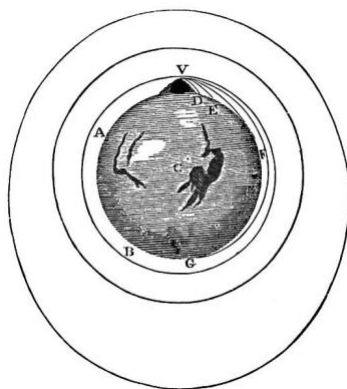


Figura 13.12: Diagramas de lanzamiento de proyectil según Newton

Es interesante recordar las palabras de Newton, escritas en su *Principia*, de que la parábola se obtiene como límite de una elipse:

*Si la elipse, al quitar su centro a una distancia infinita, se degenera en una parábola, el cuerpo se moverá en esta parábola; y la fuerza, que ahora tiende a un centro infinitamente remoto, será constante.*

La demostración matemática de este hecho está fuera del ámbito de este libro. Aún así, debe quedar totalmente claro, que la parábola es una aproximación en este caso, dado que tomamos un elemento muy pequeño de la superficie terrestre.

Al estudiar el movimiento de una partícula que se suelta cerca de la superficie terrestre hemos hecho uso de la cinemática, sin preocuparnos del origen de tal movimiento. Ahora sabemos que es la fuerza de gravedad la razón de tal movimiento y que se describe matemáticamente por la ley de gravitación universal de Newton, donde, para un observador fuera de la distribución de masa, es decir sobre la superficie terrestre, la Tierra aparece como una masa puntual.

Consideremos un objeto de masa  $m$  sobre la superficie de la Tierra, con masa  $M$  y radio  $R$ . La fuerza de gravedad sobre él es

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \Big|_{r=R} = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{r} = \left[ -G \frac{M}{R^2} \hat{r} \right] m = m \vec{g}, \quad (13.11)$$

donde hemos definido la **aceleración de gravedad**,  $\vec{g}$ , a una distancia  $R$  del centro de la Tierra como

$$\vec{g} = -G \frac{M}{R^2} \hat{r}. \quad (13.12)$$

Obviamente es un vector constante, que apunta hacia el centro de la Tierra. Por supuesto, la fuerza  $\vec{F} = m\vec{g}$  es la fuerza de peso.

Ahora podemos hacer algo aún más interesante y simple, pero de profundas consecuencias. Tomamos la expresión para la fuerza, para una masa ubicada en una posición arbitraria sobre la superficie, y la dividimos por  $m$ . Obtenemos,

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}. \quad (13.13)$$

Esta función vectorial de la posición se denomina **intensidad de campo gravitatorio y solo depende de la masa que genera el campo gravitacional**.

¿Qué rol juega el  $m$  en la expresión anterior? Primera respuesta: lo que hace es hacer desaparecer  $m$  de la expresión para la fuerza gravitatoria. Sí, es cierto. Pero la interpretación es algo más profunda. Para testear al campo gravitatorio lo que hacemos es medir su acción. Y esa acción se nota cuando se mide una fuerza sobre una masa. Ahora, esa masa no puede ser muy grande porque en ese caso perturbaría el campo original que queremos medir, ya que esa masa tiene a su vez, su propio campo. Lo que hacemos, entonces, es elegir una masa suficientemente pequeña de modo que no afecte el campo producido por  $M$ <sup>13</sup>. La masa  $m$  se llama en este caso, **masa de prueba** porque sirve para probar cuán intenso es el campo gravitatorio.

<sup>13</sup>Lo que estamos pidiendo es lo que siempre debemos exigir cuando estamos realizando una medición: el aparato de medición, sin importar lo que sea, no debe ser tal que perturbe demasiado lo que quiere ser medido

Comparando las ecuaciones (13.12) y (13.13) notamos que la aceleración de gravedad no es más que la intensidad de campo gravitatorio sobre la superficie terrestre, es decir  $\vec{g} = \mathcal{G}(\vec{R})$ .

La Fig. 13.13 (a) muestra algunos vectores de campo  $\mathcal{G}$  cerca de una distribución de masa con simetría esférica. Como debe ser, todos son vectores radiales, que apuntan hacia el centro de masa y tienen distinto largo (magnitud), dependiendo de a qué distancia del centro se está midiendo el campo. Los vectores de campo no llegan, como límite, hasta la superficie de la distribución de masa. Además, el inicio de un vector dado corresponde al punto donde se está midiendo el campo.

## 13.6 Líneas de campo gravitatorio

En vez de dibujar una infinidad de vectores de campo, podemos usar otra técnica para describir lo mismo. Para ello se introduce el concepto de **línea de campo**, que es una representación de la infinidad de vectores de campo que uno podría dibujar alrededor de una distribución de masa, como muestra la Fig. 13.13 (b). Las líneas de campo no son vectores, pero sí se debe dibujar una flecha para indicar hacia dónde es el sentido del vector campo que representan. Si las líneas de campo están muy juntas entre sí en una zona (su densidad es alta), entonces eso significa que el campo en esa zona del espacio es más intenso que una zona donde las líneas de campo están más separadas entre sí (su densidad es baja). El conocimiento de las líneas de campo permite obtener los vectores campo  $\mathcal{G}$  debido que ellos **son vectores tangentes a las líneas de campo en cada punto**.

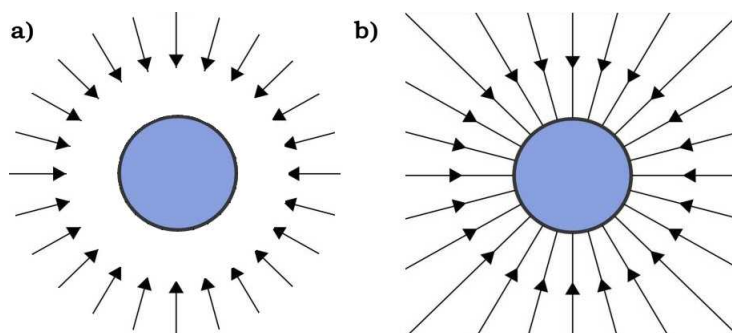


Figura 13.13: Campo gravitatorio y líneas de campo

En la Fig. 13.14 se muestra el campo gravitatorio terrestre cerca de la superficie terrestre. En particular, se muestra el campo gravitatorio en una porción muy pequeña de la superficie. Allí resulta que el campo gravitatorio es un **campo constante en magnitud y sentido**. Es el mismo campo que se obtendría si la Tierra fuese plana<sup>14</sup>.

La distribución de masa de la Fig. 13.13 es una distribución con simetría esférica. Si un objeto con masa se acercase a esta distribución, el campo gravitatorio se vería modificado y eso significa que las líneas de campo ya no serán radiales. Esto se muestra en la Fig. 13.15 para el caso del campo gravitatorio entre la Tierra y la Luna (desperciando el efecto del Sol). Esto ocurre debido a la **superposición**, es decir la suma vectorial de los vectores campo, la intensidad de campo gravitatorio en cada punto del espacio. Esta modificación

<sup>14</sup>¿Tengo que recordar que no lo es?

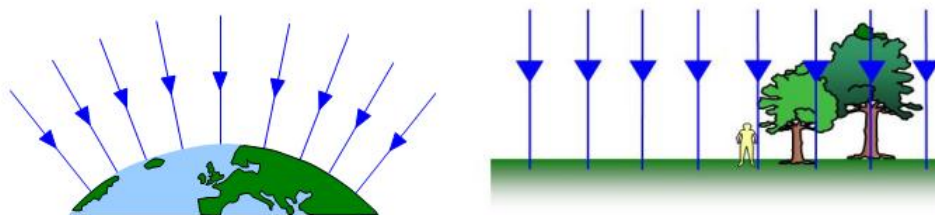


Figura 13.14: Campo gravitatorio cerca de la superficie terrestre

del campo gravitatorio es la que nos ha llevado a definir la masa de prueba, justamente para no modificar el campo que queremos medir.

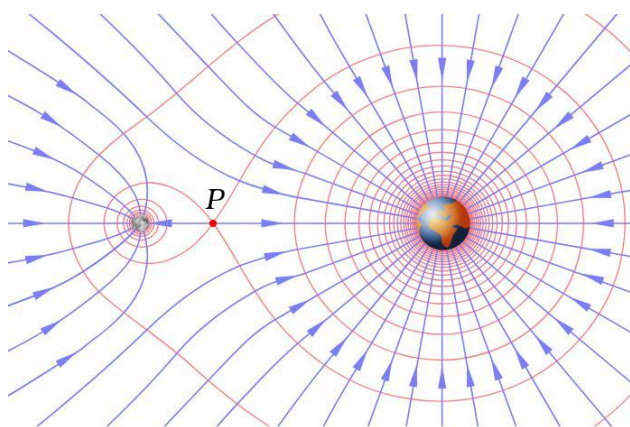


Figura 13.15: Esquema del campo gravitatorio terrestre modificado por la Luna

## 13.7 Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio

Ya conocemos el concepto de energía potencial gravitatoria. Lo hemos usado para dar cuenta de la energía de un cuerpo, su centro de masa, en presencia del campo gravitatorio terrestre. Sabemos que la energía potencial de un cuerpo de masa  $m$  que se encuentra a una altura  $h$  por sobre la superficie terrestre, donde elegimos el valor de energía potencial cero, es

$$U = mgh. \quad (13.14)$$

Por otra parte, la gravedad es una fuerza conservativa, así que usando el teorema trabajo-energía tenemos que

$$-\Delta U = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_i^f G \frac{mM}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = m \int_i^f \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{r}, \quad (13.15)$$

donde en la última igualdad se ha utilizado la definición de campo gravitacional. También se ha reemplazado el elemento de camino, a lo largo de un camino arbitrario,  $d\vec{s}$ , por un elemento de camino a lo largo de la dirección radial  $d\vec{r}$ , debido a que el producto punto en la integral selecciona los elementos de camino a lo largo de esa dirección. Esto se muestra

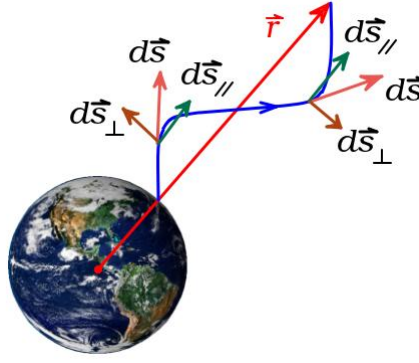


Figura 13.16: Camino directo versus camino curvilíneo

en la Fig. 13.16, donde debería quedar claro que las componentes de  $d\vec{s}$  paralelas al radio vector son las que sobreviven al producto interior.

Podemos hacer la integral de modo fácil si nos movemos desde la superficie de la Tierra a un punto que se encuentra a una altura  $h$ . En este caso  $d\vec{r} = dr \hat{r}$  y

$$\Delta U = \int_R^{R+h} G \frac{mM}{r^2} dr = GmM \int_R^{R+h} \frac{1}{r^2} dr = -GmM \frac{1}{r} \Big|_R^{R+h}, \quad (13.16)$$

donde hemos usado el hecho de que la integral de una función definida por una potencia es

$$\int z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1}, \quad (13.17)$$

para  $n \neq -1$ .

Por lo tanto,

$$\Delta U = -GmM \left( \frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) = GmM \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1}{1+h/R} \right). \quad (13.18)$$

En la última igualdad aparece una expresión que podemos aproximar como sigue<sup>15</sup>

$$\frac{1}{1+h/R} = 1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} - \frac{h^3}{R^3} + \dots \quad (13.19)$$

Debido a que  $h$  es una altura pequeña comparada con el radio de la Tierra,  $R$ , podemos despreciar los términos con potencias superiores a 1. Luego, reemplazando en la Ec. (13.18) obtenemos

$$\Delta U = GmM \frac{1}{R} \left( 1 - \left\{ 1 - \frac{h}{R} \right\} \right) = G \frac{mM}{R^2} h = mgh, \quad (13.20)$$

donde hemos usado la definición de  $g$  dada en la Ec. (13.12).

Nos podemos preguntar: ¿cuánto trabajo gravitacional es necesario para llevar una masa  $M$  a un punto dado, en una zona del espacio donde no hay masas alrededor? Claro, es cero. No hay fuerza gravitatoria con la que lidiar. Pero si ahora nos preguntamos, ¿cuánto

<sup>15</sup>Este es un caso particular de la **expansión de Taylor** de  $(1+\varepsilon)^\alpha$ , con  $\varepsilon \ll 1$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ :  $(1+\varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon + \frac{1}{2}(\alpha-1)\alpha\varepsilon^2 + \dots$ . Le sugiero que juegue con su software de cálculo favorito para convencerse.



trabajo gravitacional es necesario para llevar una masa  $m$  a un punto alejado una distancia  $r$  de la masa  $M$ . Ahora sí que no puede ser cero, porque ya hay un campo gravitacional: la fuerza gravitatoria realiza en trabajo no nulo sobre la masa  $m$ . Basta pensar en el trabajo (contra el campo gravitatorio) que uno mismo, un agente externo, debe hacer sobre una masa para levantarla o bajarla.

¿Cómo lo calculamos? El procedimiento es el siguiente: se debe partir con la masa  $m$  lo más alejada de la masa  $M$  de tal modo que se sienta libre allí. Ese punto no puede ser sino  $r = \infty$ , debido a que allí la fuerza gravitatoria es cero.

**Observación:** Se debe tener claro que “infinito” no significa necesariamente el infinito matemático. Por ejemplo, si quiero medir la fuerza gravitacional que ejerzo sobre una mosca a 200 m de distancia, la fuerza sería del orden de  $10^{-20}$  N. Para (casi) todos los efectos prácticos, eso lo podemos considerar como cero. Y bueno, 200 m no es infinito.

Una vez que tenemos a la masa  $m$  en infinito, debemos llevarla lentamente hacia la cercanía de la masa  $M$ , de modo que no acelere. Para ello hacemos trabajo en contra del campo gravitatorio, sí.

Entonces, el **trabajo realizado por el campo** es

$$-\Delta U = -(U(r) - U(\infty)) = - \int_i^f G \frac{mM}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} = -GmM \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = GmM \left. \frac{1}{r} \right|_{\infty}^r. \quad (13.21)$$

En este cálculo hay una sutileza: El vector de posición apunta desde el origen de coordenadas en  $M$  hacia la posición de la masa  $m$ . Ahora, como nos movemos desde la masa  $m$  hacia la masa  $M$ , el vector  $d\vec{r}$  apunta hacia  $M$ , pero además, y aquí está la sutileza, el vector de posición se acorta en este movimiento. Este es la razón del signo  $+$  en la tercera igualdad.

Entonces, la energía potencial gravitatoria para una distribución de dos masas separadas una distancia  $r$  es

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}, \quad (13.22)$$

referida a un punto en infinito donde es cero. El hecho de que la energía potencial sea negativa significa las dos masas forman un **sistema ligado**. Un sistema ligado es aquel en que es necesario que un agente externo haga trabajo sobre el sistema de modo de separar sus partes y dejarlas libres. No es exactamente lo mismo, pero piensa que has caído en un pozo y alguien tiene que sacarte desde allí.

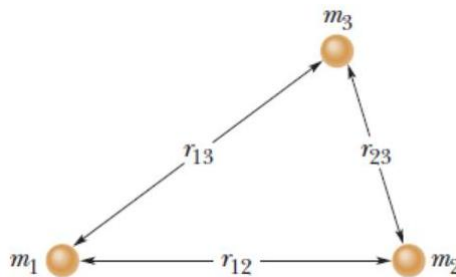


Figura 13.17: Distribución de tres masas

Para determinar la energía potencial de un sistema de  $N$  masas puntuales usamos el principio de superposición lineal. Podemos pensar en esta cantidad como el trabajo

requerido para llevar a las masas desde el infinito y reunir las en la configuración requerida, una a la vez.<sup>16</sup>

$$U_{total}(r) = - \sum_{i < j}^N G \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (13.23)$$

donde  $\sum_{i < j}$  significa que cada índice en la suma llega hasta  $N$ , pero al hacer la suma sobre todos los pares  $(i, j)$  posibles, se debe mantener la restricción de que  $i < j$ . Esta condición nos asegura que no contaremos doble en la suma. En esta misma expresión  $r_{ij}$  es la distancia que hay entre las masas  $m_i$  y  $m_j$ . En la Fig. 13.17 se ilustra la distribución de tres masas, indicando las distancias  $r_{ij}$ . Recuerda que son masas puntuales, así que estas distancias se miden desde los centros de las partículas mostradas en la Fig. 13.17.

Observa que aquí nuevamente encontramos la conexión entre fuerza y energía potencial, debido a que la fuerza de gravedad es conservativa. En efecto,

$$\frac{\partial}{\partial r} U(r) = G \frac{Mm}{r^2} \implies \vec{F} = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} U(r) = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r}. \quad (13.24)$$

Esto no es sorpresa, ya que habíamos visto esto en la Ec. (8.24).

A partir de la Ec. (13.16) podemos independizarnos de la masa  $m$ , como masa de prueba, y escribir una expresión que solo depende de la masa que crea el campo. Es decir, definimos la **diferencia de potencial gravitatorio**

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{m} = - \int_i^f \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{r}. \quad (13.25)$$

Podemos escribir el potencial gravitatorio debido a una masa puntual o, lo que es igual, el potencial debido a una distribución esférica de masa, medido fuera de la distribución (recuerda el teorema del cascarón esférico), como

$$V(r) = -G \frac{M}{r} \quad (13.26)$$

haciendo un cálculo similar al realizado para obtener la Ec. (13.22). ¡Hazlo!

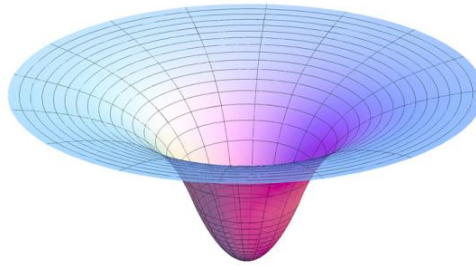


Figura 13.18: Potencial gravitatorio de distribución esférica de masa (Wikipedia)

La Fig. 13.18 muestra una versión en tres dimensiones del potencial debido a una distribución esférica de masa. Algo que debe llamarte la atención es que la figura no da cuenta de la singularidad, es decir la existencia de un valor infinito negativo, que se obtiene

<sup>16</sup>Hay una diferencia de signo entre el trabajo realizado por el campo y el trabajo realizado por un agente externo sobre el campo, para llevar la partícula hasta su posición final

en la Ec. (13.26) en el límite  $r \rightarrow 0$ . Este tipo de singularidades, si bien existen en física clásica, no deberían existir si tomamos en cuenta los aspectos cuánticos. Esto se ha resuelto en la teoría cuántica del electromagnetismo, pero no así en gravitación, donde no existe una teoría cuántica ... ¿aún?

Observa que al escribir la energía potencial y el potencial debemos siempre recordar que **ambas cantidades se definen respecto a un nivel de referencia**, en este caso el infinito. Dicho de otro modo, estas cantidades no tienen sentido absoluto, solo sus diferencias lo tienen.

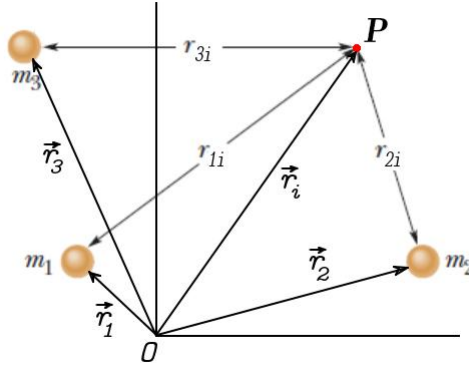


Figura 13.19: Potencial en un punto debido a tres masas

Todavía hay algo interesante que podemos hacer. Supón que alguien dice, no quiero hacer esa suma de la Ec. (13.23); quiero sumar todos los pares. Está bien, lo puedes hacer. Con una salvaguarda: debes dividir la expresión por dos, porque estarás contando dos veces. Además, no se te permite igualar los índices en la suma, porque en ese caso  $r_{ij} = 0$  y todo explota. Mala idea. Luego,

$$\begin{aligned}
 U_{total}(r) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N G \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N G \frac{m_j}{r_{ij}} \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V(\vec{r}_i),
 \end{aligned} \tag{13.27}$$

donde hemos usado el hecho que el potencial  $V(\vec{r}_i)$  medido en un punto  $P$ , debido a  $N$  partículas puntuales, está dado por

$$V(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i}^N G \frac{m_j}{r_{ji}}, \tag{13.28}$$

con una ilustración de ello en la Fig. 13.19. Observa que  $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ji}$ . **Es importante que recuerdes esto para el futuro.**

Podemos hacer un cálculo similar al de la Ec. (13.24), o simplemente dividir tal ecuación por  $m$ , y expresar la intensidad del campo gravitatorio en términos del potencial

$$\vec{\mathcal{G}} = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} V(r). \tag{13.29}$$

Esta ecuación es extremadamente relevante porque, aparte de dar una expresión concreta para la intensidad del campo gravitatorio, incorpora una filosofía importante en física: si para un problema dado logramos conocer esta función escalar que lo describe, el potencial, entonces a partir de allí podemos conocer una cantidad vectorial, el campo, y a su vez, a partir del conocimiento de este último, conocer las fuerzas. ¡Los potenciales son por ello muy importantes en física e ingeniería!

## 13.8 Superficies equipotenciales

Para una distribución de masas existen siempre zonas del espacio donde uno se puede mover, medir el potencial gravitatorio mientras se mueve, y encontrar que el potencial no cambia durante ese proceso. Esto lo sabemos cuando nos movemos sobre la superficie terrestre a una altura fija; decimos que la energía potencial, y por tanto el potencial, no cambia, dado que  $\Delta h = 0$ . Decimos que nos movemos por una línea equipotencial; si nos movemos en un plano, entonces, esta se convertirá en una **superficie equipotencial**. Es decir, una superficie donde tenemos el mismo (*equi*) potencial. Lo que observamos de la Fig. 13.14 es que al movernos de este modo, los vectores campo gravitacional son perpendiculares a la trayectoria que llevamos. Esta es una característica general de estas superficies: **las superficies equipotenciales son perpendiculares a las líneas de campo**. Y es la característica que nos permite conocer, de un modo gráfico, la distribución del campo cuando conocemos la forma de las superficies equipotenciales, y viceversa. Desde el punto de vista matemático, esta frase queda representada en las Ecs. (13.29) y (13.25).

En la Fig. 13.20 se muestran las líneas (superficies) equipotenciales para el campo gravitatorio del sistema Tierra-Luna. Observa cómo las líneas de campo, en azul, siempre inciden perpendiculares a una línea de campo.

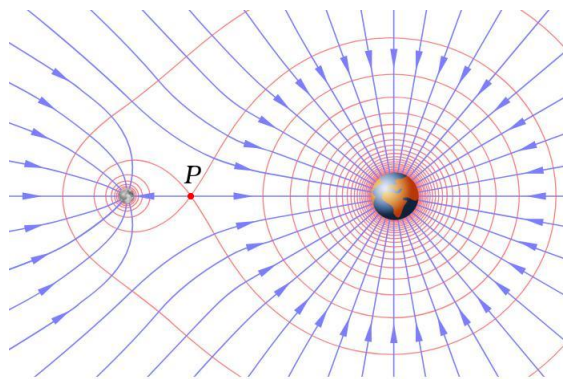


Figura 13.20: Líneas equipotenciales para campo gravitatorio en el sistema Tierra-Luna

Observa lo que sucede en el punto  $P$ , en la figura. ¡Es el único lugar de la figura donde las líneas equipotenciales se cruzan! En general hay más puntos de este tipo en sistemas orbitales. Se denominan **puntos de Lagrange**<sup>17</sup> y corresponden a una posición en el espacio donde los campos gravitacionales de los dos cuerpos en órbita, aquí Tierra-Luna, se combinan para proporcionar un equilibrio a un tercero objeto de masa despreciable, como es el caso de un satélite artificial. Allí, el satélite puede estar estacionario respecto

<sup>17</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian\\_point](https://en.wikipedia.org/wiki/Lagrangian_point)

a la Tierra y la Luna (u otro par de masas grandes orbitando) debido a que tanto la Luna como la Tierra proporcionan la fuerza centrípeta necesaria para rotar sincrónicamente con la masa menor (la Luna en este caso). Cuidado que estacionario no significa estático. Por ejemplo, un satélite geoestacionario, que siempre mantiene su posición sobre un punto de la superficie terrestre está efectivamente orbitando.

Si quieres saber algo más sobre puntos de Lagrange, te dejo este video: [https://www.youtube.com/watch?v=wx16nnpnSPUo&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=wx16nnpnSPUo&feature=emb_logo)

## 13.9 Intensidad del campo gravitatorio terrestre

Una suposición que hemos hecho acerca de la gravedad terrestre es que corresponde a un cuerpo con una distribución de masa completamente esférica. Por ello, sobre la superficie, la aceleración de gravedad es  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Este cuadro difiere de la diversidad observada: valles, montañas, océanos, etc. Estas diferentes características de la superficie contienen más o menos masa que otras y por lo tanto existen ligeras variaciones en la gravedad en la superficie del planeta. Si bien estas variaciones pueden ser insignificantes al resolver un problema de física básica, pueden ser una pista importante para comprender la estructura de la Tierra, la circulación oceánica, el hielo marino y el aumento del nivel del mar y las fluctuaciones en la cantidad de agua almacenado sobre y bajo tierra, etc.

Misiones satelitales como GRACE, de la NASA, y GOCE, de la ESA, han medido gradientes de gravedad con alta precisión y proporcionan un modelo global del campo de gravedad de la Tierra. En la Fig. 13.21 se muestra fotos correspondientes a estas misiones, con mapas de la Tierra con diferentes colores que representan el campo de gravedad de la Tierra.

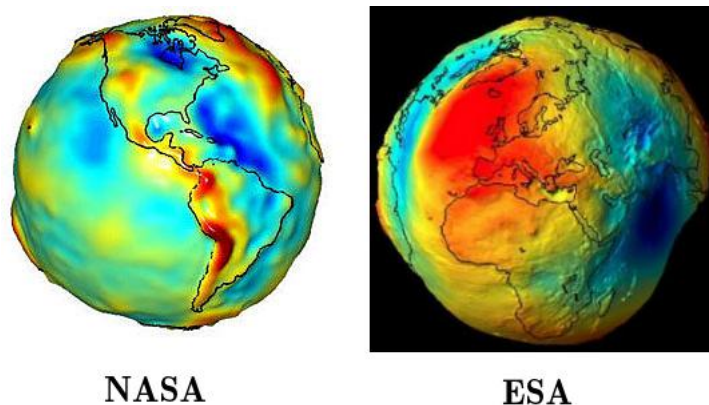


Figura 13.21: Mapas de colores de la intensidad del campo gravitatorio terrestre

¿Cómo mide GRACE la gravedad?

Se utilizan dos satélites. A medida que el primer satélite pasa sobre un área de la Tierra de gravedad ligeramente más fuerte, detecta un aumento de la atracción gravitacional y se acelera ligeramente, lo que aumenta su distancia desde el satélite posterior. Por el contrario, el primer satélite reduce su velocidad cuando pasa sobre un área de gravedad ligeramente más débil, disminuyendo la distancia entre los dos satélites. Los cambios en la distancia

entre los satélites son muy pequeños, aproximadamente una décima parte del ancho de un cabello humano. Por ejemplo, GRACE mide estos cambios utilizando un instrumento que genera pulsos de microondas que se reflejan entre los dos satélites. La distancia entre los satélites está determinada por el tiempo que tarda un pulso de microondas en viajar de un satélite a otro.

## 13.10 Leyes de Kepler desde la perspectiva de Newton

### 13.10.1 Segunda ley de Kepler y momentum angular

La segunda ley de Kepler, como hemos dicho, es una expresión de la conservación del momentum angular orbital. Veamos cómo se demuestra.

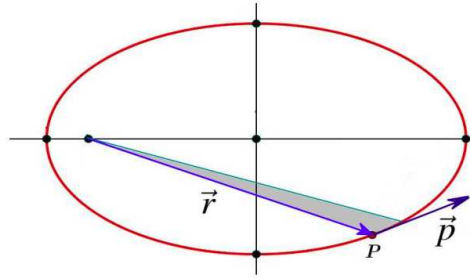


Figura 13.22: Órbita elíptica y momentum angular

Consideremos la Fig. 13.22 donde se muestra el vector de posición, el vector momentum lineal de una planeta que orbita alrededor del Sol. También se ha coloreado una pequeña área generada por un movimiento infinitesimal del planeta,  $dA$ , durante un intervalo  $dt$ . Esta área se puede aproximar por un triángulo de área, igual a “un medio de la base ( $r d\theta$ ) por la altura ( $r$ )”:

$$dA = \frac{1}{2} r r d\theta = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{1}{2} r^2 \omega dt, \quad (13.30)$$

donde en la segunda igualdad hemos “multiplicado y dividido por  $dt$ ”.<sup>18</sup> Por otro lado, el momentum angular es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (13.31)$$

Ahora, como recordarás de nuestro trabajo para movimiento circular, el vector velocidad se puede descomponer como sigue:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \hat{r}(t) + r \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\theta}(t). \quad (13.32)$$

Luego,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \left( \frac{dr(t)}{dt} \hat{r}(t) + r \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{\theta}(t) \right) = m r^2 \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{r} \times \hat{\theta} = m r^2 \omega \hat{z}, \quad (13.33)$$

<sup>18</sup>No es cierto, pero parece que así fuese.

donde se anula el primer término dentro de paréntesis al hacer el producto vectorial. Entonces, podemos escribir el cambio del área generada por el vector de posición como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\vec{L} \cdot \hat{z}}{m}. \quad (13.34)$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la constancia del momentum angular es equivalente a la constancia de la variación del área generada por el radio vector respecto del tiempo. Es decir, esta es la ley de áreas de Kepler.

### 13.10.2 Tercera ley de Kepler

Para órbitas circulares es simple ver cómo aparece la tercera ley de Kepler. De acuerdo a la ley de gravitación, para una órbita circular

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r} = m\vec{a}_c = -m\omega^2 r \hat{r}. \quad (13.35)$$

Luego,

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3}. \quad (13.36)$$

Por lo tanto,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3. \quad (13.37)$$

Para elipses se puede demostrar que el radio de la órbita circular  $r$  se debe reemplazar por  $a$ , el semi-eje mayor de la elipse. En efecto, podemos integrar la Ec. (13.34). Antes de hacer eso, pasamos multiplicando el  $dt$  hacia el lado derecho <sup>19</sup> y recordamos que el momentum angular es constante. Luego,

$$\int_0^A dA = \frac{1}{2} \frac{\vec{L} \cdot \hat{z}}{m} \int_0^T dt \implies A = T \frac{1}{2} \frac{L}{m}. \quad (13.38)$$

El área de una elipse es  $A = \pi ab$ . Se puede demostrar que <sup>20</sup>

$$b^2 = a \frac{L^2}{Gm^2 M}. \quad (13.39)$$

Luego,

$$T^2 = 4 \frac{A^2 m^2}{L^2} = 4 \frac{\pi^2 a^2 (aL^2) m^2}{Gm^2 M L^2} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3. \quad (13.40)$$

<sup>19</sup>No es cierto, pero parece que así fuese.

<sup>20</sup>Para demostrar esta igualdad necesitamos conocer la ecuación de la órbita, algo que está fuera del ámbito de este libro.



### 13.11 Energía total en interacción gravitacional y órbitas

Hay mucho qué decir y hacer en este tema, pero dado el objetivo de este libro, seré lo más resumido que pueda. Quedarán algunas afirmaciones sin demostrar.

Podemos preguntarnos cuál es la energía total de un sistema de dos masas que orbitan,  $M$  y  $m$ , con  $M \gg m$ .<sup>21</sup>

Usando la Ec. (13.32) escribimos la energía como

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right) \cdot \left( \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} \end{aligned} \quad (13.41)$$

Por lo tanto, la energía total  $E = K + U$  es

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} - G \frac{m M}{r}. \quad (13.42)$$

Podemos definir una **energía potencial efectiva** agrupando los últimos dos términos:

$$U_{ef.} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^2} - G \frac{m M}{r}. \quad (13.43)$$

Nuestra expresión para la energía total se parece a la energía para el movimiento en una partícula en una dimensión, con una energía potencial que tiene una parte de la gravedad y una parte del efecto indirecto del momento angular. Observa que hemos eliminado cualquier mención del ángulo  $\theta$ , y en el proceso **hemos cambiado el movimiento en un plano por el movimiento a lo largo de la dirección radial**. Por eso hablamos de un potencial efectivo, porque no es el potencial original.

Esta es una idea mucho más general. A menudo se eliminan coordenadas con la esperanza de simplificar el análisis y se intenta tener en cuenta sus efectos a través de un potencial efectivo para las coordenadas que mantenemos en nuestra descripción.

**Observación:** La energía potencial es efectiva en el sentido de que actúa como una energía potencial, pero no es una, debido a que no hay fuerza correspondiente al gradiente del primer término. Recuerda que para que una fuerza sea conservativa debe ocurrir  $\vec{F}_C = -\vec{\nabla} U$  (ver Ec. (8.24)).

Aún así, igual podemos pensar que el primer término se puede derivar respecto de la posición para ver qué resulta. En ese caso, obtenemos una fuerza “centrífuga”,

$$\vec{F}_c = \frac{L^2}{m r^3} \hat{r}. \quad (13.44)$$

Por esto, a la parte del potencial asociado al momentum angular se le denomina **potencial centrífugo**.

<sup>21</sup>Para masas similares, el análisis es un poco distinto, pero las conclusiones son esencialmente las mismas.



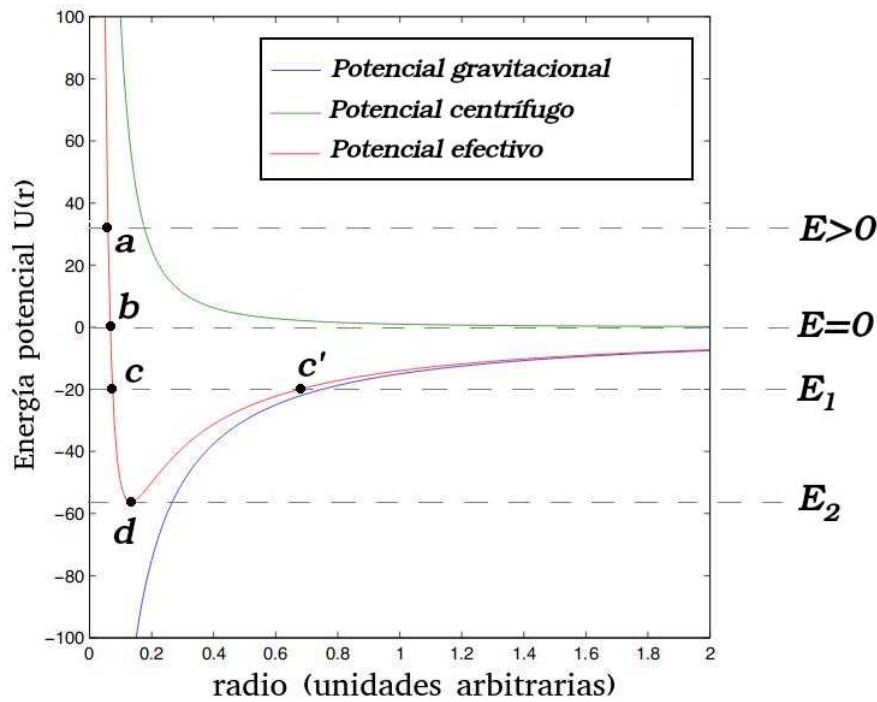


Figura 13.23: Potencial efectivo y órbitas asociadas

La Fig. 13.23 muestra el potencial efectivo y algunos puntos y energías particulares.

**Para energía total mayor que cero**, la partícula proviene desde el infinito, alcanza una distancia mínima, en el punto  $a$ , luego regresa hacia el infinito. La órbita es **hiperbólica**.

**Para partículas con energía total cero**, la partícula proviene desde el infinito, alcanza una distancia mínima, en el punto  $b$ , luego regresa hacia el infinito. La órbita es **parabólica**.

**Si la energía total es menor que cero**, hay dos opciones para las órbitas. En el punto  $d$  el potencial efectivo es mínimo, eso ocurre para una distancia fija desde el centro de fuerzas. Esto significa que la órbita es una **circunferencia**. En este caso, el término cinético en la Ec. (13.42) es cero, lo que implica que no hay velocidad radial, claro. Ahora bien, ¡no hay que deducir de aquí que el cuerpo no se esté moviendo! Recuerda que esta es una descripción efectiva.

En matemática, para obtener el valor para el cual una función muestra un mínimo se debe primero tomar la primera derivada de esa función e igualarla a cero<sup>22</sup>. Luego, en este caso,

$$\frac{dU_{ef.}}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( \frac{L^2}{mr^2} \right) - \frac{d}{dr} \left( G \frac{mM}{r} \right) = -\frac{L^2}{mr^3} + G \frac{mM}{r^2} = 0. \quad (13.45)$$

De aquí obtenemos que la posición del mínimo del potencial efectivo ocurre en

$$r_{min} = \frac{L^2}{Gm^2M}. \quad (13.46)$$

<sup>22</sup>Si solo se hace esta operación, lo que se obtiene es un extremo de la función, es decir, un máximo o un mínimo. En este caso, sabemos que es un mínimo porque vemos la forma del potencial

Si la energía es mayor que esta energía mínima, entonces la órbita se extiende hasta dos puntos extremos,  $c$  y  $c'$ ; la órbita es una **elipse**. En el caso de del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, estos puntos corresponden al **perihelio**, punto  $c$ , y el **afelio**, punto  $c'$ .

La energía total de una órbita circular se puede calcular rápidamente a partir de la Ec. (13.35). En efecto, esta ecuación se puede reescribir

$$G \frac{mM}{2r} = \frac{1}{2} m v^2. \quad (13.47)$$

Si reemplazamos en la expresión de la energía total

$$E = K + U = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r} = -G \frac{mM}{2r}. \quad (13.48)$$

Este es un resultado importante: **hemos demostrado que la energía total es igual a la mitad de la energía potencial gravitatoria,  $U$ .**

Resulta que esta relación también es válida para elipses, con  $r$  reemplazado por la longitud del semi-eje mayor,  $a$ , esto es

$$E = -G \frac{mM}{2a}. \quad (13.49)$$

Por último, a partir de la Ec. (13.5), con la igualdad en la Ec. (13.39) y usando la Ec. (13.49), obtenemos

$$e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{Gm^2Ma}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m(GmM)^2}}. \quad (13.50)$$

Recuerda que  $E$  puede ser negativa.

## 13.12 Velocidad de escape

El Principito debió de haber tenido serios problemas para mantenerse sobre ese planeta tan pequeño. Esa es una desventaja, por cierto. Sin embargo, también fue una ventaja, ya que le permitió salir fácilmente para visitar por ejemplo, el planeta del Rey. En cambio, a nosotros no nos cuesta para nada caminar correr y saltar sobre la Tierra. Y, a diferencia de El Principito, se debe gastar mucha energía para poder poner naves en órbita y escapar del planeta.

Para poder escapar de un planeta se necesita una mínima energía, así como para poder escapar de un pozo necesitaríamos una energía mínima necesaria para llegar justo al borde y quedar allí en reposo. La mínima energía de escape está asociada a la **velocidad de escape**,  $v_e$ . Esta velocidad se **define a partir de la energía necesaria para que un cuerpo llegue al infinito con energía cinética cero**.

A partir de la ecuación para la conservación de la energía:

$$E_i = E_f \implies K_i + U_i = K_f + U_f = 0, \quad (13.51)$$

de donde deducimos que

$$\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r} = 0, \quad (13.52)$$



Figura 13.24: El principito en su planeta

o bien

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (13.53)$$

Claramente,  $r$  marca la posición desde la cual deseamos escapar.

Velocidad de escape de algunos cuerpos del sistema solar	
Cuerpo celeste	Velocidad de escape (km/s)
<b>Sol</b>	<b>620</b>
<b>Júpiter</b>	<b>60</b>
<b>Saturno</b>	<b>35.6</b>
<b>Neptuno</b>	<b>25.4</b>
<b>Urano</b>	<b>22.4</b>
<b>Tierra</b>	<b>11.2</b>
<b>Venus</b>	<b>10.4</b>
<b>Marte</b>	<b>5.2</b>
<b>Mercurio</b>	<b>4.3</b>
<b>Ganímedes (Satélite de Júpiter)</b>	<b>2.9</b>
<b>Luna</b>	<b>2.4</b>

Figura 13.25: Velocidades de escape en nuestro sistema solar

En la superficie de nuestra Tierra, esa velocidad de escape es de 11,2 km/s. Eso significa que un proyectil lanzado hacia arriba a menos de 11,2 km/s siempre volvería a caer a la Tierra. Cuanto más se acerca la velocidad de escape, más alto se elevará el objeto antes de retornar.

Una forma de medir la intensidad del campo gravitacional de un cuerpo que colapsa gravitacionalmente es midiendo su velocidad de escape. Si la Tierra sufriera un colapso gravitacional, es decir su radio disminuyera, manteniendo su masa, esa velocidad de escape aumentaría a medida que disminuyera el tamaño de la Tierra. Como lo muestra la Ec. (13.53), el aumento va como la raíz cuadrada del cambio de tamaño. Por lo tanto, si reducimos el radio de la Tierra en un factor de 100 (de 6.500 kilómetros aproximadamente

a 65 kilómetros) y la velocidad de escape aumentaría en un factor de 10, es decir,  $v_e = 110$  km/s.

Seguramente John Michell, un geólogo irlandés, tuvo similares pensamientos cuando le escribió una carta a Henry Cavendish en 1783, en la que describió las propiedades esperadas de lo que él denominó **estrellas oscuras**:

*“... si el semi-diámetro de una esfera de la misma densidad que el Sol fuera superior a la del Sol en la proporción de 500 a 1, un cuerpo cayendo desde una altura infinita hacia él, habría adquirido en su superficie una velocidad mayor que la de la luz y, en consecuencia, suponiendo que la luz sea atraída por la misma fuerza en proporción a su vis inertiae, con otros cuerpos, toda la luz emitida por tal cuerpo regresaría hacia éste por su propia gravedad.”*

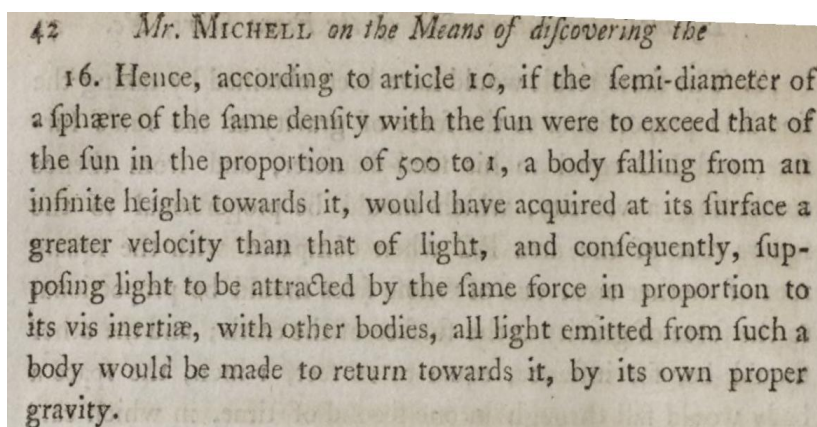


Figura 13.26: Carta de Michell a Cavendish

Michell calculó que cuando la velocidad de escape en la superficie de una estrella fuese igual o mayor que la velocidad de la luz, la luz generada quedaría atrapada gravitacionalmente y la estrella sería invisible para un observador externo. Esto es revolucionario, porque Michell supuso ya en ese tiempo que incluso la luz era afectada por la gravedad. Incluso, fue más allá y vislumbró una técnica que utilizan los astrónomos para dar con sistemas binarios, donde uno de los objetos es un agujero negro. La idea de Michell para calcular el número de estrellas oscuras fue buscar y catalogar tantos sistemas de estrellas binarias como fuese posible (usando las variaciones del baricentro), e identificar casos en los que solo una sola estrella fuese visible. Esto proporcionaría una línea de base estadística para calcular la cantidad de la materia estelar invisible que podría existir además de las estrellas visibles.

Actualmente existen variados métodos para determinar la existencia de un agujero negro, como emisión de rayos X muy intensos, productos del “grito” de la materia siendo devorada por éste; observación directa de órbitas de estrellas alrededor de un “espacio vacío”, como en el caso del agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea, Sagitario A\*, para el cual hay incluso un video hecho con fotografías tomadas durante distintos años: <https://www.youtube.com/watch?v=iSY-ipHGsm4>. Últimamente, en un esfuerzo colaborativo gigantesco de la comunidad astronómica se logró fotografiar la atmósfera de un hoyo negro en la galaxia Messier 87 directamente, en abril de 2017, como muestra la Fig. 13.27.

Volviendo a nuestro problema más terrenal, en la Fig. 13.28 se muestran distintas

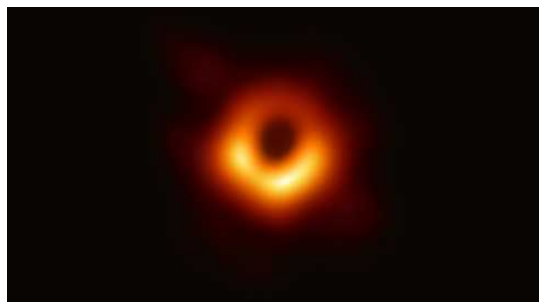


Figura 13.27: Agujero negro en la galaxia M87, tomada por el Event Horizon Telescope.

energías para el sistema Tierra-Luna en una gráfica energía versus distancia desde el centro de la Tierra.

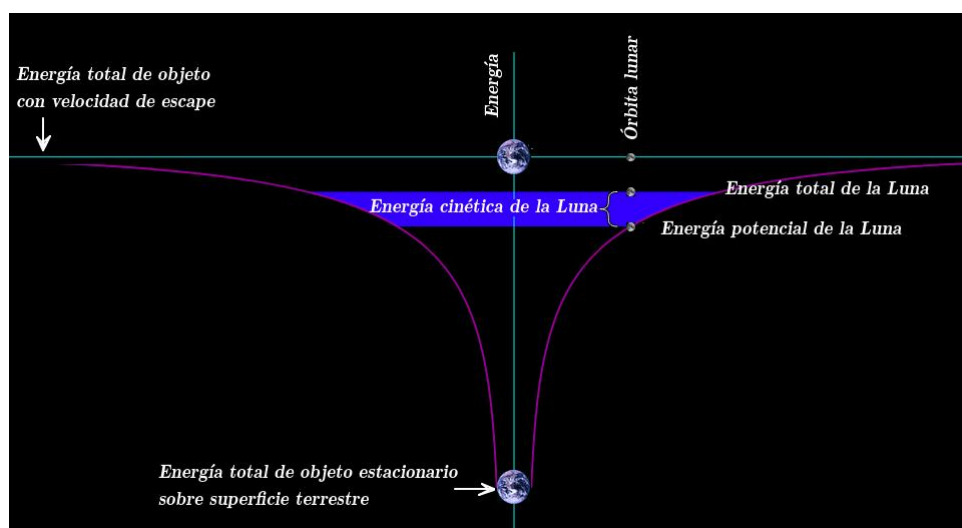


Figura 13.28: Distintas energías en el sistema Tierra-Luna

### Ejemplo 1

Muchas estrellas pertenecen a sistemas de dos o más estrellas que se mantienen ligadas gracias a su atracción gravitacional mutua. La figura muestra un sistema de tres estrellas en un instante en que están en los vértices de un triángulo rectángulo de  $45^\circ$ . Cuidado, que no estamos tratando de resolver el problema dinámico. Es decir, suponemos que las estrellas están fijas.

- Calcula la fuerza gravitacional total ejercida sobre la estrella pequeña por las dos grandes.
- Calcula el potencial total en la posición de la estrella pequeña.
- Luego, calcula el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la posición de la estrella pequeña.
- A partir de c) obtén el módulo de la fuerza sobre la estrella pequeña.

### Solución

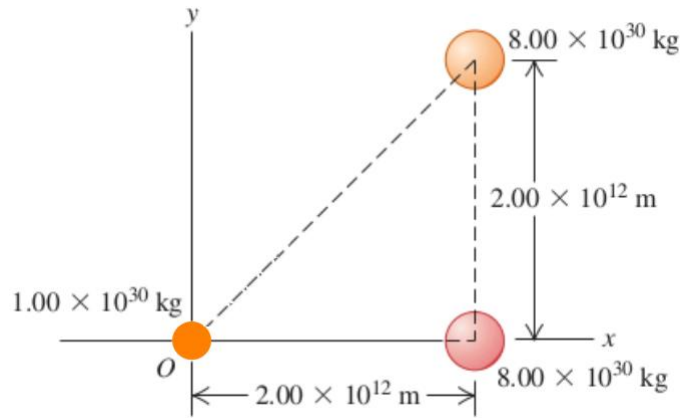


Figura 13.29: Tres soles, supuestos estáticos

a) En la Fig. 13.30 he dibujado las fuerzas con las que los soles  $m_1$  y  $m_2$  actúan sobre el sol más pequeño, de masa  $m$ . También he agregado alguna notación que nos ayudará en lo que sigue. Observa que las fuerzas las he dibujado tratando de guardar alguna proporcionalidad entre ellas; intenta hacer esto cada vez que hagas un diagrama de fuerzas (o campos) porque es útil para tener una idea gráfica de cual será el resultado. Debido a que ambos soles  $m_1$  y  $m_2$  tienen la misma masa,  $M$  que  $r_1 > r_2$ , entonces la fuerza  $F_2 > F_1$ .

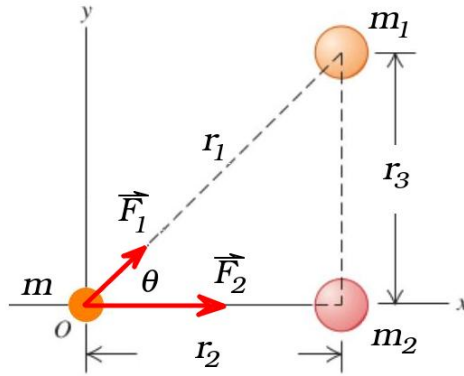


Figura 13.30: Fuerzas actuando sobre el sol pequeño

El vector fuerza neta se obtiene sumando vectorialmente ambas fuerzas:

$$\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = F_1 \cos \theta \hat{x} + F_2 \hat{x} + F_1 \sin \theta \hat{y}, \quad (13.54)$$

donde

$$\cos \theta = \frac{r_2}{r_1} \quad (13.55)$$

$$\sin \theta = \frac{r_3}{r_1} \quad (13.56)$$

y  $r_1$  lo obtenemos usando el teorema de Pitágoras:  $r_1 = \sqrt{r_2^2 + r_3^2}$ .

Debido a que en la expresión Ec. (13.54) ya hemos incorporado toda la información vectorial, ahora solo necesitamos los módulos de los vectores fuerza. Esto es, según la ley de gravitación de Newton tenemos que

$$F_1 = G \frac{mm_1}{r_1^2}, \quad (13.57)$$

$$F_2 = G \frac{mm_2}{r_2^2}. \quad (13.58)$$

Juntando toda esta información y reemplazándola en la Ec. (13.54) obtenemos para la fuerza neta

$$\vec{F}_{neta} = \left\{ G \frac{mm_1}{r_1^2} \frac{r_2}{r_1} + G \frac{mm_2}{r_2^2} \right\} \hat{x} + G \frac{mm_1}{r_1^2} \frac{r_3}{r_1} \hat{y}, \quad (13.59)$$

o bien,

$$\vec{F}_{neta} = GmM \left( \left\{ \frac{r_2}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^2} \right\} \hat{x} + \frac{r_3}{r_1^3} \hat{y} \right). \quad (13.60)$$

La tentación de los estudiantes es usar la expresión original de la fuerza según está dada por la ley de gravitación. ¡Y es totalmente correcto! El problema es que entran en dificultades debido a la confusión que produce trabajar con el vector unitario,  $\hat{r}$ .

Si se quisiera trabajar de ese modo, entonces habría que calcular el vector unitario, lo que es un buen ejercicio de vectores. Como sabemos, un vector se escribe como su módulo por un vector unitario. Lo que nos da la definición de este último. Es importante tener en cuenta que el vector  $\vec{r}_1$  es el vector de posición del sol pequeño medido desde el sol  $m_1$ , luego apunta desde  $m_1$  hacia  $m$ . Por eso, el vector unitario es

$$\hat{r}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = -\frac{x\hat{x} + y\hat{y}}{r_1} = -\frac{r_1 \cos \theta \hat{x} + r_1 \sin \theta \hat{y}}{r_1} = -\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}. \quad (13.61)$$

En el caso de la fuerza  $\vec{F}_2$  el vector unitario es más simple, porque  $\vec{r}_2$  es el vector de posición del sol  $m$  medido desde el sol  $m_2$ . Entonces,  $\hat{r}_2 = -\hat{x}$ . Por lo tanto, podemos escribir los vectores fuerza directamente

$$\vec{F}_1 = G \frac{mm_1}{r_1^2} (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}), \quad (13.62)$$

$$\vec{F}_2 = G \frac{mm_2}{r_2^2} \hat{x} \quad (13.63)$$

y sumarlos para obtener, claro está, el mismo resultado anterior, como podrás chequear.

Te dejo como entretenimiento para la casa evaluar la expresión de la fuerza neta con los datos entregados.

b) El potencial gravitacional debido a una masa puntual o a una masa con simetría esférica, con masa  $M$ , medido a una distancia  $r$  de su posición o del origen del objeto esférico, está dado por la Ec. (13.26)

$$V(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (13.64)$$

Usando el principio de superposición lineal, podemos sumar las contribuciones de las masas de los soles  $m_1$  y  $m_2$  en la posición de la estrella  $m$ . Esto es,

$$V_{total}(0) = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} = -\frac{Gm_1}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} - \frac{Gm_2}{r_2}. \quad (13.65)$$

¿Por qué  $V_{total}(0)$ ? Explica. Observar y comprender la Fig. 13.19, y realizar una similar para este problema te podría ayudar, así como mirar con detenimiento la Ec. (13.23).

c) Primero calculamos la intensidad de campo gravitatorio y luego su módulo. A partir de la definición

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}, \quad (13.66)$$

debido a que ya calculamos la fuerza, basta dividir por la masa... ¿pero cuál masa? Bueno, la masa de prueba; la que prueba la intensidad del campo. ¿Y quién produce el campo? En este ejemplo, las masas de los soles más grandes,  $m_1$  y  $m_2$ . Pues bien, entonces la masa  $m$  en esta expresión es la masa del pequeño sol. Luego,

$$\vec{\mathcal{G}} = GM \left( \left\{ \frac{r_2}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^2} \right\} \hat{x} + \frac{r_3}{r_1^3} \hat{y} \right). \quad (13.67)$$

Nota que este campo no es radial, es decir su vector unitario no es  $\hat{r}$ . Esto era esperable porque **no estamos calculando el campo gravitatorio de una masa puntual**.

Observa además que he planteado algunas preguntas, las mismas que deberías hacerte cuando te enfrentas a un problema de gravitación, así no te confundirás.

El campo gravitatorio tiene la forma  $\vec{\mathcal{G}} = A\hat{x} + B\hat{y}$ , donde

$$A = GM \left( \frac{r_2}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^2} \right) \quad (13.68)$$

$$B = GM \frac{r_3}{r_1^3} \quad (13.69)$$

y luego su módulo es  $\mathcal{G} = \sqrt{A^2 + B^2}$ . Es decir,

$$\mathcal{G} = GM \sqrt{\left( \frac{r_2}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^2} \right)^2 + \left( \frac{r_3}{r_1^3} \right)^2}. \quad (13.70)$$

Alguien podría plantearse un desafío un poco mayor: obtener la intensidad de campo gravitatorio a partir del potencial gravitatorio, usando

$$\vec{\mathcal{G}} = -\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} V(r).$$

Es muy buen desafío, pero usar esta ecuación sería un error ya que el potencial de la Ec. (13.26) no es el potencial de una carga puntual y por tanto la intensidad de campo no tiene solo una componente radial. Por lo tanto, deberíamos usar la expresión general,  $\vec{\mathcal{G}} = -\vec{\nabla}V(r)$  lo que hace que este desafío esté fuera del alcance de este libro.



A propósito de desafío. El desafío de resolver un problema de tres cuerpos en gravitación no es trivial. ¿Pero cómo si esto es lo que hemos resuelto en este ejemplo?, dirás tú. La verdad no; lo que hemos resuelto es un problema estático. El **problema de tres cuerpos** en gravitación se refiere al movimiento orbital de tres cuerpos. Este problema es la pregunta abierta más antigua en astrofísica. Es un problema complicado que se ha resistido a una solución analítica general durante siglos. Soluciones hay, pero son acotadas, dependiendo de los valores de las masas y otros parámetros. Típicamente, el problema se enfrenta numéricamente y en muchos casos la solución es una estrella escapando, mientras las otras forman un sistema binario (ligado) de estrellas. Lo más grave es que este problema tiene soluciones caóticas. Es decir soluciones que difieren una enormidad cuando apenas se modifica la condición inicial.

¿Y cómo resulta que nuestro sistema solar es estable, con tanto planetas? Bueno, es cosa de tiempo para que se inestabilice. Pero no te preocupes, no pasará mañana.

### Ejemplo 2

Un satélite de masa  $m$  está en órbita alrededor de la Tierra, que tiene masa  $M$  y radio  $R$ .

a) El satélite está inicialmente en una órbita elíptica como se muestra en el diagrama a la izquierda. En el perigeo la distancia desde el centro del satélite al centro de la Tierra es  $r_p$  y la velocidad del satélite es  $v_p$ . En el apogeo la distancia desde el centro del satélite hasta el centro de la Tierra es  $r_a$ . Determina  $v_a$ , la velocidad en apogeo.

b) Cuando el satélite alcanza el perigeo, su velocidad cambia abruptamente para que el satélite entre en una órbita circular de radio  $r_p$  y velocidad  $v$ , como se muestra en el diagrama a la derecha. ¿Cuánto trabajo y qué impulso se aplicó al satélite para cambiar su órbita?

Indica todas las respuestas en términos de las cantidades dadas y las constantes fundamentales.

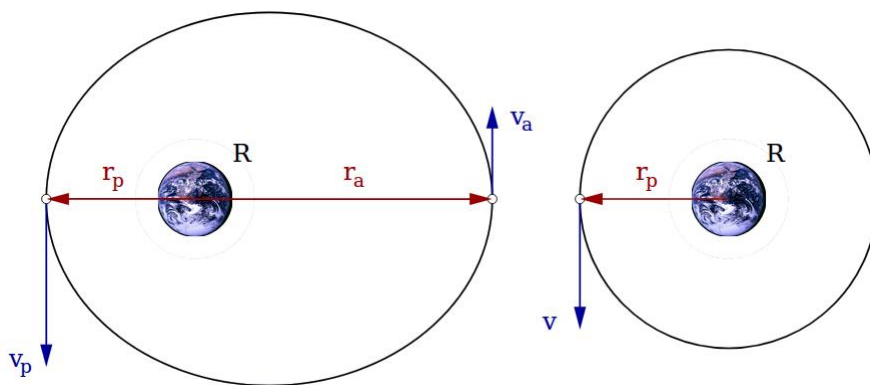


Figura 13.31: Cambio de órbita de un satélite

### Solución

a) Podemos resolver este problema usando conservación de momentum angular. Es la forma más rápida. También se puede resolver aplicando la conservación de la energía. Como veremos, ambas no conducen a la misma ecuación. Eso es positivo, porque indica que

estamos aprendiendo de la solución de un problema, viéndolo desde distintas perspectiva. Veamos.

Aplicamos conservación de momentum angular

$$\vec{L}_{O,i} = \vec{L}_{O,f} \implies \vec{r}_p \times \vec{p}_p = \vec{r}_a \times \vec{p}_a \implies r_p m v_p = r_a m v_a. \quad (13.71)$$

Por lo tanto, la velocidad en el apogeo es

$$v_a = \frac{r_p v_p}{r_a}. \quad (13.72)$$

Si aplicamos la conservación de la energía total

$$E_i = E_f \implies K_a + U_a = K_p + U_p, \quad (13.73)$$

que implica que

$$\frac{1}{2} m v_a^2 - G \frac{mM}{r_a} = \frac{1}{2} m v_p^2 - G \frac{mM}{r_p}, \quad (13.74)$$

de donde deducimos que

$$v_a = \sqrt{v_p^2 - 2GM \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a} \right)}. \quad (13.75)$$

b) Aplicamos el teorema Trabajo-Energía. Tenemos que la energía cinética inicial es  $K_p = \frac{1}{2} m v_p^2$  y la energía cinética final es  $K_f = \frac{1}{2} m v^2$ . Entonces el trabajo realizado por el agente externo (encendido de cohetes) es

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2} m (v^2 - v_p^2) \quad (13.76)$$

La velocidad  $v$  la obtenemos de la órbita circular usando la segunda ley de Newton:

$$-G \frac{mM}{r_p^2} \hat{r} = m \vec{a}_c = -m \frac{v^2}{r_p} \hat{r} \implies G \frac{M}{r_p} = v^2. \quad (13.77)$$

Por lo tanto, reemplazando en la Ec. (13.79) obtenemos finalmente que

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2} m \left( G \frac{M}{r_p} - v_p^2 \right). \quad (13.78)$$

El impulso se obtiene de su definición

$$\vec{I} = \vec{\Delta p} = m \left( \sqrt{G \frac{M}{r_p}} - v_p \right) \hat{\theta}. \quad (13.79)$$

## 13.13 Fuerzas de Marea

Una fuerza de marea es una fuerza de origen gravitacional que crea una distorsión en la forma de un cuerpo.

Un fenómeno asociado a este tipo de fuerza es el de **espaguetización** que es el estiramiento longitudinal y la compresión transversal de objetos cuando se ven enfrentados a un campo gravitacional no homogéneo muy intenso, como le podría ocurrir a un astronauta que se acercase peligrosamente a un hoyo negro.

Otro caso menos dramático y muy importante es el efecto que tiene la Luna (y el Sol) sobre la Tierra. La atracción gravitacional produce la deformación de la corteza terrestre y el agua en los océanos. Esta deformación da como resultado dos “protuberancias de marea”, uno en el lado de la Tierra más cercano a la Luna y otro en el lado opuesto, como indica la Fig. 13.32.

Debido a la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, el fenómeno de marea es periódico, sin embargo no hay arrastre de agua, solo variación de su nivel.



Figura 13.32: Fuerzas de marea en sistema Tierra-Luna

Por supuesto, si uno hace girar un objeto notoriamente deformable, piensa en una bola de gel, éste se deformará debido a la fuerza centrífuga (desde el punto de vista del observador en rotación). Este efecto existe y da cuenta de una pequeña variación en el radio Terrestre; aproximadamente 21 km más en el Ecuador que en los polos. Esto es lo que se conoce como una **forma esferoidal oblata**. Sin embargo, **este no es un efecto de marea**.

Nos enfocaremos en las fuerzas de marea sobre los océanos.

Hasta ahora, cuando hemos estudiado la ley de gravitación de Newton, hemos supuesto objetos puntuales. Sin embargo, para comprender las protuberancias de marea debemos considerar los campos gravitacionales combinados de la Tierra y la Luna, y al hecho de que el campo gravitacional debido a la Luna tiene una dirección y una fuerza variables sobre el volumen de la Tierra. Para cuantificar el efecto se debe encontrar el gradiente del potencial gravitacional de la Luna en cada parte de la Tierra. Si nos enfocamos solo en fuerzas sobre la superficie terrestre encontraríamos un diagrama de fuerzas similar al mostrado en la Fig. 13.33.

Las fuerzas de marea tienen componentes radiales y componentes tangentes (de tracción) a la superficie de la Tierra. Las componentes radiales estiran o comprimen materiales sólidos radialmente, como le pasa a Bob Esponja en la foto de la Fig. 13.34.

El agua de los océanos se ve enfrentada a fuerzas que la hacen fluir, acumulándose donde el gradiente de potencial es mayor. Esto necesariamente deprime la superficie del océano en otros lugares fuera de las protuberancias.

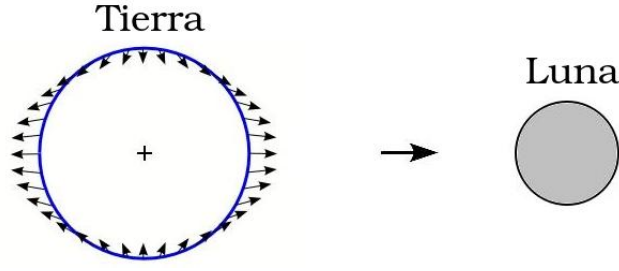


Figura 13.33: Fuerzas de marea en sistema Tierra-Luna: diagrama vectorial



Figura 13.34: Fuerza de tracción sobre Bob Esponja

Veamos cómo se obtienen estas fuerzas de marea según la ley de gravitación de Newton. El problema general es complicado, así que supondremos una Tierra modelada como una esfera homogénea, con una capa delgada de agua en toda su superficie. Despreciamos el efecto del Sol.

Denotamos  $M_L$  a la masa de la Luna. Ésta genera un campo gravitacional en la posición de la Tierra, definida por el vector  $\vec{r}$

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -G \frac{M_L}{r^2} \hat{r}. \quad (13.80)$$

En las antípodas de la Tierra, sobre la línea que une los centros de la Tierra y la Luna, marcamos dos puntos  $P$  y  $P'$  que, vistos desde el centro de la Luna, se encuentra a una distancia  $r - \Delta r$  y  $r + \Delta r$ , respectivamente, como se observa en la Fig. 13.35. Luego, la intensidad del campo gravitatorio en esos puntos es

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -G \frac{M_L}{(r \pm \Delta r)^2} \hat{r}. \quad (13.81)$$

Previamente hemos aprendido que si  $\varepsilon \ll 1$ , entonces la expansión de esta expresión en potencias de  $\varepsilon$  da

$$(1 \pm \varepsilon)^n \approx 1 \pm n\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (13.82)$$

En nuestro caso,  $\varepsilon = \frac{\Delta r}{r}$  y  $n = -2$ , luego

$$\vec{\mathcal{G}}(\vec{r}) = -G \frac{M_L}{r^2} \hat{r} \pm 2G \frac{M_L}{r^2} \frac{\Delta r}{r} \hat{r}. \quad (13.83)$$

Notamos que el primer término del lado derecho es la Ec. (13.80). Este término tiene simetría esférica así que no produce efecto sobre el agua que cubre la superficie terrestre.

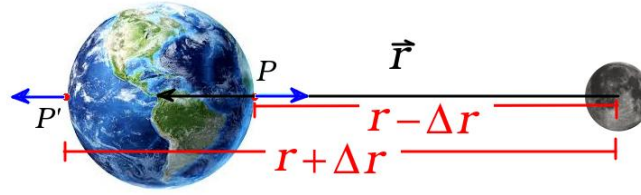


Figura 13.35: Interacción Tierra-Luna

Para extraer el efecto de la Luna sobre el agua de los océanos basta restar este término de la ecuación anterior. Por lo tanto, la diferencia en la intensidad gravitatoria, también llamada **aceleración de marea** es

$$\Delta \vec{g} = \pm 2G \frac{M_L}{r^3} \Delta r \hat{r}, \quad (13.84)$$

que por supuesto da origen a las fuerzas de marea,  $\vec{F}_m$

$$\Delta \vec{F}_m = \pm 2G \frac{M_L m}{r^3} \Delta r \hat{r}. \quad (13.85)$$

Los vectores fuerza de marea en los puntos  $P$  y  $P'$  se muestran en la Fig. 13.35, en color azul. Si lo hacemos para cada punto sobre la superficie encontraríamos un diagrama como el de la Fig. 13.33.

Por supuesto, el agua en los océanos se deforma hasta que alcanza el equilibrio, cuando se minimiza la energía. No hay peligro de que el agua salga succionada al espacio exterior.

## 13.14 Masa gravitacional y masa inercial: Principio de Equivalencia

Habrás notado que al resolver los problemas de dinámica de una partícula y de gravitación, al utilizar la masa de un cuerpo en cada caso hemos usado la misma letra,  $m$ . Obvio, ¿verdad? Si después de todo es  $m$  por *masa*. Sin embargo, la situación es algo más delicada y tiene consecuencias profundas.

La segunda ley (en su forma simplificada) establece que cuando se le aplica una fuerza externa a una masa  $m_I$ , entonces el cuerpo acelera en dirección y sentido de la fuerza neta:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(ext.)} = m_I \vec{a}. \quad (13.86)$$

La masa involucrada en esta expresión se denomina *masa inercial*; de hecho la segunda ley se puede considerar una definición de masa inercial. Recordemos que la **inercia** es la propiedad de un objeto a resistir un cambio en su estado de movimiento.

Por otro lado, en la ley de gravitación universal la masa que es atraída por una masa  $M$  que genera el campo es la masa gravitacional,  $m_g$ , y tiene, en principio, una naturaleza distinta a la masa inercial,  $m_I$ ,

$$\vec{F} = -G \frac{m_g M}{r^2} \hat{r}. \quad (13.87)$$

La masa gravitacional,  $m_g$ , es la propiedad de un objeto que está sujeta a un campo gravitacional. Los objetos con gran masa gravitacional responden fuertemente a la gravedad y, en consecuencia, son muy pesados; lo contrario para cuerpos que reaccionan más levemente.

Ahora, experimentos realizados a través del tiempo, desde el siglo V (!), pasando por el famoso experimento de caída libre realizado por Galileo Galilei desde la Torre de Pisa (según cuentan, pues no es claro que haya sucedido), han llegado a demostrar empíricamente que ambas masas son en efecto equivalentes. Esto ha dado origen al **Principio de Equivalencia**. En realidad este Principio de la física son dos:

i) El **Principio de Equivalencia Débil** (el de Galileo), que establece que todos los objetos en caída libre en un campo gravitatorio local caen de la misma forma, en un sistema de referencia inercial, o lo que es lo mismo, que las masas gravitacional e inercial son equivalentes.

ii) El **Principio de Equivalencia Fuerte** (el de Einstein), que establece que todas las leyes de la naturaleza son las mismas en un campo gravitatorio estático uniforme y el marco de referencia acelerado equivalente.

Qué es lo que dice el experimento al respecto. En vez de estar lanzando objetos para ver cómo caen, lo que se hace es una versión refinada del experimento de Cavendish. Se denomina **experimento de Eötvös**, que utiliza una balanza de torsión y que fue diseñado por Loránd Eötvös en 1885. En estos experimentos se mide la diferencia normalizada de aceleración entre dos cuerpos  $A$  y  $B$  en el mismo campo de gravedad. Esta se define por

$$\eta = 2 \frac{|\vec{a}_A - \vec{a}_B|}{|\vec{a}_A + \vec{a}_B|}, \quad (13.88)$$

denominado **parámetro de Eötvös**. Esta forma es la que se mide actualmente en experimentos.

La definición original de  $\eta$ , que cuantifica una desviación de la caída libre universal, y por lo tanto, también una violación del Principio de Equivalencia (débil) para cuerpos de prueba de diferente composición,  $A$  y  $B$ , masas inercial  $m_I$  y gravitacional  $m_g$ , es

$$\eta = 2 \frac{\frac{m_{A,g}}{m_{A,I}} - \frac{m_{B,g}}{m_{B,I}}}{\frac{m_{A,g}}{m_{A,I}} + \frac{m_{B,g}}{m_{B,I}}}. \quad (13.89)$$

Los primeros resultados del satélite MICROSCOPE han dado un valor de

$$\eta = (-1 \pm 27) \times 10^{-15}. \quad (13.90)$$

En conclusión, podemos con confianza usar una sola  $m$  para nuestros cálculos.

## 13.15 Orbitando en cuatro dimensiones

Para terminar, una curiosidad. Hemos visto con anterioridad cómo podemos estudiar el movimiento planetario, y ganar mejor comprensión de éste, incorporando en el análisis un potencial efectivo, el potencial centrífugo, que transforma el problema de uno bidimensional en uno unidimensional efectivo.

Lo interesante es que podemos comprender el movimiento planetario ¡desde una cuarta dimensión!. Esto ha sido descrito por John C. Baez en [https://johncarlosbaez.wordpress.com/2015/03/17/planets\\_in\\_the\\_4th\\_dimension/](https://johncarlosbaez.wordpress.com/2015/03/17/planets_in_the_4th_dimension/) y se origina en el trabajo de Jürgen Moser.<sup>23</sup>

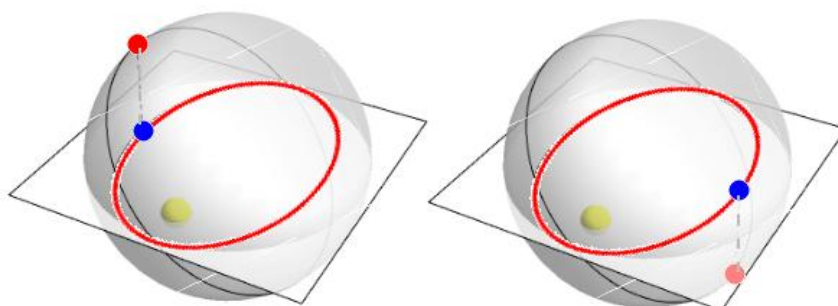


Figura 13.36: El problema de Kepler en cuatro dimensiones

Como muestra la Fig. 13.36 para el caso de una órbita elíptica<sup>24</sup>, ésta se puede pensar como la proyección de un movimiento circular, movimiento que ocurre en una esfera en cuatro dimensiones. En esta figura, el espacio tridimensional está representado por el plano que corta la esfera. Por supuesto, nuestro tiempo es distinto al tiempo que transcurre en esta otra dimensión, ¡donde el movimiento es a velocidad constante!

Lo interesante es que esta perspectiva no se limita solo a órbitas elípticas. Más aún, el tener una esfera en 4 dimensiones significa que hay simetrías “escondidas” en este problema.

## 13.16 Ejercicios

1. Un satélite está en una órbita elíptica que tiene 1.600 km sobre la superficie de la Tierra en apogeo y 600 km sobre la Tierra en perigeo. Encuentra lo siguiente
  - a) La excentricidad de la órbita
  - b) La velocidad en el perigeo y en el apogeo
  - c) El período de la órbita.
2. Un satélite está en una órbita circular, a 350 km sobre la superficie de la Tierra. Encuentra
  - a) La velocidad en km/s the radius of the b) El período de la órbita.
3. La masa de la Tierra es  $5,98 \times 10^{24}$  kg y la masa de la Luna es  $7,35 \times 10^{22}$  kg. Si la distancia entre la Tierra y la Luna es de 384.000 km, ¿cuál es la fuerza gravitacional en la Luna?
4. Una órbita geosíncrona es una órbita en la que el satélite permanece sobre el mismo lugar la sobre la Tierra. Esto se logra haciendo coincidir la velocidad del satélite con

<sup>23</sup>Moser J. (1980) Various Aspects of Integrable Hamiltonian Systems. In: Marchioro C. (eds) Dynamical Systems. Progress in Mathematics, vol 8. Birkhäuser, Boston, MA.

<sup>24</sup>Esta figura fue obtenida de una animación hecha por Greg Egan

la velocidad de la Tierra en movimiento. El radio orbital de un satélite geosíncrono es  $4,23 \times 10^7$  m (medido desde el centro de la Tierra).

a) ¿Cuál es la velocidad del satélite en órbita?

b) ¿Cuál es su período?

5. El cometa Halley sigue una órbita elíptica, se observa que su aproximación más cercana al Sol es 0,587 UA. Dado que el período orbital es de 76 años,

a) ¿cuál es su distancia más lejana al Sol?

b) ¿cuál es la excentricidad de esta órbita?

6. Para esta pregunta, considera la masa de Marte como 0,1 masas terrestres, y el radio de Marte como 0,5 radios terrestres.

a) Dado que  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  en la superficie de la Tierra, ¿cuál es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Marte?

b) Un satélite en órbita terrestre baja viaja a 8 km/s. Usa el valor de  $g$  en Marte que encontraste en la parte a) para calcular qué tan rápido viajará un satélite en una órbita baja de Marte.

c) Calcula la velocidad de escape de Marte.

d) Un satélite sincrónico se encuentra en una órbita circular (alrededor de la Tierra) con un radio de 42.000 km. Sucede que la duración de un día marciano es cercana a las 24 horas. ¿Cuál sería el radio de la órbita de un satélite sincrónico que orbita Marte?

7. Una sonda espacial determina que la magnitud del campo gravitacional es 1,1 veces mayor en la superficie de Urano que en la superficie de la Tierra.

a) Usa el radio de Urano,  $R_U = 2,33 \times 10^7$  m, que es 3,66 veces el radio de la Tierra, para determinar la masa de Urano en función de la masa de la Tierra.

b) Usa este resultado para comparar la densidad de los materiales que componen Urano con la densidad de los materiales que componen la Tierra.

8. a) ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra está el campo gravitacional igual a  $5,0 \text{ m/s}^2$ ? Expresa tu respuesta en términos del radio de la Tierra.

b) ¿En qué punto entre la Tierra y el Sol el campo gravitatorio se anula? Expresa su respuesta en términos de las masas  $M_T$  y  $M_S$  y la distancia de la Tierra al Sol  $R_{TS}$ .

9. Los astronautas en la Luna pueden saltar considerablemente más alto que en la Tierra, lo que indica que la aceleración debido a la gravedad es menor en la Luna. Usando las masas y los radios de la Luna y la Tierra, calcula la relación de su gravedad superficial,  $g_L/g_T$ .

10. El radio de la Tierra es de aproximadamente 6.400 km. Los astronautas tienen masas corporales de aproximadamente 70 kg en Houston, Texas. Cuando están en órbita en el entorno “ingrávido” del transbordador espacial, están a unos 300 km por encima de la superficie de la Tierra.

a) ¿Cuál es su masa en esta órbita?

b) ¿Cuánto pesan (es decir, qué tan grande es la fuerza gravitacional que experimentan) en comparación con su peso en Houston en esta órbita?

c) Explica por qué esto se llama un entorno “sin peso”.

11. ¿Qué velocidad inicial debe impartirse a un objeto lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra para que se eleve a una altura de  $R_T/3$  antes de bajar?



12. Una viajera espacial en el espacio interestelar está trabajando cerca de su nave cuando se rompe su línea de seguridad. En ese momento, ella está a 3 m del centro de masa de la nave y se aleja de ésta a una velocidad de 1 mm/s. Si la masa de la nave es de 10.000 kg, ¿alcanzará una distancia máxima y retrocederá, o irá a la deriva indefinidamente?

13. ¿Qué velocidad es necesaria para que una nave espacial de 1.000 kg a una distancia del Sol igual al radio de la órbita de Saturno escape del campo gravitacional del Sol?

14. Una estrella de masa  $2,0 \times 10^{30}$  kg y radio  $1 \times 10^{10}$  m y otra estrella de masa  $4,0 \times 10^{34}$  kg y radio  $2 \times 10^{10}$  m están inicialmente en reposo “infinitamente” lejos una de la otra. Luego se mueven directamente uno hacia el otro bajo la influencia de su atracción gravitacional. Calcula la velocidad de su impacto, que ocurre cuando sus centros están separados por una distancia igual a la suma de sus radios. Supón que la estrella más masiva no se mueve.

15. Las órbitas típicas de los satélites alrededor de 1960 estaban a  $1,6 \times 10^5$  m sobre la superficie de la Tierra, aproximadamente la altitud mínima requerida para escapar de la región de arrastre atmosférico significativo.

a) ¿Cuál es la energía potencial, relativa al infinito, de un satélite de 1000 kg en esa órbita?

b) ¿Cuál es su energía potencial en relación con la superficie de la Tierra?

c) Encuentra el tiempo que requiere un satélite para completar una órbita.

16.

a) Calcula la masa de la Tierra dada la aceleración debida a la gravedad en el Polo Norte, igual a  $9.832 \text{ m/s}^2$ , y el radio de la Tierra en el polo es de 6.356 km.

b) Compara esto con el valor dado por la NASA:  $5,9726 \times 10^{24}$  kg.

17.

a) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna?

b) ¿En la superficie de Marte? La masa de Marte es  $6,418 \times 10^{23}$  kg y su radio es  $3,38 \times 10^6$  m.

18.

a) Calcula la aceleración debida a la gravedad en la superficie del Sol.

b) ¿Por qué factor aumentaría tu peso si pudieras pararte en el Sol? (No importa que no puedas).

19. La masa de una partícula es de 15 kg.

a) ¿Cuál es su peso en la Tierra?

b) ¿Cuál es su peso en la Luna?

c) ¿Cuál es su masa en la Luna?

d) ¿Cuál es su peso en el espacio exterior lejos de cualquier cuerpo celeste?

e) ¿Cuál es su masa en este momento?

20. En un planeta cuyo radio es  $1,2 \times 10^7$  m, la aceleración debida a la gravedad es de  $18 \text{ m/s}^2$ . ¿Cuál es la masa del planeta?

21. El diámetro medio del planeta Saturno es  $1,2 \times 10^8$  m y su densidad de masa media es  $0,69 \text{ g/cm}^3$ . Encuentra la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Saturno.

22. El diámetro medio del planeta Mercurio es  $4,88 \times 10^6$  m, y la aceleración debida a la gravedad en su superficie es de  $3,78 \text{ m/s}^2$ . Estima la masa de este planeta.

23. ¿Cuánto trabajo realiza el campo gravitacional de la Luna cuando un meteorito de 995 kg llega desde el espacio exterior e impacta en la superficie de la Luna?

24. Después de que el Sol agote su combustible nuclear, su destino final será colapsar en una enana blanca. En este estado, tendría aproximadamente la misma masa que tiene ahora, pero su radio sería igual al radio de la Tierra.

- Calcula la densidad promedio de la enana blanca.
- Calcula la aceleración de caída libre en la superficie.
- Calcula la energía potencial gravitacional asociada con un objeto de 4,93 kg en la superficie de la enana blanca.

25. Los estudios sobre la relación del Sol con nuestra galaxia, la Vía Láctea, han revelado que el Sol se encuentra cerca del borde exterior del disco galáctico, a unos 30.000 al (1 al =  $9,46 \times 10^{15}$  m) desde el centro. El Sol tiene una velocidad orbital de aproximadamente 250 km/s alrededor del centro galáctico.

- ¿Cuál es el período del movimiento galáctico del Sol?
- ¿Cuál es el orden de magnitud de la masa de la galaxia de la Vía Láctea?
- Supongamos que la galaxia está compuesta principalmente de estrellas de las cuales el Sol es típico. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea?

26. Un cometa (ver la figura a continuación) se acerca al Sol dentro de 0,570 UA, y su período orbital es de 90,6 años. ¿Qué tan lejos del Sol viajará el cometa antes de comenzar su viaje de regreso?

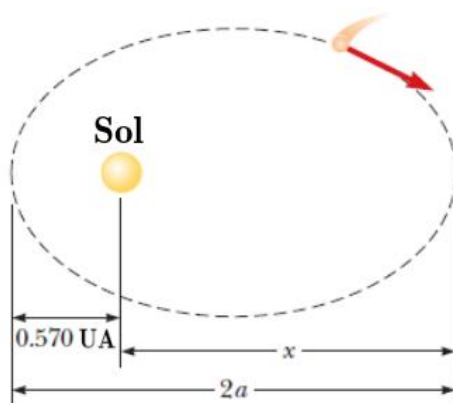


Figura 13.37: Cometa

27. Se coloca un satélite de 190 kg de masa en la órbita terrestre a una altura de 700 km sobre la superficie.

- Suponiendo una órbita circular, ¿cuánto tiempo tarda el satélite en completar una órbita?
- ¿Cuál es la velocidad del satélite?
- Comenzando desde el satélite en la superficie de la Tierra, ¿cuál es la cantidad de energía mínima necesaria para colocar este satélite en órbita? Ignora la resistencia del aire, pero incluye el efecto de la rotación diaria del planeta.

28. a) ¿Cuál es la velocidad mínima, relativa al Sol, necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar si comienza en la órbita de la Tierra?

b) La nave Voyager 1 alcanzó una velocidad máxima de 125.000 km/h en su camino para fotografiar Júpiter. ¿Más allá de qué distancia del Sol es esta velocidad suficiente para escapar del sistema solar?

29. Un satélite de masa  $m_s$  está en una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa  $m_p$ , que se encuentra en un foco de la elipse. El satélite tiene una velocidad  $v_a$  a la distancia  $r_a$  cuando está más alejado del planeta. La distancia de aproximación más cercana es  $r_p$ .

a) Aplica la conservación de energía a los dos estados, periapsis y apoapsis, para determina una relación entre  $r_p$  y  $v_p$ .

b) El torque gravitacional en el satélite respecto del centro del planeta es cero en toda la órbita elíptica del satélite. En periapsis y apoapsis, la velocidad del satélite es perpendicular al vector desde el centro del planeta hasta el satélite. Usa el hecho de que el momento angular es constante respecto del centro del planeta para determinar una expresión para  $v_p$  en términos de  $r_p$ ,  $v_a$  y  $r_a$ .

c) Usa tus resultados de las partes a) y b) para determina una expresión para  $r_p$  en términos de  $G$ ,  $m_p$ ,  $v_a$  y  $r_a$ .

d) Ve si puedes determina la relación  $r_a/r_p$  en términos de  $G$ ,  $m_p$ ,  $v_a$  y  $r_a$ . Sugerencia: esto requerirá algunas manipulaciones de álgebra de tu resultado de la parte c)

30. A partir de los datos que describen la órbita de la estrella S2 alrededor del agujero negro en el centro de la galaxia, Sagitario A\*, calcula la masa del agujero negro en unidades de masa solar. El período de S2 es de 15,559 años; la excentricidad orbital es 0,88; y la distancia del perigaláctico es  $1,835 \times 10^{13}$  m.

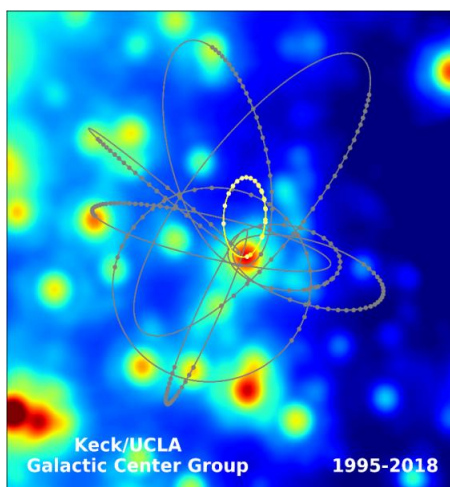


Figura 13.38: Estrellas orbitando alrededor de Sagitario A\*

31. Además de estudiar muestras de la superficie lunar, los astronautas de las misiones Apollo tenían varias formas de determina que la Luna no está hecha de queso verde. Entre estas formas se encuentran las mediciones de la aceleración gravitacional en la superficie lunar. Estima la aceleración gravitacional en la superficie lunar si la Luna fuera, de hecho, un bloque sólido de queso verde y compárala con el valor conocido de la aceleración gravitacional en la superficie lunar.

32. Estás a cargo de la primera exploración tripulada de un asteroide. Te preocupa que, debido al campo gravitacional débil y la baja velocidad de escape resultante, se requieran

ataduras para unir a los exploradores a la superficie del asteroide. Por lo tanto, si no deseas utilizar correas, debe tener cuidado con los asteroides que elija explorar. Estima el radio más grande que puede tener el asteroide que aún te permitiría escapar de su superficie saltando. Supón una geometría esférica y una densidad de roca razonable.

33. Determina la energía mínima requerida para colocar un satélite de telecomunicaciones grande, de cinco toneladas métricas, en una órbita geoestacionaria.

34. Las siguientes cuatro afirmaciones sobre órbitas circulares son equivalentes. Derivar cualquiera de ellos de los primeros principios.

i) El negativo de la energía cinética es igual a la mitad de la energía potencial,  $-K = U/2$ .

ii) La energía potencial es igual al doble de la energía total,  $U = 2E$ .

iii) La energía total es igual al negativo de la energía cinética,  $E = -K$ .

iv) El doble de la energía cinética más la energía potencial es igual a cero,  $2K + U = 0$ .

Esta es una relación clave para un problema mayor en la mecánica orbital conocida como el **Teorema Virial**.<sup>25</sup>

35. El pobre Plutón, que fue despojado de su condición de planeta, tiene un radio del 20 % del radio de la Tierra, y una masa de solo el 0,2 % de la Tierra. (Ambas cifras están dentro del 5 % aproximadamente).

a) Supón que un astronauta, con equipo totalmente aislado, puede saltar 0,5 m de altura en la Tierra. ¿Qué tan alto puede saltar sobre Plutón?

b) Suponiendo que la resistencia al “aire” es insignificante, ¿qué velocidad tendría que viajar un automóvil (impulsado por cohete) sobre un plano (un mar helado) en Plutón para alcanzar la velocidad de escape? (Usa la velocidad de escape de la Tierra).

c) ¿De hecho, habría abandonado el suelo antes de alcanzar esa velocidad? Explica tu respuesta.

36. La velocidad de escape de cierto planeta es de 10 km por segundo. El planeta tiene una luna que tiene un radio de un cuarto de la del planeta y una densidad de la mitad de la del planeta. ¿Cuál es la velocidad de escape desde la luna de tal planeta?

37. En un universo imaginario, la fuerza gravitacional disminuye con la distancia como  $1/r$  en lugar de  $1/r^2$ . Supongamos que en ese universo hay un planeta del mismo tamaño que la Tierra y que también tiene el mismo valor de  $g$  cerca de la superficie.

a) ¿Tendría el mismo período un satélite en órbita circular baja (justo por encima de una atmósfera de profundidad insignificante)?

b) ¿La velocidad de escape sería la misma?

38. En algún lugar de la línea de la Tierra al Sol hay un punto, llamado **punto de Lagrange**, de modo que un satélite colocado allí orbitará alrededor del Sol en sincronía con la Tierra. De hecho, ya hay un satélite allí, que monitorea el Sol continuamente. Propón una estimación de cuán lejos de la Tierra está este punto de Lagrange (la Web podría ser útil).

39. En una misión a la Luna, se dispara una nave espacial desde la Tierra con la velocidad suficiente para llegar a la Luna, con tal mala suerte que no llega a la superficie lunar, sino que queda orbitando. El acercamiento más cercano está cerca del punto de la

<sup>25</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_del\\_virial](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_virial)

superficie de la Luna más alejado de la Tierra. En ese punto, a una pequeña distancia sobre la superficie de la Luna, la nave dispara un cohete para ponerla en una órbita circular baja alrededor de la Luna. ¿Cuál es (aproximadamente) el cambio de velocidad necesario para esta maniobra?

40. Supongamos que un satélite está en órbita terrestre baja, es decir, en una órbita circular a una altura de 200 km, entonces el radio de la órbita es de 6.600 km, digamos. Queremos elevarlo a una órbita circular de dos veces ese radio (por lo que ahora irá en un círculo a una altura de 6.800 km sobre la superficie de la tierra). La técnica consiste en darle dos impulsos rápidos. El empuje 1 lo pone en un órbita elíptica, donde su punto más alejado del centro de la Tierra es exactamente el doble de su distancia de aproximación más cercana. El empuje 2, entregado en el punto más alto de la órbita, lo transfiere a una órbita circular en ese radio. Usa la conservación del momentum angular y la energía en la órbita elíptica para responder estas dos preguntas:

- a) ¿En qué porcentaje aumentó su velocidad con empuje 1?
- b) ¿En qué porcentaje aumentó su velocidad con empuje 2?
- c) Dé una explicación cualitativa de cómo dispararía un cohete para regresar a la Tierra desde una órbita de estacionamiento cerca de Marte (por lo que descuida la propia gravedad de Marte).

41. La galaxia NGC 4258 contiene un disco de materia, como una gran versión de los anillos de Saturno. El disco no es rígido, sino que está formado por rocas, etc., todas en órbitas aproximadamente circulares. El disco tiene radio interno 0,14 pc (parsec)<sup>26</sup>, radio externo 0,28 pc. La parte más interna está orbitando con un período de 800 años, el borde exterior con un período de 2.200 años.

a) muestra que estos datos indican que el disco está en un campo gravitacional dominado por un objeto masivo central (en lugar de, por ejemplo, el campo del disco en sí).

b) Encuentra la masa aproximada del objeto central. El cúmulo estelar más denso conocido es de aproximadamente  $10^5$  masas solares/pc<sup>3</sup>. ¿Podría el objeto central ser un cúmulo estelar?

42. La Tercera Ley de Kepler establece  $T^2/a^3$  que tiene el mismo valor numérico para todos los planetas del sistema solar. Para órbitas circulares, ¿cómo se relacionan  $R$  y  $T$  si la fuerza gravitacional fuese proporcional a

- a)  $1/r$ ?
- b)  $1/r^3$ ?

¿Qué podemos concluir de la Tercera Ley de Kepler sobre la fuerza gravitacional?

43. Las señales de televisión son transmitidas por satélites síncronos, colocados en órbitas de modo que se mantienen sobre el mismo lugar en la Tierra. Usa las Leyes de Kepler y los datos sobre la órbita de la Luna para encontrar qué tan por encima de la superficie de la Tierra están los satélites síncronos. ¿Podría uno colocarse directamente sobre Santiago de Chile? Si dices que no, explica tu razonamiento.

44. a) Un cometa que tiene un período de 64 años tiene una aproximación más cercana al Sol 0,5 UA. Usa la Tercera Ley de Kepler y la comparación con la Tierra para determina su distancia más lejana del Sol.

<sup>26</sup><https://es.wikipedia.org/wiki/Parsec>

b) ¿Cuál es la relación de su energía cinética cuando está en el perihelio a su energía cinética en el afelio?

c) ¿Cómo se compara su energía cinética en el perihelio con la de una masa igual en una órbita circular alrededor del Sol a esa distancia? (Una respuesta aproximada servirá).

45. Demuestra la Ec. (13.6).

46. El radio orbital del planeta Neptuno alrededor del Sol es  $n$  veces el de la Tierra. El planeta Neptuno tarda 164,3 años en completar una revolución. Encuentra el valor de  $n$ . (Supón que las órbitas planetarias son circulares)

47. El planeta Marte tarda 1,88 años en completar una revolución alrededor del sol. La distancia media de la Tierra al Sol es de  $1,5 \times 10^8$  km. Calcula La distancia media de Marte al Sol.

48. Un satélite en órbita a una altura de  $2,5 R_T$  sobre la superficie de la Tierra tarda  $6\sqrt{2}$  horas en completar una revolución. Demuestra que otro satélite en órbita a una altura de  $6 R_T$  desde la superficie de la Tierra es un satélite geoestacionario.

49. Un satélite de 500 kg de masa orbita la Tierra a una altura de 400 km sobre la superficie. ¿Cuánta energía se requiere para cambiarlo a una órbita de altura a una altura de 600 km?

50. En la figura se muestran tres masas iguales de  $m$  kg, cada una fija en los vértices del triángulo equilátero ABC.

a) ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre una masa 2 en el **centroide**  $G$  del triángulo?

b) ¿Cuál es la fuerza si la masa en el vértice A aumenta al doble? Tome  $AG = BG = CG = 1,0$  m

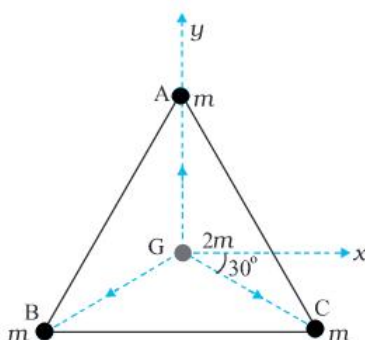


Figura 13.39: Treas masas en un triángulo

51. a) Encuentra la energía potencial gravitacional de un sistema de cuatro partículas iguales colocadas en los vértices de un cuadrado del lado  $L$ . También obtenga el potencial gravitacional en el centro del cuadrado.

b) Encuentra el vector intensidad de campo gravitatorio en el punto  $P$ , que se encuentra a  $L/2$  de uno de los lados, como indica la figura. Después evalúe, suponiendo que las masas son de 1kg cada una y  $L = 50$  cm.

52. Dos esferas sólidas uniformes de radios iguales  $R$ , pero con masas  $M$  y  $4M$  tienen una separación de centro a centro  $6R$ , como se muestra en la Fig. 13.41. Las dos esferas se

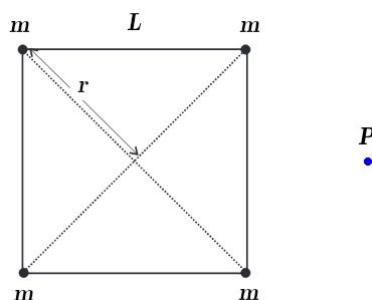


Figura 13.40: Cuatro masas que se atraen gravitacionalmente

mantienen fijas. Se lanza un proyectil de masa  $m$  desde la superficie de la esfera de masa  $M$  directamente hacia el centro de la segunda esfera. Obten una expresión para la velocidad mínima  $v$  del proyectil para que alcance la superficie de la segunda esfera.

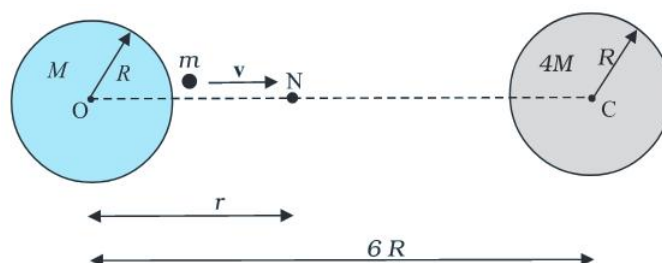


Figura 13.41: Proyectil entre dos masas

Para estos problemas, sugiero ver el capítulo de sistemas no inerciales.

53. Se cree que ciertas estrellas de neutrones giran a aproximadamente una revolución por segundo. Si tal estrella tiene un radio de 30 km, ¿cuál debe ser su masa para que los objetos en su superficie no sean arrojados por la rotación rápida?

54. ¿Qué tan rápido necesitaría girar la Tierra para que aquellos en el ecuador tengan cero peso aparente? ¿Cuánto duraría la duración del día?







## 14. SISTEMAS NO INERCIALES

Al estudiar las Transformaciones de Galileo, hemos aprendido cómo se relacionan las coordenadas, velocidades y aceleraciones de un objeto (evento) observado por dos observadores inerciales en sendos sistemas de referencia inerciales,  $S$  y  $S'$ .

La pregunta que nace naturalmente es cómo se generalizan las transformaciones de Galileo a sistemas no inerciales, es decir aquellos que están acelerados respecto de uno en reposo (relativo). ¿Cómo se relacionan las coordenadas, velocidades y aceleraciones de un objeto (evento) observado por dos observadores, uno de los cuales está acelerado respecto de otro?



Figura 14.1: Moviéndose en un sistema acelerado

Algo debe cambiar por cierto, eso lo sabemos. Así es, todos hemos estado en un vehículo de algún tipo que está moviéndose aceleradamente. Ya sea cuando no hemos columpiado o cuando hemos ido en un bus que vira o frena bruscamente, etc.

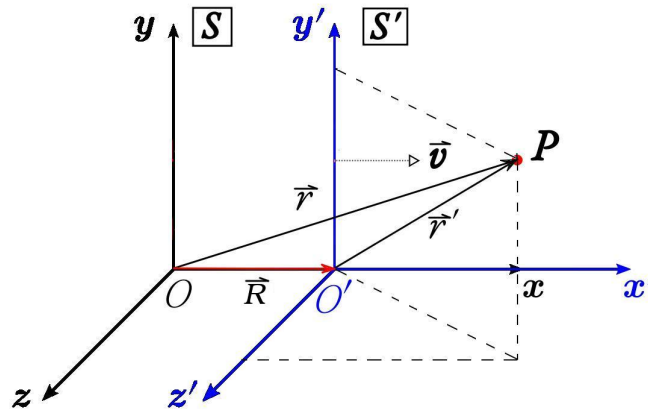


Figura 14.2: Movimiento relativo entre dos sistemas de referencia

### 14.1 Traslación de sistemas acelerados

Veamos primero un caso simple, donde un eje coordenado de ambos sistemas coincide. De la Fig. 14.2, por simple suma de vectores, y suponiendo que  $\vec{R} = X\hat{x} + Y\hat{y} + Z\hat{z}$ , vemos que se cumple

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}. \quad (14.1)$$

Escrita en coordenadas, esta ecuación corresponde a

$$\begin{aligned} x' &= x - X, \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (14.2)$$

Por supuesto, el tiempo medido por ambos observadores sigue siendo el mismo.

Derivando las ecuaciones respecto del tiempo obtenemos la relación entre las velocidades

$$\begin{aligned} v'_x &= v_x - V_x, \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Y derivando una vez más, encontramos la relación entre las componentes de la aceleración

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x - A_x, \\ a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Es decir, un observador no inercial mide una aceleración adicional debido a la aceleración  $\vec{A}$  del sistema de referencia  $S'$  respecto de  $S$ . Por supuesto, ese resultado tiene implicancias en la segunda ley de Newton, si la tomamos un poco a la ligera, porque esta ley está definida solo para sistemas inerciales. Sin embargo, nadie nos prohíbe preguntarnos cómo se vería la segunda ley de Newton si aún así exigimos que se cumpla en el sistema no inercial. Esto es, tenemos que en el sistema  $S'$

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{A}. \quad (14.5)$$

Las únicas fuerzas “reales”, físicas, son aquellas definidas en sistemas inerciales. Esto significa que  $\vec{F}_{fis} = m\vec{a}$ . Sin embargo, cuando vamos en una curva cerrada dentro de un auto sentimos también fuerzas reales, esas que nos aprietan contra la ventana del auto. Desde el punto de vista de Newton, sin embargo, esas fuerzas al no estar medidas en un sistema inercial, las llamamos **fuerzas ficticias**,  $\vec{F}_{fic}$ ; son un artefacto del sistema de coordenadas utilizado. Es importante observar que la fuerza inercial  $\vec{F}_{fic}$  se diferencia de las fuerzas asociadas a interacciones en que la fuerza  $\vec{F}_{fic}$  no se asocia a una interacción y por tanto no satisface la tercera ley de Newton; es decir, no existe una fuerza  $-\vec{F}_{fic}$  aplicada en algún otro cuerpo, que sea la reacción correspondiente a  $\vec{F}_{fic}$ .

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\vec{F}' = \vec{F}_{fis} + \vec{F}_{fic}. \quad (14.6)$$

### Ejemplo 1

Consideremos un aparato formado por un objeto de masa  $m$  situado sobre un plano horizontal de fricción despreciable, y unido a un extremo de un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $x_0$ . Analicemos qué es lo que observa cada observador en los sistemas  $S$  y  $S'$ .

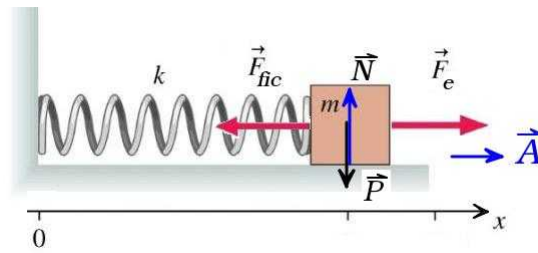


Figura 14.3: Sistema masa-resorte

### Solución:

En el sistema  $S$ , la segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (14.7)$$

Aparte de que la fuerza normal y el peso se anulan, obtenemos que

$$\vec{F}_e = m\vec{a} \implies -k(x - x_0) = ma. \quad (14.8)$$

En el sistema  $S'$ , la segunda ley de Newton establece que

$$\vec{F}' = \vec{F}_{fis} + \vec{F}_{fic} = m\vec{a}' = \vec{0}, \quad (14.9)$$

debido a que el observador está sobre la masa, moviéndose con ella. Luego, respecto de ese sistema no se está moviendo. Por lo tanto,

$$-k(x - x_0) - mA = 0. \quad (14.10)$$

Según la Ec. (14.4),  $a = A$  y recuperamos el resultado anterior.

### Ejemplo 2

Consideremos una masa colgando con la ayuda de una cuerda (un péndulo). Este sistema se encuentra dentro de un vehículo que acelera, como muestra la Fig. 14.4. Nos preguntamos por el ángulo que forma esta cuerda con la vertical. ¿Qué observa un observador en el camino? ¿Y un observador dentro del vehículo?

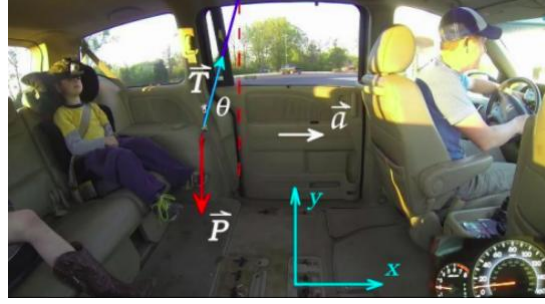


Figura 14.4: Péndulo en sistema acelerado, visto por el observador en  $S$

### Solución:

De acuerdo a la segunda ley de Newton, en el sistema  $S$ ,

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (14.11)$$

Es decir,

$$-P\hat{y} + T \cos \theta \hat{y} + T \sin \theta \hat{x} = ma\hat{x}, \quad (14.12)$$

de donde

$$\begin{aligned} T \cos \theta &= P \\ T \sin \theta &= ma \end{aligned} \quad (14.13)$$

Por lo tanto, el ángulo está dado por

$$\tan \theta = \frac{a}{g}. \quad (14.14)$$

Un observador en  $S'$  ve que el péndulo está en reposo. Luego, la suma de todas las fuerzas en ese sistema debe ser cero:

$$\vec{F}' = \vec{0} \implies \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}_{fic} = \vec{0}. \quad (14.15)$$

Es decir,

$$-P\hat{y} + T \cos \theta \hat{y} + T \sin \theta \hat{x} - F_{fic}\hat{x} = \vec{0}. \quad (14.16)$$

Cuando vamos en un vehículo que acelera hacia adelante sentimos que nos presionan sobre el asiento. La fuerza que nos presiona es la suma vectorial de dos fuerzas

$$-P\hat{y} - F_{fic}\hat{x} \implies m(-g\hat{y} - a\hat{x}). \quad (14.17)$$

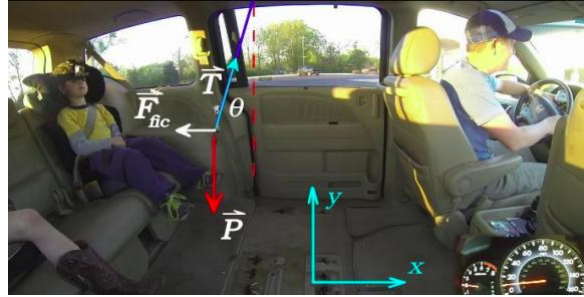


Figura 14.5: Péndulo en sistema acelerado, visto por observador en  $S'$

Esta fuerza es un **peso efectivo**, asociado a una aceleración de gravedad efectiva. El “tirón” hacia abajo que sentimos al comienzo del movimiento de un ascensor cuando sube tiene su origen en este efecto no inercial.

Es claro, entonces, que obtenemos el mismo resultado anterior, Ec. (14.25).

Este padre juega con sus hijos, mientras aprenden física. Además, hay preguntas muy interesantes para que te entretengas (<https://www.youtube.com/watch?v=y8mzDvpKzfY>).

## 14.2 Análisis general de sistemas no inerciales

Esta sección es más desafiante, pero como sucede con los desafíos académicos, cuando uno logra llegar al final, habrá mucho que aprender. Y si incluso uno no tiene éxito, solo intentar y seguir el camino será de ayuda.

Veamos ahora el caso más general, que incluya rotaciones del sistema  $S'$ . Un ejemplo muy conocido de este tipo de sistema es nuestra propia Tierra. Sí, vivimos en un sistema no inercial debido a la rotación de la Tierra alrededor de su eje (más otros movimientos adicionales). No nos damos mucha cuenta porque las aceleraciones son pequeñas y por tanto en una buena aproximación podemos pensar, una buena parte del tiempo, como si viviésemos en un sistema inercial. Pero no siempre, como veremos.

Antes de comenzar a estudiar esta sección te recomiendo que veas, estudies y analices este video, y que vuelvas a hacerlo una vez terminada esta sección. Es un video del año 1960 es muy interesante e iluminador acerca de movimiento en sistemas de referencia inerciales y no inerciales, y cómo distintos observadores describen el movimiento: <https://www.youtube.com/watch?v=bJMYoj4hHqU>.

Consideremos los sistemas mostrados en la Fig. 14.6. En ella hemos definido vectores unitarios con una notación distinta a la que hemos utilizado hasta ahora:  $\hat{e}_x \hat{e}_y \hat{e}_z \hat{e}'_x \hat{e}'_y \hat{e}'_z$ . No te asustes. Es solo notación.<sup>1</sup> De la figura, los vectores de posición de un evento  $P$  están dados por

$$\vec{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z \quad (14.18)$$

y

$$\vec{r}' = x'\hat{e}'_x + y'\hat{e}'_y + z'\hat{e}'_z. \quad (14.19)$$

<sup>1</sup>Esta notación es muy usual en algunas áreas de la física, así que vale la pena conocerla.

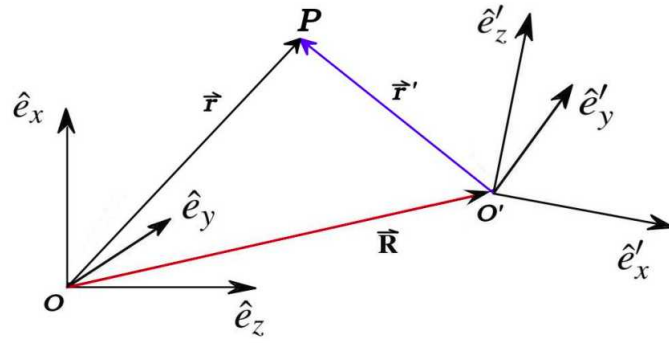


Figura 14.6: Movimiento relativo acelerado entre dos sistemas de referencia

Consideramos que los vectores unitarios en el sistema  $S$  están fijos, es decir no cambian en el tiempo, pero permitimos que los vectores unitarios en el sistema  $S'$  sí tengan esa dependencia.

Para avanzar en la descripción del movimiento, supongamos que el sistema  $S'$  rota alrededor del sistema  $S$ , con ambos ejes  $z$  y  $z'$  coincidentes. Esto se muestra en la Fig. 14.7.

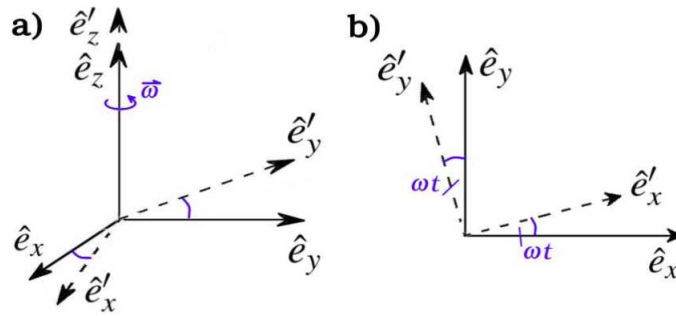


Figura 14.7: Caso especial de sistema no inercial: rotaciones

A partir de la figura b) deducimos cómo cambian los vectores unitarios con el tiempo

$$\begin{aligned}\hat{e}'_x &= \hat{e}_x \cos(\omega t) + \hat{e}_y \sin(\omega t), \\ \hat{e}'_y &= -\hat{e}_x \sin(\omega t) + \hat{e}_y \cos(\omega t), \\ \hat{e}'_z &= \hat{e}_z.\end{aligned}\tag{14.20}$$

Si derivamos estas ecuaciones respecto del tiempo obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\hat{e}'_x}{dt}\right)_S &= -\omega \hat{e}_x \sin(\omega t) + \omega \hat{e}_y \cos(\omega t), \\ \left(\frac{d\hat{e}'_y}{dt}\right)_S &= -\omega \hat{e}_x \cos(\omega t) - \omega \hat{e}_y \sin(\omega t), \\ \left(\frac{d\hat{e}'_z}{dt}\right)_S &= \vec{0},\end{aligned}\tag{14.21}$$

donde hemos añadido la información de en qué sistema se hace la derivada temporal. Estas expresiones muestran cómo cambian los vectores unitarios visto por un observador fijo en  $S$ .

Podemos escribir estas expresiones de un modo más compacto:

$$\left( \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \right)_S = \vec{\omega} \times \hat{e}_i, \quad i=x, y, z. \quad (14.22)$$

Recuerda que en este caso,  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ .

**Observación:** De forma más general, es usual hacer que el índice  $i$  tome los valores 1, 2, 3, de modo que los vectores unitarios así designados forman un sistema ortonormal, no necesariamente el cartesiano.

El cambio de estos vectores unitarios según un observador fijo en  $S'$  es

$$\left( \frac{d\hat{e}'_i}{dt} \right)_{S'} = \vec{0}, \quad i=x, y, z. \quad (14.23)$$

Para que te imagines de qué estamos hablando, estando de pie extiende tus brazos hacia el frente y a los lados, formando  $90^\circ$ . Ellos representan los ejes  $x'$  e  $y'$ , mientras que tu cabeza corresponde al eje  $z'$ . Si giras frente a un compañero de clase, éste representará el observador en  $S$  que observa cómo giran los ejes  $x'$  e  $y'$ . Si ahora tú observas tus brazos mientras giras, te darás cuenta que ellos, respecto de ti (que eres el sistema  $S'$ ), no cambian con el tiempo, manteniendo su posición.

Ahora podemos escribir un vector general  $\vec{U}$  en ambos sistemas

$$\begin{aligned} \vec{U} &= U_x \hat{e}_x + U_y \hat{e}_y + U_z \hat{e}_z \\ &= U'_x \hat{e}'_x + U'_y \hat{e}'_y + U'_z \hat{e}'_z. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Si derivamos respecto del tiempo, según un observador en el sistema  $S$

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_S &= \frac{d}{dt} (U'_x \hat{e}'_x + U'_y \hat{e}'_y + U'_z \hat{e}'_z)_S \\ &= \left( \frac{dU'_x}{dt} \right)_S \hat{e}'_x + \left( \frac{dU'_y}{dt} \right)_S \hat{e}'_y + \left( \frac{dU'_z}{dt} \right)_S \hat{e}'_z \\ &\quad + U'_x \left( \frac{d\hat{e}'_x}{dt} \right)_S + U'_y \left( \frac{d\hat{e}'_y}{dt} \right)_S + U'_z \left( \frac{d\hat{e}'_z}{dt} \right)_S \\ &= \left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times (U'_x \hat{e}'_x + U'_y \hat{e}'_y + U'_z \hat{e}'_z), \end{aligned} \quad (14.25)$$

donde hemos reemplazado la Ec. (14.22) y definido

$$\left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{S'} = \left( \frac{dU'_x}{dt} \right)_S \hat{e}'_x + \left( \frac{dU'_y}{dt} \right)_S \hat{e}'_y + \left( \frac{dU'_z}{dt} \right)_S \hat{e}'_z. \quad (14.26)$$

Esto último puede ser curioso por que deberíamos haber esperado  $\left( \frac{dU'_i}{dt} \right)_{S'}$  en las componentes, pero resulta que usar una u otra derivada en las componentes del vector no hace una diferencia. Te lo dejo de tarea y para pensar.



Por lo tanto, obtenemos una de las ecuaciones más importantes de este capítulo

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{U}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{U}. \quad (14.27)$$

Un resultado importante que se deduce directamente de esta ecuación es que las derivadas de la frecuencia angular en cada sistema, las aceleraciones angulares, son las mismas. Esto se obtiene de reemplazar  $\vec{U}$  por  $\vec{\omega}$ , teniendo en cuenta que  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = \vec{0}$

$$\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_{S'}. \quad (14.28)$$

### 14.2.1 Velocidad en el sistema de referencia no inercial

Sabemos que

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}. \quad (14.29)$$

Derivemos respecto del tiempo, según lo observa el observador inercial  $S$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{V}, \quad (14.30)$$

después de reemplazar la Ec. (14.25).

Por definición, la velocidad medida en el sistema  $S'$  es

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'}, \quad (14.31)$$

luego

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (14.32)$$

Observamos que si solo hay traslación, es decir si  $\vec{\omega} = \vec{0}$ ,

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \quad (14.33)$$

**Cuidado, ésta no es la transformación de velocidades de Galileo, a menos que la aceleración del sistema  $S'$  sea cero,  $\vec{A} = \vec{0}$ .**

De aquí deducimos también que si el móvil  $P$ , el evento, está en reposo en el sistema  $S'$ , entonces

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (14.34)$$

No, esta ecuación tampoco es una transformación de Galileo.



### 14.2.2 Teorema de Coriolis: aceleración en sistemas no inerciales

Ya hemos visto cómo se relacionan las velocidad en ambos sistemas. Ahora nos enfocamos en la relación entre las aceleraciones observadas en  $S$  y  $S'$ . Para ello derivamos la Ec. (14.32) respecto del tiempo, según lo observa alguien en  $S$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S, \quad (14.35)$$

es decir, reemplazando la Ec. (14.25)

$$\vec{a} = \vec{A} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}'\right] + \left[\left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{v}'\right]. \quad (14.36)$$

Lo que nos conduce al **Teorema de Coriolis**<sup>2</sup>

$$\vec{a} = \vec{A} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'. \quad (14.37)$$

Así en un sistema que tiene una rotación pura respecto del sistema  $S$ , es decir  $\vec{A} = \vec{0}$ , un cuerpo sentirá una fuerza ficticia, que definimos igual que antes, como si la segunda ley de Newton fuese válida allí. Esto es,

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= -m\vec{a} - m \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' - m \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' - 2m \vec{\omega} \times \vec{v}' \\ &= \vec{F}_{fis} + \vec{F}_{fic} \end{aligned} \quad (14.38)$$

donde la fuerza ficticia se define como

$$\vec{F}_{fic} = -m \left[ \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \right]. \quad (14.39)$$

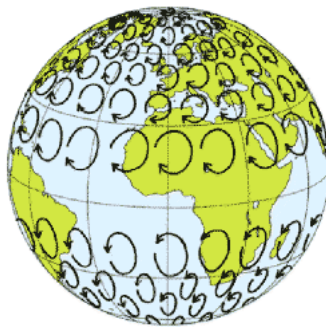


Figura 14.8: Flujo de vientos debido a fuerza de Coriolis

El tercer término se denomina **fuerza de Coriolis**. Debido a que depende de la velocidad del objeto en el sistema  $S'$ , solo se observa cuando éste se mueve. Esto ocurre por

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Gaspard-Gustave\\_de\\_Coriolis](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaspard-Gustave_de_Coriolis)

ejemplo con masas de aire en la atmósfera, lo que produce patrones bien definidos en los hemisferios Norte y Sur, como muestra la Fig. 14.8. En particular, es responsable de la existencia de huracanes. También puede observarse cuando se deja caer un objeto. Esto te puede parecer extraño porque no lo has notado, pero si la altura de la que se deja caer es suficiente, el efecto es medible<sup>3</sup>, como se esquematiza en la Fig. 14.9. Un instrumento maravilloso que sirve para dar cuenta de la rotación de la Tierra es el **péndulo de Foucault**.<sup>4</sup>

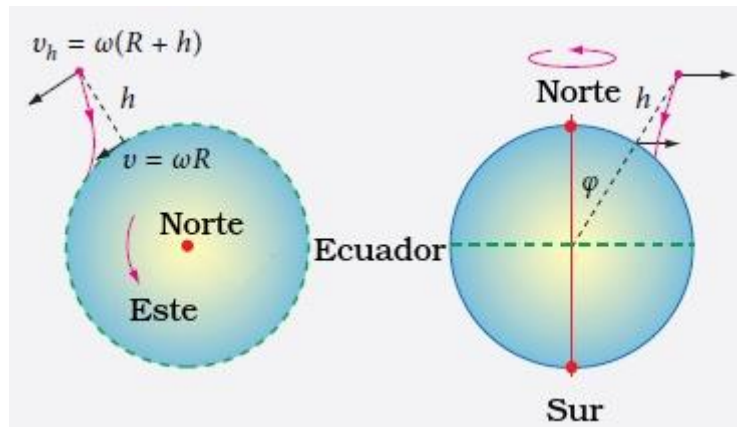


Figura 14.9: Desplazamiento de la trayectoria de un cuerpo en caída libre

Un video muy claro donde se muestra la fuerza de Coriolis, es el siguiente [https://www.youtube.com/watch?v=dt\\_XJp77-mk](https://www.youtube.com/watch?v=dt_XJp77-mk). También, el primer video de este capítulo explica este efecto.

El segundo término de la Ec. (14.39) corresponde a una aceleración que tiene el módulo de la aceleración centrípeta, como puedes verificar, pero el signo menos indica que apunta radialmente hacia afuera; es la **fuerza centrífuga**. Esta es la fuerza que sentimos y que nos tira hacia afuera, apretándonos contra el vidrio de un auto cuando éste vira en una curva cerrada.

El primer término, que solo se observa si la aceleración tangencial es variable, se denomina **fuerza transversa**.

### Ejemplo 1:

Analicemos la caída libre de un objeto desde una cierta altura  $h$  sobre la superficie terrestre. No haremos un cálculo detallado, sino que nos preocuparemos de obtener un valor aproximado. La Tierra rota, pero su velocidad angular de rotación es baja,  $\omega = 1/24$  revoluciones por hora, luego lo que haremos es despreciar valores cuadráticos de la velocidad angular, es decir del orden de  $O(\omega^2)$ .

De la Ec. (14.37), con  $\vec{A} = \vec{0}$ , ya que estamos en reposo en el sistema  $S'$  (parados sobre la superficie terrestre),  $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_S = \vec{0}$  debido a que la rotación de la Tierra es uniforme, y

<sup>3</sup> Giovanni Battista Guglielmini fue quien primero logró medir este efecto, predicho por Galileo y Newton, prueba simple de la rotación de la Tierra. En la Tierra, los objetos no caen verticalmente, sino que se desvían ligeramente hacia el Este. Esta desviación aparece porque un objeto mantiene la mayor velocidad horizontal que tenía a la altura desde la que comenzó a caer.

<sup>4</sup>[https://www.youtube.com/watch?v=iqpV1236\\_Q0](https://www.youtube.com/watch?v=iqpV1236_Q0)

usando  $\vec{a} = \vec{g}$ , tenemos

$$\left( \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right)_S = -2 \vec{\omega} \times \left( \frac{d \vec{r}'}{dt} \right)_S + \vec{g}, \quad (14.40)$$

en la aproximación mencionada.

Integramos esta ecuación una vez respecto del tiempo

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt} \left( \frac{d \vec{r}'}{dt} \right) dt &= -2 \vec{\omega} \times \int_0^t \frac{d}{dt} (\vec{r}') dt + \vec{g} \int_0^t dt \\ \left. \frac{d \vec{r}'}{dt} \right|_t - \left. \frac{d \vec{r}'}{dt} \right|_0 &= -2 \vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{r}'_0) + \vec{g} t \\ \frac{d \vec{r}'}{dt} &= -2 \vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{r}'_0) + \vec{g} t, \end{aligned} \quad (14.41)$$

donde en el lado izquierdo hemos supuesto que el objeto parte del reposo, en el instante  $t = 0$ .

Si reemplazamos esta última igualdad en la Ec. (14.40) y mantenemos nuestra aproximación desechando términos de  $O(\omega^2)$ , entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right)_S &= -2 \vec{\omega} \times \{ -2 \vec{\omega} \times (\vec{r}' - \vec{r}'_0) + \vec{g} t \} + \vec{g} \\ &= -2 \vec{\omega} \times (\vec{g} t) + \vec{g}, \end{aligned} \quad (14.42)$$

ecuación que podemos integrar muy fácilmente (¡házlo!), dos veces:

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \frac{1}{3} \vec{\omega} \times \vec{g} t^3. \quad (14.43)$$

Reconocemos en los dos primeros términos la ecuación de la cinemática de un cuerpo en caída libre. El tercer término es la novedad, y es el responsable del desplazamiento del cuerpo mientras cae.

En la Fig. 14.10 se muestra el sistema coordenado que usaremos. La esfera representa la Tierra. Notamos que, tal como lo hemos mencionado anteriormente, los vectores unitarios  $e_i$  ya no son los vectores cartesianos<sup>5</sup>. Lo importante para nosotros es que en este sistema coordenado  $\vec{g} = -g \hat{e}_1$ ,  $\vec{r} = r \hat{e}_1$ . Además, hacemos una aproximación, solo para simplificar, que el experimento está siendo llevado a cabo en el Ecuador, lo que significa que  $\vec{\omega} = -\omega \hat{e}_3$  (recuerda que por regla de la mano derecha,  $\vec{\omega}$  apunta hacia el Norte). Por último, la posición inicial de caída es  $\vec{r}_0 = (R_T + h) \hat{e}_1$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= (R_T + h) \hat{e}_1 - \frac{1}{2} g \hat{e}_1 t^2 - g \frac{1}{3} \omega \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 t^3 \\ &= \left[ (R_T + h) - \frac{1}{2} g t^2 \right] \hat{e}_1 + g \frac{1}{3} \omega t^3 \hat{e}_2, \end{aligned} \quad (14.44)$$

donde hemos usado la regla de mano derecha para notar que  $\hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_2$ . Observamos que el último término, que da cuenta del desplazamiento en la caída debido a la rotación, es hacia el Este.

<sup>5</sup>Este sistema coordenado se denomina **sistema coordenado esférico**. Otra notación estándar es  $\hat{e}_1 = \hat{r}$ ,  $\hat{e}_2 = \hat{\phi}$ ,  $\hat{e}_3 = \hat{\theta}$ . Otra de las razones de la comodidad de utilizar la notación compacta,  $\hat{e}_i$

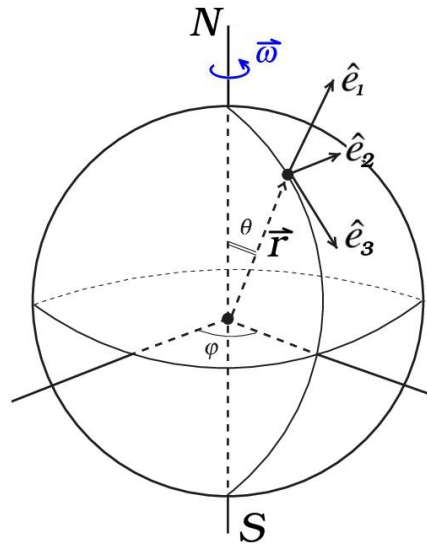


Figura 14.10: Coordenadas esféricas para el problema de caída libre

Podemos hacer otra aproximación en el tiempo de caída. Recordando lo que aprendimos cuando estudiamos caída libre, éste es  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . Por lo tanto, el desplazamiento lateral,  $d$ , durante la caída es

$$d = g \frac{1}{3} \omega \left( \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^3 = \frac{2\omega}{3} \sqrt{\frac{2h^3}{g}}. \quad (14.45)$$

Te dejo como entretenición analizar cómo cambiaría el resultado si el experimento se lleva a cabo en Temuco, Chile

Otra aplicación de sistemas inerciales, y que apareció en el film de Stanley Kubrick <sup>6</sup> 2001: Odisea del Espacio, es la generación de gravedad artificial en una nave espacial en rotación.



Figura 14.11: Gravedad artificial en una nave espacial

<sup>6</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Stanley\\_Kubrick](https://en.wikipedia.org/wiki/Stanley_Kubrick)

## 14.2.3 Ejercicios

1. Como estás visitando el curso de física se te ha ocurrido hacer un experimento en el ascensor del edificio donde vives. Para ello le has pedido la balanza de baño a tu madre. Subes al ascensor y éste acelera hacia abajo con una aceleración constante  $a$ . Antes, te has parado sobre la balanza. ¿Cuál es el valor de tu peso según se muestra en la balanza? Supón que tu masa es  $m$ .

2. Tan entretenido ha resultado el experimento anterior que se te ocurre preparar una bajada en un plano inclinado sobre la balanza de tu madre, manteniéndola horizontal, como muestra la Fig. 14.12. Si desprecias el roce entre la balanza y el plano, cuyo ángulo de inclinación es  $\theta = 30^\circ$ , y tu masa es 45 kg ¿cuál será la lectura de la balanza en estas condiciones?

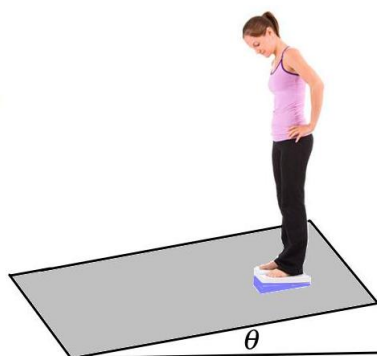


Figura 14.12: Bajando un plano inclinado sobre una balanza

3. Has tomado un tren y está tan entusiasmado con la materia de sistemas no inerciales que decides hacer un experimento. Justo has tenido la suerte de llevar un sistema masa-resorte contigo. Lo pones sobre la mesa que hay delante de tu asiento, que tiene fricción despreciable. El resorte tiene largo  $x_0$  en reposo. El tren arranca con una aceleración  $A$  que se mantiene constante en la dirección  $x$ . Calcula la deformación del resorte desde el punto de vista del observador en tierra y desde tu punto de vista, que vas en el vagón.

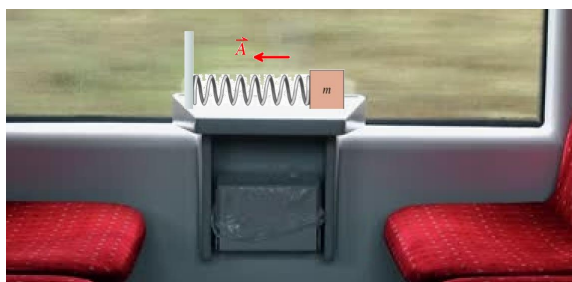


Figura 14.13: Sistema masa-resorte en tren acelerado

4. Regresas a casa después de hacer tus experimentos y te subes al ascensor con la balanza de tu madre. Te paras sobre la balanza justo en el momento en que el ascensor asciende con una aceleración constante  $A$ , ¿cómo cambia tu peso?

5. En el interior de un carrito de juguete cuelga desde su techo una masa  $m$  atada por una cuerda ideal. El carrito se encuentra en el piso de un ascensor que sube con aceleración  $g/2$ . A su vez el carrito tiene una aceleración horizontal de magnitud  $g$  respecto del ascensor. Encuentra el ángulo que forma la cuerda con la vertical, según visto por un observador situado dentro del ascensor.

6. El pasajero de un tren deja caer una piedra en diversos estados de movimiento del tren. Halla la trayectoria de dicha piedra que ve el pasajero y la trayectoria vista por un observador en tierra cuando

- El tren acelera con aceleración  $A$  constante.
- El tren frena con aceleración  $A$  constante.

7. Se ha atado un péndulo de masa  $m = 1$  kg a un marco rectangular de masa  $M = 5$  kg que desliza por un plano inclinado de ángulo  $\theta = 30^\circ$ , como se muestra la Fig. 14.14. Una vez iniciado el movimiento la plomada se estabiliza formando un cierto ángulo respecto de la vertical. Calcula el ángulo que forma la cuerda del péndulo respecto de la vertical si no existe rozamiento entre las superficies.

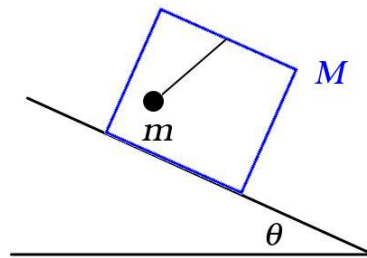


Figura 14.14: Marco con péndulo bajando aceleradamente por plano inclinado

8. Estás tan interesado en el tema de sistemas no inerciales que construyes un plano inclinado muy suave, de inclinación  $\theta = 30^\circ$  y longitud total  $h = 2,3$  m y te subes al ascensor de tu edificio. Pones el plano inclinado sobre el piso del ascensor y sobre él un cuerpo de masa  $m = 1$  kg, también muy suave, que dejas deslizar desde el extremo superior del plano. Calcula:

- El tiempo que tarda el cuerpo en descender todo el plano si el ascensor sube con aceleración constante  $1,3 g$
- La aceleración del bloque según lo mide alguien fuera del edificio.

9. Se instala una máquina de Atwood en el techo de un ascensor, como muestra la Fig. 14.15. Esta máquina es tal que  $m_1 < m_2$ . El ascensor comienza a subir con una aceleración constante  $g/2$ . Despreciando las masa de la polea y de la cuerda, así como todo tipo de roce, calcula:

- La aceleración de  $m_1$  y  $m_2$  respecto del interior del ascensor
- La aceleración de  $m_1$  y  $m_2$  respecto al foso del ascensor.
- La fuerza con la cual la polea actúa sobre el techo del ascensor.

10. Considera un cuerpo de masa  $m$  unido a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud  $x_0$  que gira con velocidad angular  $\omega$  constante en un plano horizontal, sin fricción. Calcula el estiramiento  $\Delta x$  del resorte.



Figura 14.15: Máquina de Atwood en un ascensor

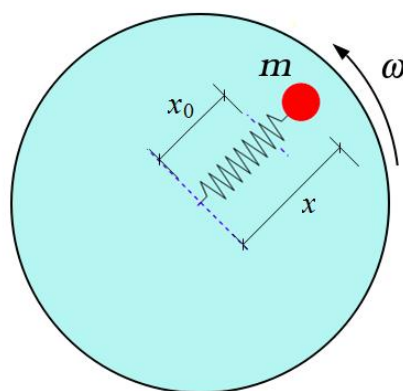


Figura 14.16: Sistema masa-resorte girando

11. Se tiene una plataforma circular de radio  $R$  a la cual se le ha pintado un radio y gira con velocidad angular constante  $\omega$ . Un hombre camina de afuera hacia adentro de la plataforma siguiendo la línea con una velocidad de módulo constante  $v$ .

- Identifica todas las fuerzas que actúan sobre el hombre, en función de su posición.
- La persona con velocidad  $\vec{v}$  no se deslizará mientras la fuerza de fricción equilibre la combinación de las fuerzas centrífugas y de Coriolis, y la fuerza de fricción no exceda un valor al que dominan las fuerzas ficticias. Encuentra el radio para el cual la persona comenzará a resbalar.

c) Supón que  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ,  $v = 1 \text{ m/s}$  y el coeficiente de roce estático  $\mu_e = 0,5$ , calcula el valor del radio anterior si  $g = 9,806 \text{ m/s}^2$

13. Una masa  $m$  desliza por una barra horizontal lisa que gira con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje vertical que pasa por uno de sus extremos, como muestra la Fig. 14.17. En el instante inicial el manguito se encuentra en el eje con velocidad cero. Determina, en el momento en que la masa se encuentra a una distancia  $r$  del eje:

- la reacción  $R$  de la barra sobre el manguito,
- la velocidad del manguito en una referencia fija.

14. En la la Fig. 14.17 se muestra una varilla horizontal lisa gira con una velocidad angular constante  $\omega = 2 \text{ rad/s}$  alrededor de un eje vertical que pasa por su extremo. Una

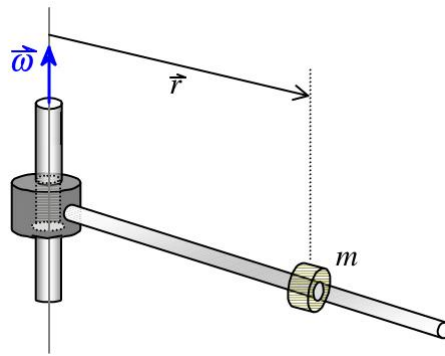


Figura 14.17: Manguito rotante

manga de masa libremente deslizante  $m = 0,5 \text{ g}$  se mueve desde el eje a lo largo de la varilla, con la velocidad inicial  $v_0 = 1 \text{ m/s}$ . Encuentra la fuerza de Coriolis que actúa sobre la masa  $m$  (en el marco de referencia fijo a la varilla giratoria) en el momento en que esta masa se encuentra a la distancia  $r = 50 \text{ cm}$  del eje de rotación.

15. ¿Cual debería ser la velocidad angular de rotación de la tierra para que la aceleración efectiva de la gravedad no dependa de la latitud?

16. **Este problema es un desafío.**

Se hace girar un cubo medio lleno de agua con velocidad angular  $\omega$  sobre su eje de simetría, que es vertical, como muestra la Fig. 14.18.

a) Encuentra la presión en el fluido.

b) Al considerar las superficies de presión constante, encuentre la forma de la superficie libre del agua. Este sistema se llama Balde de Newton.

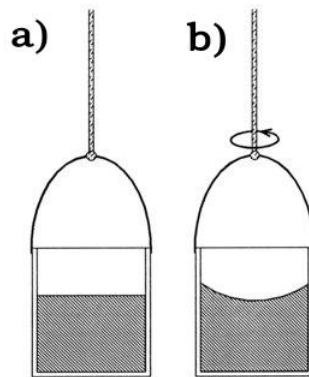


Figura 14.18: Balde de Newton





## 15. OSCILACIONES

El movimiento oscilatorio de un sistema es un movimiento que se repite alrededor de un punto. Sistemas típicos que realizan movimiento oscilatorio cuando se les aparta de sus posición de equilibrio son el péndulo, el sistema masa-resorte, las pulsaciones de nuestro corazón, etc. Pero también hay sistemas que muestran oscilaciones a nivel microscópico, como las transiciones atómicas en un reloj atómico. En general, Se dice que un sistema físico oscila cuando algunos parámetros que lo representan repiten su valores periódicamente. Ejemplo de esos parámetros: posición, voltaje, elongación, ángulo de giro, etc.

Dentro del conjunto de movimientos oscilatorios existen aquellos periódicos en donde la evolución temporal del sistema lo lleva a repetir exactamente su estado a intervalos regulares de tiempo. El ejemplo paradigmático, y uno de los sistemas más importantes en física, es el **oscilador armónico simple** porque muchos sistemas físicos, de distinta naturaleza, satisface en algún límite la ecuación que describe este sistema.

### 15.1 Oscilador Armónico Simple

#### 15.1.1 Sistema masa-resorte: una masa más un resorte

Consideremos un sistema masa-resorte ideal, como el mostrado en la Fig. 15.1, en donde el resorte es perfecto, sin masa, y satisface la ley de Hooke,  $\vec{F}_e = -k\vec{x}$ . Usando la segunda ley de Newton obtenemos que

$$\vec{F} = \vec{F}_e = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}, \quad (15.1)$$

que con  $\vec{x} = x\hat{x}$  implica que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (15.2)$$

donde hemos definido la **frecuencia angular natural** del sistema como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (15.3)$$

que se mide en rad/s. ¿Pero cómo? Ten paciencia, ya veremos.

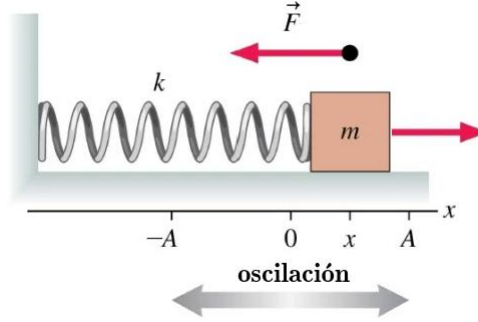


Figura 15.1: Oscilación en sistema masa-resorte

La ecuación diferencial se denomina **ecuación del oscilador armónico**. Si un sistema cualquiera, donde en ese caso la variable  $x$  representa alguna cantidad física de ese sistema, satisface una ecuación diferencial con esta forma, decimos que ese sistema está descrito por un oscilador armónico.

Sabemos que la fuerza elástica de Hooke es conservativa y que la energía potencial elástica tiene la forma de una parábola, es decir,  $U_e = \frac{1}{2} k x^2$ . Esta es la energía potencial almacenada en el oscilador armónico. Así, el sistema descrito por un oscilador armónico está **sujeto a un potencial cuadrático**. Y por supuesto, es un sistema que conserva la energía. Si el oscilador parte, no se detiene más. Por supuesto, esto no ocurre, pero la física trata de hacer aproximaciones a lo que se observa y hacer modelos que den cuenta de algunas características importantes de los sistemas observados.

### Pausa matemática

Definamos  $D = \frac{dx}{dt}$  y considerémoslo por un momento como una cantidad algebraica. Luego, podemos escribir la ecuación diferencial como

$$(D^2 + \omega_0^2)x = 0 \implies (D + i\omega_0)(D - i\omega_0)x = 0, \quad (15.4)$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria. Vemos que esta ecuación tiene dos soluciones:

$$(D + i\omega_0)x_1 = 0 \implies \left( \frac{d}{dt} + i\omega_0 \right) x = 0 \quad (15.5)$$

y

$$(D - i\omega_0)x_2 = 0 \implies \left( \frac{d}{dt} - i\omega_0 \right) x = 0. \quad (15.6)$$

La solución de estas ecuaciones es simple de encontrar. Observa que la ecuación se puede reescribir pensando que  $\frac{dx}{dt}$  es “ $dx$  dividido por  $dt$ ”. En efecto

$$\frac{dx}{x} = -i\omega_0 dt \implies \int \frac{dx}{x} = -i\omega_0 \int dt \implies \ln x = -i\omega_0 t. \quad (15.7)$$

Por lo tanto, las soluciones a las Ecs. (15.5) y (15.6) son

$$x_1(t) = A_1 e^{-i\omega_0 t} \quad (15.8)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{i\omega_0 t}. \quad (15.9)$$

La teoría de ecuaciones diferenciales, entonces, nos dice que **esta ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes**. Por lo tanto, **la solución más general, con dos constantes arbitrarias**, se puede escribir como

$$x(t) = A_1 e^{-i\omega_0 t} + A_2 e^{i\omega_0 t}. \quad (15.10)$$

Esta ecuación se puede escribir también como una combinación lineal de funciones sinusoidales, como veremos más adelante

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_0 t) + A_2 \cos(\omega_0 t), \quad (15.11)$$

o bien,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (15.12)$$

En esta última ecuación,  $A$  se denomina la **amplitud de la oscilación** y  $\phi$  es la **constante de fase**. El argumento de la función coseno (que bien puede ser una función seno, da lo mismo) se llama la **fase** de la función.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

Ahora podemos responder una pregunta que nace de inmediato al ver la definición de la frecuencia natural de oscilación: ¿Qué tiene que ver una frecuencia angular de oscilación con un sistema masa-resorte que no realiza un movimiento angular? La conexión resulta del hecho de que una sinusoidal se puede mapear a un círculo unitario. En la Fig. 15.2 podemos pensar en el círculo de la izquierda como un movimiento circular con frecuencia angular  $\omega_0$ , el cual se mapea al movimiento en una dimensión, marcado con color rojo, con frecuencia  $\omega_0$ , y éste a su vez se mapea a una sinusoidal.

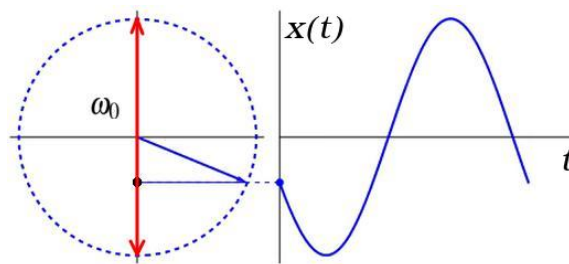


Figura 15.2: Círculo unitario y función sinusoidal

Con este mismo cuadro podemos comprender el significado de la constante de fase,  $\phi$ , como indica la Fig. (15.3). Observa que para el instante  $t = 0$  s, el valor de la función no es cero. Esto se debe a que en este caso  $\phi$  no es cero. Luego, **la constante de fase se puede pensar como una constante que da cuenta del instante en que comenzamos a medir el tiempo**.

La amplitud, a su vez, corresponde al valor máximo que toma la variable, en este caso elongación, como muestra la misma Fig. 15.1. Es importante tener en cuenta que si bien la

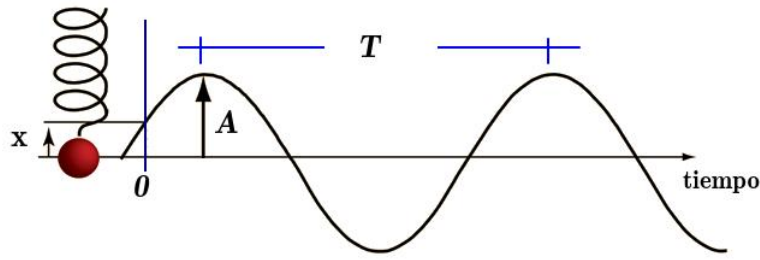


Figura 15.3: Sistema masa-resorte y sinusoidal

elongación máxima va desde  $-A$  hasta  $+A$ , cuando se habla de la amplitud se refiere solo al valor absoluto. El período de oscilación,  $T$ , corresponde al tiempo en que el sistema regresa a su estado inicial y en la sinusoidal es la intervalo temporal entre dos máximos o mínimos o cualquier otro intervalo en que se repita el estado inicial, como se muestra en la Fig. 15.3.

La **frecuencia**  $f$  se define como el recíproco del período,

$$f = \frac{1}{T} \quad (15.13)$$

y se mide en hertz, denotado Hz. Dado que la frecuencia angular es  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , tenemos entonces que

$$\omega = 2\pi f. \quad (15.14)$$

### 15.1.2 Energía en el Oscilador Armónico

Ya sabemos que la energía en un sistema descrito por un oscilador armónico se conserva, debido a que solo actúa una fuerza y es conservativa. Esto significa que la energía cinética del sistema se convierte en energía potencial de modo cíclico:

Cuando la elongación es máxima, la energía cinética es cero y la energía total es la energía potencial,  $\frac{1}{2}kA^2$ . En el momento en que la masa pasa por la posición de equilibrio, el resorte no está elongado y la velocidad de la masa es máxima, luego la energía total es  $\frac{1}{2}mv_{max}^2$ . Un esquema de esta situación se muestra en la Fig. 15.4.

Si tomamos la primera derivada de la Ec. (15.12) obtenemos la velocidad de la masa en función del tiempo

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi). \quad (15.15)$$

De esta ecuación vemos que la amplitud de la velocidad, esto es, la velocidad máxima es

$$v_{max} = A\omega_0. \quad (15.16)$$

Que la energía se conserva se puede corroborar analizando su definición. En efecto, usando

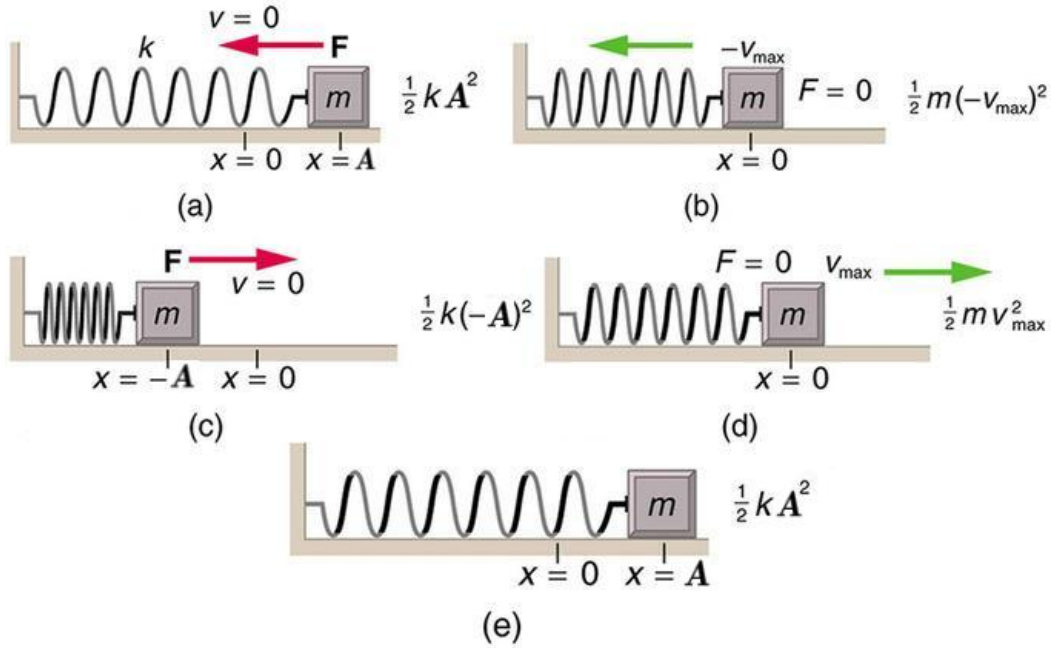


Figura 15.4: Energía en sistema masa resorte

la definición de la frecuencia natural

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} m [A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)]^2 + \frac{1}{2} k [A \cos(\omega_0 t + \phi)]^2 \\
 &= \frac{1}{2} k A^2 \{ \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi) \} \\
 &= \frac{1}{2} k A^2.
 \end{aligned} \tag{15.17}$$

Es importante recordar este resultado, pues lo encontrará más adelante, por ejemplo, en electromagnetismo <sup>1</sup>, donde nuevamente el oscilador armónico juega un rol relevante:

**La energía total es proporcional a la amplitud de la oscilación.**

Otra conclusión importante de este trabajo es que dado que  $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ , entonces las energías cinética y potencial tienen un desfase de  $\pi/2$ . Esto significa que cuando la energía cinética es máxima (mínima), la energía potencial es mínima (máxima), como muestra la Fig. 15.4.

Hagamos algo entretenido: multipliquemos la ecuación de movimiento, Ec. (15.2), por  $v(t)$

$$mv \frac{d^2 x}{dt^2} + kxv = 0 \implies mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0. \tag{15.18}$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0, \tag{15.19}$$

que no es más que

$$\frac{dE}{dt} = 0. \tag{15.20}$$

<sup>1</sup>En electromagnetismo, la amplitud será la amplitud de los campos eléctrico y magnético.



Por supuesto esto significa que la energía se conserva.

### 15.1.3 Velocidad y aceleración

Ya sabemos cómo cambia la velocidad durante el movimiento. Si derivamos la Ec. (15.15), obtenemos su aceleración

$$\ddot{x}(t) = -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (15.21)$$

que nos muestra que la aceleración máxima, es decir su amplitud, es

$$a_{max} = A \omega_0^2. \quad (15.22)$$

Podemos comparar mejor las ecuaciones (15.15) y (15.22) si reescribimos esta última como

$$\ddot{x}(t) = A \omega_0^2 \sin\left(\omega_0 t + \phi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (15.23)$$

Esto indica que la aceleración y la velocidad tiene una **diferencia de fase** de

$$(\omega_0 t + \phi) - \left(\omega_0 t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) = \pm \pi/2. \quad (15.24)$$

Este es un resultado importante, más aún teniendo en cuenta que en el contexto más general, “velocidad” y “aceleración” corresponden a otras variables que mantienen esta característica.

Siguiendo el mismo análisis, vemos que la posición y la velocidad tienen una diferencia de fase de ... ¡hazlo!

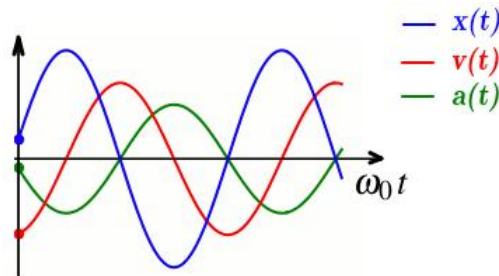
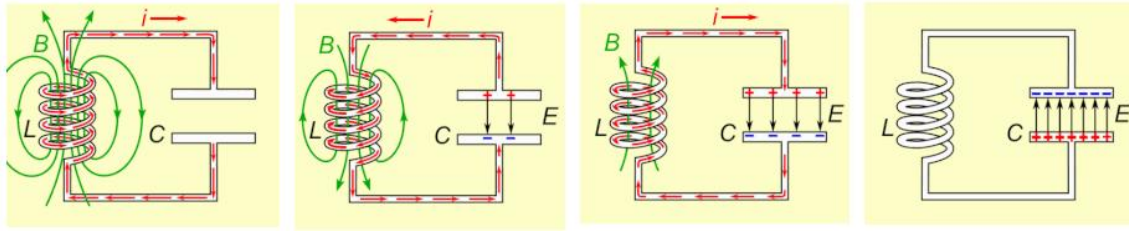


Figura 15.5: Gráficas de posición, velocidad y aceleración

### 15.1.4 Oscilador armónico en circuitos eléctricos

Solo como un ejemplo, que estudiarás en profundidad cuando veas electromagnetismo, veamos el caso de un circuito que contiene una bobina, con inductancia  $L$ , y un condensador, con capacitancia  $C$ . La inductancia es una medida de cuánta energía en forma de campo magnético puede almacenar la bobina, mientras que la capacitancia es una medida de cuánta energía en forma de campo eléctrico puede almacenar el condensador. Este tipo de circuito se denominan circuito  $LC$  (imaginativo nombre, ¿verdad?).

Para comprender esto debemos saber que la corriente eléctrica es un flujo de carga eléctrica y describe cuánta carga cruza cierta superficie en una cierta cantidad de tiempo

Figura 15.6: Circuito  $LC$  y almacenamiento de energía

(es el análogo al caudal de un río). Luego, si denotamos como  $I$  a la corriente y  $q$  a la carga eléctrica, tenemos que

$$I(t) = \frac{dq(t)}{dt}. \quad (15.25)$$

Ahora, la suma de las diferencia de potencial eléctrico (¡tú ya conoces la diferencia de potencial gravitatorio!) en la bobina y en el condensador es cero (¡por conservación de la energía!)

$$L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \implies L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t) = 0. \quad (15.26)$$

Dividiendo esta última ecuación por  $L$  obtenemos

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0, \quad (15.27)$$

al definir la **frecuencia natural del circuito  $LC$**  como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (15.28)$$

Como puedes notar, ahora la “elongación” es la carga eléctrica y la “velocidad” es la corriente eléctrica. En la Fig. 15.6 se observa cómo la energía en forma de campo eléctrico se transforma en energía en forma de campo magnético, de modo oscilante.

Lo interesante de esto es que si uno puede desarrollar un circuito que tenga **las mismas ecuaciones** que un sistema mecánico, entonces puede hacer experimentos de mecánica usando circuitos. ¡Es mucho más fácil!

Finalmente, el oscilador armónico no lo es todo. Un potencial puede en la realidad ser muy complicado, como muestra la Fig. 15.7. Eso significa que también puede ser difícil estudiar un sistema con una energía potencial así. Sin embargo, alguna información relevante se puede obtener a veces estudiando zonas en ese potencial que se pueden aproximar como el potencial de un oscilador armónico, es decir, una parábola. Por supuesto, esto significa que la aproximación es válida normalmente bajo **pequeñas oscilaciones** alrededor de un mínimo.

### 15.1.5 Péndulo simple

El péndulo simple es un sistema idealizado constituido por una partícula de masa  $m$  que está suspendida de un punto fijo  $O$  mediante un hilo ideal, es decir, inextensible y sin masa.

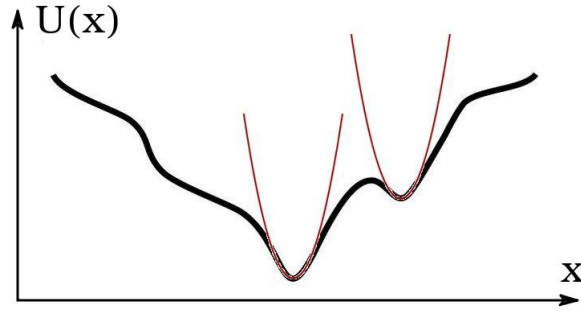


Figura 15.7: Energía potencial de un sistema complicado

Si la partícula se desplaza a una posición  $\theta_0$ , el ángulo que hace el hilo con la vertical, y luego se suelta, el péndulo comienza a oscilar. Para describir la ecuación de movimiento utilizamos la segunda ley de Newton y un diagrama de cuerpo libre como el de la Fig. 15.8.

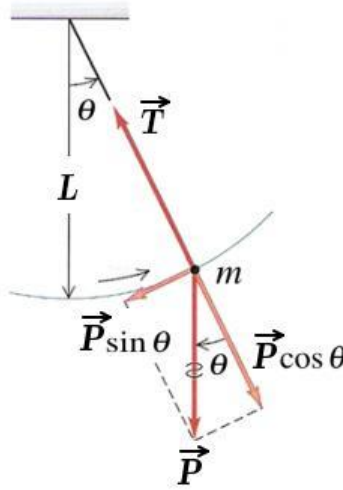


Figura 15.8: Péndulo simple

Luego, de la segunda ley

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \quad (15.29)$$

(¡tú lo puedes hacer usando la ecuación para los torques!) que en coordenadas polares planas conduce a

$$-T\hat{r} + mg \cos \theta \hat{r} = -ma_c \hat{r} \quad (15.30)$$

$$mL \frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{\theta} = -mg \sin \theta \hat{\theta}, \quad (15.31)$$

donde hemos usado que la aceleración tangencial está definida como la segunda derivada de la longitud de arco,  $s = L\theta$ . Por lo tanto, aparte de la ligadura que representa la primera ecuación, tenemos que

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (15.32)$$



donde la frecuencia natural del péndulo es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (15.33)$$

La ecuación diferencial para  $\theta(t)$  no es la ecuación del oscilador armónico debido a la presencia de la función seno (compara con la Ec. (15.2)).

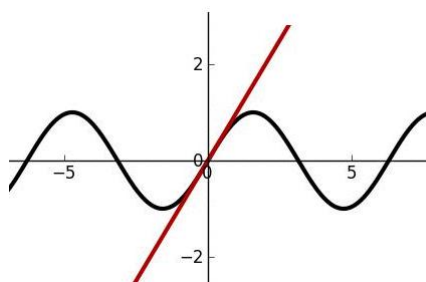


Figura 15.9: Función seno y aproximación lineal

Sin embargo, como lo muestra la Fig. 15.9, podemos aproximar la función  $\sin \theta$  para valores pequeños de  $\theta$  como una recta, es decir  $\sin \theta \sim \theta$ . En el contexto de osciladores, esta aproximación corresponde a lo que se denomina **pequeñas oscilaciones**<sup>2</sup>. Luego,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (15.34)$$

que es la ecuación para el oscilador armónico.

Por supuesto, su solución más general es

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (15.35)$$

que da cuenta de la dependencia temporal del **desplazamiento angular**, medido en radianes, desde la posición de equilibrio.

Claramente, todo el análisis realizado anteriormente para esta ecuación es válido: **misma ecuación dinámica, mismas conclusiones**.

## 15.2 Oscilador armónico amortiguado

En la vida real, los osciladores pierden energía, no siempre en la misma medida y por diferentes razones. Una forma simple de medir esa pérdida de energía, no es la única, es suponer que se debe a una fuerza que depende linealmente con la velocidad del la masa,  $F_v(t) = -\gamma \vec{v}$ . Este tipo de **resistencia viscosa** o **arrastré lineal** se obtiene cuando un cuerpo se mueve a baja velocidad por un fluido. Debe quedar claro que no es único tipo de fuerza que da origen a amortiguamiento. Por ejemplo, para un cuerpo que se mueve a alta velocidad en un fluido aparece un arrastre que es proporcional a la velocidad al

<sup>2</sup>El tópico de pequeñas oscilaciones es muy importante en Mecánica, porque en este regimen las fuerzas que actúan sobre un oscilador se pueden aproximar bien por una fuerza restauradora lineal, como la de Hooke. Más acerca de éste lo verá en un libro avanzado

cuadrado. Este tipo de arrastre es el responsable de que un paraidista, por ejemplo, adquiera una velocidad límite o **velocidad terminal** de cerca de 200 km/h cuándo aún no ha abierto su paracaídas. Por razones de dificultad matemática, no consideraremos este tipo de fuerza. En un libro de fluidos debería analizar y estudiar este importante caso.

Para una resistencia viscosa, la segunda ley de Newton establece entonces que

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_v = m\vec{a} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}, \quad (15.36)$$

que con  $\vec{x} = x\hat{x}$  implica que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2b \frac{dx}{dt} = 0, \quad (15.37)$$

donde frecuencia natural es la misma definida anteriormente y el factor  $b$  es  $b = \frac{\gamma}{2m}$ .

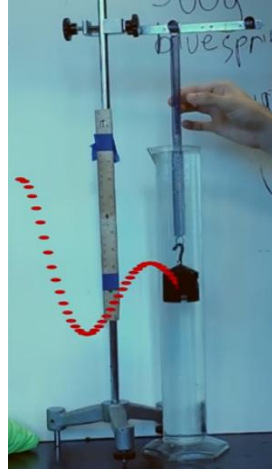


Figura 15.10: Oscilación amortiguada

### Pausa matemática

Veamos si podemos hacer algo similar a lo que hicimos anteriormente, definiendo  $D = \frac{dx}{dt}$  y considerándolo como una cantidad algebraica. Luego, podemos escribir la ecuación diferencial como

$$(D^2 + 2bD + \omega_0^2)x = 0. \quad (15.38)$$

Esta es una ecuación cuadrática que se puede escribir como

$$(D - is_1)(D - is_2)x = 0, \quad (15.39)$$

donde hemos agregado la unidad imaginaria debido a que, basados en nuestra experiencia diaria, esperamos que haya alguna oscilación. debe tener claro que no es necesario hacer esto. Solo es cómodo y “natural”. Esta forma de escribir la ecuación implica que estas dos ecuaciones se deben satisfacer

$$(D - is_1)x = 0 \implies \left( \frac{d}{dt} - is_1 \right) x = 0 \quad (15.40)$$

$$(D - is_2)x = 0 \implies \left( \frac{d}{dt} - is_2 \right) x = 0. \quad (15.41)$$

La solución de estas ecuaciones es simple de encontrar. Observa que la ecuación se puede reescribir pensando que  $\frac{dx}{dt}$  es “ $dx$  dividido por  $dt$ ”. En efecto

$$\frac{dx}{x} = -is_1 dt \implies \int \frac{dx}{x} = -is_1 \int dt \implies \ln x = -is_1 t \quad (15.42)$$

Por lo tanto, las soluciones a las Ecs. (15.40) y (15.41) son

$$x_1(t) = A_1 e^{-is_1 t} \quad (15.43)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{-is_2 t}. \quad (15.44)$$

Por supuesto, estas son soluciones formales porque no conocemos ni  $s_1$  ni  $s_2$ .

Ahora, para que las Ecs. (15.38) y (15.39) coincidan debe ocurrir que

$$-is_1 D - is_2 D = 2bD \implies -i(s_1 + s_2) = 2b \quad (15.45)$$

$$(-\omega_0^2 + s_2^2) = 2is_2 b, -s_1 s_2 = \omega_0^2. \quad (15.46)$$

Observa que **este sistema de ecuaciones es invariante ante un intercambio de  $s_1$  por  $s_2$** . Luego, si encontramos una solución para cualquiera de los dos, **esa será la solución para el sistema completo**, como veremos de inmediato.

La ecuación para  $s_2$  (que obviamente es la misma que para  $s_1$ ) es

$$s_2^2 - 2ib s_2 - \omega_0^2 = 0 \quad (15.47)$$

y su solución

$$s_2 = ib \pm \sqrt{-b^2 + \omega_0^2}. \quad (15.48)$$

Estas son nuestras **dos soluciones**. Por lo tanto, podemos escribir las soluciones en las Ecs. (15.39)

$$x_1(t) = A_1 e^{-bt} \exp \left\{ \left( \sqrt{-b^2 + \omega_0^2} \right) t \right\}, \quad (15.49)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{-bt} \exp \left\{ \left( -\sqrt{-b^2 + \omega_0^2} \right) t \right\}. \quad (15.50)$$

La solución más general de la ecuación diferencial es la suma de ambas soluciones. Igual que antes, hay dos constantes arbitrarias,  $A_1$  y  $A_2$ .

Con esto terminamos nuestra pausa matemática

Ahora podemos ver qué información podemos obtener de la solución de la Ec. (15.37). Claramente los términos en la raíz cuadrada compiten entre sí. Veamos los casos que de allí aparecen.

**Oscilador subamortiguado:**  $-b^2 + \omega_0^2 > 0$

Tenemos que la raíz cuadrada es un número real para  $\omega_0^2 > b^2$ . Debido a la unidad imaginaria, este término corresponde a una oscilación. Por ello definimos una nueva frecuencia,  $\omega$ , que es la **frecuencia de oscilación del sistema**:

$$\omega = \sqrt{-b^2 + \omega_0^2}. \quad (15.51)$$

Debido al término exponencial  $e^{-\frac{b}{2}t}$ , la oscilación ocurre con una amplitud decreciente en el tiempo. Este tipo de oscilación se denomina **oscilación subamortiguada**. El sistema oscila durante un tiempo, que depende del valor de  $b$ , reduciendo su amplitud, como muestra la Fig. 15.11. Esto es lo que sucede si ponemos un sistema masa-resorte ideal dentro de un líquido no muy viscoso, como agua.

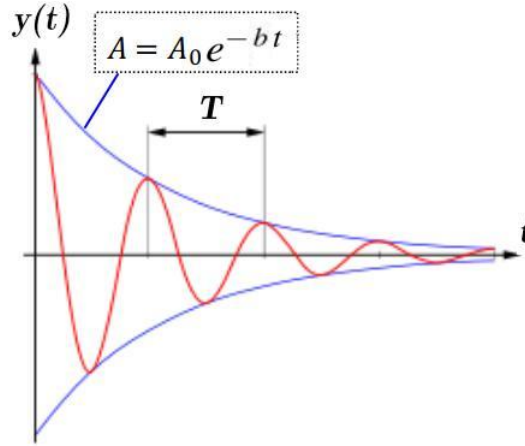


Figura 15.11: Oscilación subamortiguada

La solución general se puede escribir de modo similar a como hemos escrito la solución para el oscilador armónico

$$x(t) = A_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \phi). \quad (15.52)$$

Notamos que  $b$  tiene dimensión de recíproco de tiempo. Podemos definir una **constante de tiempo** que fija una escala de tiempo para el decaimiento, es decir, sirve para poder afirmar a qué nos referimos cuando hablamos de tiempos largos o cortos:

$$\tau = \frac{2m}{\gamma}. \quad (15.53)$$

De su definición, para un tiempo igual a la constante de tiempo, el valor de la amplitud del movimiento ha disminuido a  $1/e$  de su valor inicial.

**Oscilador sobre amortiguado:**  $-b^2 + \omega_0^2 < 0$

En este caso, resulta que

$$\sqrt{-b^2 + \omega_0^2} = \sqrt{-(b^2 - \omega_0^2)} = i\sqrt{b^2 - \omega_0^2}. \quad (15.54)$$

Luego, con  $i^2 = -1$ ,

$$x_1(t) = A_1 e^{-bt} \exp\left\{\left(-\sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)t\right\} \quad (15.55)$$

$$x_2(t) = A_2 e^{-bt} \exp\left\{\left(\sqrt{b^2 - \omega_0^2}\right)t\right\}. \quad (15.56)$$

Como antes, la solución más general es la combinación lineal de ambas.

**Oscilador críticamente amortiguado:**  $-b^2 + \omega_0^2 = 0$

Dado que  $-b^2 + \omega_0^2 = 0$ , entonces resulta de inmediato que

$$x_1(t) = A_1 e^{-bt}. \quad (15.57)$$

Pero esta no puede ser la única solución, porque la teoría de ecuaciones diferenciales establece que debe haber dos soluciones linealmente independientes. Triste, pero algo nos faltó en nuestro trabajo para obtener las soluciones a la Ec. (15.37). Lo positivo es que al analizar las soluciones nos hemos dado cuenta. ¡Una razón más para analizar los resultados!

No seguiremos con los aspectos matemáticos, que aprenderás al estudiar más profundamente ecuaciones diferenciales. Resulta que la segunda solución tiene la forma

$$x_2(t) = A_2 t e^{-bt}, \quad (15.58)$$

como puedes chequear rápidamente.

La solución general es entonces

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-bt}. \quad (15.59)$$

Lo interesante de nuestro análisis es que de los tres casos, solo el caso subamortiguado representa realmente una oscilación, es decir un movimiento que cruza la posición de equilibrio.

El amortiguamiento crítico posee una propiedad que lo hace interesante ya que es el caso en que el sistema retorna más rápidamente a la posición de equilibrio, como se observa en la Fig. (15.12).

**Observación:** Normalmente se hace el análisis en términos del tamaño del término viscoso,  $\gamma$ , indicando que un oscilador dado se comportará de una forma u otra si la oscilación ocurre, por ejemplo, dentro de agua o dentro de glicerina líquida. Por supuesto, esto significa que la masa se mantiene fija. Sin embargo, se debe recordar que el parámetro importante es la relación entre  $\gamma$  y la masa del sistema.

### Comparación de los tres casos

Supongamos, que el sistema masa-resorte se libera desde el reposo desde la posición  $x(0) = 10$  cm, y que posee una frecuencia natural  $\omega_0 = 1,0$  rad/s. Luego, obtenemos las curvas siguientes mostradas en la Fig. 15.12.

En este video, realizado por estudiantes y muy bien logrado, puedes ver los diferentes casos de oscilación: <https://www.youtube.com/watch?v=sP1DzhT8Vzo>. Estúdialo.

### 15.2.1 Energía en un oscilador amortiguado

El oscilador armónico conserva la energía, como hemos probado. El oscilador amortiguado disipa la energía. Cuantifiquemos cómo sucede.

Al igual que antes, multiplicamos la Ec. (15.37) por  $v(t)$ . Obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) = -\gamma \left( \frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (15.60)$$

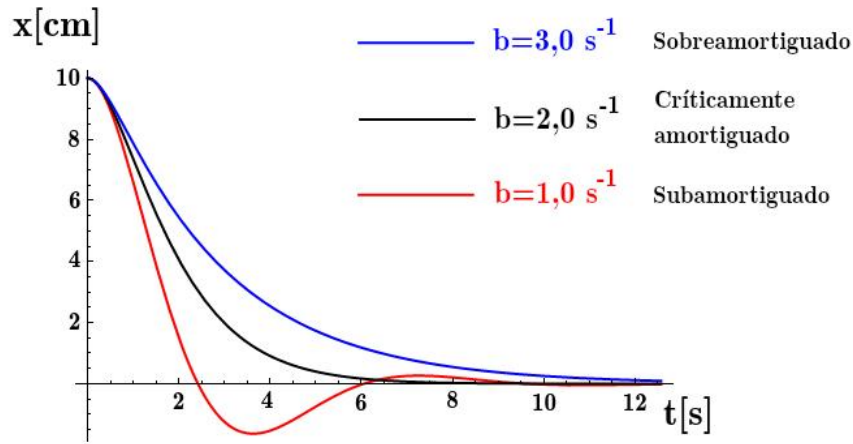


Figura 15.12: Tipos de oscilaciones

Es decir,

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (15.61)$$

Recuerda que la potencia,  $\mathcal{P}$ , es la variación de la energía respecto del tiempo. Luego,

$$\mathcal{P} = -\gamma \left( \frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (15.62)$$

Es negativa debido a que se pierde energía; ésta se pierde de modo proporcional a velocidad al cuadrado.

### 15.2.2 Factor Q

El **factor Q**, también denominado **factor de calidad** o **factor de mérito**, es un parámetro que sirve para comparar la calidad de un sistema resonante. Este tipo de sistema responde mejor a frecuencia cercanas a la frecuencia natural o frecuencia de resonancia que al resto de frecuencias. Ese rango de frecuencias es el **ancho de banda**, y la frecuencia central es la frecuencia de resonancia.

Calculemos el valor absoluto de la energía disipada durante un período de oscilación,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  de un oscilador subamortiguado. Por simplicidad, supondremos que la constante de fase es cero. Para ello debemos calcular

$$\Delta E = - \int_0^{2\pi/\omega} \frac{dE}{dt} dt \quad (15.63)$$

donde el integrando está dado por la Ec. (15.61).

Derivamos la posición, Ec. (15.52), respecto del tiempo para obtener la velocidad de la partícula:

$$v(t) = -\frac{A_0 e^{-t/\tau}}{\tau} \{ \omega \tau \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \}, \quad (15.64)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \Delta E &= - \int_0^{2\pi/\omega} \frac{dE}{dt} dt \\
 &= \gamma \int_0^{2\pi/\omega} \frac{A_0^2 e^{-2t/\tau}}{\tau^2} \{ \omega^2 \tau^2 \sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) + 2\omega\tau \sin(\omega t) \cos(\omega t) \} dt. \\
 &\approx \gamma \frac{A_0^2}{\omega \tau^2} \int_0^{2\pi} \{ \omega^2 \tau^2 \sin^2(u) + \cos^2(u) + 2\omega\tau \sin(u) \cos(u) \} du.
 \end{aligned} \tag{15.65}$$

donde hemos considerado el caso de **amortiguamiento débil**, es decir, cuando  $\omega_0 \gg b$ , o bien  $\omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$ . En este caso, la exponencial es cercana a 1 en el intervalo  $(0, \frac{2\pi}{\omega})$  (¡chequéalo haciendo un gráfico!). Por otro lado, con tu software de cálculo favorito puede asegurarse que los valores de las siguientes integrales son correctos

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 u du = \pi, \tag{15.66}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 u du = \pi, \tag{15.67}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin u \cos u du = 0. \tag{15.68}$$

Por lo tanto,

$$\Delta E = \gamma \frac{A_0^2 \pi}{\omega_0 \tau^2} \omega_0^2 \tau^2 \left\{ 1 + \frac{1}{\omega_0 \tau} \right\} \approx \gamma A_0^2 \pi \omega_0. \tag{15.69}$$

Se define el **factor Q** o **factor de calidad** como la razón entre la energía almacenada a la la energía disipada en un sistema oscilante.

$$Q = 2\pi \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía disipada}} = 2\pi \frac{E}{\Delta E}. \tag{15.70}$$

La energía almacenada es la energía del oscilador armónico simple, dada por

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2. \tag{15.71}$$

Por lo tanto, el factor  $Q$  es

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A_0^2}{\gamma A_0^2 \pi \omega_0} = \frac{m \omega_0}{\gamma}. \tag{15.72}$$

Esta cantidad es una medida de cuánto tiempo sigue oscilando un oscilador. Un factor de calidad alto significa que el sistema oscilará durante muchos ciclos antes de perder toda su energía. Por otro lado, un  $Q$  pequeño significa que oscilará durante unos pocos ciclos antes de detenerse.

Podemos ver este resultado desde un punto de vista un poco distinto.

Vemos que la energía potencial cambia en el tiempo como

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) e^{-2t/\tau}, \tag{15.73}$$

lo que significa que la constante de tiempo para la energía es  $\tau/2$ .

Si consideramos

$$x(t) = A_0 e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi), \quad (15.74)$$

vemos que el tiempo necesario para que el sistema oscile un ciclo completo, es decir  $2\pi$  radianes, es

$$t_p = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (15.75)$$

Podemos hacernos la pregunta de cómo se compara el tiempo de decaimiento de la energía con el tiempo que le toma al sistema moverse por un radian. Esto es,

$$Q \equiv \frac{\tau/2}{1/\omega_0} = \frac{m\omega_0}{\gamma}, \quad (15.76)$$

que es el resultado anterior.

### 15.3 Oscilador forzado

De seguro que tienes la experiencia de ir a un parque o lugar de juegos donde hay columpios. Es probable que hayas experimentado ser ayudado a columpiarte por alguien, quien empuja justo cuando el columpio ha alcanzado su amplitud de oscilación. Quien proporciona el impulso en ese momento no necesita hacer un gran esfuerzo para observar que la amplitud del movimiento aumentará. Este movimiento oscilatorio se denomina oscilador forzado, pues un agente externo fuerza la oscilación.

Un caso más dramático de oscilación forzada ocurrió hace muchos años en el puente Tacoma, en el estado de Washington, USA. Dramático porque las oscilaciones llegaron a tal punto que el puente se cayó, como puede ver en el video <https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw>.



Figura 15.13: Destrucción del puente de Tacoma

Volvamos a utilizar como ejemplo, el sistema masa resorte. Al sistema con amortiguamiento lineal le agregamos una fuerza armónica, es decir, que depende de una función seno o coseno;  $F(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular del forzamiento. Luego, a partir de la segunda ley de Newton

$$F(t)\hat{x} - k\vec{x} - \gamma\vec{v} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}, \quad (15.77)$$



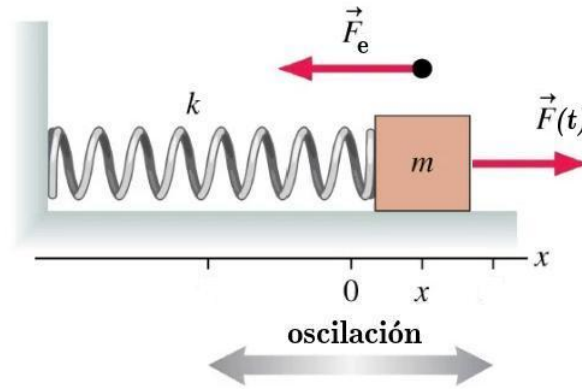


Figura 15.14: Oscilación forzada en sistema masa-resorte

que con  $\vec{x} = x\hat{x}$  implica que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2b \frac{dx}{dt} = A_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (15.78)$$

donde hemos definido  $A_0 = \frac{F_0}{m}$ . Observa que en general la frecuencia de forzamiento es distinta a la frecuencia natural del sistema,  $\omega \neq \omega_0$

### Pausa matemática

La solución de la ecuación diferencial se puede realizar de modo relativamente directa si trabajamos con funciones complejas.<sup>3</sup>

Primero, hay un resultado importante en matemática debido a Leonhard Euler, llamada **fórmula de Euler**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (15.79)$$

que establece la relación fundamental entre las funciones trigonométricas y la función exponencial compleja. Observamos, entonces que el lado derecho de la Ec. (15.78) se puede escribir como una exponencial compleja, ya que en ésta aparece la función coseno:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x + 2b \frac{dx}{dt} = A_0 e^{i(\omega t + \phi)}. \quad (15.80)$$

Dado que el lado derecho ahora es una función compleja, debemos usar una función compleja en el lado izquierdo. Esto significa suponer que la solución de la ecuación tiene la forma siguiente

$$x(t) = A e^{i(\omega t + \tilde{\phi})}. \quad (15.81)$$

Observa que se ha supuesto que la solución es oscilatoria, con una frecuencia angular  $\omega$  que es **la misma que la frecuencia angular del forzamiento**. Es natural esperar esto ya que la fuerza externa fuerza al sistema a oscilar con esa frecuencia (¡imagina un terremoto!).

Reemplazamos esta expresión en la Ec. (15.80) y obtenemos

$$-A \omega^2 e^{i(\omega t + \tilde{\phi})} + \omega_0^2 A e^{i(\omega t + \tilde{\phi})} + 2iA \omega b e^{i(\omega t + \tilde{\phi})} = A_0 e^{i(\omega t + \phi)}. \quad (15.82)$$

<sup>3</sup>Lo que estamos haciendo es transformar una ecuación vista en espacio de coordenadas a una vista en espacio de frecuencias. Esta es la base del **análisis de Fourier**

Simplificando se encuentra

$$-A\omega^2 + A\omega_0^2 + 2iA\omega b = A_0 e^{i\varphi}, \quad (15.83)$$

donde hemos definido una nueva constante de fase  $\varphi = \phi - \tilde{\phi}$ . Al igual que antes, hemos convertido un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico, con cantidades complejas. Es un precio que hay que pagar por la simplicidad.

Necesitamos conocer la amplitud del movimiento, porque  $\omega$  y  $\omega_0$  son conocidos. Luego,

$$A(\omega^2 + 2i\omega b - \omega_0^2) = -A_0 e^{i\varphi} = -A_0 \cos \varphi - iA_0 \sin \varphi. \quad (15.84)$$

Esta es una ecuación entre números complejos. La única forma que se cumpla es que las partes reales sean iguales entre sí y las partes imaginarias entre ellas. Por lo tanto, se debe satisfacer que

$$A(\omega^2 - \omega_0^2) = -A_0 \cos \varphi, \quad (15.85)$$

$$2\omega b A = -A_0 \sin \varphi. \quad (15.86)$$

Es decir, elevando al cuadrado y sumando las Ecs. (15.85) y (15.86) nos permite obtener la amplitud de oscilación

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega b)^2}}. \quad (15.87)$$

Haciendo la razón entre las Ecs. (15.86) y (15.85) obtenemos la constante de fase

$$\tan \varphi = \frac{2\omega b}{(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (15.88)$$

Aquí terminamos nuestra pausa matemática.

Resulta interesante analizar el comportamiento de la amplitud con la frecuencia angular. Primero, observa que si el factor de amortiguamiento viscoso es cero existe, un límite, cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$ , en que la amplitud se va a infinito. Este fenómeno se denomina **resonancia**. En la práctica, esto nunca sucede porque siempre hay algo de disipación (¡menos mal!), así que nunca se llega a la resonancia perfecta. Sin embargo, la amplitud puede crecer tanto que puede resultar catastrófica, como ocurre en las oscilaciones de edificaciones debido a terremotos. Esta es la razón por la que ingenieros piensan en sistemas de amortiguación para edificaciones, de modo tal que  $b$  sea suficientemente grande. Esto no es simple, porque como recordarás  $b = \frac{\gamma}{2m}$ , y la masa de una edificación es enorme.

Observa que

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \tan \varphi = \infty \implies \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}. \quad (15.89)$$

Esto significa que la fuerza y el desplazamiento tienen una diferencia de fase de  $\pi/2$ .

Lo que observamos es que la respuesta de un oscilador a una fuerza que varía sinusoidalmente no depende solo de la magnitud de la fuerza,  $F_0$ . El denominador en la Ec. (15.87) es muy relevante, como hemos visto, lo que implica que una fuerza pequeña puede tener un gran efecto, si la frecuencia es adecuada, como es el caso, por ejemplo, del ejemplo

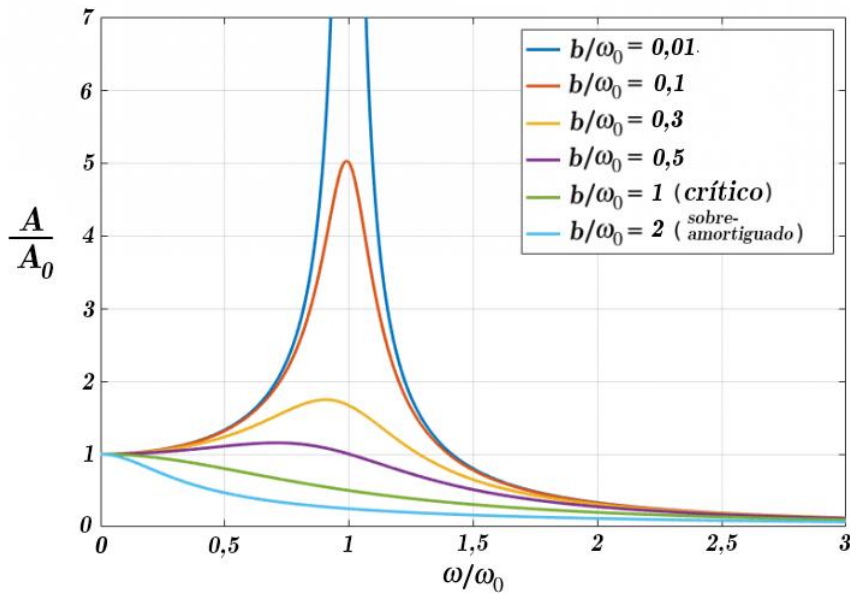


Figura 15.15: Amplitud del oscilador forzado en función de la frecuencia

del columpio. Por otro lado, una gran fuerza aplicada no necesariamente tiene un efecto apreciable.

Observamos en la Fig. 15.15 que cuando el amortiguamiento es pequeño, la amplitud es grande y la función tiene un ancho reducido. Por otro lado, cuando el amortiguamiento es grande, la amplitud se reduce y su ancho se amplía.

En este buen video puedes observar y analizar qué sucede a un sistema masa-resorte cuando se acerca a la resonancia:

[https://www.youtube.com/watch?v=jewSVEBkI\\_s](https://www.youtube.com/watch?v=jewSVEBkI_s)

¡Intenta imaginar la curva en la Fig. 15.15!

### 15.3.1 Energía del oscilador forzado

Siempre es importante analizar el comportamiento de la energía en un sistema físico. Sabemos que la energía total en un sistema masa-resorte está dada por

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (15.90)$$

Usando la solución de la ecuación diferencial

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \implies v(t) = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \quad (15.91)$$

y usando el hecho que  $\omega_0^2 = k/m$ , obtenemos

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \{ \omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) \} \quad (15.92)$$

Observa que solo si el oscilador forzado entra en resonancia, es decir cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$ , la energía total es constante, donde toma el valor  $E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2$ .

Esta expresión se puede arreglar un poco más. Usemos la Ec. (15.87) para la amplitud de la oscilación

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{4b^2 m} = \frac{1}{2} \frac{F_0^2 m}{\gamma^2} \quad (15.93)$$

Sabemos que la energía es proporcional a la amplitud al cuadrado. Por lo mismo, la potencia disipada también es proporcional a  $A^2$ . Para que el sistema continúe en moviéndose se le debe inyectar potencia, cuyo módulo debe igualar a la potencia disipada.

Usamos que  $Q = \frac{m\omega_0}{\gamma} = \frac{\omega_0}{2b}$  para escribir

$$\mathcal{P} \propto \frac{F_0^2}{m^2 \left\{ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2} \right\}}. \quad (15.94)$$

En esta expresión el denominador toma un valor mínimo, y luego la potencia disipada es máxima, cuando  $\omega = \omega_0$ , con valor  $\frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}$ . Por otro lado, el denominador toma el doble de este valor, y por lo tanto la potencia cae a la mitad de su valor máximo cuando

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}. \quad (15.95)$$

Es decir, cuando  $\omega \rightarrow \omega_0$

$$(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = \pm \frac{\omega \omega_0}{Q} \implies 2\omega_0(\omega - \omega_0) = \pm \frac{\omega_0 \omega_0}{Q} \quad (15.96)$$

Por lo tanto, el ancho de la potencia disipada es proporcional al recíproco del factor  $Q$ .

$$\Delta\omega = (\omega - \omega_0) \approx \pm \frac{\omega_0}{2Q}. \quad (15.97)$$

Esta relación se muestra en la Fig. 15.16. Este ancho de frecuencias sobre el cual el sistema disipa potencia también se denomina en contexto de óptica y electrónica ancho de banda del sistema. Así, los valores grandes de  $Q$  corresponden a anchos de banda estrechos; esto sucede por ejemplo cuando sintonizamos una señal de radio o televisión. Para valores pequeños de  $Q$  se tienen grandes anchos de banda. En esta figura aparece la abreviación *FWHM* que significa **ancho completo a la mitad del máximo**<sup>4</sup>. Queda representado por el valor en línea segmentada en la Fig. 15.16.

Finalmente, el factor  $Q$  es entonces

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\Delta\omega}. \quad (15.98)$$

**Observación:** De la Ec. (15.97) obtenemos una relación muy importante, al usar  $\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1}{\tau}$ ,

$$\Delta\omega \tau \approx 1. \quad (15.99)$$

Esta relación expresa una relación importante y universal entre un par de **variables complementarias**: para determina la frecuencia con precisión se requiere que el sistema tenga una larga vida útil. Por supuesto, la precisión puede ser peor que esta estimación por

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Full\\_width\\_at\\_half\\_maximum](https://en.wikipedia.org/wiki/Full_width_at_half_maximum)

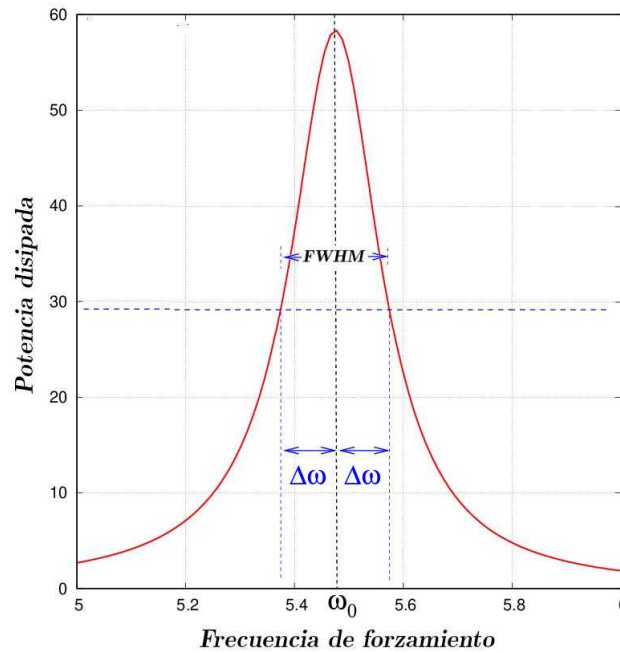


Figura 15.16: Potencia disipada en función de la frecuencia

otras razones, por lo que la Ec. (15.99) debería ser, en general, una desigualdad, con el lado derecho como un límite inferior. **Esta expresión, que tiene su origen en el trabajo de Joseph Fourier**<sup>5</sup>, es el germen de la relación de incertidumbre de Heisenberg en Mecánica Cuántica.

### 15.3.2 Oscilador forzado en circuitos eléctricos

Los osciladores forzados también aparecen en circuitos eléctricos. Se demoninan **circuitos resonantes** y son importantes en el envío y recepción de señales electromagnéticas.

En la Fig. 15.17 se muestra el llamado **circuito RLC**, porque aparte de una bobina y un condensador, tiene conectada una resistencia,  $R$ .

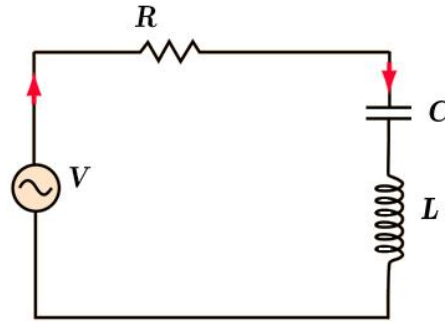
Una resistencia, al pasar corriente disipa energía en forma de calor, luego es un elemento en un circuito que extrae energía del sistema. La **ley de Ohm** establece que la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia es proporcional a la corriente que fluye por ella, esto es,  $V_R = IR = \frac{dq(t)}{dt} R$ .

Ahora, la suma de las diferencia de potencial eléctrico en la bobina, condensador y resistencia es igual a la energía que se inyecta por parte de la batería. Esto significa que

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t) + R \frac{dq(t)}{dt} = V_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (15.100)$$

donde hemos conectado una fuente que proporciona energía de modo oscilatorio (como sucede cuando enchufamos un aparato eléctrico en nuestro hogar) una **corriente alterna**. Esto produce que la corriente que pasa por el circuito cambia de sentido (signo) con el tiempo.

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph\\_Fourier](https://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Fourier)

Figura 15.17: Circuito  $RLC$ 

Dividiendo esta última ecuación por  $L$  obtenemos

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} = A_0 \cos(\omega t + \phi). \quad (15.101)$$

Si comparamos con la Ec. (15.80), vemos que  $\frac{R}{2L}$  es el equivalente a  $b = \frac{\gamma}{2m}$ . Luego, tenemos una **analogía** bien clara aquí: el factor disipativo en el caso mecánico  $\gamma$  es análogo a la resistencia  $R$  en el caso eléctrico, pero además, podemos pensar en la inductancia como la inercia del circuito, debido a la analogía entre  $L$  y  $m$ .

Esta es la razón de por qué cuando sintonizamos un receptor de radio, que simplifícadamente se puede considerar un circuito  $RLC$  como el de la figura, lo que hacemos es buscar que se amplifiquen las frecuencias de las señales a la frecuencia deseada, y no las del resto. Esto se consigue ajustando principalmente dos parámetros, la frecuencia propia del oscilador y su coeficiente de amortiguamiento.

### 15.3.3 El puente de Tacoma

A veces es posible leer que la caída del puente Tacoma se debió a un viento relativamente suave que comenzó un proceso que llevó al puente a la resonancia y su posterior destrucción. Sin embargo, la situación es más compleja.

En el último tiempo se ha llegado al parecer a una respuesta más precisa del fenómeno dinámico que produjo el colapso: la falla del puente se relacionó probablemente con una amplificación impulsada por el viento de la oscilación torsional que, a diferencia de una resonancia, aumenta monótonicamente al aumentar la velocidad del viento. La clave de esta oscilación torsional es la creación de **vórtices** a gran escala por encima y por debajo de la cubierta del puente, que se vieron aumentados debido al diseño del puente, con grandes planchas laterales, como muestra la Fig. 15.19.

Hoy en día, los puentes están contruidos para ser rígidos y tener mecanismos que amortiguan las oscilaciones, o con formas aerodinámicas que eviten o reduzcan lo que se denomina **aleteo**, que es una inestabilidad dinámica de una estructura elástica en un flujo de fluido.

Si quieres saber más, te recomiendo este video de donde he sacado las fotos: <https://www.youtube.com/watch?v=mXTSnZgrfxM>

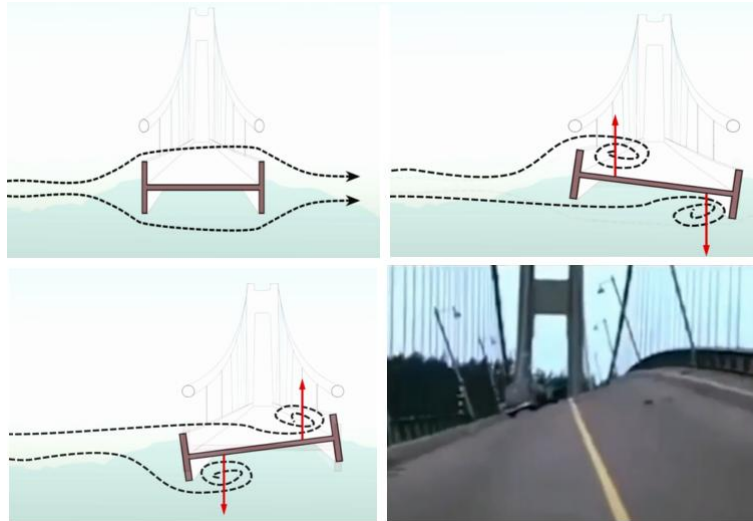


Figura 15.18: Posible explicación para colapso de puente Tacoma

## 15.4 Sistema masa-resorte vertical

Veamos un forzamiento constante que es importante. Éste ocurre cuando una sistema masa resorte en vez de ubicarse sobre un plano sin roce, se cuelga dejando actuar la fuerza de gravedad. En la figura se muestra el sistema masa-resorte, donde  $x = 0$  corresponde a

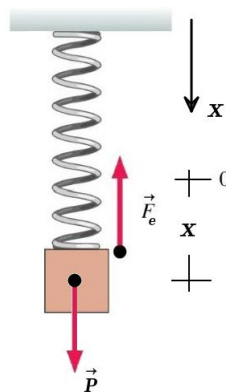


Figura 15.19: Sistema vertical de masa-resorte

la posición de equilibrio. Luego, la variable  $x$  es el desplazamiento desde la posición de equilibrio.

Antes de resolver la segunda ley de Newton, veamos qué esperamos. En el sistema masa-resorte cuando está horizontal, oscila alrededor de una posición de equilibrio. Cuando se cuelga, el resorte se estirará una cierta longitud hasta una posición que es la nueva posición de equilibrio. Luego, la dinámica de este sistema debería ser la misma que en el caso horizontal, solo que ahora las oscilaciones ocurren alrededor de un punto de equilibrio que se ha trasladado un poco más abajo respecto del primero.

La segunda ley de Newton es

$$\vec{F} = \vec{F}_e + m\vec{g} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}, \quad (15.102)$$

que con  $\vec{x} = x\hat{x}$  implica que

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = mg. \quad (15.103)$$

La nueva posición de equilibrio, que llamamos  $x_0$ , la podemos encontrar fácilmente de aquí; simplemente elegimos la posición donde la aceleración es cero. Luego,

$$x_0 = \frac{mg}{k}. \quad (15.104)$$

Trasladamos la posición de equilibrio al nuevo valor cero haciendo un cambio de variable  $X = x - x_0$ . Reemplazamos en la Ec. (15.102) y recordando que  $x_0$  es constante y luego sus derivadas se anulan, obtenemos

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + kX + kx_0 = mg. \quad (15.105)$$

Es decir,

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + kX = 0. \quad (15.106)$$

que es la ecuación del oscilador armónico original.

## 15.5 Péndulo físico

Un péndulo físico es un cuerpo rígido que cuelga de un eje fijo y puede oscilar respecto de su posición de equilibrio, como muestra la Fig. 15.20. La fuerza gravitacional actúa

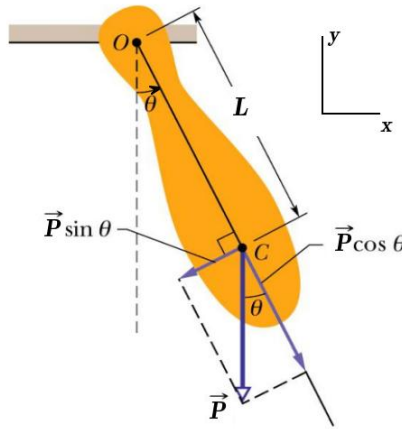


Figura 15.20: Péndulo físico

en el centro de masa del péndulo físico. Si denotamos como  $L$  la **distancia del centro de masa al punto de pivote**  $O$ , entonces la aplicación de la segunda ley de Newton

$$\sum_i \vec{\tau}_{O,i}^{(\text{ext})} = I_O \vec{\alpha} \quad (15.107)$$

conduce a que en coordenadas polares planas

$$\vec{L} \times P (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) = I_O \vec{\alpha} \implies -LP \sin \theta \hat{z} = I_O \frac{d^2 \theta}{dt^2} \hat{z}. \quad (15.108)$$



Por lo tanto,

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad (15.109)$$

donde hemos definido la frecuencia natural de oscilaciones de un péndulo de torsión

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I_O}}. \quad (15.110)$$

Observa que, aparte de la forma que toma la frecuencia natural de oscilación, esta ecuación es la que ya hemos encontrado para el péndulo simple, que para pequeñas oscilaciones se convierte en la ecuación para el oscilador armónico.

## 15.6 Péndulo de torsión

Un péndulo de torsión es un objeto que cuelga de un hilo rígido, de metal normalmente, tal que si se rota alrededor del eje del hilo, el objeto oscila alrededor de su posición de equilibrio. Un ejemplo de este péndulo se muestra en la Fig. 15.21. Basta pensar en el

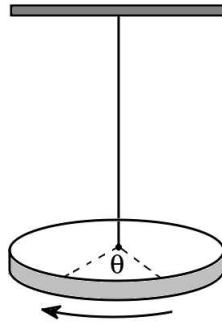


Figura 15.21: Péndulo de torsión

momento en que tomamos un paño o una toallla mojada y la torcemos para quitarle el agua y observar como se tuerce. En el caso del péndulo de torsión, cualquier torsión del cable está asociada con su deformación mecánica. Igual como sientes que la toalla se resiste a la torsión, el cable resiste dicha deformación al desarrollar un torque restaurador,  $\vec{\tau}$ , que actúa para restaurar el cable a su estado no retorcido. Un resultado experimental es que para ángulos de giro relativamente pequeños, la magnitud de este torque es directamente proporcional al ángulo de giro. Por lo tanto, podemos escribir

$$\tau = -\kappa \theta, \quad (15.111)$$

donde  $\kappa > 0$  es la constante de torque del cable. La ecuación anterior es esencialmente un equivalente torsional a la ley de Hooke.

La aplicación de la segunda ley de Newton

$$\vec{\tau} = I_O \vec{\alpha} \quad (15.112)$$

conduce a la ecuación de movimiento para un oscilador armónico

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (15.113)$$

donde hemos definido la frecuencia natural de oscilaciones de un péndulo físico como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_O}}. \quad (15.114)$$

El momento de inercia corresponde al del objeto conectado al hilo, pues este último se supone suficientemente delgado.

En la historia de la física, este tipo de péndulo ha jugado un rol muy importante: Cavendish utilizó el concepto para realizar su medición de la constante de gravitación universal,  $G$ , y Coulomb <sup>6</sup> lo usó para analizar la fuerza electrostática que lleva su nombre.

También hay aplicaciones menos espectaculares, pero que también han jugado un papel importante en la física y en la vida de las personas: los relojes mecánicos. Estos relojes tienen una ruedita de equilibrio que es un péndulo de torsión en el cual el torque restaurador es proporcionado por un resorte en espiral.

## 15.7 Ejercicios

1. La compresión máxima de una masa oscilante en un resorte es de 1 m, y durante una oscilación completa el resorte viaja a una velocidad promedio de 4 m/s. ¿Cuál es el período de la oscilación?

2. a) Un resorte se extiende 0,015 m cuando un objeto de 1,75 kg está suspendido de su extremo. ¿Cuánta masa se debe unir al resorte para que su frecuencia de vibración sea  $f = 3,0$  Hz?

b) Un sistema oscilante de masa-resorte tiene una energía mecánica de 1,0 J, una amplitud de 10,0 cm y una velocidad máxima de 1,20 m/s. Encuentra la constante del resorte, la masa y la frecuencia de oscilación.

3. Se une una masa de 0,45 kg a un resorte con una constante elástica de 26,0 N/m y se libera desde reposo a una distancia de 3,25 cm de la posición de equilibrio del resorte.

a) ¿Cuál es el período de oscilación?

b) Usa la conservación de la energía para encontrar la velocidad de la masa cuando está a medio camino de la posición de equilibrio.

c) ¿Cuál es la velocidad máxima de la masa?

d) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima de la masa?

4. Te han regalado un buen resorte muy liviano, pero hay características de él que no conoces. Se te ocurre colgar de él una masa. Cuando cuelgas 100 gramos en un extremo del resorte, éste se estira 10 cm. Desplazas la masa de 100 gramos 6 cm desde su posición de equilibrio y la suelta en el instante  $t = 0$ . Suponiendo que la disipación es pequeña, encuentra

a) La constante elástica del resorte.

b) El período de la oscilación.

c) Una ecuación para la posición de la masa en función del tiempo  $t$ .

5. Francisca tiene dos péndulos, uno tiene una longitud de 1 metro y el otro es más largo. Los pone a ambos oscilando al mismo tiempo. Después de que el péndulo de 1 metro

<sup>6</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin\\_de\\_Coulomb](https://en.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_de_Coulomb)

ha completado 12 oscilaciones, el más largo solo ha completado 11. ¿Cuál es el período del péndulo más largo?

6. Haz colgado un resorte de un techo y le cuelgas una masa, de modo que pueda oscilar libremente. Estiras la masa en 49 cm y sueltas la masa y comienza la oscilación en un movimiento armónico simple. ¿Cuál es el período del movimiento armónico simple?

7. Un objeto de masa que oscila de un lado a otro en un movimiento armónico simple. La distancia amplitud es  $A$ , y el período de oscilación,  $T$ . En el instante  $t = 0$  el objeto está en el origen,  $x = 0$  y se mueve en la dirección  $-x$ . Encuentra en términos de  $m$ ,  $T$  y  $A$ :

- La ecuación de movimiento del objeto.
- La velocidad máxima del objeto.
- La aceleración máxima de la masa.
- Su energía total.

8. El desplazamiento de un objeto que experimenta un movimiento armónico simple está dado por la ecuación

$$x(t) = 3,0 \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{4}\right), \quad (15.115)$$

donde  $x$  está en metros y  $t$  está en segundos.

- ¿Cuál es la amplitud del movimiento?
- ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?
- ¿Cuál es la posición, velocidad y aceleración del objeto en  $t = 0$ ?

9. Una partícula está oscilando armónicamente alrededor del origen, a lo largo del eje  $y$  con amplitud  $A = 4,0$  cm y período  $T = 2,0$  s.

- ¿Cuál es la velocidad angular del movimiento circular uniforme correspondiente?
- ¿Cuál es el tiempo mínimo requerido para que la partícula viaje desde  $y_1 = -1$  cm a  $y_2 = +2$  cm?
- ¿Cuál es la velocidad lineal en función de la posición?

10. Un bloque de 1,0 kg descansa sobre una mesa sin fricción y está unido a un resorte con una constante elástica de 250 N/m. El objeto se desplaza 20 cm y se le da una velocidad inicial de 3 m/s desde la posición de equilibrio.

- ¿Cuál es la energía total del movimiento resultante?
- ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?
- ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

11. Considera el sistema que se muestra en la Fig. 15.22, que consiste en una barra de longitud  $L$  y masa  $M$  que puede girar alrededor de su centro de masa. A su extremo se ha unido un resorte de constante elástica  $k$ . La barra se tira hacia un lado y se deja libre para que oscile.

- Analiza si el movimiento es un movimiento armónico simple.
- ¿Cuál es el período de oscilación? Expresa tu respuesta en términos de  $k$ ,  $L$  y  $M$ .

12. Un resorte ideal de constante elástica  $k = 16$  N/m está unido a una pared y descansa sobre una mesa sin fricción, como muestra la Fig. 15.23. Tiene un bloque de masa de 2 kg unido a un extremo. Inicialmente el bloque está en reposo. Otro bloque, también de masa de 2 kg, se desliza sobre la mesa con una velocidad de 8 m/s. En el instante  $t = 0$ , el bloque en movimiento choca con el bloque en el resorte. Los dos quedan pegados después

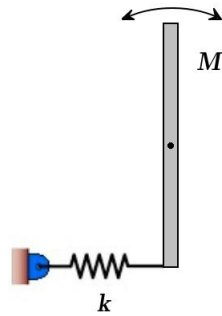


Figura 15.22: Barra atada a resorte

del impacto y oscilan. Encuentra una expresión para  $x(t)$  que describa el movimiento de ambos bloques.

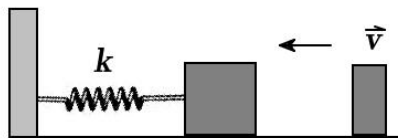


Figura 15.23: Colisión de dos masas

13. Una partícula de masa  $m$  está obligada a moverse en un eje vertical sin fricción. Está unida a un extremo de un resorte ideal con constante de resorte  $k$  y longitud no extendida  $L_0 = 0$  m (esto significa que es pequeña en comparación con otras longitudes en el problema). El otro extremo del resorte está enganchado a un pivote a la distancia  $D$  del eje como se muestra en el diagrama de la Fig. 15.24

a) Muestra que la partícula realiza un movimiento armónico simple cuando se desplaza desde su posición de equilibrio.

b) Encuentra el período de oscilación de la masa.

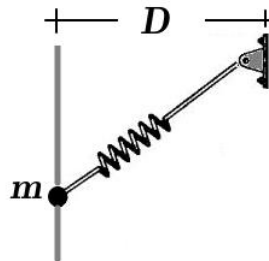


Figura 15.24: Masa que pasa por eje, atada a resorte

14. Un automóvil con amortiguadores muy malos se comporta como si simplemente estuviera montado en un solo resorte, en lo que respecta a las oscilaciones verticales. Cuando está vacío, la masa del automóvil es de 1.000 kg y la frecuencia de oscilación es de 2 Hz.

a) ¿Cuál es la constante del resorte?

b) ¿Cuánta energía se necesita para hacer que este automóvil oscile con una amplitud de 5,0 cm (suponiendo que se pueda despreciar toda la amortiguación)?

c) ¿Cuál es la velocidad máxima del movimiento vertical en b)?

d) Supón que cuatro pasajeros con un peso promedio de 60 kg ahora ingresan al automóvil. ¿Cuál es la nueva frecuencia de oscilación?

15. Una masa  $m$  que se mueve horizontalmente a velocidad  $v_0$  sobre una mesa sin fricción, golpea un resorte con constante elástica  $k$ , comprime el resorte y luego se recupera con velocidad opuesta. Suponiendo que no haya pérdida de energía en ninguna parte, encuentra

a) cuánto tiempo la masa está en contacto con el resorte y

b) la compresión máxima del resorte.

16. Considera una masa unida a un resorte que ejecuta un movimiento descrito por  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$  con  $A = 0,32$  m. En el instante  $t = 0$  la masa se encuentra en la posición  $x = -0,07$  m, con una velocidad  $v = -2,0$  m/s. La energía total del sistema es 5,6 J. Encuentra

a) la constante de fase,  $\phi$ ,

b) la frecuencia de oscilación,  $f$ ,

c) La constante elástica del resorte, y

d) el valor de la masa.

17. La Fig. 15.25 muestra un anillo delgado de 20 cm de radio se coloca horizontalmente en una cuña para que se balancee en el plano horizontal como un péndulo físico. Determina el período de oscilaciones de baja amplitud. ¿Cuál es la longitud del péndulo simple con el mismo período?

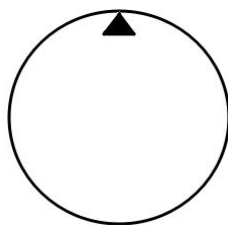


Figura 15.25: Anillo oscilante

18. Una viga de acero de masa y longitud de longitud se suspende en su punto medio por un cable y ejecuta oscilaciones torsionales. Si luego dos masas  $m$  y  $M$  se le pegan cada extremo de la viga y esto reduce la frecuencia en un 10 %, ¿cuánto vale la razón  $m/M$ ?

19. Imagina un disco sólido, (digamos una moneda de 100 pesos), de masa  $M$ , radio  $R$ , parado verticalmente sobre una mesa. Una pequeña masa  $m$  de tamaño insignificante se le agrega al borde, en el punto más bajo. Cuando se le perturba, la moneda oscila de un lado a otro sin resbalar.

a) Demuestra que el período del movimiento armónico simple es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR}{2mg}} \quad (15.116)$$

b) ¿Qué sucede cuando  $m \rightarrow 0$ ? Analiza.

c) Encuentra la forma de la energía total del sistema.

20. Un resorte de constante  $k$  se cuelga verticalmente de una superficie fija, y un bloque de masa  $m$  se une al extremo del resorte. Se libera la masa y se permite que el sistema se equilibre como se muestra en el diagrama de la Fig. 15.26 .

a) Obtén una expresión para la posición de equilibrio de la masa.

b) ) El resorte ahora se tira hacia abajo y se desplaza una cantidad  $A$ . Obtén una expresión para la energía potencial almacenada en el resorte.

c) En el instante  $t = 0$ , se libera el resorte. Encuentra una expresión para el período del oscilador.

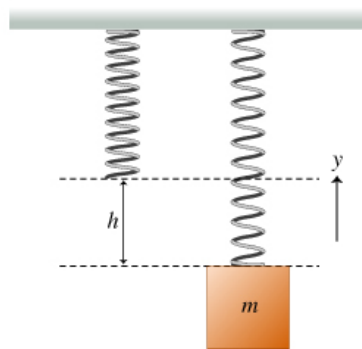


Figura 15.26: Masa colgando de resorte

21. Un resorte con constante de resorte de  $40 \text{ N/m}$  está unido a una superficie fija, y un bloque de masa de  $0,25 \text{ kg}$  está unido al extremo del resorte, ubicado sobre una superficie sin fricción, como muestra la Fig. 15.27. El bloque ahora se desplaza  $15 \text{ centímetros}$  y se libera en el instante  $t = 0$ .

a) Dibuja el diagrama de cuerpo libre para el bloque en  $t = 0$ .

b) Determina el período de oscilación del bloque.

c) Determina la velocidad del bloque en la posición  $x = 0$ .

d) Escribe una expresión para el desplazamiento del bloque en función del tiempo.

e) Grafica el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la masa como una función del tiempo. Etiqueta explícitamente los ejes con unidades, así como cualquier intersección, asíntotas, máximos o mínimos con valores numéricos o expresiones algebraicas, según corresponda.

f) Grafica la energía cinética de la masa y la energía potencial elástica del resorte como funciones del tiempo. Rotule explícitamente los ejes con unidades, así como cualquier intersección, asíntotas, máximos o mínimos con valores numéricos o expresiones algebraicas, según corresponda.

22. Un disco con una masa  $M$ , un radio  $R$  y una inercia rotacional de  $I = \frac{1}{2}MR^2$  está unido a un resorte horizontal que tiene una constante de resorte  $k$ , como se muestra en el diagrama de la Fig. 15.28. Cuando el resorte se estira una distancia  $x$  y luego se libera del reposo, el disco rueda sin deslizarse mientras el resorte está unido al eje sin fricción en el centro del disco.

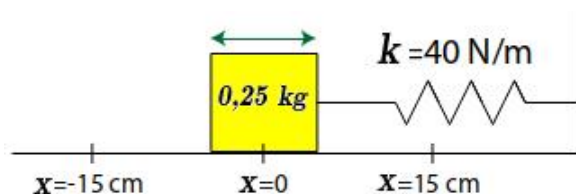


Figura 15.27: Sistema masa-resorte

- a) Calcula la velocidad máxima de traslación del disco en términos de  $M$ ,  $R$ ,  $x$ ,  $k$ .
- b) ¿Qué pasaría con el período de este movimiento si aumentara la constante del resorte? Justifica tu respuesta
- c) ¿Qué pasaría con el período de este movimiento si la superficie ahora no tuviera fricción y el disco no pudiera rodar? Justifica tu respuesta.

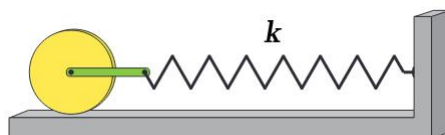


Figura 15.28: Disco atado a resorte

23. Una masa de 5 kg unida a un resorte lineal experimenta un movimiento armónico simple al estar sobre una mesa sin fricción, con una amplitud de 0,35 m y una frecuencia de 0,67 Hz.

- a) Calcula el valor de la constante del resorte.
- b) ¿Cuál es la razón entre la aceleración de la masa cuando está a la mitad de su amplitud y su aceleración cuando está a la amplitud total?
- c) Dibuja un gráfico de la aceleración de la masa en función de su velocidad para la mitad de un ciclo. Comienza cuando la masa esté en su amplitud positiva. Denota la aceleración inicial como  $a_0$ .

24. Una partícula que se mueve a lo largo del eje  $x$  en un movimiento armónico simple comienza desde su posición de equilibrio en  $x = 0$  m en  $t = 0$  s y se mueve hacia la derecha. La amplitud de su movimiento es  $A = 2,0$  cm, y la frecuencia es  $f = 1,50$  Hz.

- a) Encuentra una expresión para la posición de la partícula en función del tiempo.
- b) Determina la velocidad máxima de la partícula y el instante más temprano ( $t > 0$ ) al que la partícula tiene esta velocidad.
- c) Encuentra la aceleración positiva máxima de la partícula y el instante más temprano en el que la partícula tiene esta aceleración.
- d) Encuentra la distancia total recorrida por la partícula entre  $t = 0$  y  $t = 1,0$  s.

25. Un objeto de 0,5 kg unido a un resorte con una constante elástica de 8,0 N/m oscila en un movimiento armónico simple con una amplitud de 10,0 cm. Calcula

- a) el valor máximo de su velocidad y aceleración,
- b) la velocidad y la aceleración cuando el objeto está a 6,0 cm de la posición de equilibrio, y
- c) el intervalo de tiempo requerido para que el objeto se mueva de  $x = 0$  a  $x = 8,0$  cm.

26. Un objeto de masa  $2,0 \text{ kg}$  se une a un resorte y se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción. Se requiere una fuerza horizontal de  $20,0 \text{ N}$  para mantener el objeto en reposo cuando se tira a  $x = 0,2 \text{ m}$  desde su posición de equilibrio en  $x = 0 \text{ m}$ , y luego se libera del reposo y posteriormente oscila armónicamente.

- Encuentra la constante elástica  $k$  y la frecuencia de las oscilaciones,  $f$ .
- Calcula la velocidad máxima del objeto,  $v_{\max}$ . ¿En qué lugar se produce esta velocidad máxima?
- Encuentra la aceleración máxima del objeto,  $a_{\max}$ . ¿En qué posición se produce la aceleración máxima?
- Calcula la energía total del sistema oscilante.
- Determina la velocidad y la aceleración del objeto cuando su posición es igual a un tercio de la amplitud.
- Expresa la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo,  $x(t)$ ,  $v(t)$  y  $a(t)$ .

27. Un oscilador armónico simple de amplitud  $A$  tiene una energía total  $E$ .

- Determina la energía cinética y la energía potencial cuando la posición es la mitad de la amplitud.
- ¿Para qué valores de la posición la energía cinética es igual a la mitad de la energía potencial?
- ¿Hay algún valor de la posición donde la energía cinética es mayor que la energía potencial máxima? Explique.

28. Un péndulo simple tiene una masa  $m = 0,25 \text{ kg}$  y una longitud  $L = 1,0 \text{ m}$ . Se desplaza por un ángulo de  $15,0^\circ$  y luego liberado del reposo. Usando el modelo de análisis de una partícula en movimiento armónico simple, ¿cuáles son

- la velocidad máxima de la masa,
  - su aceleración angular máxima, y
  - la fuerza de restauración máxima en el péndulo?
- d) Ahora use la conservación de energía para resolver las partes a) a c).  
e) Compare las respuestas.

29. Un oscilador armónico simple consiste en un bloque de masa  $m = 2 \text{ kg}$  unido a un resorte con constante elástica  $k = 100 \text{ N/m}$  y oscila en una superficie horizontal sin fricción. En el instante  $t_1 = 1 \text{ s}$ , la posición y la velocidad del bloque son  $x_1 = 0,13 \text{ m}$  y  $v_1 = 3,15 \text{ m/s}$ , respectivamente.

- Encuentra la amplitud de las oscilaciones?
- ¿Cuál es la posición y la velocidad del bloque en  $t = 0 \text{ s}$ ?
- ¿Cuánto tiempo tarda el bloque en alcanzar la posición de equilibrio  $x = 0 \text{ m}$  por primera vez?

30. Un bloque de  $0,4 \text{ kg}$  unido a un resorte con constante igual a  $12 \text{ N/m}$  oscila con una amplitud de  $8 \text{ cm}$ . Encuentra:

- la velocidad máxima del bloque,
- la velocidad y aceleración del bloque cuando está a  $x = 4 \text{ cm}$  de la posición de equilibrio, y
- el tiempo que tarda el bloque en moverse de  $x = 0$  a  $x = 4 \text{ cm}$ .

31. Un péndulo simple consiste de una masa  $m = 50 \text{ g}$  unida a una cadena de masa insignificante, de longitud  $L$ . La masa se desplaza hacia la derecha en un ángulo de  $8^\circ$  y



luego se libera del reposo. Al final de su camino, la masa tiene una velocidad máxima de 0,44 m/s.

- Usa la conservación de energía para determina la longitud de la cuerda  $L$ .
- Deduce el período de oscilación,  $T$ .
- Calcula la energía cinética máxima de la masa.
- Calcula la fuerza de restauración máxima.
- Escribe una expresión para el desplazamiento angular en función del tiempo,  $\theta(t) = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$ .
- ¿Para qué valores posibles del ángulo, la energía cinética y la energía potencial son iguales?

32. Si libera desde el reposo la masa de un péndulo simple de longitud  $L$ , desde un ángulo máximo  $\theta_{\max}$

- Encuentra la velocidad cuando la masa pasa por ángulo  $\theta = 0^\circ$  mediante el uso de la aproximación de ángulo pequeño.
- Utilizando la conservación de energía, encuentra esta velocidad exactamente para cualquier ángulo (no solo ángulos pequeños).
- Muestra que tu resultado de la parte b) concuerda con la respuesta aproximada de la parte a) cuando es pequeño, es decir  $\theta < 10^\circ$
- Encuentra la diferencia entre los resultados aproximados y exactos para 0,2 rad y  $L = 1,0$  m.
- Encuentra la diferencia entre los resultados aproximados y exactos para 1,2 rad y  $L = 1,0$  m.

33. Un bloque de masa  $m = 1$  kg está unido a un resorte con constante elástica  $k = 100$  N/m. El bloque oscila en un movimiento armónico sobre una superficie horizontal sin fricción. En  $t = 0$  s, el resorte se comprime a una posición inicial  $x = 30$  cm y tiene una velocidad inicial de  $v_0 = 4$  m/s.

- Determina la frecuencia angular,  $\omega$
- Usa la conservación de energía para calcular el desplazamiento máximo de las oscilaciones.
- Determina la constante de fase suponiendo que el desplazamiento se da como una función coseno.
- Encuentra la fuerza de restauración máxima ejercida por el resorte sobre el bloque.
- ¿A qué velocidades la energía potencial sería igual a un tercio de la energía cinética?
- Determina el tiempo menor que necesita el bloque para pasar de  $x = 0$  a  $x = A/2$ .

34. Un péndulo simple consiste en una masa  $m = 0,5$  kg unida a una cuerda ideal de longitud  $L = 1,09$  m. En el instante  $t = 0$  s, el péndulo se encuentra en la posición de equilibrio y la masa recibe un impacto que le proporciona una velocidad inicial de 0,5 m/s hacia la derecha.

- Calcula la frecuencia angular y el periodo de oscilación.
- Usa la conservación de energía para calcular el ángulo de desplazamiento máximo
- Deduce la fuerza de restauración máxima.
- ¿A qué ángulo o ángulos la velocidad de la masa igual a  $v_{\max}/2$ ?

35. Si un automóvil tiene un sistema de suspensión con una constante elástica de  $5 \times 10^4$  N/m, ¿cuánta energía deben eliminar los choques del automóvil para amortiguar una oscilación que comienza con un desplazamiento máximo de 0,075 m?

36.

a) ¿Cuánto estirará un resorte que tiene una constante elástica de 40,0 N/m por un objeto con una masa de 0,5 kg cuando se cuelga inmóvil del resorte?

b) Calcula la disminución en la energía potencial gravitacional del objeto de 0,5 kg cuando desciende esta distancia.

c) Parte de esta energía gravitacional va al resorte. Calcula la energía almacenada en el resorte en este tramo y compárala con la energía potencial gravitacional. Explica a dónde podría ir el resto de la energía.

37. Supón que tienes un objeto de 0,75 kg en una superficie horizontal conectado a un resorte que tiene una constante elástica de 150 N/m. Existe fricción entre el objeto y la superficie con un coeficiente de fricción estático  $\mu_s = 0,1$ .

a) ¿Hasta dónde puede estirarse el resorte sin mover la masa?

b) Si el objeto se pone en oscilación con una amplitud dos veces la distancia encontrada en la parte a), y el coeficiente cinético de fricción es  $\mu_k = 0,1$ , ¿qué distancia total recorre antes de detenerse? Supón que comienza en la amplitud.

38. Se coloca una masa sobre una mesa horizontal sin fricción y se ata a un resorte con  $k = 100$  N/m, que se puede estirar o comprimir horizontalmente. El otro extremo del resorte está fijo a la pared. La posición de equilibrio está marcada en cero. Mueves la masa a  $x = 4$  cm y la liberas desde reposo haciendo que la masa realice un movimiento armónico simple.

a) Determina las ecuaciones de movimiento.

b) Encuentra la posición, velocidad y aceleración de la masa en el tiempo  $t = 3$  s.

39. Encuentra la relación de los períodos antes y después de un péndulo si éste se transportó de la Tierra a la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es  $1,63$  m/s<sup>2</sup>.

40. ¿A qué velocidad funcionará un reloj de péndulo en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es  $1,63$  m/s<sup>2</sup>, si mantiene el tiempo con precisión en la Tierra? Es decir, encuentra el tiempo (en horas) que toma la manecilla de la hora del reloj para hacer una revolución en la Luna.

41. Si un reloj de péndulo se adelanta 5 segundos por día, ¿qué cambio fraccionario en la longitud del péndulo se debe hacer para mantener el tiempo perfecto?

42. Un bloque de 2 kg descansa sobre una mesa sin fricción. Un resorte, con una constante de resorte de 100 N/m, está unido a la pared y al bloque. Se coloca un segundo bloque de 0,5 kg en la parte superior del primer bloque. El bloque de 2 kg se tira suavemente a una posición  $x = A$  y se libera del reposo. El coeficiente de roce entre los bloques es 0,45.

a) ¿Cuál es el período de las oscilaciones?

b) ¿Cuál es la amplitud de movimiento más grande que permitirá que los bloques oscilen sin que el bloque de 0,5 kg se deslice?

43. Una masa  $m_1 = 2$  kg cuelga en reposo de una cuerda atada un techo. Una masa  $m_2 = 100$  g se dispara con una velocidad de 20 m/s hacia la masa  $m_1$ , chocando elásticamente con ella. Escribe una ecuación para el movimiento de la masa colgante después de la colisión. Desprecia la resistencia del aire.

44. La amplitud de un oscilador ligeramente amortiguado disminuye en un 3,0% durante cada ciclo. ¿Qué porcentaje de la energía mecánica del oscilador se pierde en cada ciclo?

44. Como sabemos, para amortiguar el movimiento oscilatorio se utilizan fuerzas no conservativas, como la fricción entre las superficies y la viscosidad de los objetos que se mueven a través de los fluidos. Supón que un objeto de  $0,2 \text{ kg}$  está sobre una mesa y está conectado a un resorte fijo en su otro extremo. La constante del resorte es  $k = 50 \text{ N/m}$ . Existe una fricción entre el objeto y la superficie y el coeficiente de roce cinético es  $\mu_k = 0,8$ .

a) ¿Cuál es la fuerza de fricción entre las superficies?

b) ¿Qué distancia total recorre el objeto si se libera  $0,1 \text{ m}$  del equilibrio, comenzando desde el reposo? La constante elástica es  $k = 50 \text{ N/m}$ .

45. Usando una fuerza de  $4 \text{ N}$ , un oscilador armónico amortiguado se desplaza del equilibrio en  $0,2 \text{ m}$ . En el instante  $t = 0$  se libera del reposo. El desplazamiento resultante del oscilador, desde la posición de equilibrio, en función del tiempo, se muestra en la Fig. 15.29. Estima, utilizando la información dada,

a) La masa del oscilador.

b) El factor de calidad del oscilador,  $Q$ .

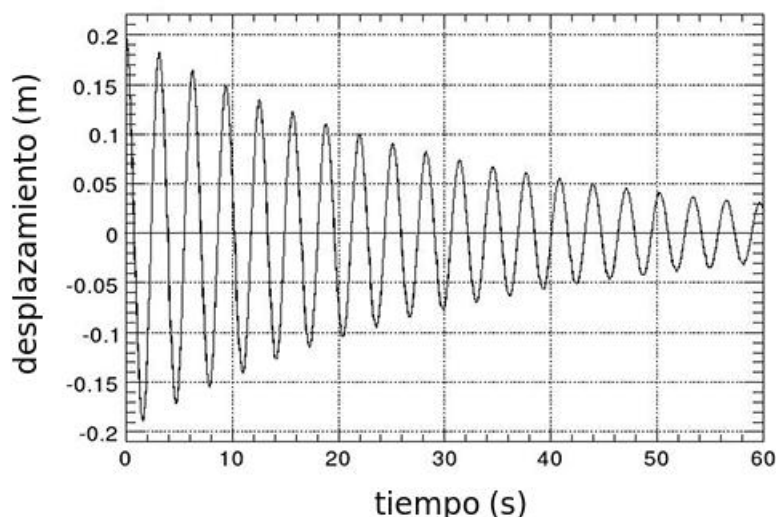


Figura 15.29: Oscilador amortiguado

46. Para un oscilador amortiguado (no impulsado por ninguna fuerza externa), Encuentra, en términos de  $b$  y  $m$ , el tiempo  $t_{1/2}$  después del cual la amplitud de las oscilaciones cae a la mitad de su valor inicial.

47. La amplitud de un oscilador ligeramente amortiguado disminuye un  $5,0\%$  durante cada ciclo. ¿Qué porcentaje de la energía mecánica del oscilador se pierde en cada ciclo?

48. Se une una masa  $m = 3 \text{ kg}$  a un resorte con constante elástica  $k = 243 \text{ N/m}$ , sumergido en aceite, tal que la constante de amortiguación es  $\gamma = 54 \text{ kg/s}$ . La masa inicia su movimiento en la posición  $x_0 = 6 \text{ m}$  y velocidad  $v_0 = -59 \text{ m/s}$  iniciales.

a) Determina la función de posición  $x(t)$ .

b) Grafica la función  $x(t)$ .

c) Ahora supón que la masa se pone en movimiento con la misma posición y velocidad iniciales, pero con el aire, es decir, con  $\gamma = 0$ . En este caso, la función de posición

$X(t)$  puede escribirse como  $X(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \phi)$ . Determina  $A_0$ ,  $\omega_0$  y  $\phi$ . Supón que  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

d) Finalmente, grafica ambas funciones  $x(t)$  y  $X(t)$  en un mismo gráfico para ilustrar el efecto de la amortiguación.

49. Calcula la frecuencia de resonancia de

- a) una masa de 3 kg unida a un resorte de constante elástica de 240 N/m, y
- b) un péndulo simple de 1,5 m de longitud.

50. Un reloj de pie tiene un péndulo de longitud  $L = 1$  m y una lenteja de masa  $m = 0,5$  kg. Una masa de 2 kg cae 0,7 m en siete días para mantener la amplitud de las oscilaciones del péndulo constantes a 0,03 rad. Calcula

a) el  $Q$  de este sistema.

(b) Sin entrada de energía de la masa que cae, el péndulo obedece a la ecuación de movimiento de ángulo pequeño  $d^2\theta/dt^2 + 2b d\theta/dt + \omega_0^2 \theta = 0$ .

Encuentra  $b$  y  $\omega_0$ .



Figura 15.30: Relój de pie

51. Considera un oscilador armónico amortiguado. Definamos  $T_1$  como el tiempo entre cruces por cero adyacentes,  $2T_1$  como su “período” y  $\omega_1 = 2\pi/(2T_1)$  como su “frecuencia angular”. Si la amplitud del oscilador amortiguado disminuye a  $1/e$  de su valor inicial después de  $n$  períodos, demuestra que la frecuencia angular del oscilador debe ser aproximadamente  $1 - 1/(8\pi^2 n^2)$  veces la frecuencia del oscilador no amortiguado correspondiente,  $\omega_0$ .

52. Una masa  $m$  fijada a un resorte con constante  $k$  e inmerso en un fluido proporciona un modelo para un oscilador armónico amortiguado (recuerda el video de los estudiantes). Como hemos visto, un circuito con inductancia  $L$ , capacitancia  $C$  y resistencia  $R$  proporciona un análogo eléctrico a dicho oscilador.

a) Escribe la ecuación del circuito para el circuito  $RLC$  y la segunda ley de Newton para el oscilador amortiguado. ¿Qué suposición debe hacerse acerca de la dependencia de la amortiguación de la masa con la velocidad para que las dos ecuaciones tengan la misma forma matemática?

b) ¿Cómo se relacionan las constantes  $m$ ,  $k$  y  $b$  (constante de amortiguamiento) con las constantes del circuito  $L$ ,  $C$  y  $R$ ? ¿Con qué parámetros del circuito eléctrico están relacionadas las cantidades mecánicas  $x$  (desplazamiento) y  $v$  (velocidad)?

c) Deduce y expresa el desplazamiento y la velocidad en el límite del amortiguamiento débil.

d) ¿Qué voltajes medidos en el circuito darían valores proporcionales al desplazamiento y la velocidad del oscilador mecánico?

53. Se une una masa de 0,5 kg a un resorte de 150 N/m constantes. Se aplica una fuerza impulsora  $F(t) = 12 \cos(\omega t)$  a la masa (medida en newtons), y el coeficiente de amortiguamiento  $b$  es 6 Ns/m. ¿Cuál es la amplitud (en cm) del movimiento en estado estacionario si  $\omega$  es igual a la mitad de la frecuencia natural  $\omega_0$  del sistema?

54. Un oscilador armónico amortiguado construido con un bloque de masa  $m = 2$  kg, un resorte con constante elástica  $k = 10$  N/m, al cual se le aplica una fuerza de amortiguación  $F = -\gamma v$ , inicialmente oscila con una amplitud de 0,25 m. Debido a la amortiguación, la amplitud cae a tres cuartos de su valor inicial después de cuatro ciclos completos.

a) ¿Cuál es el valor de  $b$ ?

b) ¿Cuánta energía se pierde durante estos cuatro ciclos?

55. Se coloca una pieza de collar esférica (una cuenta) con una masa de 10,7 gramos en una cuerda de guitarra. Cuando se tira de la cuerda, el movimiento de la cuenta se describe por,

$$x(t) = 0,008 e^{-0,4t} [\sin(2.451t + 4) + \cos(2.451t + 2)] \quad (15.117)$$

medido en SI. ¿Cuál es el factor  $Q$  de estas oscilaciones?

56. Un peso de masa de 9 kg oscila en un resorte con una constante elástica  $k = 8$  N/m. Las oscilaciones se amortiguan con un coeficiente de amortiguamiento lineal  $b = 9$  N s/m. Se usa un motor para forzar que el peso oscile. Después de que el motor ha estado encendido durante mucho tiempo (para que los transcientes hayan decaído), el movimiento del peso se puede describir como  $x(t) = 0,08 \sin(2t)$

¿Cuál es la fuerza impulsora ejercida por el motor en el tiempo  $t = 5$  s?





## 16. ONDAS EN UNA DIMENSIÓN

Una característica común a todas las ondas es la propagación en el espacio de algún tipo de perturbación con una velocidad característica. Típicamente, esta perturbación ocurre en un medio material, como un líquido o un sólido o un gas, donde el sistema ha sido sacado desde su estado de equilibrio por un agente externo. Por ejemplo, la elevación de la superficie de un líquido o una variación de presión en el caso de un gas. Ocurre también que existen ondas que no necesitan de un medio material para propagarse, como las ondas electromagnéticas, que se propagan en el vacío. Este descubrimiento tuvo enormes repercusiones en la historia de la física, dando origen a la teoría de la relatividad especial de Einstein. El 14 de septiembre de 2015 se observó directamente, por primera vez, otro tipo de ondas que no necesita de un medio material: ondas gravitacionales que se propagan cuando el espacio-tiempo mismo se perturba.

La perturbación queda descrita por una función de la posición y del tiempo,  $y(\vec{r}, t)$  que llamamos **función de onda**. Si la perturbación es a lo largo de la dirección de propagación de la onda, se llama **onda longitudinal**. Por otro lado, si la perturbación tiene lugar perpendicular a la dirección de propagación de la onda, hablamos de una **onda transversal**. En una onda de sonido, la perturbación es la variación de presión en un medio, luego la función de onda es una función escalar (un campo escalar). En las ondas electromagnéticas, la transmisión de luz en un medio o en el vacío, la perturbación es la variación de las intensidades de los campos eléctrico y magnético, y por tanto, la función de onda es una cantidad vectorial (un campo vectorial).

Comenzaremos nuestro estudio con ondas en un medio que ocurren en una dimensión.

### 16.1 Forma general de una onda viajera

En una dimensión una perturbación con función de onda  $y(x, t)$  solo se puede mover hacia la izquierda o hacia la derecha, con una velocidad  $\vec{v} = -v\hat{x}$  o  $\vec{v} = +v\hat{x}$ , respectivamente.

Esto queda descrito matemáticamente como

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad \text{Onda viajera con propagación hacia la derecha,} \quad (16.1)$$

$$y(x, t) = g(x + vt) \quad \text{Onda viajera con propagación hacia la izquierda.} \quad (16.2)$$

A primera vista resulta curioso, y siempre un punto de confusión entre los estudiantes, que el signo menos (más) corresponda a un movimiento hacia la derecha (izquierda). Después de todo, de nuestro estudio de la cinemática sabemos que, por ejemplo, para un movimiento con velocidad constante en el sentido positivo de  $x$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}t \implies x(t) = x(0) + vt. \quad (16.3)$$

En la Fig. 16.1 se muestra un pulso que se propaga en sentido  $+x$  con velocidad  $v$ , descrito por la función de onda  $f(x - vt)$ . Observamos que en  $x = 0$  está centrado en el origen, en el instante  $t = 0$ , mientras que cuando las coordenadas en espacio y tiempo son  $(x', t)$ , se ha movido hacia la derecha una distancia  $vt$ . Para que la nueva coordenada  $x'$  sea cero y el pulso centrado en un nuevo origen, deben ocurrir que  $x' = x - vt$ .

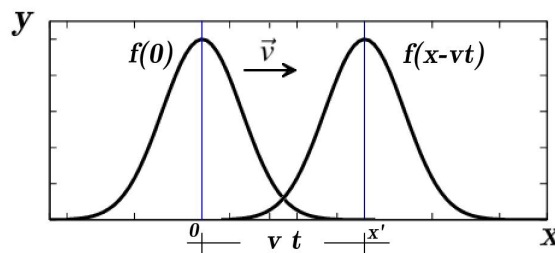


Figura 16.1: Propagación de un pulso

### 16.1.1 Pulsos

Un solo pulso se genera perturbando el medio una sola vez. La forma del pulso dependerá de la forma cómo se perturba el medio.

En la Fig. 16.2 se muestra lo que se conoce como un **pulso gaussiano**, descrito por la función de onda

$$y(x, t) = A \exp \left\{ -\frac{(x - vt - x_0)^2}{\sigma^2} \right\}. \quad (16.4)$$

Este tipo de pulso juega un rol importante en óptica (ver por ejemplo [https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian\\_beam](https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_beam)).

Observa que la función de onda tiene la forma de una onda que se propaga en el sentido  $+x$ .

En la Fig. 16.3 se muestran tres tipos de pulsos que sería extraño encontrar en un medio material, pero que sí pueden ser generados electrónicamente.

El tipo de ondas que estudiaremos son aquellas que satisfacen el **principio de superposición lineal**



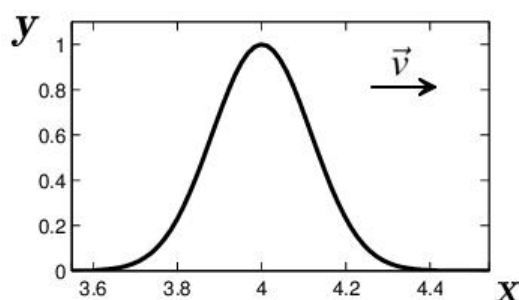


Figura 16.2: Pulso gaussiano

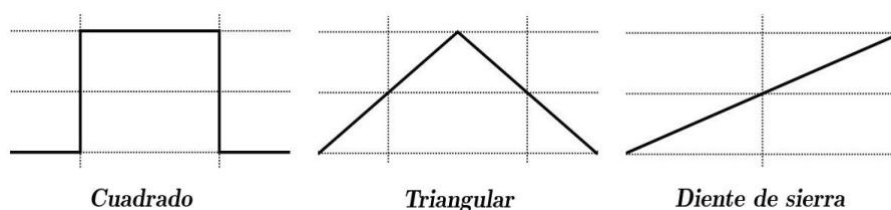


Figura 16.3: Diferentes pulsos

### Pausa matemática

El principio de superposición lineal establece que una combinación lineal de elementos de un conjunto nuevamente pertenece a ese conjunto. Esta propiedad ya la hemos utilizado, sin decirlo, cuando estudiamos vectores. De hecho, la suma de vectores es justamente una superposición lineal de elementos de un espacio vectorial. También hemos utilizado este principio cuando construimos una expresión equivalente para el centro de masa de un objeto como la suma de dos objetos. Por supuesto, al determinar la energía potencial de una configuración de masas o al calcular el potencial en un punto del espacio debido a un conjunto de masas, lo que hemos hecho es aplicar el principio de superposición lineal.

La enseñanza debe ser que lo más importante del principio de superposición es que nos permite dividir un problema en problemas más simples y luego, al final, componer la respuesta final a partir de la solución de los problemas más simples.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

## 16.2 Superposición e interferencia de pulsos

Pensemos en ondas en un medio material. El principio de superposición lineal se satisface cuando el medio por el cual se propagan las ondas se comporta linealmente; es decir, por ejemplo cuando las partes del medio tienen el doble de desplazamiento, entonces la fuerza de restauración es el doble.

El principio de superposición establece entonces que, cuando dos o más ondas coinciden en el espacio o en el tiempo, el desplazamiento resultante en ese punto es igual a la suma de los desplazamientos debidos a cada onda individual. Como ya se ha dicho, la función de onda puede ser escalar o vectorial<sup>1</sup> y por tanto se deben sumar de acuerdo

<sup>1</sup>Una función de onda también puede ser un tensor.

a su naturaleza. Cuando las ondas pasan más allá del punto de coincidencia, se separan nuevamente y continúan sin haber cambiado. Decimos, entonces, que los pulsos han sufrido **interferencia**.

Las ondas para las cuales podemos notar esta interferencia de modo claro son las ondas mecánicas, porque podemos observar directamente cómo cambia la amplitud (para visualizar esto, vea el siguiente video: <https://www.youtube.com/watch?v=hnZ1FKVWN4k>). Por otro lado, normalmente para ondas de sonido u ondas electromagnéticas lo que se mide es su intensidad, que es una medida de la energía de la onda y por tanto, proporcional al cuadrado de la amplitud.

Veamos un par de ejemplos para superposición de pulsos.

En la Fig. 16.4 se muestran dos pulsos cuadrados, invertidos, que se propagan con la misma velocidad. Los pulsos originales se muestran con puntos y líneas de colores, y en negro su superposición.

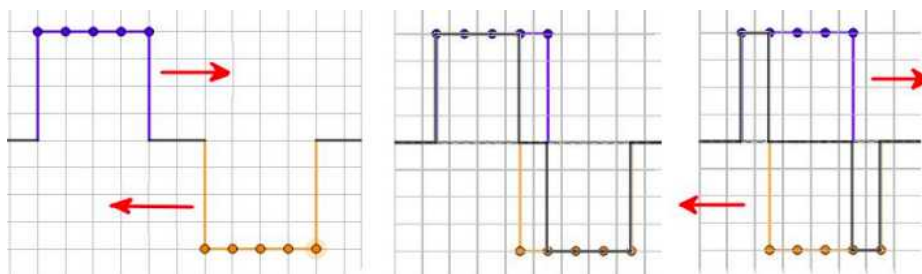


Figura 16.4: Superposición de pulsos cuadrados

En la Fig. 16.14 se muestran dos pulsos diente de sierra, invertidos, que se propagan con la misma velocidad.

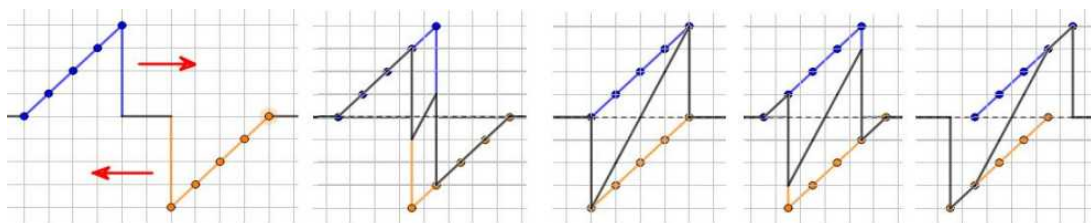


Figura 16.5: Superposición de pulsos diente de sierra

Lo que se muestra en estas figuras es una forma gráfica de hacer la superposición de ondas. Por supuesto, si describiéramos los pulsos como funciones  $y_1(x, t)$  y  $y_2(x, t)$ , bastaría hacer

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) \quad (16.5)$$

para obtener el resultado de la superposición. Le dejo como tarea que usted encuentra la forma analítica de las funciones de estos ejemplos. ¡Es un buen desafío!

Vemos que a medida que se propagan, parte de los pulsos **interfieren destructivamente** al restarse sus valores, hasta el punto que en algunas zonas en que la interferencia destructiva es total, su amplitud se anula.

## 16.2.1 Ejercicios

1. Para los siguientes pulsos, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s, 4 s y 5 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como líneas azules gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

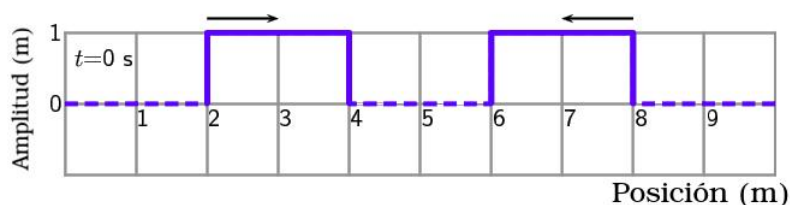


Figura 16.6: Pulsos cuadrados iguales aproximándose

2. Para los siguientes pulsos, Fig. 16.7, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s, 4 s y 5 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como líneas azules gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

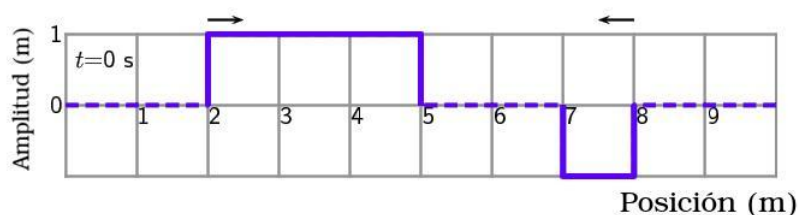


Figura 16.7: Pulsos cuadrados distintos aproximándose

3. Para los siguientes pulsos, Fig. 16.8, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s y 4 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como azules negras gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

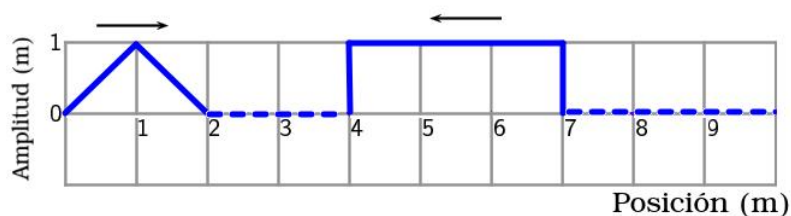


Figura 16.8: Un pulso triangular y una rectangular aproximándose

4. Para los siguientes pulsos, Fig. 16.11, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s y 4 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como azules negras gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

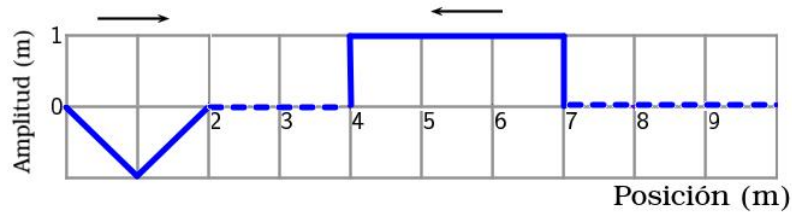


Figura 16.9: Un pulso triangular y una rectangular aproximándose

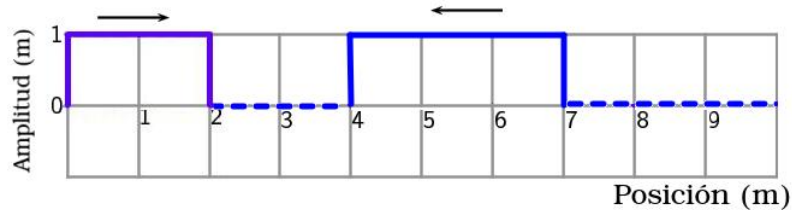


Figura 16.10: Dos pulsos rectangulares aproximándose

5. Para los siguiente pulsos, Fig. 16.10, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s y 4 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como líneas azules gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

6. Para los siguiente pulsos, Fig. 16.11, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s y 4 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como líneas azules gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

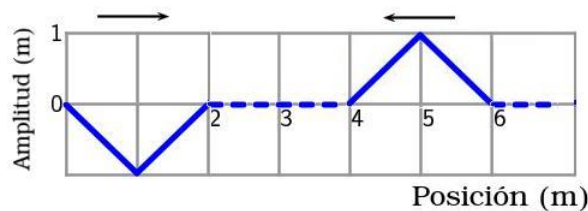


Figura 16.11: Dos pulsos triangulares aproximándose

7. Para los siguiente pulsos, Fig. 16.12, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s y 4 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como líneas azules gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

8. Para los siguiente pulsos, Fig. 16.13, dibuja las formas de onda resultantes después de 1 s, 2 s, 3 s y 4 s. Cada pulso viaja a 1 m/s. Cada cuadrado representa 1 m. Los pulsos se muestran como líneas azules gruesas y el medio no desplazado como líneas discontinuas.

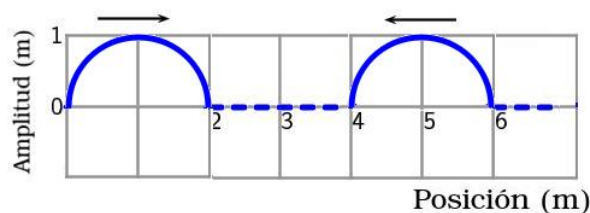


Figura 16.12: Dos pulsos semi-circulares aproximándose

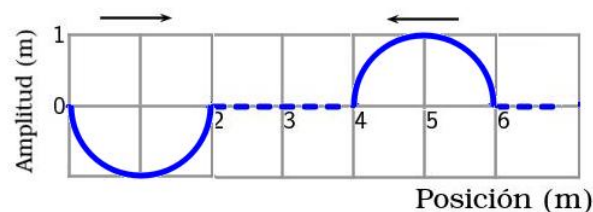


Figura 16.13: Dos pulsos semi-circulares, uno invertido, aproximándose

## 16.3 Ondas viajera sinusoidales

En sistemas donde los osciladores del medio están descritos por osciladores armónicos las ondas viajeras tienen una forma sinusoidal (por eso también se denominan **ondas armónicas**). En la Fig. 16.14 se muestra una onda sinusoidal que se observa en un posición dada del espacio  $x^*$ . Imagine esto como si usted está en un bote en el mar, anclado, y siente pasar las olas; la posición está fija y el tiempo transcurre. Lo que usted observa es un movimiento armónico simple. En esta figura queda definido el **período**,  $T$ , que corresponde a la longitud de intervalo cuando el movimiento se vuelve a repetir.

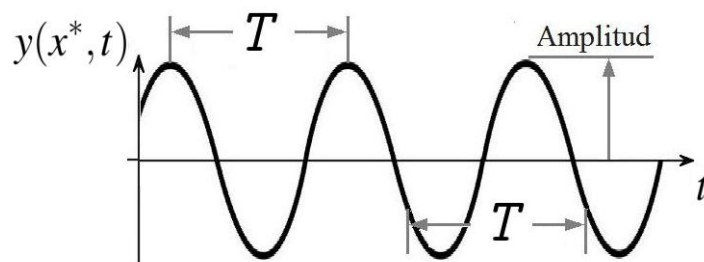


Figura 16.14: Función de onda sinusoidal en el tiempo

En la Fig. 16.15 se muestra una onda sinusoidal que se observa en un instante dado,  $t^*$ . Esto corresponde a observar el paso de una onda sinusoidal y sacarle una foto. Esto es lo que se denomina la **forma de la onda**. Allí queda definida la **longitud de onda**,  $\lambda$ , que corresponde a la distancia para la cual el movimiento se repite. En la figura, el máximo de la onda se denomina **cresta** y el mínimo, **valle**.

Esto es, para una onda que se propaga hacia  $+x$  su función de onda está dada por

$$y(x, t) = A \sin(\alpha[x - vt + cte]), \quad (16.6)$$

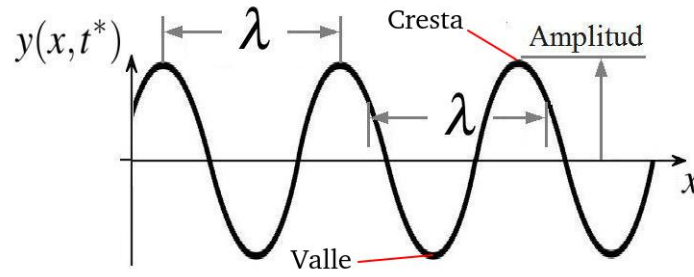


Figura 16.15: Función de onda sinusoidal en el espacio

donde  $A$  es la amplitud de la onda y  $\alpha$  es una constante que veremos qué forma tiene y qué significa. Para ello recordemos que en física el argumento de una función no debe tener dimensiones. Sabemos además que el argumento de las funciones trigonométricas debe ser en radianes. Esto significa que la fase  $\alpha[x - vt + cte]$  debe quedar descrita en radianes. Dado que  $[x - vt + cte]$  tiene unidades de metros, necesariamente  $\alpha$  tiene unidades de  $rad/m$ . Definimos el **número de onda**  $k$  como

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (16.7)$$

que es el número de radianes por unidad de distancia. Podemos pensar en  $k$  como una medida de cuántas longitudes de onda caben en un círculo. Entonces, con  $\alpha = k$ , el argumento de la función seno es  $kx - kv t + kcte$ . El último término es constante, así que tiene que corresponder a la constante de fase,  $\phi$ . Ahora,  $kv = \frac{2\pi v}{\lambda}$  y  $\frac{v}{\lambda}$  tiene unidades de recíproco de tiempo. El único parámetro de tiempo que tenemos a disposición con esa dimensión es el período,  $T$ . Luego,  $kv = \frac{2\pi}{T} = \omega$ , la frecuencia angular. Por lo tanto, podemos reescribir la función de onda de modo equivalente

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi), \quad (16.8)$$

o bien

$$y(x, t) = A \sin(k[x - vt] + \phi). \quad (16.9)$$

Es importante tener en cuenta para una onda que viaja en sentido  $+x$ , lo relevante es que en el argumento de esta función exista un **signo relativo** entre los términos  $kx$  y  $\omega t$  y no el orden de ambos.

La velocidad de propagación de una onda descrita por solo una longitud de onda se denomina una **onda monocromática**, porque en el espectro visible de la luz corresponde a un solo color o *chróma*, en griego, es

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f. \quad (16.10)$$

En general, la dependencia de la velocidad de propagación de una onda en función de la longitud de onda o del número de onda, se denomina **relación de dispersión** y es un concepto importante en física. Es usual escribirla en términos de la frecuencia angular. Así, la relación de dispersión lineal,  $\omega = vk$ , es la más simple. Si quiere dar un vistazo al concepto, visite [https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion\\_relation](https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_relation).

### 16.3.1 Pausa matemática

De la Ec. (15.79) sabemos que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (16.11)$$

De esta expresión la función coseno se obtiene de tomar la **parte real**

$$\cos x = \Re \{ e^{ix} \}, \quad (16.12)$$

mientras que la función seno resulta de tomar la **parte imaginaria**

$$\sin x = \Im \{ e^{ix} \}. \quad (16.13)$$

También, vemos que la función coseno se escribe

$$\cos x = \frac{1}{2} \{ e^{ix} + e^{-ix} \}. \quad (16.14)$$

La función seno, por otra parte, se define como

$$\sin x = \frac{1}{2i} \{ e^{ix} - e^{-ix} \}. \quad (16.15)$$

En lo que sigue, normalmente no escribiré parte real o parte imaginaria, subentendiéndose cuando se escribe la forma compleja, que se debe tomar la parte real o la parte imaginaria, según sea el caso.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

## 16.4 Superposición e interferencia de ondas sinusoidales

Consideremos la superposición de dos ondas con mismo  $\omega$  y que se mueven con la misma velocidad y en el mismo sentido,  $+x$ , tal que ambas tienen una diferencia de fase  $\Delta\phi = \phi$

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (16.16)$$

y

$$y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi). \quad (16.17)$$

Usando la Ec. (16.15) podemos escribir la superposición de ambas ondas como

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \frac{A}{2i} \left\{ e^{i(kx - \omega t)} - e^{-i(kx - \omega t)} \right\} + \frac{1}{2i} \left\{ e^{i(kx - \omega t + \phi)} - e^{-i(kx - \omega t + \phi)} \right\} \\ &= \frac{A}{2i} \left\{ e^{i(kx - \omega t)} (1 + e^{i\phi}) - e^{-i(kx - \omega t)} (1 + e^{-i\phi}) \right\} \\ &= \frac{A}{2i} \left\{ e^{i(kx - \omega t + \frac{\phi}{2})} \left( e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}} \right) - e^{-i(kx - \omega t + \frac{\phi}{2})} \left( e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}} \right) \right\} \\ &= \frac{A}{2i} \left\{ e^{i(kx - \omega t + \frac{\phi}{2})} - e^{-i(kx - \omega t + \frac{\phi}{2})} \right\} \left( e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}} \right). \end{aligned} \quad (16.18)$$

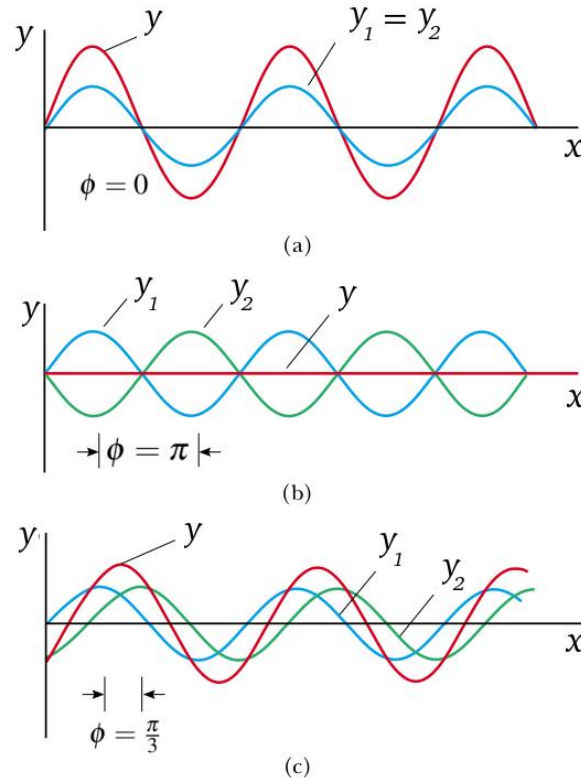


Figura 16.16: Resultado de superposición para tres constantes de fase distintas.

Por lo tanto, usando la representación compleja de las funciones seno y coseno, obtenemos el resultado de la interferencia

$$y(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right). \quad (16.19)$$

Esta ecuación nos dice que la onda resultante tiene una diferencia de fase  $\Delta\phi$  igual a la mitad de la diferencia de fase entre las ondas que se superponen,  $\phi/2$ . Además, su amplitud es una función de la constante de fase  $A(\phi) = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ .

En la Fig. 16.16 se muestran tres casos para diferentes valores de la constante de fase. Cuando  $\phi = 0$ <sup>2</sup> las ondas están **en fase** y se refuerzan positivamente, como muestra la figura (a) y lo que tenemos es **interferencia constructiva**. Si las ondas están en **contrafase**, que corresponde a una diferencia de fase de  $\pi$ <sup>3</sup>, entonces el refuerzo es completamente negativo y el resultado es una amplitud cero en esa zona del espacio, como se observa en la figura (b); luego la interferencia es completamente destructiva. La figura (c) muestra el resultado de la interferencia intermedia para una diferencia de fase de  $\pi/3$ .

Veamos una análisis un poco más general, en una dimensión.

Para ello consideraremos dos fuentes separadas por una distancia  $d$  que emiten lo que podemos suponer frentes de onda planos.

Cuando dos o más ondas emiten ondas de modo tal que la **diferencia de fase es constante**, se dice que esas son **fuentes coherentes**. Es importante tener en mente que una

<sup>2</sup>O un múltiplo entero de  $2\pi$

<sup>3</sup>O un múltiplo impar de  $\pi$



diferencia de fase constante no significa diferencia de fase cero, que es un caso particular. Una diferencia de fase constante también existe por ejemplo cuando las fuentes están emitiendo **en contrafase**, es decir con una diferencia de fase de  $\pi$ .

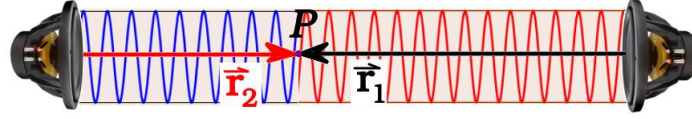


Figura 16.17: Interferencia en una dimensión debido a dos fuentes coherentes

En la Fig. 16.17 se muestran dos fuentes coherentes, una frente a la otra, emitiendo cada una un frente de onda plano. Supongamos que ambos parlantes emiten con una diferencia de fase igual a  $\Delta\phi_0$ . Supongamos, además, que en el punto  $P$  se ubica en zona de interferencia destructiva. Hay dos vectores de posición, que posicionan el punto de observación desde cada fuente, que hemos denotado  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . En general, para llegar al punto  $P$  las ondas han recorrido una distancia diferente.

Definamos la distancia  $\delta$ , que es igual al valor absoluto de la diferencia de los módulos los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Esto es,

$$\delta = |r_2 - r_1|. \quad (16.20)$$

Esta distancia es claramente la diferencia de camino recorrido por cada frente de onda para alcanzar el punto  $P$ .

En general, cada función de onda se escribe

$$y_i(r_i, t) = A_i \sin(k_i r_i - \omega_i t + \phi_{i0}), \quad i=1,2. \quad (16.21)$$

Con el fin de hacernos la vida más fácil matemáticamente, supondremos que las dos fuentes son iguales, excepto que permitimos que ambas fuentes tengan un desfase, y denotamos las constantes de fase de cada fuente como  $\phi_{i0}$ . Entonces,  $k_1 = k_2 = k$ ,  $\omega_1 = \omega_2$  y  $A_1 = A_2$ . Luego, el resultado de la superposición de ambas ondas es

$$y(r, t) = A \sin(k r_1 - \omega t + \phi_{10}) + A \sin(k r_2 - \omega t + \phi_{20}). \quad (16.22)$$

Para encontrar el resultado de esta superposición usamos una identidad trigonométrica

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \quad (16.23)$$

Luego,

$$\begin{aligned} y(r, t) &= A \sin(k_1 r_1 - \omega t + \phi_{10}) + A \sin(k_2 r_2 - \omega t + \phi_{20}) \\ &= \left[ 2A \cos \left( \frac{1}{2} [(k_1 r_1 - k_2 r_2) + (\phi_{10} - \phi_{20})] \right) \right] \times \\ &\quad \times \sin \left( \frac{1}{2} [(k_1 r_1 + k_2 r_2) + 2\omega t + (\phi_{10} + \phi_{20})] \right). \end{aligned} \quad (16.24)$$

El término dentro del paréntesis cuadrado es la amplitud resultante. Usando la definición de  $\delta$  notamos que

$$k_1 r_1 - k_2 r_2 = k(r_1 - r_2) = -k(r_2 - r_1) = k\delta. \quad (16.25)$$

Dado que solo nos interesa la diferencia de camino recorrido en valor absoluto, en la última igualdad hemos desechado el signo menos para escribir la igualdad en términos de  $\delta$ . Lo mismo sucede con la diferencia de las constantes de fase.

Por lo tanto, la amplitud total en el punto de observación está dada por

$$A_{tot} = 2A \cos \left( \frac{1}{2} [k\delta + \Delta\phi_0] \right). \quad (16.26)$$

Este resultado nos informa que la condición para interferencia destructiva o constructiva en el punto  $P$  depende del valor de la fase total

$$\Delta\phi_{tot} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \Delta\phi_0. \quad (16.27)$$

Esta es una expresión importante, que debes aprender de memoria y, por supuesto, aprender a utilizarla.

### 16.4.1 El problema de la energía

Veamos con más detenimiento el caso (b), cuando la amplitud se anula. Al igual que con las oscilaciones, “la energía de una onda es proporcional a su amplitud al cuadrado”. La pregunta que nace entonces es ¿qué sucede con la energía? ¿Se destruyó? ¿Como podría ocurrir esto si son osciladores armónicos los involucrados en la existencia de las ondas y un oscilador armónico conserva la energía?

Y si piensas así, tienes razón. La energía **total** se conserva. En el análisis faltan las fuentes, que son las que producen y que también pueden absorber energía.

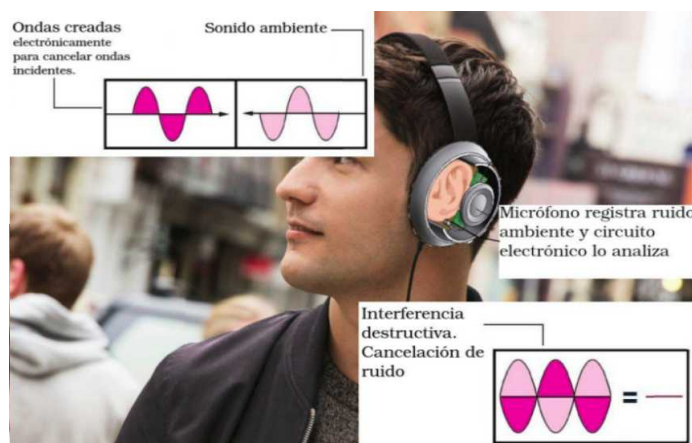


Figura 16.18: Audífonos con cancelación de ruido

### 16.4.2 Aplicación de interferencia: audífonos con cancelación de ruido

Los audífonos con cancelación de ruido se crearon originalmente para que los pilotos de aviones mejoraran su comodidad en vuelos largos, evitando escuchar el ruido de las turbinas. Estos audífonos utilizan la tecnología, conocida como cancelación activa de ruido.

La cancelación activa de ruido funciona mediante el uso de micrófonos para detectar el ruido ambiente de baja frecuencia y neutralizarlo antes de que llegue al oído. Un sistema electrónico recibe la señal, lo analiza para ver la forma de onda y rápidamente genera ondas con diferencia de fase de  $\pi$  respecto de sonido incidente. Estas ondas son alimentadas en el parlante del audífono junto con el audio normal. Esto produce interferencia destructiva, cancelando entre sí los dos sonidos.

Con estos componentes, los auriculares con cancelación de ruido pueden proporcionar una reducción en el ruido de aproximadamente el 70 por ciento del ruido ambiental.

### 16.4.3 Ejercicios

1. Dos fuentes generan ondas coherentes de frecuencia 20 Hz en un mismo medio. Sabiendo que la velocidad de propagación de las ondas es de 40 cm/s, indica el tipo de interferencia que se produce en los siguientes puntos:

- a) Punto 1 situado a 15 cm del primer foco y 10 cm del segundo
- b) Punto 2 situado a 20 cm del primer foco y 16 cm del segundo
- c) Punto 3 situado a 21 cm del primer foco y 18 cm del segundo

2. Considera dos ondas sinusoidales que viajan a lo largo de una cuerda tensa, modeladas como

$$\begin{aligned}y_1(x,t) &= 0,3 \sin(4x + 3t) \\y_2(x,t) &= 0,6 \sin(8x - 6t)\end{aligned}\quad (16.28)$$

con las cantidades medidas en SI. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante formada por la interferencia de las dos ondas en la posición  $x = 0,5$  m en el tiempo  $t = 0,2$  s?

3. Considera dos ondas sinusoidales que viajan a lo largo de una cuerda tensa, modeladas como

$$\begin{aligned}y_1(x,t) &= 0,3 \sin(4x + 3t + \pi/3) \\y_2(x,t) &= 0,6 \sin(8x - 6t)\end{aligned}\quad (16.29)$$

con las cantidades medidas en SI. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante formada por la interferencia de las dos ondas en la posición  $x = 1,0$  m en el tiempo  $t = 3,0$  s?

4. Dos movimientos ondulatorios coherentes de frecuencia 640 Hz, se propagan por un medio con la velocidad de 30 m/s. Encuentra la diferencia de fase con que interfieren en un punto que dista de los orígenes de aquellos respectivamente 25,2 y 27,3 m.

5. Dos ondas que se propagan en una cuerda en la misma dirección tienen una frecuencia de 100 Hz, longitud de onda de 0,01 m y amplitud de 2 cm. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante si las ondas originales están desfasadas en  $\pi/3$ ?

6. Dos parlantes enfrentados entre sí a una distancia de 180 cm están accionados por un oscilador común de audio a 686 Hz. Localiza los puntos entre los parlantes a lo largo de la línea que los une, para los cuales la intensidad del sonido es máxima y mínima. Desprecia la variación de intensidad del sonido con la distancia y usa 340 m/s para la velocidad del sonido.

7. Considera dos ondas sinusoidales sinusoidales que viajan a lo largo de una cuerda tensa, modeladas como

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= 0,3 \sin(4x - 3t) \\y_2(x, t) &= 0,3 \sin(4x + 3t)\end{aligned}\quad (16.30)$$

con las cantidades medidas en SI. ¿Cuál es la función de onda de la onda resultante?

8. Dos ondas sinusoidales se mueven a través de un medio en la dirección  $x$  positiva, ambas con amplitudes de 6 cm, una longitud de onda de 4,1 m y un período de 5 s, pero uno tiene un desplazamiento de fase de un ángulo  $\phi = 0,5$  rad. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en un momento  $t = 3,2$  s y una posición  $x = 0,4$  m

9. Dos ondas sinusoidales se mueven a través de un medio en la dirección  $x$  positiva, ambas con amplitudes de 7 cm, un número de onda de  $k = 3$  rad/m, una frecuencia angular de  $\omega = 2,50$  rad/s, y un período de 6 s, pero uno tiene una diferencia de fase de  $\phi = \frac{\pi}{12}$  rad. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en el instante  $t = 2$  s y posición  $x = 0,5$  m?

10. Dos ondas sinusoidales, que son idénticas a excepción de una diferencia de fase, viajan en la misma dirección. La ecuación de onda de la onda resultante es

$$y_t(x, t) = 0,7 \sin(3x - 6,28t + \pi/16). \quad (16.31)$$

¿Cuáles son la frecuencia angular, el número de onda, la amplitud y la diferencia de fase de las ondas individuales?

11. Dos ondas sinusoidales, que son idénticas a excepción de una diferencia de fase, viajan en la misma dirección. La ecuación de onda de la onda resultante es

$$y_t(x, t) = 3,5 \times 10^{-3} \sin(6,28x - 1,57t + \pi/4). \quad (16.32)$$

con las cantidades medidas en SI. ¿Cuáles son el período, la longitud de onda, la amplitud y la diferencia de fase de las ondas individuales?

12. Considera dos funciones de onda,

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= 4 \sin(\pi x - \pi t) \\y_2(x, t) &= 4 \sin\left(\pi x - \pi t + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}\quad (16.33)$$

con las cantidades medidas en SI.

a) Utilizando un programa computacional que te ayude a graficar. Grafica en un mismo gráfico ambas funciones de onda y la onda resultante como una función de posición, en el intervalo espacial  $0 \leq x \leq 6$  m para el tiempo  $t = 0$  s.

b) ¿Cuáles son la longitud de onda y la amplitud de las dos ondas originales?

c) ¿Cuáles son la longitud de onda y la amplitud de la onda resultante?

13. Considera dos funciones de onda con sus parámetros medidos en SI:

$$\begin{aligned}y_1(x, t) &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}t\right) \\y_2(x, t) &= 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}\quad (16.34)$$

a) Verifica que

$$y_t(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right). \quad (16.35)$$

es la solución para la onda que resulta de una superposición de las dos ondas.

14. Dos parlantes, como los mostrados en la Fig. 16.17, están conectados al mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. El parlante *B* se encuentra a 2 m a la derecha del parlante *A*. Considera un punto *P* a lo largo de la línea que conecta los parlantes, a 1 m a la derecha del parlante *B*. Ambos parlantes emiten ondas de sonido como en esa figura

a) ¿Cuál es la frecuencia más baja para la cual se produce la interferencia constructiva en el punto *P*?

b) ¿Cuál es la frecuencia más baja para la cual se produce la interferencia destructiva en el punto *P*?

15. Dos parlantes, como los mostrados en la Fig. 16.17, están conectados al mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. El parlante *B* se encuentra a 12 m a la derecha del parlante *A*. La frecuencia de las ondas emitidas por cada parlante es de 688 Hz. Se te ocurre pararte entre los parlantes, a lo largo de la línea que los conecta, y estás en un punto de interferencia constructiva. ¿Qué tan lejos debe caminar hacia el parlante *B* para moverte a un punto de interferencia destructiva?

16. Dos parlantes, como los mostrados en la Fig. 16.17, están conectados al mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. La frecuencia de las ondas emitidas por cada altavoz es de 694 Hz. Estás parado entre los altavoces, a lo largo de la línea que los conecta y estás en un punto de interferencia constructiva. ¿Qué tan lejos debe caminar hacia el parlante *B* para alcanzar el primer punto de interferencia destructiva? (Supón que la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s)

17. Dos parlantes, *A* y *B* están conectados al mismo amplificador y emiten ondas sinusoidales en fase. La frecuencia de las ondas emitidas por cada parlante es de 172 Hz. Estás a 8 m del parlante *A*, ¿qué es lo más cerca que puedes estar del parlante *B* y estar en un punto de interferencia perfectamente destructiva?

Considera que la velocidad del sonido en el aire es de 344 m/s.

18. Dos parlantes, como los mostrados en la Fig. 16.17, están conectados distintos amplificadores, que producen sin embargo la misma amplitud en las membranas. Los parlantes emiten ondas sinusoidales en contrafase. El parlante *B* se encuentra a 2 m a la derecha del parlante *A*. Considera el punto *P* a lo largo de la línea que conecta los parlantes, a 1 m a la derecha del parlante *B*. Ambos parlantes emiten ondas de sonido como en la figura

a) ¿Cuál es la frecuencia más baja para la cual se produce la interferencia constructiva en el punto *P*?

b) ¿Cuál es la frecuencia más baja para la cual se produce la interferencia destructiva en el punto *P*?

19. Dos parlantes, como los mostrados en la Fig. 16.17, están conectados distintos amplificadores, que producen sin embargo la misma amplitud en las membranas. Los parlantes emiten ondas sinusoidales con un desfase de  $\pi/4$ . El parlante *B* se encuentra a

12 m a la derecha del parlante A. La frecuencia de las ondas emitidas por cada parlante es de 688 Hz. Se te ocurre pararte entre los parlantes, a lo largo de la línea que los conecta, y estás en un punto de interferencia constructiva. ¿Qué tan lejos debe caminar hacia el parlante B para moverte a un punto de interferencia destructiva?

20. Dos altavoces emiten ondas de sonido a lo largo del eje  $x$ . El sonido tiene una intensidad máxima cuando los altavoces están separados por 20 cm. La intensidad del sonido disminuye a medida que aumenta la distancia entre los altavoces, llegando a cero con una separación de 60 cm.

a) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido?

b) Si la distancia entre los altavoces continúa aumentando, ¿a qué separación volverá a ser máxima la intensidad del sonido?

21. Catalina se para directamente frente a dos altavoces que están alineados entre sí, como muestra la Fig. 16.19. El parlante más alejado está a 6 m de ella; el altavoz más cercano está a 5 m. Los parlantes están conectados a la misma fuente de sonido de 680 Hz, y Catalina escucha el sonido alto y claro. La frecuencia de la fuente aumenta lentamente hasta que, en algún momento, Catalina ya no puede escucharla. ¿Cuál es la frecuencia cuando ocurre esta cancelación? Supón que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s en ese momento.

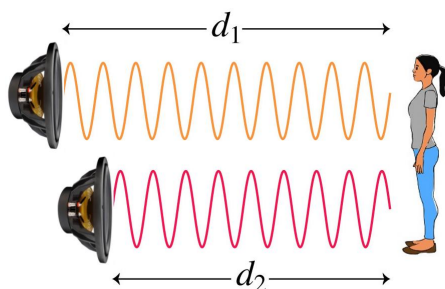


Figura 16.19: Interferencia en una dimensión debido a dos fuentes coherentes paralelas

22. ¿Cómo cambia tu respuesta del problema anterior si los dos parlantes emiten en desfase de  $\pi/2$ ?

## 16.5 Ecuación de onda

Hasta ahora hemos usado nuestra intuición para convencernos de que una onda (en una dimensión) queda descrita por una función de onda con propiedades específicas. La pregunta que nace es cuál es la ecuación que describe cómo una onda se propaga. Veremos dos formas para responder esta pregunta.

Consideremos una función de onda de una onda sinusoidal y tomemos derivadas

espaciales y temporales:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= -A \omega \cos(kx - \omega t + \phi) \\
 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} &= -A \omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi) \\
 \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= A k \cos(kx - \omega t + \phi) \\
 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} &= -A k^2 \sin(kx - \omega t + \phi)
 \end{aligned} \tag{16.36}$$

Observamos que la misma función seno aparece en los lados derechos de la segunda y cuarta ecuaciones. Luego

$$\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}. \tag{16.37}$$

Es decir, la **ecuación de onda para una onda (lineal) en una dimensión** es

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \tag{16.38}$$

donde hemos usado Ec. (16.10) para la velocidad de propagación de la onda.

Veamos cómo podemos obtener la ecuación de onda a partir del estudio de la dinámica de osciladores armónicos.

Bajo ciertas condiciones podemos modelar un medio material como un conjunto, discreto o continuo, de osciladores armónicos idénticos, como se muestra en la Fig. 16.20, tales que cuando se crea una perturbación se mueven simultánea y coordinadamente.<sup>4</sup>

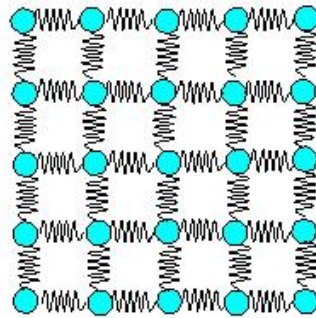


Figura 16.20: Modelo de osciladores para un medio material

Para ello debemos analizar la segunda ley de Newton para este tipo de sistema. Consideremos el sistema de  $N$  masas de masa  $m$ , unidas por resortes idénticos con constante  $k$ , como muestra la Fig. 16.21. Suponemos una perturbación en este sistema unidimensional a lo largo de la cadena de osciladores. Luego, lo que estaremos analizando son **ondas longitudinales**.

<sup>4</sup>Una razón más de la importancia del oscilador armónico en física, que se extiende hasta el mundo cuántico

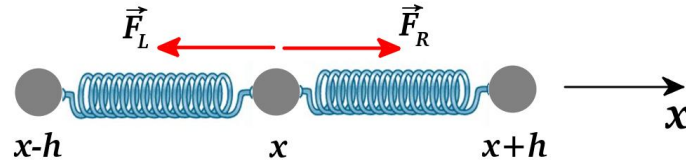


Figura 16.21: Tres masas iguales, conectadas por resortes iguales.

$$\vec{F}_L + \vec{F}_R = -F(x)\hat{x} + F(x+h)\hat{x} = m\vec{a} = m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \hat{x}. \quad (16.39)$$

Implica que

$$F(x+h) - F(x) = m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad (16.40)$$

donde, a partir de la ley de Hooke,

$$F(x) = k [y(x,t) - y(x-h,t)] \quad (16.41)$$

Por lo tanto, podemos reescribir la Ec. (16.40) como

$$\frac{m}{k} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = y(x+h,t) - 2y(x,t) + y(x-h,t) \quad (16.42)$$

Ahora veamos algo muy interesante: El lado derecho de esta ecuación tiene una interpretación en términos de una segunda derivada<sup>5</sup>, como demostramos a continuación. Para ello, debemos recordar la Ec. (5.17) para la derivada ordinaria

$$\frac{dy(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Con esto podemos ver cómo queda definida la segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \left[ \frac{y(x+2h) - y(x+h)}{h} - \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2} \right]. \end{aligned} \quad (16.43)$$

Esta expresión se puede escribir de un modo equivalente<sup>6</sup> como

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} \right]. \quad (16.44)$$

Si agregamos en  $y(x)$  la variable temporal,  $t$ , estamos diciendo que al tomar la derivada espacial, el tiempo permanece constante; bueno, eso es una **derivada parcial**. Luego, reemplazando en la Ec. (16.42) obtenemos

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{kh^2}{m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad (16.45)$$

<sup>5</sup>De hecho, es proporcional a una **segunda derivada discreta**

<sup>6</sup>En el límite  $h \rightarrow 0$ , al simplemente hacer el cambio, solo en el lado derecho de la ecuación,  $x$  a  $x-h$ .



donde estamos suponiendo que estamos tomando el límite de  $h \rightarrow 0$ . Si la longitud de la cadena de osciladores es  $L$ , entonces podemos escribir  $h = L/N$ . Esto implica que para  $N \rightarrow \infty$ ,  $h$  se hace cada vez más pequeña, lo que corresponde al llamado **límite al continuo**, para  $L$  fijo, esto es los resortes son cada vez más cortos y las masas por tanto, están cada vez más cerca. Por supuesto, debido al factor  $h^2$  enfrente de la ecuación, no es llegar y tomar este límite: Si lo hacemos a tontas y a locas, obtendríamos un cero, ya que suponemos que la segunda derivada  $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$  es finita. Por lo tanto, estamos obligados a redefinir los parámetros de modo de obtener un valor distinto de cero en ese límite

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{kL^2}{N^2 m} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{k_t L^2}{m_t} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \quad (16.46)$$

donde hemos definido la constante elástica del medio continuo  $k_t = k/N$  y su masa total,  $m_t = Nm$ . Análisis dimensional nos permite deducir que este factor tiene unidades de velocidad de propagación al cuadrado, reobteniendo la ecuación de onda.

Podemos seguir mirando esta ecuación. Vemos que  $k_t L$  tiene las unidades de fuerza. Además, construimos  $m_t/L$ , que tiene unidades de densidad lineal de masa,  $\mu$ . Si imaginamos que este sistema puede describir la propagación de una **onda transversal** en una cuerda, donde ahora  $y(x,t)$  representa el desplazamiento del medio perpendicular a la dirección de propagación, entonces la fuerza involucrada en esta expresión debe corresponder a la tensión de la cuerda,  $T$ . Por lo tanto, obtenemos que

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}, \quad (16.47)$$

donde la **velocidad de propagación en una cuerda tensa** es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}. \quad (16.48)$$

**Observación:** Es interesante pensar en términos de análisis dimensional, por ejemplo para el caso de una cuerda en onda tensa. En una cuerda tensa hay tres parámetros que entran su descripción: la tensión  $T$ , su masa  $m$  y su longitud,  $L$ . Piense, y verá que no hay otros. Ahora, usando análisis dimensional concluimos que no existe ninguna otra combinación de estos parámetros que no sea  $\frac{TL}{m}$  y que tenga las dimensiones de velocidad cuando se eleva a alguna potencia.

Hemos visto como superponer pulsos y ondas senoidales descrita por la ecuación de onda que hemos obtenido. La pregunta que nace es cómo comprender esta superposición lineal desde la perspectiva matemática, porque estas ondas satisfacen la ecuación diferencial parcial correspondiente.

Si  $y_1(x,t)$  y  $y_2(x,t)$  son funciones de onda que satisfacen la ecuación de onda, entonces

$$\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} \quad (16.49)$$

y

$$\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2}. \quad (16.50)$$

Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos

$$\frac{\partial^2 [y_1(x,t) + y_2(x,t)]}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [y_1(x,t) + y_2(x,t)]}{\partial t^2}. \quad (16.51)$$

Lo que hemos demostrado es que la suma  $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$  también es solución de la ecuación de onda.

**Observación:** No todas las ondas que se producen en un medio satisfacen el principio de superposición lineal. Existen **ondas no lineales** que no satisfacen este principio y por supuesto, esto significa que tampoco están descritas por la ecuación de onda que hemos encontrado.

### 16.5.1 Ejercicios

1. Una onda tiene una frecuencia de 10 Hz y una longitud de onda de 30 m. ¿Cuál es su velocidad?
2. Si la velocidad del sonido es de 346 m/s y una onda de sonido oscila a una frecuencia de 55 Hz, ¿cuál sería su longitud de onda?
3. Si la misma onda en la pregunta anterior viaja a través del agua, donde su velocidad de propagación es cercana a 1.500 m/s, con la misma longitud de onda, ¿a qué frecuencia oscilará?
4. Si la velocidad de una onda es de 150 m/s y su frecuencia es de 2 Hz, ¿cuál es su longitud de onda?
5. Un pescador se da cuenta de que una ola pasa cada 3 segundos por la proa de su barco anclado. Midió la longitud de onda en 8,5 metros. ¿Qué tan rápido viajan las olas?
6. Si una onda de sonido en el aire tiene una frecuencia de 262 Hz y viaja a una velocidad de 330 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de esta onda?
7. La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda viene dada por:

$$y(x,t) = 0,06 \sin(0,4\pi x + 50\pi t), \quad (16.52)$$

con las cantidades en sistema internacional, SI. Calcula:

- a) La frecuencia, el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación.
  - b) La velocidad transversal en un punto cualquiera de la cuerda.
  - c) Si esta onda se propaga por una cuerda fija en ambos extremos, ¿cuál será la ecuación de la onda estacionaria resultante de la interferencia entre la onda incidente y reflejada?
  - d) La distancia entre dos valles consecutivos de la onda estacionaria.
8. Una onda se propaga por una cuerda tensa y está descrita por la siguiente ecuación de onda

$$y(x,t) = 0,05 \cos(2\pi [4t - 2x]), \quad (16.53)$$

con las cantidades medidas en el SI.

- a) Determina las magnitudes características de la onda: amplitud, frecuencia angular, número de onda, longitud de onda, frecuencia, período y su velocidad de propagación.

b) Deduce las expresiones generales de la velocidad y aceleración transversal de un elemento de la cuerda y sus valores máximos.

c) Determina los valores de la elongación, velocidad y aceleración de un punto situado a 11 m del origen en el instante  $t = 3$  s.

9. Se agita el extremo de una cuerda con una frecuencia de 2 Hz y una amplitud de 3 cm. Si la perturbación se propaga con una velocidad de 0,5 m/s, escribe la expresión que representa el movimiento por la cuerda.

10. Una fuente genera ondas de 2 mm de amplitud con una frecuencia de 250 Hz, que se propagan por un medio con una velocidad de 250 m/s.

a) Determina el período y la longitud de onda de la perturbación.

b) Si en el instante inicial la elongación de un punto situado a 3 m de la fuente es  $y = -2$  mm, determina la elongación de un punto situado a 2,75 m del foco en el mismo instante.

11. Una onda transversal de 1 cm de amplitud y 100 Hz de frecuencia se propaga a lo largo de eje  $x$  con una velocidad de 20 m/s. Escribe la expresión de la elongación, velocidad y aceleración de una partícula situada a 10 cm de la fuente. ¿En qué instante alcanza esa partícula los valores máximos de las expresiones anteriores?

12. La ecuación de una onda que se propaga transversalmente por una cuerda tensa es

$$y(x, t) = 0,06 \cos(2\pi [4t - 2x]), \quad (16.54)$$

con cantidades expresadas en unidades del SI.

a) Determina el período y la longitud de onda.

b) Calcula la diferencia de fase entre los estados de vibración de una partícula cualquiera de la cuerda en los instantes  $t = 0$  s,  $t = 0,5$  s y  $t = 0,625$  s.

c) Usando un programa computacional, representa gráficamente la forma que adopta la cuerda en los instantes  $t = 0$  s,  $t = 0,5$  s y  $t = 0,625$  s.

d) Halla la diferencia de fase entre los estados de vibración en un instante para las partículas situadas en las posiciones  $x = 0$  m,  $x = 1$  m y  $x = 1,25$  m.

e) Representa gráficamente los movimientos vibratorios de las partículas anteriores.

13. Un oscilador vibra con una frecuencia de 500 Hz y genera ondas que se propagan con una velocidad de 350 m/s. Halla:

a) La separación de dos puntos consecutivos que vibren con una diferencia de fase de  $\pi/3$ .

b) El intervalo de tiempo que transcurre entre dos estados de vibración consecutivos de un punto con una diferencia de fase de  $\pi$ .

c) La diferencia de fase en un instante cualquiera entre dos puntos separados por una distancia de 3,15 m.

14. Por una cuerda tensa se propaga en el sentido positivo del eje  $x$ , una onda armónica (es decir, sinusoidal) transversal de amplitud  $A = 6$  cm, frecuencia  $f = 2,2$  Hz, velocidad de propagación  $v = 2$  m/s y constante de fase  $\phi = 0$  rad.

a) Calcula la frecuencia angular, la longitud de onda.

b) Escribe la ecuación de la onda.

c) Escribe la ecuación del movimiento de un punto de la cuerda situado en  $x = 1$  m.

d) Calcula su velocidad máxima.

e) Calcula la diferencia de fase entre los puntos de la cuerda con coordenadas  $x = 1$  m y  $x = 2$  m.

15. Tú y un grupo de compañeros han decidido aprender surf y planeado un viaje a Arica (Chile) para practicar en la Playa las Machas. Como están visitando el curso de física, parte de aprender a surfear quieren practicar sus conocimientos de ondas. Observan que las olas del mar tienen 3 m de altura y que cada 10 s rompen en la costa. Sabiendo que su velocidad es de 36 km/h, determina la ecuación de onda de las olas.

16. Aún en Playa las Machas observan que una ola se desplaza en el mar a 0,5 m/s y tiene una longitud de onda de 25 m y una amplitud de 1,5m. Calcula:

- su función de onda,
- la aceleración máxima de la superficie del mar a su paso.
- el desfase entre dos puntos separados 10 m entre sí.

17. En una cuerda se propaga una onda cuya ecuación está dada por

$$y(x, t) = 0,6 \sin(2\pi [5t - 0,5x + 0,25]), \quad (16.55)$$

con cantidades expresadas en unidades del SI. Calcula:

- La aceleración a los 2s de un punto ubicado en la posición 5m.
- La diferencia de fase entre los puntos de la cuerda separados por una distancia de 125 cm.

18. Una onda se propaga por una onda descrita por

$$y(x, t) = 2 \sin(6t - 3x) \quad (16.56)$$

con cantidades expresadas en unidades del SI. Calcula:

- La velocidad con la que se propaga.
- La velocidad transversal de un punto establecido en  $x = 4$  m en el instante  $t = 5$ s.
- La diferencia de fase será entre dos puntos separados por una distancia de 2 m.

19. En  $t_0$  un pulso transversal en una cuerda esta descrito por una función:

$$y(x) = \frac{10}{x+2} \quad (16.57)$$

Escribe la función que describe este pulso viajando en el sentido positivo  $x$  con una velocidad de 4,5 m/s.

20. Dos veleros están anclados a 10,0 m de distancia. A medida que pasa una serie de olas, los botes suben y bajan, pero cuando uno está arriba, el otro siempre está abajo. ¿Qué longitud de onda podría producir este efecto? Explica. (Si encuentras más de una respuesta, usa el valor mayor).

21. Como marinero en un barco, notas que pasas de la posición más alta a la más baja y regresas a la más alta en 5,0 s.

- ¿Cuál fue el período de la ola?
- ¿Cuál fue la frecuencia?
- ¿Cuál fue su velocidad?

22. Un pescador se da cuenta de que su bote se mueve hacia arriba y hacia abajo de manera periódica debido a las olas en la superficie del agua. El barco tarda 4 s en viajar

desde su punto más alto hasta su punto más bajo, una distancia total de 3 m. El pescador ve que las crestas de las olas están separadas por 8 m.

- a) ¿Qué tan rápido se mueven las olas?
- b) ¿Cuál es la amplitud, frecuencia, longitud de onda y período de las olas?

23. La velocidad del sonido en acero es de aproximadamente  $5 \times 10^3$  m/s. Un amigo tuyo, a  $2 \times 10^3$  m de distancia, golpea una vía de ferrocarril en la que tienes la oreja puesta.

- a) ¿Cuánto tiempo después de que golpea llegará el sonido?
- Si la onda de sonido tiene una frecuencia de 750 Hz,
- b) ¿Qué longitud de onda tendrá?

24. Radio Universo transmite a 93.7 MHz. Las ondas de radio viajan a la velocidad de la luz, que es  $3 \times 10^8$  m/s. ¿Cuál es la longitud de onda que utiliza Radio Universo para transmitir su música?

25. Las ondas de radio viajan a la velocidad de la luz,  $3 \times 10^8$  m/s.

- a) Las ondas de radio AM tienen un rango de frecuencia de 530 kHz a 1.600 kHz. ¿A qué rango de longitudes de onda corresponde esto?
- b) Las ondas FM tienen longitudes de onda de 2,77 m a 3,40 m. ¿A qué rango de frecuencias corresponde esto?

26. Mientras estás de vacaciones visitas un cañón (geográfico, no el que dispara proyectiles). Gritas a la pared del fondo y el sonido vuelve después de 6,0 s. La velocidad del sonido ese día fue de 345 m/s. ¿Qué tan lejos estaba al otro lado del cañón? El sonido que hiciste tenía una frecuencia de 600 Hz. ¿Cuál fue su longitud de onda? ¿Cuál fue su período?

27. ¿Con qué tensión se debe estirar una cuerda de 5 m y una masa de 0,16 kg para que las ondas transversales de frecuencia 60 Hz tengan una longitud de onda de 0,8 m?

28. Las ondas transversales viajan con una velocidad de 20 m/s en una cuerda que está bajo una tensión de 6 N. ¿Qué tensión se requiere para una velocidad de onda de 30 m/s en la misma cuerda?

29. Un cable de 4,35 m y una masa de 137 g está bajo una tensión de 125 N.

- a) ¿Cuál es la velocidad de una onda en este cable?
- b) Si la tensión se duplica, ¿cuál es la velocidad?
- c) Y si la masa se duplica, ¿cuál es la velocidad?

30. Dos niños usan un “teléfono” casero que consiste en dos vasos de papel unidos por un cable de aluminio de 8,4 m de largo. Determina el tiempo para que el “sonido” viaje de una taza a la otra. ¿Cómo se compara esto con el tiempo para que el sonido viaje la misma distancia a través del aire?

Ayuda: La velocidad del sonido en aluminio es de 5.100 m/s, en el aire es de 343 m/s.

31. La cuerda en un piano correspondiente a un Do central (261,625 Hz) está bajo una tensión de 944 N. El período y la longitud de onda de una onda en esta cuerda son 3,82 ms y 1,26 m, respectivamente. Encuentra la densidad lineal de la cuerda.

32. Utilizas un martillo para dar un fuerte golpe horizontal a un ladrillo de plomo de 10 kg suspendido del techo por un cable de 5,0 m de largo. El impulso generado por el desplazamiento repentino del ladrillo tarda 70 ms en llegar al techo. ¿Cuál es la masa del cable?

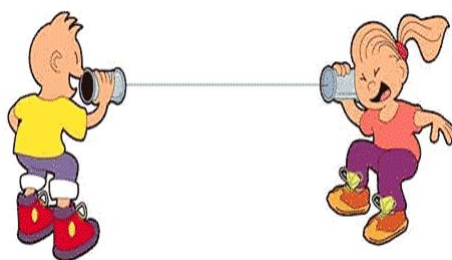


Figura 16.22: Niños jugando al teléfono

33. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje  $x$ . Si su amplitud es  $A = 5$  mm, frecuencia de oscilación,  $f = 200$  Hz, longitud de onda  $\lambda = 10$  cm, y en el instante  $t = 0$  la elongación en  $x = 0$  es de 2,5 mm y ese punto se mueve hacia arriba, determina:

Ayuda: No olvides incorporar la constante de fase (¡y calcularla!) en la función de onda.

- la ecuación de onda.
- La velocidad máxima en un punto de la cuerda.
- El instante en que será máxima la elongación en un punto situado a 5 cm del foco emisor ( $x = 0$ ).

## 16.6 Energía en una onda

Consideremos una cuerda tensa que se perturba sinusoidalmente y analicemos cómo se propaga la energía. Antes de realizar un trabajo analítico, veamos cualitativamente qué debemos esperar. En la Fig. 16.23 observamos parte de una cuerda en tres estados de movimiento. A medida que la onda pasa, cada elemento de la cuerda se mueve verticalmente, es decir, suponemos que solo existen una perturbación transversal. Los puntos grises muestran cómo la cuerda se acorta en el valles y crestas y se alarga en la zona central. La energía cinética del trozo de cuerda en las crestas y valles es cero, siendo máxima en la zona central. Esto es el mismo comportamiento que hemos visto para el sistema masa-resorte. La energía potencial, que es proporcional al cuadrado del estiramiento de la cuerda es mínima, cero, en las crestas y valles, mientras que en la zona central se maximiza. Notablemente, **esto no es lo que hemos visto para el caso del sistema masa-resorte**, donde ambas energías tiene una diferencia de fase en  $\pi$ . ¿Por qué? Porque si pensamos en términos de osciladores, no debemos pensar en osciladores desacoplados; todos ellos están conectados. Eso es lo que representa la tensión.

Veamos ahora qué nos dice el teorema trabajo-energía.

Para determina el elemento de energía potencial,  $dU$ , debemos medir cuánto más la cuerda se ha extendido debido al paso de la onda, más allá de la elongación propia de la cuerda por el hecho de estar tensionada. La elongación de la cuerda es la diferencia del largo de la cuerda después de estirarse,  $ds$ , y la longitud antes de estirarse,  $dx$ . Vemos que

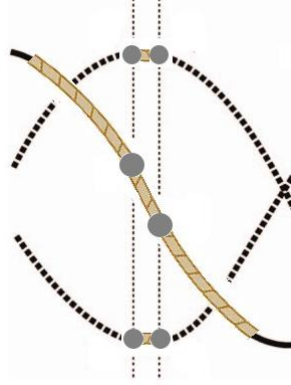


Figura 16.23: Onda viajera sinusoidal en cuerda tensa

de la Fig. 16.24, el elemento de cuerda  $ds$  se escribe como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx. \quad (16.58)$$

Recuerda que la función de onda  $y(x, t)$  depende también del tiempo, así que no debemos escribir  $\frac{dy}{dx}$ . Ahora, podemos suponer que  $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$  es pequeña y realizar una expansión de Taylor de la raíz (recuerde la nota al pie de página asociada a la Ec. (13.18)) y quedarnos con el primer término no trivial:

$$ds = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right\} dx. \quad (16.59)$$

Por lo tanto, la elongación es

$$dl = ds - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \quad (16.60)$$

Ahora bien, el trabajo realizado por la tensión de la cuerda para extenderla es

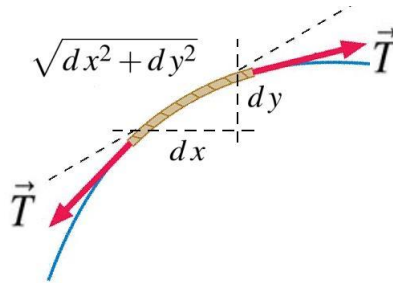


Figura 16.24: Elemento infinitesimal de cuerda tensa

$$dW = -T dl = -\frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx = -dU, \quad (16.61)$$

donde hemos supuesto que en este trozo la tensión de la cuerda se mantiene (relativamente) constante, como se observa en la Fig. 16.24. Además, esta tensión está asociada a una fuerza restauradora, **que suponemos conservativa**.

La energía cinética incluye la velocidad al cuadrado. Esta velocidad está definida por la primera derivada de  $y(x, t)$  en el tiempo. Además, debemos considerar la energía cinética asociada a un elemento de masa  $dm$  de un elemento de cuerda  $dx$ . Luego,

$$dK = \frac{1}{2} dm v_y^2 = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (16.62)$$

donde hemos usado que la densidad lineal de masa es  $\mu = \frac{dm}{dx}$ . Observa que  $v_y$  no es la velocidad de propagación de la onda, sino la velocidad con la que se mueven las partículas del medio transversalmente.

En resumen, el elemento de energía es

$$dE = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (16.63)$$

A partir de aquí podemos definir de inmediato la energía almacenada por unidad de longitud,  $\mathcal{E}$ , esto es la **densidad lineal de energía**,  $dE/dx$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (16.64)$$

Por supuesto, la integral espacial de la densidad de energía es la energía total almacenada en la cuerda

$$E = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} dx. \quad (16.65)$$

También nos podemos preguntar acerca de cuánta energía está siendo inyectada por unidad de tiempo, es decir, la **potencia**,  $\mathcal{P}$ <sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \mu \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) \right\} dx \\ &= T \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \right) \right\} dx \\ &= T \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\} dx \\ &= T \left\{ \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\} \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Big|_{x_2} - T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Big|_{x_1}, \end{aligned} \quad (16.66)$$

<sup>7</sup>Si te resulta difícil de seguir, te puedes saltar en una primera o segunda lectura. Observa la conclusión.



donde en la tercera línea hemos usado la ecuación de onda y la definición de la velocidad de propagación de la onda en cuerda tensa.

La interpretación de este resultado es que **la potencia inyectada a la cuerda por una onda es igual al flujo de energía que entra por el lado derecho del segmento menos el flujo que sale por el lado izquierdo del mismo**. Más aún, podemos deducir este resultado

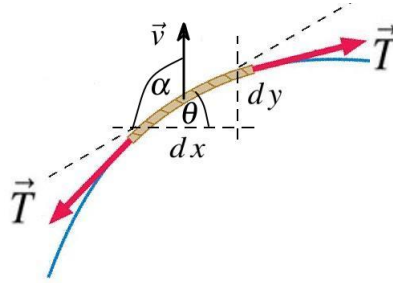


Figura 16.25: Elemento infinitesimal de cuerda tensa

geométricamente a partir de la Fig. 16.24, debido a que potencia es fuerza por velocidad. De la figura observamos que

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = T v_y \cos \alpha. \quad (16.67)$$

Ahora bien, dado que  $\alpha - \theta = \frac{\pi}{2}$  y que  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin \theta$ , podemos reescribir

$$\mathcal{P} = -T v_y \sin \theta \approx -T \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (16.68)$$

donde hemos usado que para ángulos pequeños

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (16.69)$$

Consideremos una onda sinusoidal con función de onda  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$ . Es usual considerar la **energía almacenada en una longitud de onda**:

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \frac{1}{2} \int_0^\lambda \left\{ \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + T \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \\ &= A^2 \{ \mu \omega^2 + T k^2 \} \frac{1}{2} \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t + \phi) dx \\ &= 2\mu \omega^2 A^2 \frac{1}{2} \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t + \phi) dx, \end{aligned} \quad (16.70)$$

donde hemos usado la definición de velocidad de propagación en una cuerda tensa y su definición más general para una onda monocromática,  $v = \omega/k$ .

Resulta que la siguiente integral es el promedio en una longitud de onda de la función coseno cuadrado (o seno cuadrado, ya que la fase no importa). Puedes demostrar con un software de tu preferencia que esta integral es igual a  $1/2$ . Es decir,

$$I = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t + \phi) dx = \frac{1}{2}, \quad (16.71)$$

independientemente de la dependencia temporal. Por lo tanto,

$$E_\lambda = \frac{1}{2} \mu \lambda \omega^2 A^2. \quad (16.72)$$

Si nos preguntamos cuánta de esta energía ha sido transferida durante un período,  $T$  (¡no confunda las letras  $T$ !), lo que nos estamos preguntando es acerca de una potencia, luego obtenemos

$$\mathcal{P}_\lambda = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{1}{2} \mu \frac{\lambda}{T} \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2, \quad (16.73)$$

donde hemos usado la expresión para la velocidad de propagación de una onda  $v = \frac{\lambda}{T}$ . Como puedes confirmar por análisis dimensional, esta expresión tiene las unidades correctas de fuerza por velocidad.<sup>8</sup>

**Observación:** Para el caso de cuerda tensas hemos hecho varias suposiciones que no han quedado completamente explicitadas. La principal es que estamos suponiendo que la amplitud de las oscilaciones son pequeñas comparadas con la longitud de onda; la cuerda no se separa demasiado de la posición de equilibrio. Esto tiene varias consecuencias.

1) Hemos supuesto que la longitud de la cuerda  $L$  permanece constante, ¡pero si estira no puede permanecer constante! De hecho, la cuerda toma la forma de la onda y esto hace que su longitud varíe en el tiempo y ese estiramiento también dependa de la posición. Lo que sí permanece fijo es la posición de los nodos fijos en los extremos.

2) Para la derivación de la ecuación de onda hemos supuesto que la tensión en ambos lados de un elemento de cuerda de largo  $ds$  es constante. Esto tampoco puede ser cierto debido a lo mencionado en el punto 1). La tensión depende del valor de la función de onda a lo largo de la cuerda.<sup>9</sup>

3) Cuando en el elemento de energía cinética hemos escrito para el elemento de masa  $dm = \mu dx$  en vez de  $dm = \mu ds$ , como debería ser porque el elemento de masa se ubica a lo largo del elemento de cuerda, lo que hemos supuesto es que la amplitud de las oscilaciones son pequeñas. Al incorporar  $ds$  en la definición del elemento de masa, en el elemento de energía cinética aparecería un término extra al ya encontrado más arriba, esto es  $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ , en vez de solo  $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$ .

El hecho de que en una ecuación diferencial aparezca la función o sus derivadas en potencias distintas a 1 significa que la ecuación diferencial correspondiente es **no lineal**. El área de la física que se ocupa de estudiar este tipo de ecuaciones, que aparecen comúnmente en la descripción de fenómenos, se denomina **física no lineal**.

### 16.6.1 Ejercicios

1. La función de onda de una onda armónica que se propaga por una cuerda de densidad de masa 0.02 kg/m es

$$y(x, t) = 4 \cdot 10^{-3} \cos(20x + 100t), \quad (16.74)$$

en unidades del SI. Determina la potencia media de la onda si no hay atenuación.

<sup>8</sup>Recuerda que la amplitud de la aceleración (transversal) para un oscilador armónico es  $a_y = \omega^2 A$ . Además,  $\mu A$  tiene unidades de masa.

<sup>9</sup>Esto es lo que se llama un **funcional**<sup>10</sup>, así que tanto la tensión como el largo de la cuerda son funcionales de la función de onda

2. Una cuerda de 5 m de longitud y una masa de 90 g se mantiene bajo una tensión de 100 N. Una onda viaja por la cuerda que se modela como

$$y(x,t) = 10^{-2} \sin(0,4x - 1,100t), \quad (16.75)$$

en unidades del SI. ¿Cuál es el poder sobre una longitud de onda?

3. Un cable con densidad de masa lineal  $\mu = 0,05$  kg/m se mantiene tenso con una tensión de 100 N. ¿A qué velocidad se debe suministrar energía al cable para generar una onda armónica viajera que tenga una frecuencia de 500 Hz y una amplitud de 5 mm?

4. A lo largo de una cuerda que tiene 20 m de largo, una masa de 0,06 kg y una tensión de 50 N se mueven ondas de frecuencia 200 Hz y amplitud 1 cm.

a) ¿Cuál es la energía total de las ondas en la cuerda?

b) Halla la potencia transmitida que pasa por un punto determinado de la cuerda.

5. Un extremo de una cuerda elástica está fija a un soporte. El otro extremo pasa por una polea situada a 5 m del extremo fijo y sostiene una carga de 2 kg. La masa de la cuerda entre el extremo fijo y la polea es 0,6 kg.

a) Halla la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo de la cuerda.

Una onda armónica de amplitud 0,1 cm y  $\lambda = 0,3$  m se propaga a lo largo del tubo.

b) Encuentra la velocidad transversal máxima de cualquier punto de la cuerda;

c) Escribe la ecuación de la onda;

d) Determina el promedio de la rapidez con que fluye la energía a través de cualquier sección transversal de la cuerda.

6. Una cuerda se extiende desde un punto  $P$  hasta el infinito. El punto  $P$  se mueve perpendicularmente según la ecuación  $y(t) = 0,4 \cos(60t)$  en cm.

a) Determina la velocidad de las ondas que se producen y su longitud de onda, sabiendo que la densidad lineal de la cuerda es de 0,4 g/cm y está bajo una tensión de 5 N.

b) ¿Qué energía por unidad de longitud y potencia se suministra a la cuerda?

7. Determina la potencia que debemos suministrar a una cuerda sometida a una tensión constante de 50 N para que las ondas armónicas generadas sean de una amplitud de 15 cm y su frecuencia 40 Hz, sabiendo que su densidad lineal es de 200 g/m.

8. Atamos un alambre al extremo de un diapasón para generar ondas transversales. La frecuencia del diapasón es  $f = 440$  Hz y lo hacemos oscilar con una amplitud  $A = 0,5$  mm. El alambre tiene una densidad lineal  $\mu = 0,01$  kg/m y está sometido a una tensión  $T = 1,000$  N. Para este sistema se pide que:

a) Encuentres el período y la frecuencia de las ondas en el alambre.

b) Calcule qué velocidad tienen las ondas

c) Escribas la función de la onda que se propaga por el alambre.

d) Calcule la velocidad y aceleración máximas de un punto del alambre.

e) Determine qué potencia debes suministrar al diapasón para que oscile con amplitud constante.

9. Una barra de acero transmite ondas longitudinales generadas mediante un oscilador acoplado en un extremo. La barra tiene un diámetro  $d = 4$  mm. La amplitud de las oscilaciones es  $A = 0,1$  mm y la frecuencia es  $f = 10$  Hz. Para este sistema calcula:

a) La función de la onda que se propaga por la barra.

Ayuda: La velocidad de propagación de una onda longitudinal en un sólido como el acero se define como

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (16.76)$$

donde  $Y$  es el módulo de Young ([https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s\\_modulus](https://en.wikipedia.org/wiki/Young%27s_modulus)) y  $\rho$  su densidad.

Módulo de Young del acero:  $2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

b) La energía por unidad de volumen en la barra, es decir la densidad de energía,  $\eta$

Ayuda: La energía por unidad de longitud es  $\eta = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\mathcal{P}_\lambda}{v}$

c) La potencia media que se propaga a través de una sección cualquiera de la barra.

## 16.7 Comportamiento de ondas en interfaces

En la naturaleza las ondas se encuentran con obstáculos permanentemente. En algunos de estos, las ondas son reflejadas, como en un espejo, mientras que en otros resulta que una parte es reflejada y otra parte transmitida, como cuando iluminamos una ventana. Por eso es importante conocer cómo se comportan las ondas cuando se enfrentan a una interfase. Para ejemplificar este fenómeno, veremos como el comportamiento de un pulso transversal. Más adelante en este libro veremos un ejemplo en más dimensiones que es extremadamente relevante, me refiero al fenómeno de la **difracción**, que estudiaremos pronto.

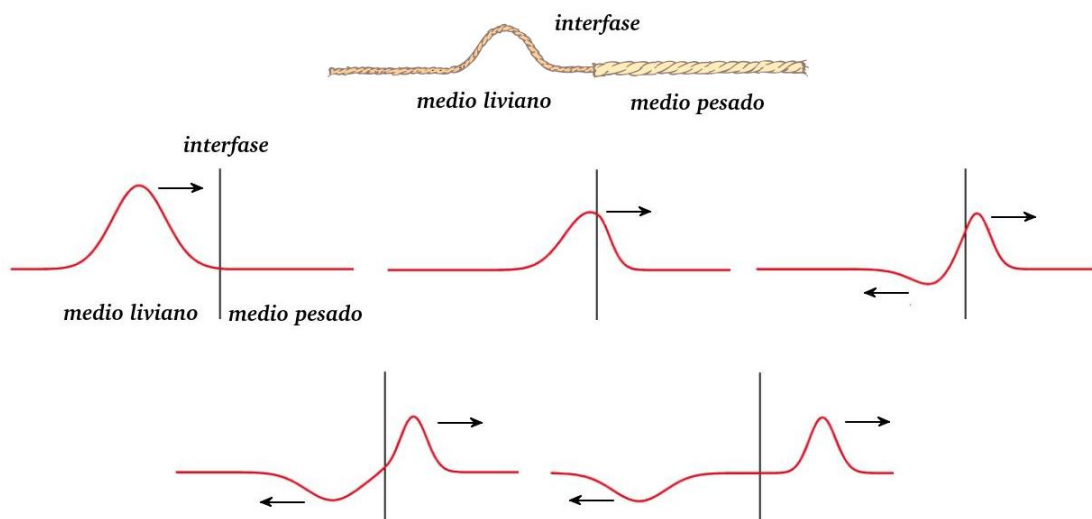


Figura 16.26: Reflexión y transmisión de un pulso en una interfase pesado-liviana

En la Fig. 16.26 se muestra un pulso que se mueve con cierta velocidad por un medio “liviano” que incide sobre una interfase que separa este medio de un medio “pesado”. Un ejemplo de un medio pesado es una cuerda gruesa, mientras que una cuerda liviana representa un medio liviano. El hecho que los términos liviano o pesado aquí corresponda a la densidad lineal de masa de las cuerdas no significa que siempre sea así. Veremos más

adelante el concepto de **índice de refracción** que caracteriza la velocidad de propagación de una onda en un medio. Por ejemplo, un medio con un índice de refracción grande, en óptica será ahora “ópticamente pesado”, mientras que un medio “ópticamente liviano” tendrá un índice de refracción más pequeño.

Observamos de la figura que un pulso que incide desde el medio liviano hacia el medio pesado resulta dividido en dos pulsos, uno que se refleja y otro que se transmite.

La pregunta de cuánto se transmite y cuánto se refleja se puede cuantificar de modo preciso, y es muy importante, tanto a nivel clásico como a nivel cuántico, conocer este comportamiento. Debido a la profundidad de este texto, dejaremos nuestra descripción a un nivel más bien cualitativo.

Lo primero que observamos es que la amplitud de los pulsos transmitidos y reflejados se reduce, y no de la misma forma. Esto se debe a que la energía de la onda se ha dividido en dos y recordamos que ésta es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda. Otro aspecto importante es lo que le sucede al pulso reflejado. Observamos que éste va por debajo del nivel de equilibrio, es decir, “al revés”. Si observamos la Fig. 16.27 vemos que ambas funciones también están invertidas o en contrafase, y esto significa que tienen una diferencia de fase de  $\Delta\phi = \pi$

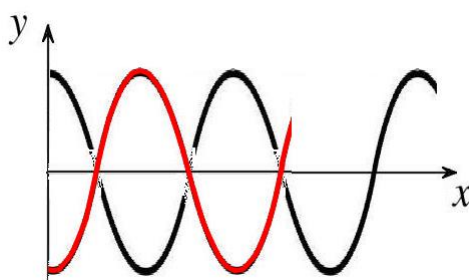


Figura 16.27: Funciones  $\cos(x)$  (negro) y  $\cos(x - \pi)$  (rojo)

Esto es exactamente lo que sucede en el caso del pulso que se refleja, en la Fig. 16.26: **el pulso incidente desde un medio liviano hacia un medio pesado tiene una diferencia de fase de  $\pi$  respecto del pulso reflejado**. Este es un resultado general para ondas transversales, sin importar si hablamos de ondas en cuerdas tensas u ondas electromagnéticas.

Observa que **la onda transmitida tiene la misma fase que la onda incidente**. Este es un resultado más general, porque es independiente de si la transmisión es hacia un medio liviano, como en este caso a hacia un medio pesado.

Para comprender la razón de la inversión del pulso, resulta útil pensar en términos de una onda mecánica, como la onda en la cuerda tensa. Cuando el pulso alcanza la frontera del medio liviano, la última partícula de ese medio recibe un desplazamiento hacia arriba. Esta partícula está unida a la primera partícula del medio pesado y al tirar hacia arriba a la primera partícula del medio pesado, la primera partícula de este medio reacciona tirando hacia abajo a la última partícula del medio liviano, como consecuencia de la tercera ley de Newton. El efecto del tirón hacia abajo sobre la última partícula del medio liviano, que al estar unida a las otras partículas del medio produce que las otras se muevan, hace que el desplazamiento hacia arriba se convierta en un desplazamiento hacia abajo. El pulso incidente desplazado hacia arriba se refleja entonces como un pulso invertido.

¿Qué sucede si la propagación de la onda es desde un medio pesado hacia un medio liviano?

En la figura se muestran dos cuerdas unidas, una con más masa que la otra y un pulso que se propaga por la primera. Podemos modelar esta situación como una cuerda atada a una barra vertical por medio de un anillo sin masa y sin roce, de modo que ese extremo pueda moverse libremente.

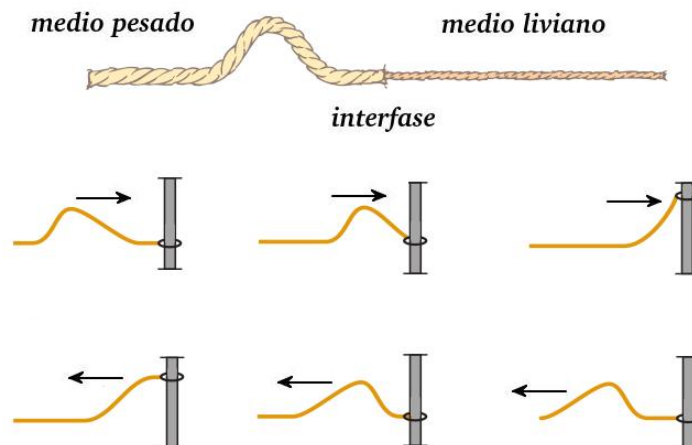


Figura 16.28: Reflexión y transmisión de un pulso en una interfase liviano-pesada

Entonces, cuando un pulso llega a la interface la última partícula del medio pesado se puede mover libremente y ahora no hay una partícula contigua que tenga la capacidad de tirar hacia abajo sobre ella para hacer que se invierta su movimiento. El resultado es que el pulso reflejado no está invertido. Esto significa que **los pulsos incidente y reflejado están en fase**.

Por supuesto, en el modelo de la Fig. 16.28, el pulso transmitido no aparece. Pero sí existe en el problema real y, como ya hemos dicho, está en fase con el pulso incidente.

Un aspecto importante del comportamiento de ondas en interfases es que, como vemos de la Fig. 16.26, la **onda es continua a través de la interfase**. Gráficamente, esto significa que es una curva suave allí. Por supuesto, esta continuidad se puede expresar matemáticamente de modo preciso.

De lo que hemos visto para cuerdas tensas, sabemos que la velocidad de una onda en un medio material depende de las propiedades del medio por el que se propaga. En este caso, los pulsos transmitidos y reflejados viajan en dos medios claramente diferentes. Las ondas viajan más rápido en el medio menos denso (piensa en  $v = \sqrt{T/\mu}$ ). Por lo tanto, un pulso reflejado en una interfase liviana-pesada viajará más rápido que el pulso transmitido. Además, las partículas en el medio más denso oscilarán con la misma frecuencia que las partículas en el medio menos denso. Dado que el pulso transmitido se introdujo en el medio más denso por las oscilaciones de las partículas en el medio menos denso, necesariamente deben estar oscilando a la misma frecuencia. Por lo tanto, los pulsos reflejados y transmitidos tienen diferentes velocidades pero la misma frecuencia. Dado que la longitud de onda de una onda depende de la frecuencia y la velocidad, la onda con la mayor velocidad también debe tener la mayor longitud de onda. Finalmente, los pulsos incidente y reflejado comparten el mismo medio y por tanto, la misma velocidad.

Finalmente, debido a que el pulso reflejado fue creado por las vibraciones del pulso incidente, tendrán la misma frecuencia, por lo mismo ambas ondas con la misma velocidad y la misma frecuencia también deben tener la misma longitud de onda. Por supuesto, estas

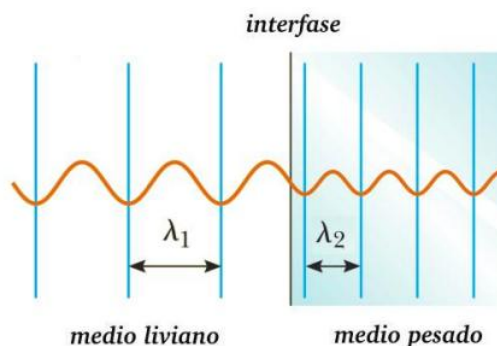


Figura 16.29: Comportamiento de longitud de onda y frecuencia de una onda en una interfase liviano-pesada

propiedades no son característica exclusiva de ondas mecánicas. En electromagnetismo, como aprenderá más adelante, el hecho que la frecuencia no cambie en interfases es una consecuencia de garantizar que las condiciones de continuidad implícitas en las ecuaciones de Maxwell, que describen todos los fenómenos electromagnéticos, se cumplan en la interfase.

### 16.7.1 Ejercicios

1. Una onda que se propaga por una cuerda queda descrita por la ecuación:

$$y(x,t) = 3 \times 10^{-3} \sin(70t - 6x), \quad (16.77)$$

en unidades del SI.

Si la cuerda tiene un extremo fijo en una pared, escribe la ecuación de la onda reflejada.

2. Una onda de sonido producida por un transductor ultrasónico, que se mueve en el aire, se modela con la ecuación de onda.

$$s(x,t) = 4,5 \times 10^{-9} \cos(9,15 \times 10^4 x - 2\pi 5 \times 10^6 t), \quad (16.78)$$

en unidades del SI. El transductor se utilizará en pruebas no destructivas para detectar fracturas en vigas de acero. La velocidad del sonido en la viga de acero es  $v = 5.950$  m/s. Encuentra la función de onda para la onda de sonido en la viga de acero.

## 16.8 Ondas estacionarias en cuerdas tensas

Hemos visto y aprendido cómo se superponen ondas viajeras sin preguntarnos si el medio donde se propagan está acotado o no (la verdad, hemos supuesto que es infinito<sup>11</sup>).

<sup>11</sup> Recuerda a qué se refiere normalmente el término infinito en física.

Las ondas siempre se encuentran con obstáculos, bordes, que modifican su forma y comportamiento. Matemáticamente, estos bordes se denominan **condiciones de borde** y constriñen la dinámica del sistema descrito por un conjunto de ecuaciones diferenciales. A estas condiciones de borde los matemáticos les han dado nombres. Por ejemplo, a las condiciones de borde tales que la función de onda se anula en esos bordes, como sucede con las cuerdas de un violín, guitarra, o instrumento de cuerdas en general, se les denomina **funciones de borde de Dirichlet** en honor al matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet <sup>12</sup>. En instrumentos de viento, en cambio, se tiene un medio donde al menos un extremo está abierto al medio ambiente, piense en una trompeta, de modo tal que allí el medio por el que se propaga la onda se puede mover libremente; en este caso hablamos de una **condición de borde de Neumann**, en honor al matemático alemán Carl Gottfried Neumann <sup>13</sup>, que da cuenta de que la primera derivada de la función de onda respecto de la coordenada espacial se anula en ese extremo.



Figura 16.30: Perturbación en una cuerda de violín

Cuando se perturba una cuerda en un instrumento musical, la perturbación genera ondas que viajan sentidos opuestos y alcanzan los extremos fijos de la cuerda donde se reflejan. Notar que este fenómeno corresponde a la propagación de una cuerda desde un medio liviano a un medio (“infinitamente”) pesado y luego la onda reflejada cambia de fase en  $\pi$  respecto de la onda incidente. Las ondas vuelven al medio y se superponen. Ahora bien, existen condiciones particulares de generación de perturbaciones en un medio con extremos fijos que provocan que las ondas viajeras dentro de los límites de ese medio se superponen de modo tal que ya no se observan ondas viajeras, sino solo oscilaciones con forma de onda muy particular. Cuando esto sucede hablamos que las ondas generadas son **ondas estacionarias**.

Consideremos un experimento como el mostrado en la Fig. 16.31. En ese experimento hay un oscilador, que oscila con frecuencia angular  $\omega$ , al cual está atado una cuerda se tensa. Supongamos que el oscilador produce ondas sinusoidales que se mueven hacia la derecha, descritas por una función de onda  $y_1(x, t)$ , que luego se reflejan en la mano que sostiene la cuerda, produciendo una onda que se mueve hacia la izquierda, con función de onda  $y_2(x, t)$  y que como ya sabemos tiene una diferencia de fase en  $\pi$  con respecto de la onda incidente.

Luego, debemos hacer la superposición. Para ello, resulta muy útil usar la representa-

<sup>12</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Peter\\_Gustav\\_Lejeune\\_Dirichlet](https://en.wikipedia.org/wiki/Peter_Gustav_Lejeune_Dirichlet)

<sup>13</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Carl\\_Neumann](https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Neumann)



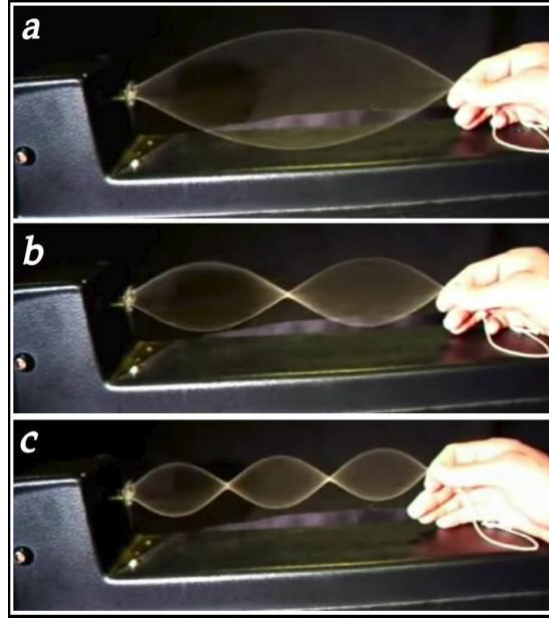


Figura 16.31: Modos de oscilación de ondas estacionarias en cuerda tensa

ción en variable compleja de las funciones coseno, usando Ec. (16.12):

$$\begin{aligned}
 y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) = A \cos(kx - \omega t) + A \cos(kx + \omega t + \pi) \\
 &= A \Re \left( e^{i(kx - \omega t)} \right) + A \Re \left( e^{i(kx + \omega t + \pi)} \right) \\
 &= -A \Re \left( e^{ikx} \{ e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} \} \right) \\
 &= A \Re \left[ \{ \cos(kx) + i \sin(kx) \} 2i \sin(\omega t) \right] \\
 &= -2A \sin(kx) \sin(\omega t),
 \end{aligned} \tag{16.79}$$

donde hemos usado la Ec. (16.11), y también la hemos evaluado en  $x = \pi$ , para obtener<sup>14</sup>  $e^{i\pi} = -1$ . El término con la función coseno desaparece del resultado porque lleva un factor imaginario y luego la operación *parte real de* da cero. El signo menos en este resultado no es relevante; hubiésemos obtenido un signo positivo si hubiésemos elegido una onda que viaja a la izquierda y se refleja en el borde izquierdo.

Más importantes es analizar este resultado y ver qué significa. Lo primero que observamos es que el tiempo y el espacio ya no aparecen en el argumento en la combinación  $kx \pm \omega t$ ; la coordenada espacial y el tiempo aparecen como argumentos de dos funciones, separados. Esto significa que el **resultado de la superposición no es una onda viajera**. Esta onda se denomina **onda estacionaria**. La podemos reescribir del siguiente modo

$$y(x,t) = -2A(x) \sin(\omega t), \tag{16.80}$$

lo que nos muestra claramente que una onda estacionaria representa una oscilación pura, expresada por el término  $\sin(\omega t)$ , oscilación que tiene una amplitud  $A \sin(kx)$  que depende de la posición.

<sup>14</sup>Esta es una de las identidades más importantes de la matemática, desde el punto de vista histórico, descubierta por Leonhard Euler.

En las tres figuras pertenecientes a la Fig. 16.33 se observa que hay **nodos** en la oscilación, es decir, lugares en el espacio donde la amplitud de la oscilación se anula. Esto se puede cuantificar con la condición

$$A(x_m) = A \sin(kx_m) = 0 \implies kx_m = m\pi, \text{ con } m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (16.81)$$

Por lo tanto, los nodos están en las posiciones

$$x_m = m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (16.82)$$

lo que muestra que **dos nodos adyacentes tienen una diferencia de media longitud de onda entre sí.**

**Observación:** Es importante tener en mente lo siguiente. La ecuación que define las posiciones de los nodos incluye por supuesto todos los nodos, es decir, también los nodos en los bordes del sistema. Sin embargo hay una gran diferencia entre los nodos que aparecen debido a la dinámica ondulatoria, es decir, de cómo se superponen las ondas, y los nodos que están allí “desde antes” debido a las condiciones de borde. **En física se cuentan los nodos que no corresponden a condiciones de borde.**

Las diferentes formas de ondas en la Fig. 16.31 se han generado cambiando la tensión de la cuerda, pero bien podría haberse hecho otro experimento donde lo que se modifica es la frecuencia de oscilación del generador de onda.

Veamos con mayor detenimiento esta figura. Supongamos que la longitud de la cuerda,  $L$ , se mantiene constante. En la Fig. 16.31 a), el primer modo de oscilación, llamado o **modo fundamental de oscilación** o **primer armónico**, corresponde a media longitud de onda. Luego, se cumple que  $L = \lambda/2$ . Observa que en el modo fundamental de este sistema, que corresponde al sistema oscilante en su menor estado de energía, no hay nodos. Esta propiedad se mantiene incluso si hablamos de otro tipo de onda, como ocurre en Mecánica Cuántica. Vemos también que hay un **anti-nodo**, es decir un máximo de oscilación.

El segundo modo de oscilación, **segundo armónico**, se muestra en la Fig. 16.31 b). Ahora, dentro de la cavidad<sup>15</sup> hay una onda estacionaria con longitud de onda  $L = \lambda$ . Notar que hay un nodo y dos anti-nodos.

El tercer modo de oscilación, **tercer armónico** se muestra en la Fig. c). La longitud de onda de la onda estacionaria se relaciona con el largo  $L$  como  $L = 3\lambda/2$ . Aquí aparecen dos nodos y tres anti-nodos.

Observa que **la diferencia espacial entre nodos y anti-nodos es igual a  $\lambda/4$ .**

De este pequeño análisis, concluimos que las longitudes de onda para cada modo de oscilación se escriben como

$$\lambda_m = \frac{2L}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.83)$$

Podemos escribir ahora las frecuencias de cada modo de oscilación

$$f_m = \frac{v}{\lambda_m} = m \frac{v}{2L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.84)$$

<sup>15</sup>En el área de Óptica Cuántica se trabaja con cavidades ópticas con alto factor  $Q$ , donde se confinan fotones. La descripción cualitativa de tal sistema es similar a éste.

Para ondas en cuerdas tensa, conocemos la velocidad de propagación, por lo tanto

$$f_m = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.85)$$

Así,  $m = 1$  corresponde al primer armónico;  $m = 2$ , al segundo armónico;  $m = 3$ , al tercero, etc.

Observa que las frecuencias de los armónicos están cuantizadas (aunque no estemos haciendo Mecánica Cuántica), decir, todas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental

$$f_m = m f_1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.86)$$

### 16.8.1 Ejercicios

1. La cuerda superior de una guitarra tiene una longitud de 64 cm,  $\mu = 6,79 \times 10^{-3}$  kg/m, y vibra con una frecuencia fundamental de 330 Hz.

a) ¿Cuál es la velocidad de la onda a lo largo de la cuerda de la guitarra?

b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda?

c) La cuerda puede ser forzada a vibrar en su segundo armónico tocando ligeramente la cuerda en un nodo mientras toca la cuerda. ¿En qué punto a lo largo de la cuerda se debe colocar el dedo? ¿Qué frecuencia se escuchará?

2. Una cuerda de guitarra tiene 0,7 m de largo y está afinada para tocar una nota Mi ( $f = 330$  Hz) por encima de un Do central (ese es el primer armónico),

a) ¿Cuál es la velocidad de la onda en la cuerda?

b) ¿A qué distancia del extremo de esta cuerda se debe colocar el dedo para tocar una nota La (440 Hz) por encima de un Do central?

4. Considera dos ondas sinusoidales que viajan a lo largo de una cuerda, modeladas como

$$y_1(x, t) = 0,3 \sin(4x + 3t) \quad (16.87)$$

y

$$y_2(x, t) = 0,6 \sin(8x - 6t). \quad (16.88)$$

¿Cuál es la amplitud de la onda resultante formada por la interferencia de las dos ondas en la posición  $x = 0,5$  m en el tiempo  $t = 0,2$  s?

5. Tres frecuencias de resonancia sucesivas para una determinada cuerda son 175, 245 y 315 Hz.

a) Encuentra la razón de estos tres modos.

b) ¿Cómo puedes saber que esta onda tiene un antinodo en un extremo?

c) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

d) ¿Qué armónicos son estas frecuencias de resonancia?

e) Si la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda es de 125 m/s, encuentra la longitud de la cuerda

6. Considera dos ondas sinusoidales sinusoidales que viajan a lo largo de una cuerda, modeladas como

$$y_1(x, t) = 0,3 \sin(4x + 3t + \pi/3) \quad (16.89)$$

y

$$y_2(x, t) = 0,6 \sin(8x - 6t) \quad (16.90)$$

¿Cuál es la amplitud de la onda resultante formada por la interferencia de las dos ondas en la posición  $x = 1$  m en el tiempo  $t = 3$  s?

7. Considera dos ondas sinusoidales sinusoidales que viajan a lo largo de una cuerda, modeladas como

$$y_1(x, t) = 0,3 \sin(4x - 3t) \quad (16.91)$$

y

$$y_2(x, t) = 0,3 \sin(4x + 3t) \quad (16.92)$$

¿Cuál es la función de onda de la onda resultante?

8. Dos ondas sinusoidales se mueven en un medio en el mismo sentido, ambas con amplitudes de 3 cm, una longitud de onda de 5,2 m y un período de 6,52 s. Sin embargo, estas ondas tienen una diferencia de fase de  $\phi$ . ¿Cuál es la diferencia de fase si la onda resultante tiene una amplitud de 5 cm?

9. Oprimiendo una cuerda en su punto medio un violinista puede producir una nota exactamente una octava más alta que la nota en la que está afinada la cuerda. ¿Por qué?

Ayuda: Debes averiguar qué es una octava.

10. Dos ondas sinusoidales se mueven a través de un medio en la dirección  $x$  positiva, ambas con amplitudes de 6 cm, una longitud de onda de 4,3 m y un período de 6 s, pero una tiene un desplazamiento de fase de un ángulo  $\phi = 0,5$  rad. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en el instante  $t = 3,15$  s y una posición  $x = 0,45$  m?

11. Dos ondas sinusoidales se propagan un medio en la dirección  $x$  positiva, ambas con amplitudes de 7 cm, un número de onda de  $k = 3$  rad/m, una frecuencia angular de  $\omega = 2,5$  rad/s, y un período de 6 s, pero una tiene una diferencia de fase  $\phi = \pi/12$  rad. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en un momento  $t = 2$  s y una posición  $x = 0,53$  m?

12. Considera dos ondas  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$  que son idénticas, excepto por un cambio de fase. ¿Cuál es la diferencia de fase si la amplitud de la onda resultante es 1,75 veces la amplitud de las ondas individuales?

13. Mientras conduce al trabajo, Florencia se da cuenta de que los trabajadores han colocado cintas de plástico alrededor de su lugar de trabajo para evitar que las personas caigan a un hoyo. Florencia observa que entre dos postes de soporte, la cinta tiene una longitud de 1,5 m y vibra en un patrón de onda estacionaria con 5 anti-nodos y que la cinta vibratoria está creando un sonido que corresponde a la nota La ( $f = 440$  Hz).

a) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria?

b) ¿Cuál es la velocidad de las vibraciones en la cinta?

14. Las ondas en cierta cuerda se mueven a 50 m/s. La cuerda tiene 7,5 m de largo. Si ambos extremos están fijos,

a) ¿Cuáles son las primeras cinco frecuencias de resonancia u ondas estacionarias?

b) Si un extremo es libre, ¿cuáles son las primeras cinco frecuencias?

c) ¿Hay alguna forma de decir que una cuerda está fija o libre en un extremo mirando una secuencia de frecuencias de resonancia?

15. Un cable flexible de masa 5 g y 1,4 m de largo está tensionado por una fuerza de 140 N, fijo en ambos extremos.

- a) Encuentra la rapidez de la onda transversal en el cable
- b) Encuentra la longitud de onda y la frecuencia del modo fundamental de oscilación.
- c) Encuentra las frecuencias del segundo y tercer armónicos
- d) Escribe las ecuaciones para el modo fundamental y para segundo y tercer armónicos.

16. Un cable de 4,35 m y una masa de 137 g está bajo una tensión de 125 N. Se ha formado una onda estacionaria que tiene siete nodos, incluidos los extremos.

- a) Dibuja la onda.
- b) ¿Cuál es la frecuencia de esta onda?
- c) ¿Qué armónico es?
- d) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

17. Una cuerda de longitud de 8,25 m y fija en un extremo, vibra en su noveno modo armónico. La velocidad de la onda en la cuerda es  $v = 25,8$  m/s y ésta tiene una longitud de 8,25 m.

- a) Dibuja la onda.
- b) ¿Cuál es la frecuencia de esta onda?
- c) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda?
- d) ¿Cuál es su frecuencia fundamental?

18. La ecuación del segundo armónico de una onda estacionaria en una cuerda de 10 m de largo con tensión de 50 N está dada por

$$y(x,t) = 8 \sin(0,2\pi x) \sin(20\pi t), \quad (16.93)$$

con  $x$  en metros,  $y$  en centímetros y  $t$  en segundos.

- a) Determina la frecuencia y velocidad de propagación de las ondas viajeros cuya interferencia produce la onda estacionaria en esta cuerda
- b) Calcula la densidad lineal de masa de la cuerda.
- c) Escribe la ecuación de onda de modo fundamental de oscilación.
- d) Encuentra la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda en el modo fundamental, suponiendo que la amplitud máxima es igual que la del segundo armónico.
- e) Determina las posiciones de los nodos de la onda armónica.

19. Tres frecuencias de resonancia sucesivas para una determinada cuerda son 175, 245 y 315 Hz.

- a) Encuentra la relación de estos tres modos.
- b) ¿Cómo puedes saber que esta cuerda tiene un antinodo en un extremo?
- c) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?
- d) ¿Qué armónicos son estas frecuencias de resonancia? Dibuja cada onda.
- e) Si la velocidad de las ondas transversales en esta cuerda es de 125 m/s, ¿encuentra la longitud de la cuerda?

20. Calcula cuál es la velocidad de propagación en una cuerda de 3 m de longitud fijada por sus dos extremos sabiendo que la frecuencia del tercer armónico es de 60 Hz.

21. En una cuerda tensa dispuesta horizontalmente uno de sus extremos está fijado a la pared, mientras el otro pasa por una polea ideal y se cuelga una masa  $M$ . En la cuerda se producen ondas estacionarias. ¿Qué masa  $m$  se ha de añadir a la masa inicial  $M$  si queremos

que la frecuencia del sexto armónico sea ahora igual a la frecuencia del séptimo armónico de antes?

22. Una cuerda fijada por los dos extremos tiene una longitud de 40 cm y una masa de 8 g. Sabemos que esta cuerda entra en resonancia, es decir presenta un armónico, a las frecuencias de 424 Hz y de 530 Hz sin que entre en resonancia a ninguna frecuencia intermedia. ¿Cuánto vale la tensión a la que está sometida la cuerda?

23. Un alambre de acero cilíndrico uniforme, con densidad  $7.800 \text{ kg/m}^3$ , de 58 cm de largo y 1,19 mm de diámetro, se fija en ambos extremos. ¿A qué tensión debe ajustarse para que, al vibrar en su primer **sobretono**<sup>16</sup>, produzca la nota de frecuencia correspondiente a un Do#, es decir 311 Hz?

24. Un afinador de pianos estira un cable de piano de acero con una tensión de 800 N. El cable de acero mide 0,4 m de largo y tiene una masa de 3 g.

- ¿Cuál es la frecuencia de su modo fundamental de vibración?
- ¿Cuál es el número del armónico más alto que puede escuchar una persona que es capaz de escuchar frecuencias de hasta 10.000 Hz?

25. Una cuerda de longitud  $L$  se estira entre dos soportes con una tensión que hace que las ondas transversales tengan una velocidad de  $v$ .

- ¿Cuál es la longitud de onda del armónico fundamental?
- ¿Cuál es la frecuencia del armónico fundamental?
- ¿Cuál es la longitud de onda del segundo sobretono?
- ¿Cuál es la frecuencia del segundo armónico?
- ¿Cuál es la longitud de onda del cuarto armónico?
- ¿Cuál es la frecuencia del cuarto armónico?

26. En la Fig. 16.32 se muestra esquemáticamente una onda estacionaria en una cuerda. El vibrador oscila con una frecuencia de 15 Hz.

- ¿En qué modo está oscilando?
- Escribir la función que describe este modo.
- Calcular la velocidad de propagación de la onda.

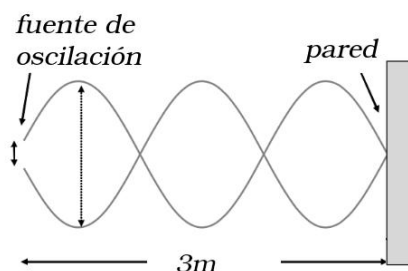


Figura 16.32: Onda estacionaria

28. La ecuación de una onda es

$$y(x, t) = 6 \cos(0,2 \pi x) \sin(4 \pi t), \quad (16.94)$$

<sup>16</sup>Un sobretono es cualquier frecuencia mayor que la frecuencia fundamental

en el sistema SI. Calcula la amplitud de la onda estacionaria y de las ondas cuya superposición podría originarla; la posición de los nodos y antinodos; y la velocidad de una partícula situada en  $x = 2$  m.

29. La ecuación de una onda en una cuerda es

$$y(x,t) = 0,2 \cos(0,5\pi x) \sin(30\pi t), \quad (16.95)$$

en el sistema SI. Determina:

- a) Las magnitudes características de esta onda.
- b) ¿En qué instantes será máxima la velocidad del punto  $x = 0,5$  m?
- c) La amplitud y velocidad de las ondas cuya superposición podría producirla.

30. Una cuerda, fijada en ambos extremos, mide 5 m de largo y tiene una masa de 0,15 kg. La tensión de la cuerda es 90 N. La cuerda está oscilando para producir una onda estacionaria a la frecuencia fundamental de la cuerda.

- a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda?
- b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria producida?
- c) ¿Cuál es el período de la onda estacionaria?

31. Se fija una cuerda en ambos extremos. La masa de la cuerda es de 9 g y la longitud es de 3 m. La cuerda está bajo una tensión de 200 N. La cuerda es impulsada por una fuente de frecuencia variable para producir ondas estacionarias en la cuerda. Encuentre las longitudes de onda y la frecuencia de los primeros cuatro modos de ondas estacionarias.

32. Las frecuencias de dos modos sucesivos de ondas estacionarias en una cuerda son 258,36 Hz y 301,42 Hz. ¿Cuál es la siguiente frecuencia por encima de 100 Hz que produciría una onda estacionaria?

## 16.9 Ondas de sonido

¡Escucha!

No todos tienen esa opción, lamentablemente, ya sea por que nacieron sin poder escuchar o por algún accidente o enfermedad.

El sonido es importante en nuestra vida. Nos permite percibir nuestro entorno, escuchar a los que amamos, ayudar a quienes piden ayuda, etc. La tecnología ha permitido transformar las ondas sonoras en imágenes, para revisar el estado de materiales o para romperlos, para ver el estado de nuestra salud o la salud de un bebé que está por nacer.

El sonido en la naturaleza permite a muchos seres vivos detectar peligros, presas o compañeros, en general, posicionarlos en el espacio. Por supuesto, esto ocurre en el aire, en el agua o en la tierra.

El sonido en gases y líquidos consiste en la propagación de una perturbación tal que en el medio se produce el fenómeno de **compresión** y **rarefacción**. Esto genera **ondas longitudinales**. En sólidos aparece además **ondas transversales** llamadas **ondas secundarias**, **ondas S** u **ondas de corte**.



Figura 16.33: Ondas de sonido

### 16.9.1 Compresión y rarefacción

La velocidad de propagación de ondas mecánicas depende de las propiedades elásticas e inerciales del medio y genéricamente toma la forma

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica}}{\text{propiedad inercial}}}, \quad (16.96)$$

como ya hemos visto para el caso de ondas en cuerdas tensas, donde la propiedad elástica está representada por la tensión de la cuerda y la propiedad inercial por la densidad lineal de masa.

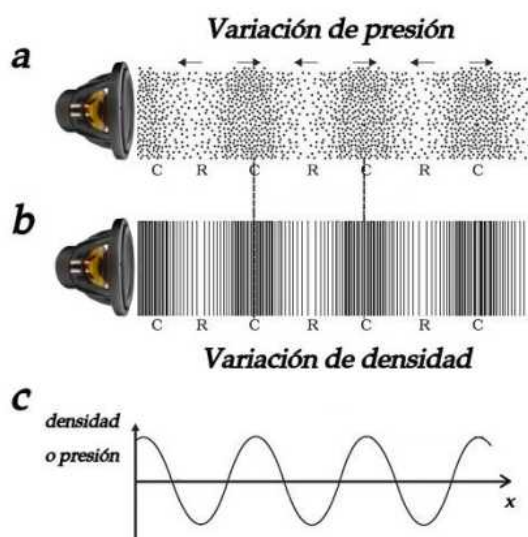


Figura 16.34: Ondas de sonido: variaciones de densidad y presión

Las ondas sonoras en gases y líquidos son ondas de presión longitudinales que aparecen cuando un agente externo mueve el medio, como sucede por ejemplo con un parlante, como muestra la Fig. 16.34. El parlante vibra a una frecuencia y amplitud dadas, produciendo vibraciones en las moléculas de aire circundantes. A medida que el cono del parlante oscila, transfiere energía al aire, con una parte de ésta sirviendo para comprimir y expandir el aire circundante, creando presiones locales ligeramente más altas y más bajas. A medida que el parlante se mueve en la dirección  $+x$ , empuja las moléculas de aire, desplazándolas



de sus posiciones de equilibrio. Cuando el parlante se mueve en la dirección  $-x$ , las moléculas de aire retroceden hacia sus posiciones de equilibrio debido a una fuerza restauradora. Podemos modelar el movimiento de las moléculas de aire como oscilaciones en un movimiento armónico simple respecto de sus posiciones de equilibrio. En la Fig. 16.34 a) se observa cómo las partículas del medio disminuyen su separación media ante el paso de la perturbación, lo que se conoce como **compresión**, mientras que en zonas adyacentes, esa separación aumenta, lo que se conoce como **rarefacción**. Estas zonas están directamente correlacionadas con las crestas y valles en la función de onda, como muestra la Fig. 16.34 c).

En un gas las zonas de compresión y rarefacción se pueden mover solo cuando sus moléculas interactúan entre sí. Como aprenderá en su libro de Termodinámica, las moléculas de un gas tienen una velocidad característica que depende de la temperatura del gas, pero que es del orden de 330 m/s en condiciones normales. Por esa razón tiene sentido que la velocidad del sonido tenga el mismo orden de magnitud que la velocidad molecular promedio entre colisiones. Así, en aire a  $0^\circ\text{C}$ , el sonido viaja a 331 m/s. en cambio, a  $20^\circ\text{C}$  el sonido viaja a 343 m/s.

La propiedad elástica de un gas o un líquido queda definida por el **módulo de compresibilidad**,  $B$ , que es una medida del cambio fraccional de volumen de un material  $\frac{\Delta V}{V}$  respecto del volumen inicial, sujeto a compresión,  $\Delta p$ . Su definición es

$$B = -V \frac{\Delta p}{\Delta V}. \quad (16.97)$$

Nota que se mide unidades de presión,  $\text{Pa}$  (pascal). El signo menos es para definir una cantidad positiva, debido a que, normalmente<sup>17</sup>, cuando se comprime un material, este disminuye su volumen. Para el aire en condiciones normales de presión y temperatura ( $0^\circ\text{C}$  y 1 atmósfera de presión),  $B = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$  para aire y  $B = 2,15 \times 10^9 \text{ Pa}$  para agua.

La velocidad de propagación para un gas o líquido de densidad  $\rho$  se define entonces como

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}. \quad (16.98)$$

Por último, la velocidad del sonido en un gas ideal, es decir un gas muy diluido (para una definición más precisa: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal\\_gas](https://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas), está definida en base a la Teoría Cinética de los Gases.<sup>18</sup>

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (16.99)$$

donde  $\gamma$  es el llamado **índice adiabático**<sup>19</sup>,  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$  es la constante universal de los gases ideales,  $T$  es la temperatura del gas medida en kelvin<sup>20</sup>, y  $M$  es la masa

<sup>17</sup>Recientemente, en 2013 y 2016, se han descubierto cristales,  $\text{Zn}[\text{Au}(\text{CN})_2]_2$  y  $\text{Na}(\text{NH}_2\text{BH}_3)$  que al ser comprimidos aumentan su volumen

<sup>18</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Kinetic\\_theory\\_of\\_gases](https://en.wikipedia.org/wiki/Kinetic_theory_of_gases)

<sup>19</sup>Este índice es la razón entre el calor específico medido a presión constante y el calor específico medido a volumen constante,  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  y está relacionado con los grados de libertad de las partículas que componen el gas.

<sup>20</sup>La relación entre grados celcius y kelvin (no grados kelvin) es:  $T_K = T_C + 273,15$ .

molecular del gas medida en kg/mol.<sup>21</sup> Para el aire  $\gamma = 1,4$  y)  $M = 0,029$  kg/mol.

### 16.9.2 Funciones de onda para ondas de sonido

Con esta información podemos comprender por qué el sonido viaja más rápido en líquidos que en gases: si bien las moléculas están más cercanas entre sí y luego su densidad es mayor que la de un gas, resulta que el módulo de compresibilidad es 4 órdenes de magnitud que para un gas. Así, por ejemplo, en agua dulce, las ondas de sonido viajan a 1.482 m/s.

Ahora podemos escribir la función de onda para ondas de compresión. Podemos describir la onda sonora desde dos puntos de vista, observando las oscilaciones de un elemento de fluido alrededor de su posición de equilibrio, y en ese caso

$$s(x, t) = s_0 \cos(kx - \omega t), \quad (16.100)$$

donde  $s_0$  es la amplitud de la oscilación que suponemos es menor que  $\lambda$ , pues después de todo las fluctuaciones son pequeñas.

Si nos ubicamos en un punto en el espacio dentro del fluido por donde viaja una onda de presión, veremos como la presión atmosférica aumenta y disminuye periódicamente a medida que tienen lugar las sucesivas perturbaciones. Bajo condiciones normales, la presión atmosférica es del orden de 100 mil pascales o 1 atmósfera. Sin embargo, cambios de presión debidos al pasaje de una onda sonora son muy pequeños respecto a este valor de presión atmosférica. Sí, esas muy pequeñas variaciones de presión son las que nuestro sistema auditivo capta. Luego, podemos describir las variaciones de presión en el fluido

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_0 \sin(kx - \omega t), \quad (16.101)$$

donde la amplitud  $\Delta p_0$  es el valor máximo que toma la presión en el fluido al paso de la onda longitudinal. Estas variaciones de presión tienen una magnitud menor que la presión basal, con el fluido sin ondas en él.

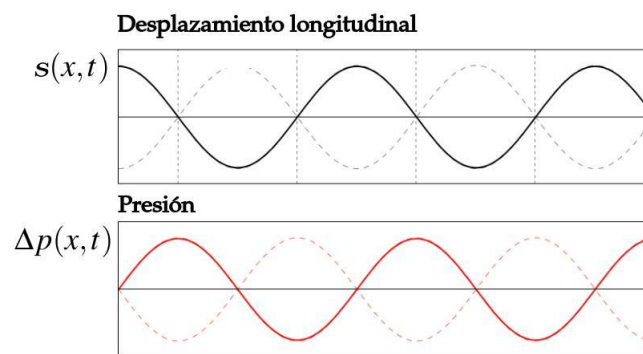


Figura 16.35: Funciones de onda de sonido: desplazamiento longitudinal,  $s(x, t)$ , y variación de presión,  $\Delta p(x, t)$ .

Importante es entender por qué las funciones de onda  $s(x, t)$  y  $\Delta p(x, t)$  tienen una diferencia de fase de  $\pi/2$ . Si observamos la Fig. 16.34 vemos que en la figura *a* cuando

<sup>21</sup>Una buena aproximación de la masa molecular es usar el número de masa  $A = \# \text{ protones} + \# \text{ neutrones}$  y ponerle unidades de  $g/mol$ .

las partículas están más alejadas entre sí, que corresponde a la amplitud  $s_0$ , el valor de la presión es menor, y viceversa.

Debería de haber una relación entre las descripciones en términos de las funciones de onda  $s(x,t)$  y  $\Delta p(x,t)$  porque después de todo las oscilaciones del fluido producen cambios en la presión de éste. Los parámetros que tenemos a nuestra disposición son la longitud de onda,  $\lambda$ , la frecuencia de oscilación,  $\omega$ , la densidad del fluido,  $\rho$ , el módulo de compresibilidad,  $B$ . Podemos utilizar análisis dimensional para convencernos que la única combinación de estos parámetros que tienen nos permiten conectar las amplitudes en ambas descripciones es

$$\Delta p_0 \approx \frac{B}{\lambda} y_0 = \frac{v^2}{\lambda} \rho y_0. \quad (16.102)$$

De modo más preciso, se puede demostrar que

$$\Delta p_0 = \frac{2\pi v^2}{\lambda} \rho s_0 = v \rho \omega_0. \quad (16.103)$$

Veamos cómo se obtiene. De la definición del módulo de compresibilidad

$$\Delta p = -\frac{B \Delta V}{V} = -\frac{B A \Delta s}{A \Delta x} \rightarrow -B \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (16.104)$$

donde hemos usado el hecho que el volumen original  $V = A \Delta x$  corresponde al volumen de un cilindro de sección transversal  $A$  y largo  $\Delta x$ .

Luego, a partir de la Ec. (16.100) y usando (16.104) obtenemos

$$\Delta p(x,t) = -B \{-s_0 k \sin(kx - \omega t)\} = B s_0 k \sin(kx - \omega t), \quad (16.105)$$

de donde comparando con la Ec. (16.101) se obtiene la identidad en la Ec. (16.103).

### 16.9.3 Ejercicios

1. Un silbato que emite una frecuencia de 4.300 Hz produce una onda cuyo valor máximo, por sobre la presión ambiente, de  $4 \times 10^{-2}$  Pa.

Esta onda se propaga a 344 m/s.

- Escribe la ecuación onda.
- Determina la longitud de la onda.

2. A  $0^\circ \text{C}$ , la onda de sonido viaja a 330 m/s en el aire. Una bocina distante produce una longitud de onda de una nota que tiene una frecuencia de 440 Hz. ¿Cuánto tiempo le lleva pasar una onda completa (una longitud de onda)?

3. Considera una onda de sonido modelada con la ecuación

$$s(x,t) = 4 \times 10^{-9} \cos(3,66x - 1,256t), \quad (16.106)$$

en sistema internacional. ¿Cuál es el desplazamiento máximo, la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de la onda de sonido?

4. Considera una onda de sonido que se mueve a través del aire modelada con la ecuación

$$s(x,t) = 6 \times 10^{-9} \cos(54,93x - 18,84 \times 10^3 t), \quad (16.107)$$

en unidades de SI. ¿Cuál es el tiempo más corto requerido para que una molécula de aire se mueva entre 3 nm y  $-3$  nm?

5. Considera un ultrasonido de diagnóstico de frecuencia de 5 MHz que se usa para examinar una irregularidad en el tejido blando.

a) ¿Cuál es la longitud de onda en el aire de dicha onda de sonido si la velocidad del sonido es de 343 m/s?

b) Si la velocidad del sonido en el tejido es de 1.800 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de esta onda en el tejido?

6. Una onda de sonido se modela como

$$\Delta P(x, t) = 1,8 \cos(55,41x - 18,840t) \quad (16.108)$$

en unidades de SI (en particular, la presión es en Pa). ¿Cuál es el cambio máximo en la presión, la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de la onda de sonido?

7. Una onda de sonido se modela con la función de onda

$$\Delta P(x, t) = 1,2 \cos(kx - 6,28 \times 10^4 t), \quad (16.109)$$

en unidades de SI (en particular, la presión es en Pa) y la onda de sonido viaja en el aire a una velocidad de  $v = 343$  m/s.

a) ¿Cuál es el número de onda de la onda de sonido?

b) ¿Cuál es el valor de  $\Delta P(3, 20)$ ?

8. El desplazamiento de las moléculas de aire en la onda de sonido se modela con la función de onda

$$s(x, t) = 5 \times 10^{-9} \cos(91,54x - 3,14 \times 10^4 t), \quad (16.110)$$

en sistema internacional.

a) ¿Cuál es la velocidad de onda de la onda de sonido?

b) ¿Cuál es la velocidad máxima de las moléculas de aire cuando oscilan en un movimiento armónico simple?

c) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración máxima de las moléculas de aire a medida que oscilan en un movimiento armónico simple?

9. ¿Qué longitud debe tener una tubería abierta en ambos extremos para producir una frecuencia fundamental de 110 Hz en un día cuando la velocidad del sonido es de 343 m/s?

10. ¿La longitud de onda de la onda estacionaria fundamental en un tubo abierto en ambos extremos es mayor, igual o menor que la longitud de onda de la onda estacionaria fundamental en un tubo de la misma longitud con un extremo abierto y un extremo cerrado?

11. ¿Por qué un clarinete toca una nota más baja que una flauta cuando ambos instrumentos tienen aproximadamente la misma longitud?

12. Un tubo de órgano abierto en los dos extremos tiene dos armónicos sucesivos con frecuencias de 240 y 280 Hz. ¿Cuál es la longitud del tubo si supones que la velocidad del sonido es 340 m/s?

13. Calcula la frecuencia de los sonidos emitidos por un tubo abierto y otro cerrado de 1 m de longitud produciendo el sonido fundamental, suponiendo que la velocidad del sonido es 340 m/s.

14. Un tono puro, es decir una onda de sonido de una sola frecuencia, de 432,9 Hz se propaga en el aire a 340 m/s. La amplitud de la onda de presión en un punto ubicado a 2 m de la fuente es 184 mPa. Obtén la ecuación de onda y representa gráficamente en el punto indicado la presión como función de tiempo.

15. Describe el tipo de tubo que tendría las ondas estacionarias descritas en cada situación a continuación.

- a) La onda tiene antinodos en ambos extremos del tubo.
- b) La onda tiene un antinodo en un extremo del tubo y un nodo en el otro extremo. del tubo.
- c) La onda tiene nodos en ambos extremos del tubo.

16. Tres frecuencias de resonancia sucesivas de un tubo de órgano son 1.310, 1.834 y 2.358 Hz.

- a) ¿Está el tubo cerrado por un extremo o abierto por ambos extremos?
- b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?
- c) ¿Cuál es la longitud del tubo?
- d) A continuación dos tubos idénticos a los del problema se utilizan como fuentes coherentes emitiendo ambos la frecuencia de 1.310 Hz, enfrentados y separados por 1,5 m. ¿En qué posiciones de la recta que une ambos tubos un observador puede escuchar máximos de interferencia? Supón que la velocidad del sonido en aire en las condiciones de la experiencia es 340 m/s

#### 16.9.4 Ondas de sonido estacionarias

De acuerdo a sus aberturas, los instrumentos de viento se clasifican en abiertos, como una flauta transversa, y cerrados, como es el caso de un clarinete.



Figura 16.36: Clarinete y flauta

Consideremos un flauta transversa. Para producir un sonido se sopla por un extremos produciendo una vibración que a su vez genera una onda a través del tubo. La onda viaja a través de éste y llega al final donde encuentra una interfase que está a presión atmosférica. La onda de presión observa esta interfase como una pared fija, produciéndose un nodo de presión en ese lugar. Luego la onda se refleja allí <sup>22</sup> con una diferencia de fase de  $\pi$ , produciéndose ondas estacionarias en la cavidad.

<sup>22</sup>Una pequeña cantidad de energía realmente escapa del tubo

Debido a que la flauta tiene ambos extremos abiertos, en ambos extremos hay nodos de mínima presión. Debido a que los desplazamientos del medio están desfasados en  $\pi/2$ , éstos son máximos en los bordes y luego allí hay antinodos, como se muestra en la Fig. 16.38. Si observamos la figura a), vemos que tiene exactamente la misma forma que las

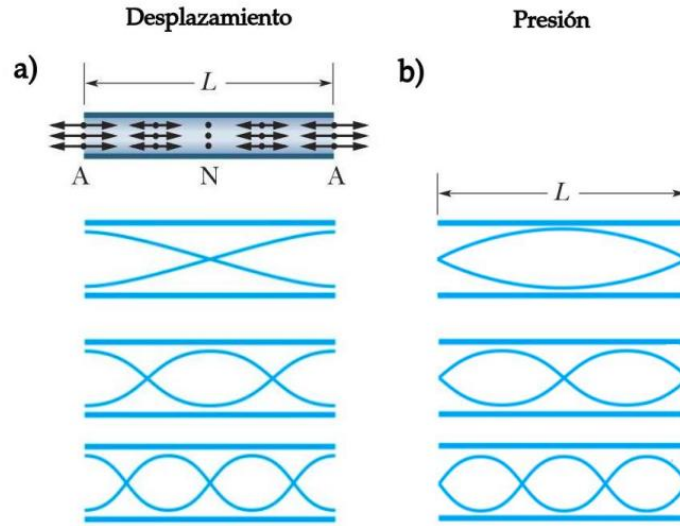


Figura 16.37: Funciones de onda de sonido: a) desplazamiento longitudinal,  $y(x,t)$ , y b) variación de presión,  $\Delta p(x,t)$ .

ondas estacionarias encontradas en el caso de ondas transversales en una cuerda tensa con extremos fijos. Por lo tanto, los resultados allí obtenidos deberían ser los mismo que para este caso. Esto es, se cumple que

$$\lambda_m = \frac{2L}{m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.111)$$

Podemos escribir ahora las frecuencias de cada modo de oscilación

$$f_m = \frac{v}{\lambda_m} = m \frac{v}{2L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.112)$$

Para ondas en fluidos, conocemos la velocidad de propagación, por lo tanto

$$f_m = \frac{m}{2L} \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.113)$$

Así,  $m = 1$  corresponde al primer armónico;  $m = 2$ , al segundo armónico;  $m = 3$ , al tercero, etc.

Observa que las frecuencias de los armónicos son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental

$$f_m = m f_1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.114)$$

¡Así que para ser flautista se debe saber física! Bueno, no exactamente. Sin embargo, llena el alma comprender cómo funciona. Por ejemplo, cuando en la flauta levantamos dedos en orden, lo que estamos haciendo es disminuir la longitud del tubo y luego modificamos la

frecuencia del sonido. Sin embargo, no siempre se hace eso. Si se pulsa un solo dedo en un lugar intermedio donde, supongamos, justo hay un anti-nodo de presión, el máximo se libera y se cambia la condición de contorno. Cuando en un sistema se modifican las condiciones de contorno, cambian las expresiones matemáticas para las frecuencias.

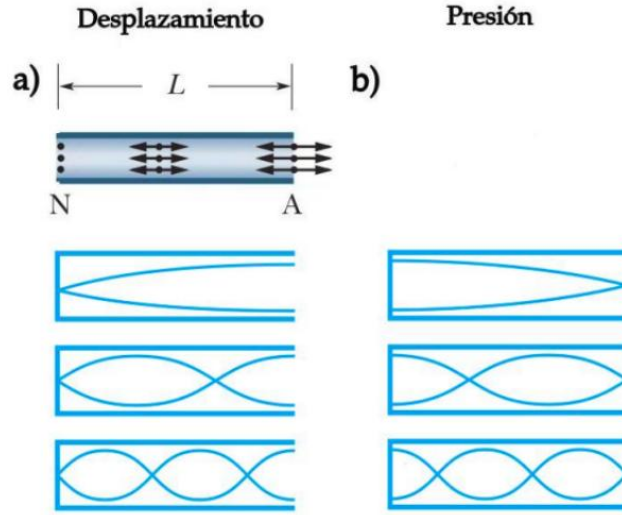


Figura 16.38: Funciones de onda de sonido: a) desplazamiento longitudinal,  $y(x,t)$ , y b) variación de presión,  $\Delta p(x,t)$ .

El clarinete es un instrumento de tubo cerrado, con una lengüeta que produce la vibración. Aunque la lengüeta esté vibrando, nuestra boca también influye por lo que el verdadero extremo superior está cerrado. Esto está bosquejado en la Fig. 16.38.

De aquí observamos que el primero modo de oscilación, llamado **modo fundamental de oscilación** o **primer armónico**, corresponde a  $1/4$  de longitud de onda,  $L = \lambda/4$ . Al igual que antes, no hay nodos.

El segundo modo de oscilación, **segundo armónico**, se muestra en la Fig. b y es tal que se  $L = 3\lambda/4$ . Nota que hay un nodo y dos anti-nodos.

El tercer modo de oscilación, **tercer armónico** se muestra en la Fig. c donde la longitud de onda de la onda estacionaria de relaciona con el largo  $L$  como  $L = 5\lambda/4$ . Aquí aparecen dos nodos y tres anti-nodos.

Concluimos que las longitudes de onda para cada modo de oscilación se escriben como

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m-1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.115)$$

Podemos escribir ahora las frecuencias de cada modo de oscilación

$$f_m = \frac{v}{\lambda_m} = (2m-1) \frac{v}{4L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.116)$$

Por lo tanto

$$f_m = \frac{2m-1}{4L} \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.117)$$

Así,  $m = 1$  corresponde al primer armónico;  $m = 2$ , al segundo armónico;  $m = 3$ , al tercero, etc.

Observa que las frecuencias de los armónicos son múltiplos impares de la frecuencia fundamental

$$f_m = (2m - 1)f_1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.118)$$

Por último, ¿te das cuenta que no aparecen los múltiplos pares de la frecuencia fundamental? Todo porque un nodo del extremo desapareció. ¡Las condiciones de contorno son muy importantes!

Es posible visualizar las ondas estacionarias en un tubo de Rubens, como se muestra en la Fig. 16.39. éste es un tubo cerrado-cerrado donde se generan flamas que salen de orificios y que cuando se forma una onda estacionaria, la flama toma la forma de las ondas.



Figura 16.39: Tubo de Rubens

Otra forma de observar las ondas estacionarias y a la vez hacer levitación con ondas de sonido es usar dos transductores, ponerlos enfrentados uno con el otro. Luego con delicadeza y una hipodérmica, ir colocando gotas de líquido en el espacio entre los transductores. El resultado se ve en la Fig. 16.40 y más detalladamente en el video siguiente: <https://www.youtube.com/watch?v=0K8zs-KSitc>, con una sorpresa adicional.

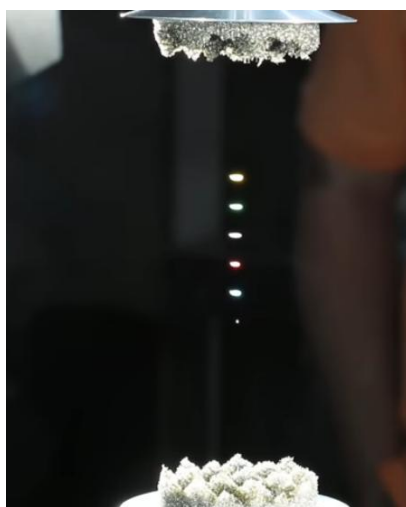


Figura 16.40: Gotas levitando en una onda de sonido estacionaria



### 16.9.5 Ejercicios

1. Determina la frecuencia fundamental (1er armónico) de una columna de aire de extremo cerrado (es decir, un extremo abierto y uno cerrado) que tiene una longitud de 67,5 cm. Supón que la velocidad de las ondas sonoras en el aire es de 340 m/s.

2. Determina la longitud de una columna de aire de extremo cerrado que produce una frecuencia fundamental (1er armónico) de 480 Hz. Se sabe que la velocidad de las ondas en el aire es de 340 m/s.

3. La velocidad de las ondas sonoras en el aire es de 340 m/s. Determina la frecuencia fundamental (1er armónico) de una columna de aire de extremo abierto, es decir, ambos extremos abiertos, que tiene una longitud de 67.5 cm.

4. Un tubo de órgano de extremo cerrado se usa para producir una mezcla de sonidos. Los armónicos tercero y quinto en la mezcla tienen frecuencias de 1.100 Hz y 1.833 Hz respectivamente. ¿Cuál es la frecuencia del primer armónico tocado por el tubo de órgano?

5. Halla la longitud de un tubo con un valor fundamental de 128 Hz

a) ¿Qué longitud debe tener un tubo cerrado en un extremo en un día en que la temperatura del aire es de 22°C, si su frecuencia fundamental corresponde a un Do de 128 Hz?

b) ¿Cuál es la frecuencia de su cuarto sobretono?

6. Un tubo de órgano particular tiene una longitud de 72 cm y está abierto en ambos extremos. Supón que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s.

a) ¿Cuál es la longitud de onda del fundamental en esta tubería?

b) ¿Cuál es la frecuencia correspondiente del fundamental?

c) Si un extremo de la tubería es ahora cubierto, ¿cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de lo fundamental?

7. Un tubo de órgano estrecho tiene una longitud de 1,20 m. El tubo del órgano está abierto en ambos extremos.

a) ¿Cuál es la frecuencia natural de los tres armónicos fundamentales y los primeros tres sobretonos?

b) Un extremo de la tubo se cierra. ¿Cuáles son las nuevas frecuencias para el modo fundamental y los primeros tres armónicos? Compara tus dos conjuntos de frecuencias.

Dibuja los patrones de ondas estacionarias para las distribuciones de presión en el tubo del órgano para los casos abierto-abierto y abierto-cerrado.

Supón que la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.

8. Una flauta cuando todos sus agujeros están cubiertos está diseñada para tener una frecuencia fundamental de 262 Hz (nota do-central en el piano) a una temperatura de 20° C.

a) ¿Cuál es la longitud aproximada de la flauta?

b) ¿Cuál sería la frecuencia fundamental de la flauta cuando se toca a solo 5° C?

9. Si un tubo tiene una longitud de 1,23 m

a) Determina las frecuencias de los primeros tres armónicos si el tubo está abierto en cada extremo. Considera que la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.

b) ¿Cuáles son las tres frecuencias si el tubo está cerrado en un extremo?

c) Para el tubo abierto en ambos extremos, ¿cuántos armónicos están presentes en el intervalo normal de audición humana?

10. Una columna de aire cerrada resuena con una frecuencia fundamental de 256 Hz. ¿Cuál es la longitud de esta columna de aire si la velocidad de la onda de sonido es 343 m/s?

11. Un tubo estrecho uniforme de 1,8 m de largo está abierto en ambos extremos. Resuena en dos armónicos sucesivos de frecuencia 275 Hz y 330 Hz. ¿Cuál es la velocidad del sonido en el gas en el tubo?

12. Una columna de aire cerrado resuena con una frecuencia fundamental de  $4,40 \times 10^2$  Hz. Si la longitud de la columna de aire es de 18,9 cm, ¿cuál es la velocidad de la onda de sonido?

13. Si una columna de aire cerrada resuena con una frecuencia fundamental de 384 Hz, ¿cuál es la frecuencia de su tercer armónico?

14. ¿Cuál será la frecuencia fundamental de una columna de aire cerrada que tiene 22,0 cm de largo y tiene una temperatura del aire de  $20,0^\circ \text{C}$ ?

15. ¿Cuál es la longitud de una columna de aire cerrada que produce una frecuencia fundamental de 256 Hz a  $20,0^\circ \text{C}$ ?

16. Una columna de aire cerrada de 55 cm resonará a muchas frecuencias; sin embargo, la frecuencia más baja a la que resuena es 156 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas sonoras?

17. ¿Cuál es la columna de aire cerrada más corta que resonará en una fuente de sonido (diapasón) que tenga una frecuencia de  $4,40 \times 10^2$  Hz, suponiendo que la velocidad del sonido sea de 341 m/s?

18. Una columna de aire abierta resuena con una frecuencia fundamental de 256 Hz. ¿Cuál es la longitud de la columna de aire si la velocidad del sonido es de 341 m/s?

19. Una columna de aire abierta resuena con una frecuencia fundamental de 512 Hz. Si la longitud de la columna de aire es de 33,0 cm, ¿cuál es la velocidad de la onda de sonido?

20. Si una columna de aire abierta resuena con una frecuencia fundamental de 384 Hz, ¿cuál es la frecuencia del siguiente armónico más grande en el que resonará esta columna?

21. Si una columna de aire cerrada resuena con una frecuencia fundamental de 384 Hz, ¿cuál es la frecuencia del siguiente armónico más grande al que resonará?

22. ¿Cuál será la frecuencia fundamental de una columna de aire abierta que tiene 22,0 cm de largo y tiene una temperatura de  $20,0^\circ \text{C}$ ?

23. ¿Cuál es la longitud de una columna de aire abierta que produce una frecuencia fundamental de 256 Hz a  $20,0^\circ \text{C}$ ?

24. Un fabricante de tubos de órganos quiere hacer un tubo que resuene con una frecuencia fundamental de 32,75 Hz. Supón que la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s. ¿Cuál debe ser la longitud del tubo si es

a) un tubo abierto?

b) un tubo cerrado?

25. Un tubo sonoro cerrado por un extremo presenta, al emitir un sonido con una velocidad de 348 m/s, tres nodos en su longitud de forma que la distancia entre dos nodos consecutivos es de 40 cm. Determina:

- La longitud del tubo.
- La frecuencia emitida.
- Las longitudes de un tubo cerrado por un extremo y de otro abierto por ambos extremos que emitieran ese mismo sonido como fundamental.

### 16.9.6 Interferencia en el tiempo: batido de onda

Hasta ahora hemos visto cómo ondas interfieren en el espacio. Sin embargo, las ondas tienen íntimamente ligadas las coordenadas espaciales y temporales. Cabe preguntarse si existe interferencia en el tiempo.

Para ver interferencia en el tiempo, fijamos nuestra posición en el espacio, que sin pérdida de generalidad podemos elegir como la coordenada  $x = 0$ , y elegimos dos frecuencias distintas,  $f_1 > f_2$ . Para hacer la superposición podemos utilizar una identidad trigonométrica

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \quad (16.119)$$

Luego, superposición de las funciones de onda es

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) \\ &= \left[ 2A \cos \left( \frac{1}{2} [\omega_1 - \omega_2] t \right) \right] \cos \left( \frac{1}{2} [\omega_1 + \omega_2] t \right) \end{aligned} \quad (16.120)$$

Esta ecuación tiene la siguiente interpretación: la superposición de las dos ondas, que se muestran en colores azul y rojo en la Fig. 16.41, conduce a una onda que tiene una **amplitud modulada** en el tiempo por una función cuyo argumento depende la mitad de la diferencia de las frecuencias originales. Está representada como la función segmentada en la tercera figura. Las oscilaciones en color negro, línea continua, corresponden a la función con argumento igual al promedio de las dos frecuencias.

Observa que la última figura muestra una oscilación de la amplitud con una duración de 2,5 períodos. Esto nos dice que la frecuencia de batido o batimiento se define como

$$\omega_b = |\omega_1 - \omega_2|, \quad (16.121)$$

o bien,

$$f_b = |f_1 - f_2|. \quad (16.122)$$

Para terminar, entretiénete escuchando batido de ondas aquí: <https://ophysics.com/waves10.html>, donde puedes elegir distintas combinaciones de frecuencias de las ondas originales que interfieren.

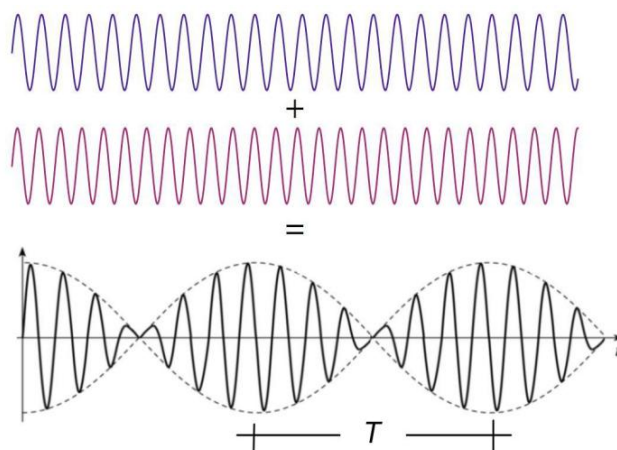


Figura 16.41: Batido de ondas

## 16.10 Ejercicios

1. Una violinista está afinando su instrumento en la nota *La* de concierto (440 Hz). Toca la nota mientras escucha un tono generado electrónicamente de exactamente esa frecuencia y escucha una pulsación de frecuencia de 3 Hz, que aumenta a 4 Hz cuando aprieta ligeramente su cuerda de violín.

a) ¿Cuál era la frecuencia de la nota que tocaba su violín cuando escuchaba el latido de 3 Hz?

b) Para ajustar su violín a la nota *La* de concierto, ¿debería apretar o aflojar su cuerda de lo que era cuando escuchó el latido de 3 Hz?

2. Cuando se golpea un diapasón de 440 Hz al mismo tiempo que se pulsa la cuerda de una guitarra que debe dar cierta nota musical, se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Después que la cuerda se tensa un poco más para aumentar su frecuencia, las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda a la tensión final?

3. En una guitarra, las tensiones y grosores de dos cuerdas (*B* y *C*) son tales que una onda viajera en la cuerda *C* se mueve 1,005 veces más rápido que en *B*. Ambas cuerdas tienen la misma longitud. Cuando ambas son tocadas en su modo fundamental se escuchan pulsaciones de 1,2 Hz. Calcula la frecuencia fundamental de la cuerda *B*.

4. La cuerda *A* de una guitarra tiene una longitud de 0,640 m y una frecuencia fundamental de 440 Hz. Además, tiene una tensión y masa determinadas tal que las ondas que viajan a través de ella tienen una velocidad de 563 m/s. En otra guitarra, la cuerda *A*, con la misma tensión y masa, es afinada a la misma frecuencia. Sin cambiar la tensión, esta segunda cuerda es acortada una longitud  $\Delta L$ . Cuando ambas cuerdas son tocadas se escuchan pulsaciones de 20 Hz. Calcular  $\Delta L$ .

5. Un diapasón produce una nota constante a 440 Hz. Cuando se golpea este diapasón y se mantiene cerca de una cuerda de guitarra vibrante, se cuentan 20 latidos en 5 segundos. ¿Cuáles son las posibles frecuencias producidas por la cuerda de guitarra?

6. Un sintonizador de piano escucha un pulso cada 2 s cuando escucha un diapasón de 264 Hz y una sola cuerda de piano. ¿Cuáles son las dos frecuencias posibles de la cuerda?

7. Se reproduce una canción de un CD. Un conjunto de altavoces está tocando la nota a 512 Hz, pero la presencia del segundo conjunto de altavoces hace que se escuchen pulsaciones de frecuencia de 4 Hz en un punto equidistante de los cuatro altavoces. Determina las posibles frecuencias que están reproduciendo los altavoces adicionales.

8. Dos ondas de sonido con longitudes de onda de 87 cm y 88.5 cm respectivamente se superponen para producir 10 pulsaciones por segundo. Encuentra la velocidad del sonido.

9. Las longitudes de dos ondas de sonido en un gas son 2,0 m y 2,1 m, respectivamente. Ellas producen 8 pulsaciones por segundo cuando se escuchan juntas. Calcula la velocidad del sonido en el gas y las frecuencias de ambas ondas.

10. Un afinador de pianos que desea afinar la nota gran octava  $D_2$  correspondiente a una frecuencia de 73,416 Hz ha sintonizado la nota La 440 a una frecuencia de 440,0 Hz. ¿Qué armónico de  $D_2$  (contando el fundamental como el primer armónico) dará el menor número de pulsaciones por segundo, y aproximadamente cuántas pulsaciones serán cuando las dos notas estén afinadas correctamente?

11. Dos cuerdas idénticas con densidad lineal 1,0 g/m se mantienen tensas mediante un peso colgando como se indica la Fig. 16.42. En cada cuerda se cuelga una masa de 1,0 kg, pero a la cuerda 2 se le agrega una pequeña masa adicional  $\Delta m$ .

a) Si se hace vibrar la cuerda 1: ¿cuál es la frecuencia fundamental del sonido producido?

b) Si se hacen vibrar ambas cuerdas se pueden oír “batidos” de 1 Hz. ¿Cuánto vale la masa  $\Delta m$ ?

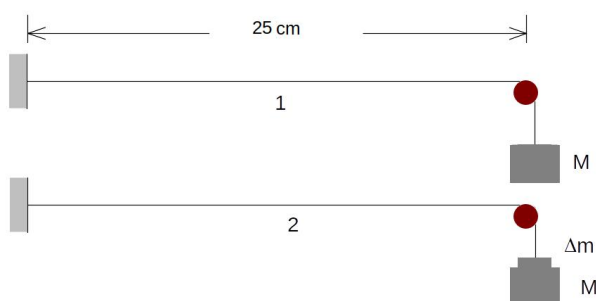


Figura 16.42: Cuerdas tensadas por pesos

12. En un tubo existen las tres frecuencias de resonancia sucesivas de 75, 125 y 175 Hz.

a) ¿Corresponde esto a un tubo abierto por un extremo o abierto por ambos extremos?

b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental?

c) ¿Qué armónicos son estas frecuencias de resonancia?

d) Un alumno de física anda a lo largo de un vestíbulo grande portando un diapasón que vibra con la frecuencia del décimo armónico proporcionado por el tubo anterior. El extremo del vestíbulo está cerrado, de modo que el sonido se refleja en él. El estudiante oye 4 batidos por segundo. ¿Con qué velocidad está andando? Considera que la velocidad del sonido es 340 m/s.

## 16.11 Intensidad de ondas de sonido

Cuando hemos estudiado ondas en una dimensión hemos aprendido que las ondas transportan energía y la hemos cuantificado. Además, nos hemos preguntado a que velocidad se transporta la energía de la onda, es decir la potencia  $\mathcal{P}$ . Cuando hemos estudiado oscilaciones, aprendimos que la energía es proporcional a la amplitud al cuadrado de éstas. Por lo mismo, la potencia transferida también es proporcional a  $A^2$ , como hemos demostrado también analizando ondas en una dimensión, Ec. (16.73)

$$\mathcal{P} \propto \omega^2 A^2. \quad (16.123)$$

Para sonido, esto significa que la potencia es proporcional a la diferencia de presión

$$\mathcal{P} \propto (\Delta p)^2. \quad (16.124)$$

En nuestra vida diaria nos encontramos por ejemplo con sonidos muy “fuertes” y aquellos los asociamos a intensidad. Si observáramos la membrana de un parlante mientras toca a volumen alto veríamos que las oscilaciones tiene una amplitud grande. Esperamos entonces tener una intensidad grande. Sin embargo, esto ocurre solo si estamos cerca. Si nos alejásemos del parlante veríamos que el sonido disminuye en su volumen; su intensidad disminuye. Esto nos indica que la distancia a la fuente debe cumplir algún rol en la definición de intensidad. En efecto, es así como veremos de inmediato.

### Pausa matemática

Cuando hablamos de potencia estamos hablando de un flujo de energía en una cierta cantidad de tiempo. Los matemáticos han definido el **flujo,  $\Phi$ , de un campo vectorial** arbitrario  $\vec{V}$  como una integral de superficie

$$\Phi = \int \vec{V} \cdot d\vec{A} = \int \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \int V \cos \theta dA. \quad (16.125)$$

En la Fig. 16.43 observamos un campo vectorial  $\vec{V}$  que cruza una superficie (imaginaria) de área  $S$ . En la figura se observa que la superficie ha sido subdividida en elementos de área  $d\vec{A}$ .<sup>23</sup> Este elemento de área es un vector normal a la superficie en cada punto. Como todo vector, se puede escribir como un vector unitario normal,  $\hat{n}$ , por un módulo:  $d\vec{A} = \hat{n} dA$ . Esto es lo que hemos hecho en la segunda igualdad arriba. En la tercera igualdad solo hemos usado la definición del producto punto.

Por supuesto, para hacer la integral de superficie debemos sumar las contribuciones de  $\vec{V} \cdot \hat{n} dA$  sobre todos los parches. Esto no es algo que nos preocupe por ahora, pero que aprenderás muy bien de seguro más tarde.

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

Consideremos entonces una fuente puntual que emite una onda esférica, la que transporta energía a su entorno. Pensemos en el caso en que el medio por donde se propaga la onda no absorbe ni dispersa energía. Resulta que la potencia es un flujo y la intensidad es un vector. Luego lo podemos escribir

$$\mathcal{P} = \int \vec{I} \cdot d\vec{A} = \int \vec{V} \cdot \hat{n} dA = \int V \cos \theta dA. \quad (16.126)$$

<sup>23</sup> Sí, el área es un vector. Lo que llamamos área cuando medimos una superficie es solo el módulo.

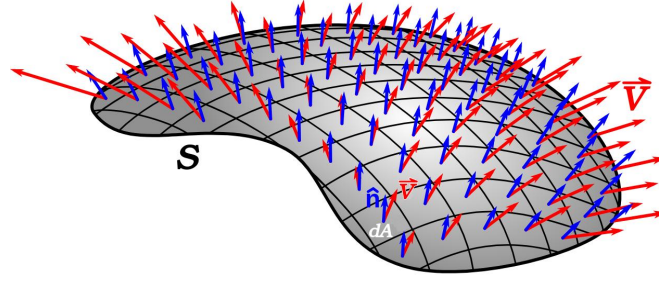


Figura 16.43: Flujo de un campo vectorial

Podemos imaginar un observador que mide la intensidad de la onda a una distancia fija  $r$  de la fuente puntual. Para una fuente puntual la intensidad es un vector radial, luego  $\vec{I} = I\hat{r}$ . Por lo tanto, debido a que el elemento de área también es radial,  $d\vec{A} = \hat{r}dA$ , como muestra la Fig. 16.44.

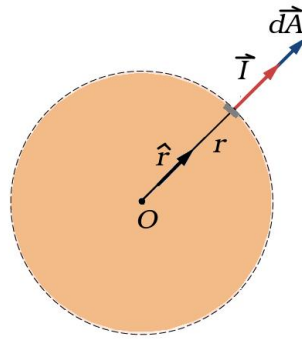


Figura 16.44: Potencia radiada por una fuente puntual

Por lo tanto, dado que ahora la superficie sobre la que integramos es cerrada, la integración es una integral de superficie cerrada

$$\mathcal{P} = \oint I dA = I \oint dA = I 4\pi r^2, \quad (16.127)$$

donde hemos sacado la intensidad fuera de la integral pues ésta depende de la distancia y estamos calculando a una distancia fija de la fuente. Por supuesto la integral sobre la superficie esférica cerrada es el área de la esfera de radio  $r$ :  $A = 4\pi r^2$ .

Por lo tanto, tenemos que

$$I = \frac{\mathcal{P}}{4\pi r^2}. \quad (16.128)$$

Debido a que la potencia se mide en watt, entonces la intensidad se mide en  $\text{W/m}^2$ .

Si en el medio hay amortiguación, entonces la intensidad disminuye más rápidamente de lo que sugiere la ecuación anterior.

Lo que normalmente interesa es la intensidad promediada en el tiempo, luego la potencia en el lado derecho debe ser la potencia promediada en el tiempo, es decir en un período de la onda. Escribimos

$$\langle I \rangle = \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{4\pi r^2}. \quad (16.129)$$

Resulta que la intensidad también se puede escribir como  $I = p v_x$  porque la potencia es  $\mathcal{P} = F v$  y presión es fuerza sobre área. La velocidad  $v_x$  **no es la velocidad de propagación sino la velocidad de las partículas** desplazadas por el paso de la onda sonora. Derivamos la Ec. (16.100) respecto del tiempo obtenemos que

$$v_x(x, t) = s_0 \omega \sin^2(kx - \omega t). \quad (16.130)$$

Luego, la intensidad instantánea la escribimos como

$$I = s_0 \omega \Delta p_0 \sin^2(kx - \omega t). \quad (16.131)$$

De la Ec. (16.105) sabemos que  $\Delta p_0 = B k s_0$ . Por lo tanto, la intensidad instantánea para una onda plana de presión es

$$I = B s_0^2 k \omega \sin^2(kx - \omega t). \quad (16.132)$$

Si promediamos en el tiempo, un período, obtenemos <sup>24</sup>

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} B s_0^2 k \omega = \frac{\Delta p_0^2}{2 \rho v}, \quad (16.133)$$

después de usar la definición de la velocidad de propagación del sonido en un gas, Ec. (16.98).

Podemos obtener esta expresión de una forma un poco distinta. Por análisis dimensional, debido a que la intensidad se mide en  $\text{W/m}^2$ ,

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{\text{Potencia}}{\text{Área}} = \frac{\text{Energía}}{\text{tiempo} \cdot \text{Área}} \\ &= \frac{\text{Energía} \cdot \text{longitud}}{\text{Volumen} \cdot \text{tiempo}} = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}} \\ &= \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} \cdot \text{velocidad}. \end{aligned} \quad (16.134)$$

La velocidad a la que se refiere esta ecuación tiene que estar relacionada a la velocidad a la que se propaga energía. Esta solo puede ser la velocidad de propagación,  $v$ . Por otro lado, la energía está almacenada en forma de energía cinética, luego

$$\text{Energía} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m s_0^2 \omega^2. \quad (16.135)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{1}{2} \rho s_0^2 \omega^2 v \\ &= \frac{1}{2} \rho v (s_0 \omega)^2 \end{aligned} \quad (16.136)$$

<sup>24</sup>Recuerda que el promedio de una función seno cuadrado en un período es 1/2.



donde hemos reemplazado  $\rho = m/V$ . Finalmente, usando las Ecs. (16.98) y (16.105) obtenemos la Ec. (16.133).

### Ejemplo 1

Te han dado la tarea de cortar el césped con una cortadora de césped a motor. Cuando una compañera tuya mide desde 30 metros de distancia, la intensidad del sonido de la cortadora es de  $10 \mu\text{W} / \text{m}^2$ . ¿Cuál es la intensidad en los oídos del operador del motor de la cortadora? Supongamos que tu altura es 1,7 m.

### Solución

De la Ec. (16.129) vemos que, debido a que la potencia del motor es la misma, la razón entre las intensidades medidas a 30 y 1,7 metros es

$$\frac{\langle I_{30} \rangle}{\langle I_{1,7} \rangle} = \frac{r_{1,7}^2}{r_{30}^2} = 3,2 \times 10^{-3}. \quad (16.137)$$

Por lo tanto,

$$I_{1,7} = 10 \times 10^{-6} \times 3,2 \times 10^{-3} = 3,2 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2. \quad (16.138)$$

### Ejemplo 2

Una onda de frecuencia de 1.200 Hz viaja en aire de densidad  $1,2 \text{ kg/m}^3$  a 343 m/s. Si la onda tiene una intensidad de  $10 \mu \text{ W/m}^2$ , encuentra las amplitudes del desplazamiento y de la presión.

### Solución

A partir de esta información obtenemos la amplitud  $s_0$  de la onda

$$s_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\frac{2 \langle I \rangle}{\rho v}} = 9 \text{ nm}. \quad (16.139)$$

Ahora podemos calcular la amplitud de presión y expresarla en milipascuales,

$$\Delta p_0 = \rho v s_0 \omega = 27,9 \text{ mPa}. \quad (16.140)$$

**Observación:** Este problema podría producir confusión ya que podrías pensar que la velocidad de propagación de una onda de presión en el aire depende de la densidad de éste. Si consideramos al aire un gas ideal, este no es el caso; la velocidad de propagación para un gas ideal depende solo de la temperatura.

## 16.11.1 Decibeles

Los decibeles se usan simplemente para describir la relación de dos niveles. Esto podría ser dos niveles de potencia, dos niveles de voltaje, dos niveles de presión acústica o dos niveles de volumen. No hay un nivel absoluto llamado decibel. Un decibelio expresa una razón. Es relativo a algo.

Un decibel es la décima parte de un Bel, una unidad de nivel, llamada **decibeles**, denotado dB, en honor a Alexander G. Bell.<sup>25</sup> Un Bel es una unidad muy grande, por lo que se utiliza el prefijo deci (una décima). Un decibel usa una **escala logarítmica**.

¿Por qué decibel? La razón de esta elección de unidades se origina en la forma en que percibimos el sonido. La forma en que nuestros oídos perciben el sonido puede describirse con mayor precisión por el logaritmo de la intensidad en lugar de directamente a la intensidad.

El nivel de intensidad de sonido en decibeles de un sonido que tiene una intensidad  $I$  en watt por metro cuadrado se define como

$$\beta = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right), \quad (16.141)$$

donde  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  es una intensidad de referencia. En particular,  $I_0$  es la intensidad de sonido más baja o umbral que una persona con audición normal puede percibir a una frecuencia de 1.000 Hz. El nivel de intensidad del sonido no es lo mismo que la intensidad. Debido a que  $\beta$  se define en términos de una relación, es una cantidad sin unidades que le indica el nivel del sonido en relación con un estándar fijo ( $10^{-12} \text{ W/m}^2$ , en este caso).

Debido a que el decibel dB es una forma logarítmica de describir una relación, como hemos dicho esta relación puede ser potencia, presión de sonido, voltaje o intensidad o varias otras cosas. Así, por ejemplo, si tenemos dos parlantes el primero de los cuales emite un sonido con potencia  $P_1$ , y otro que reproduce una versión más fuerte del mismo sonido con potencia  $P_2$ , pero todo lo demás (a qué distancia, frecuencia) se mantuvo igual, entonces usando la unidad de decibeles, podemos determinar la diferencia en el nivel de sonido entre los dos parlantes

$$L_s = 10 \log_{10} \left( \frac{P_2}{P_1} \right). \quad (16.142)$$

Por lo tanto, si el segundo parlante produce el doble de potencia que el primero, la diferencia en dB será  $10 \log_{10}(P_2/P_1) = 10 \log_{10} 2 = 3 \text{ dB}$ .<sup>26</sup>

**Ejemplo 1** Las calles de las ciudades son muy ruidosas, normalmente. Las personas no nos damos cuenta, porque en cierto modo nos acostumbramos. No es extraño encontrar ruidos de hasta 80 dB en algunas de ellas. ¿Cuál es la intensidad del sonido en una calle como aquella?

### Solución

El resultado se obtiene de modo directo usando la definición, Ec. (16.141). De esta podemos despejar la intensidad

$$I = I_0 10^{(\beta/10)} = 10^{-4} \text{ W/m}^2 \quad (16.143)$$

### Ejemplo 2

<sup>25</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Alexander\\_Graham\\_Bell](https://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Graham_Bell)

<sup>26</sup>Esta misma expresión es válida si queremos definir la **ganancia** (en decibeles) en un circuito eléctrico: aquí,  $P_2$  es la potencia de salida y  $P_1$  es la potencia de entrada de la señal

Un parlante de alta calidad puede producir frecuencias en el rango entre 30 Hz y 18.000 Hz (recuerda que el oído humano joven puede escuchar sonido en el rango (20, 20.000) Hz), con un nivel de sonido uniforme  $\pm 3$  dB. Es decir, en este rango de frecuencias, el nivel de sonido de salida no varía en más de 3 dB para un nivel de entrada dado ¿Por qué factor cambia la intensidad para el cambio máximo de 3 dB en el nivel de sonido de salida?

**Solución** La información que se da en este caso es la diferencia en el nivel de sonido. Luego, de la definición, Ec. (16.142)

$$L_s = 10 \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \Rightarrow 10^{(3/10)} = \left( \frac{I_2}{I_1} \right) \quad (16.144)$$

donde hemos reemplazado  $L_s = 3$  dB. Luego,

$$I_2 = 2I_1. \quad (16.145)$$

Podemos resolver este problema de un modo distinto, usando la Ec. (16.141). Tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= 10 \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_0} \right) - 10 \log_{10} \left( \frac{I_1}{I_0} \right) \\ &= 10 \log_{10} \left( \frac{I_2}{I_1} \right) = 3. \end{aligned} \quad (16.146)$$

## 16.12 Ejercicios

1. ¿Cuál es la intensidad en watt por metro cuadrado del sonido de 85,0 dB?
2. La etiqueta de advertencia en una cortadora de césped indica que produce ruido a un nivel de 91,0 dB. ¿Qué es esto en vatios por metro cuadrado?
3. Una onda de sonido que viaja en aire a 20°C tiene una amplitud de presión de 0,5 Pa. ¿Cuál es la intensidad de la onda?
4. ¿Qué nivel de intensidad de sonido en dB producen los auriculares que crean una intensidad de  $4 \times 10^{-2}$  W/m<sup>2</sup>?
6. a) ¿Cuál es el nivel de decibels de un sonido que es dos veces más intenso que un sonido de 90,0 dB?  
b) ¿Cuál es el nivel de decibels de un sonido que es un quinto tan intenso como un sonido de 90,0 dB?
7. a) ¿Cuál es la intensidad de un sonido que tiene un nivel 7 dB menor que un sonido  $4 \times 10^{-9}$  W/m<sup>2</sup>?  
b) ¿Cuál es la intensidad de un sonido que es 3 dB más alto que un sonido  $4 \times 10^{-9}$  W/m<sup>2</sup>?
8.  
a) ¿Cuánto más intenso es un sonido que tiene un nivel 17 dB más alto que otro?

b) Si un sonido tiene un nivel de 23 dB menos que otro, ¿cuál es la relación de sus intensidades?

9. Las personas con buena audición pueden percibir sonidos de un nivel tan bajo como 8 dB a una frecuencia de 3.000 Hz. ¿Cuál es la intensidad de este sonido en vatios por metro cuadrado?

10. Si una mosca doméstica grande a 3 m de distancia hace un ruido de 40 dB, ¿cuál es el nivel de ruido de 1.000 moscas a esa distancia, suponiendo que la interferencia tenga un efecto insignificante?

11. Diez autos en un círculo hacen funcionar sus equipos de audio produciendo un nivel de intensidad de sonido de 120 dB en el centro del círculo. ¿Cuál es el nivel de intensidad de sonido promedio producido por cada estéreo, suponiendo que se puedan despreciar los efectos de interferencia?

12. Si un nivel de intensidad sonora de 0 dB a 1000 Hz corresponde a una presión de manómetro máxima (amplitud de sonido) de  $10^{-9}$  atm, ¿cuál es la presión de manómetro máxima en un sonido de 60 dB? ¿Cuál es la presión manométrica máxima en un sonido de 120 dB?

13. La amplitud de una onda de sonido se mide en términos de su presión manométrica máxima. ¿En qué factor aumenta la amplitud de una onda de sonido si el nivel de intensidad del sonido aumenta en 40 dB?

14. Si un nivel de intensidad de sonido de 0 dB a 1.000 Hz corresponde a una presión de manómetro máxima (amplitud de sonido) de  $10^{-9}$  atm, ¿cuál es la presión de manómetro máxima en un sonido de 60 dB? ¿Cuál es la presión manométrica máxima en un sonido de 120 dB?

15. Una exposición de 8 horas a un nivel de intensidad de sonido de 90 dB puede causar daño auditivo. ¿Qué energía en julios entra en un tímpano de 0,8 cm de diámetro tan expuesto?

16.

a) Las trompetas del oído nunca fueron muy comunes, pero sí ayudaron a las personas con pérdidas auditivas al reunir el sonido en un área grande y concentrarlo en el área más pequeña del tímpano. ¿Qué aumento de decibelios produce una trompeta de oído si su área de recolección de sonido es de  $900 \text{ cm}^2$  y el área del tímpano es de  $0,5 \text{ cm}^2$ , pero la trompeta solo tiene una eficiencia de 5 % para transmitir el sonido al tímpano?

b) Comente sobre la utilidad del aumento de decibeles encontrado en la parte (a).

17. El sonido se transmite de manera más efectiva a un estetoscopio por contacto directo que a través del aire, y se intensifica aún más al concentrarse en el área más pequeña del tímpano. Es razonable suponer que el sonido se transmite a un estetoscopio 100 veces más eficaz que la transmisión a través del aire. ¿Cuál es, entonces, la ganancia en decibelios producida por un estetoscopio que tiene un área de recolección de sonido de  $15 \text{ cm}^2$  y concentra el sonido en dos tímpanos con un área total de  $0,9 \text{ cm}^2$  con una eficiencia de 40 %?

18. Los altavoces pueden producir sonidos intensos con una entrada de energía sorprendentemente pequeña a pesar de su baja eficiencia. Calcula la entrada de potencia necesaria

para producir un nivel de intensidad de sonido de 90,0 dB para un altavoz de 12 cm de diámetro que tiene una eficiencia de 1 %. (Este valor es el nivel de intensidad del sonido directamente en el altavoz).

19. La intensidad debida a un número de fuentes de sonido independientes es la suma de las intensidades individuales. Si una persona grita con una intensidad sonora de 40dB, calcula la intensidad del sonido que emite (en unidades SI) 80.000 personas gritando igual en un estadio.

20. Un diapason emite un tono puro de frecuencia 440 Hz, que es percibido por un receptor con un nivel de presión sonora de 60 dB. Sabiendo que el aire circundante se encuentra a 27° C:

- a) determina la longitud de onda de este tono.
- b) escribe la ecuación de la onda sonora, especificando su amplitud (en Pa), su número de ondas y su frecuencia angular.
- c) Supón que la temperatura del aire se redujese hasta 0° C, ¿qué variaciones sufrirían la frecuencia angular y la longitud de onda?

Ayuda: Recuerda que  $R = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ,  $\gamma = 1,4$  y  $M = 0,029 \text{ kg/mol}$ .

21. Un silbato que emite una frecuencia de 4.300 Hz produce una onda cuyo valor máximo de presión por encima de la presión ambiental es  $4 \times 10^{-2} \text{ Pa}$ . Esta onda se propaga a 344 m/s en el aire.

- a) Escribir la ecuación de onda. Determinar la longitud de onda.
- b) ¿Cuál es el nivel de presión sonora?

22. Un tono puro de 432,9 Hz se propaga en el aire a 344 m/s. La amplitud de la onda de presión en un punto situado a 2 m de la fuente es de 184 mPa.

- a) Encuentra la ecuación de onda y representa en el punto indicado la presión como función del tiempo.
- b) Calcula la intensidad de la onda y el nivel de intensidad en dicho punto.

Ayuda: Recuerda que el umbral de percepción de intensidad es  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  y que la densidad del aire  $1,27 \text{ kg/m}^3$ .

23. El nivel de intensidad de la sirena de un barco, percibido por un marinero en la cubierta a 10 m de distancia de la misma, es de 70 dB. Si la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s, determina

- a) el nivel de intensidad a 1 km de distancia,
- b) la distancia a la cual la sirena dejará de ser audible para un oído normal.

24. Una fuente sonora isótropa, es decir, que emite del mismo modo en todas las direcciones, produce un nivel de intensidad de 65 dB a 1 m de distancia. Si la velocidad del sonido 340 m/s. Calcula

- a) la potencia emitida por la fuente,
- b) el valor máximo de la presión de la onda sonora a 2 m de la fuente.

25. Un parlante de forma semiesférica se ajusta para un nivel de intensidad de 40 dB a 10 m de distancia.

- a) ¿Cuál es la intensidad en  $\text{W/m}^2$  a esa distancia?
- b) ¿Cuál es el nivel de intensidad a 2,5 m de distancia?
- c) Suponiendo que el altavoz semiesférico es una fuente isótropa de sonido, ¿cuál es su potencia?

### 16.13 Ondas de compresión y de corte en sólidos

Ahora comentamos brevemente sobre ondas en sólidos. Este tema no es estrictamente en una dimensión.

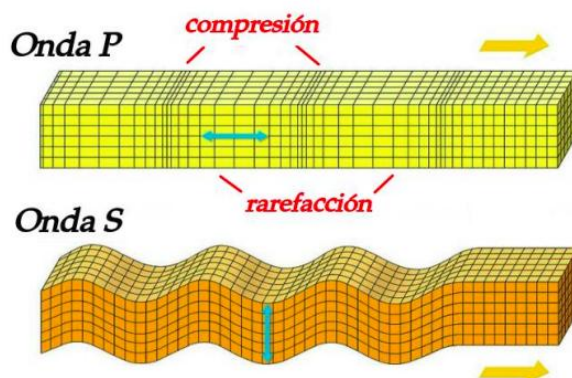


Figura 16.45: Ondas en sólidos

La situación con los sólidos es considerablemente más complicada, lejos del nivel de este texto, con diferentes velocidades en diferentes direcciones, en diferentes tipos de geometrías. Aunque las ondas de sonido en un fluido son longitudinales, las ondas de sonido en un sólido viajan tanto como ondas longitudinales como ondas transversales, con diferentes velocidades dependiendo del tipo de onda.

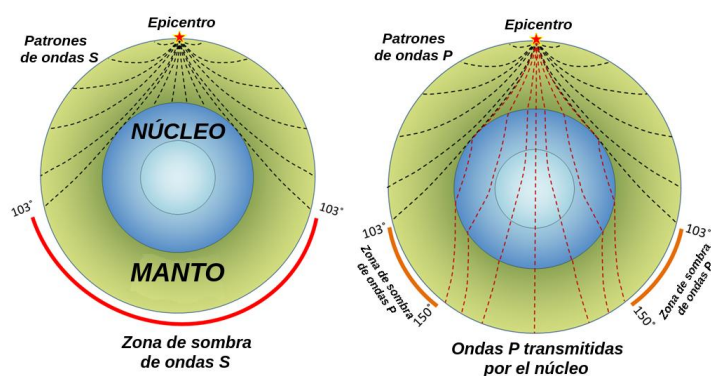


Figura 16.46: Ondas sísmicas

El sonido viaja más rápido a través de los sólidos. Esto se debe a que las moléculas en un medio sólido están mucho más juntas que las de un líquido o gas, lo que permite que las ondas de sonido viajen más rápidamente a través de él. De hecho, las ondas de sonido viajan 17 veces más rápido a través del acero que a través del aire. La velocidad del sonido en acero es aproximadamente 5960 m/s.

Uno de los ejemplos más cercanos para el ser humano son ondas sísmicas, que son esencialmente ondas sonoras en la corteza terrestre producidas por terremotos. Los terremotos producen ondas longitudinales o de presión, llamadas **ondas P** y transversales **ondas S**, **secundarias** o **de corte**.

Ambos tipos de ondas sísmicas viajan más lentamente en medios menos rígidos, como los sedimentos, siendo ambas más rápidas en material más rígido. Las ondas  $P$  tienen velocidades de 4 a 7 km/s, y las ondas  $S$  varían en velocidad de 2 a 5 km/s.

La Tierra tiene un núcleo sólido y exterior a éste un núcleo de material fundido. Resulta que las ondas  $S$  no pasan a través del núcleo líquido y eso produce una “sombra” sobre la superficie terrestre. Las ondas  $P$  en cambio avanza progresivamente más allá de la onda  $S$  a medida que viaja a través de la corteza terrestre. El tiempo entre las ondas  $P$  y  $S$  se utiliza habitualmente para determina la distancia a su fuente, el epicentro del terremoto.

La Fig. 16.46 muestra un esquema de cómo se propagan las ondas  $S$  y  $P$  cuando son generadas en el epicentro de un terremoto. Allí se indican las regiones de sombra, donde las ondas  $S$  están ausentes.

### 16.13.1 Aplicaciones de ondas sísmicas

Las ondas sísmicas se utilizan con frecuencia para buscar petróleo y gas natural en las profundidades de la superficie de la Tierra. Lo que se hace es generar ondas sísmicas que se irradian hacia las profundidades como una onda tridimensional. La onda se refleja en parte y el campo de onda reflejado en cada interfaz de roca se registra en la superficie de la Tierra mediante sensores, llamados geófonos. Éstos se distribuyen en geometrías específicas en la superficie, por encima del área de interés y esa respuesta se utiliza para obtener imágenes del interior de la Tierra, en lugares donde hay interés en obtener una comprensión muy detallada de la geología.

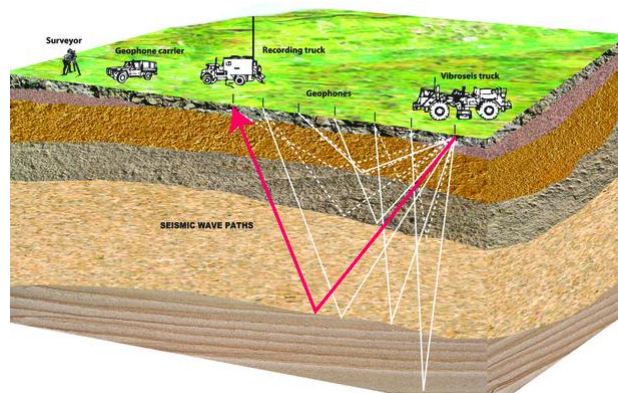


Figura 16.47: Geoexploración con ondas sísmicas

Es interesante que este tipo de investigación no ocurre exclusivamente en la Tierra. En febrero de 2020, la sonda InSight ha mostrado un mapa sísmico del planeta Marte <sup>27</sup>

## 16.14 Velocidad de fase y velocidad de grupo

Hasta ahora hemos estudiado ondas monocromáticas, es decir, ondas que contienen una sola longitud de onda. Sin embargo, en la vida real lo más usual es encontrar ondas

<sup>27</sup><https://www.space.com/nasa-insight-lander-mars-seismically-active.html>

que se componen de diferentes longitudes de onda. A estas ondas llamamos **paquetes de onda**. Se puede obtener un paquete de ondas sumando muchas ondas que tienen diferentes números y amplitudes de onda<sup>28</sup>. Ya hemos visto un ejemplo muy particular de un paquete de ondas al estudiar batido de ondas. Ahora podemos escribir la expresión más general para la superposición, para una variable  $x$  arbitraria. Tenemos que

$$\begin{aligned} y(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= 2A \cos\left(\frac{1}{2} [k_1 - k_2] x - \frac{1}{2} [\omega_1 - \omega_2] t\right) \cdot \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{1}{2} [k_1 + k_2] x - \frac{1}{2} [\omega_1 + \omega_2] t\right), \end{aligned} \quad (16.147)$$

representada en la Fig. 16.147, modificada a partir de una toma desde este interesante video: <https://www.youtube.com/watch?v=t1M9vq-bepA>. También te recomiendo que estudies este otro video: <https://www.youtube.com/watch?v=v9DPzMoWpc0>. Observa que en la segunda función aparecen los valores promedio de la frecuencia angular,  $\omega_{prom}$  y del número de onda,  $k_{prom}$ . Ese término produce una onda que tiene casi las mismas propiedades que cada una de las ondas iniciales. El primer término, con diferencias de frecuencia angular y número de onda, producen una onda con frecuencia mucho más baja. Como hemos visto en la sección anterior, este actúa como la envolvente de la suma.

Observa, además, que lo que tenemos aquí es un batido de onda propagándose.

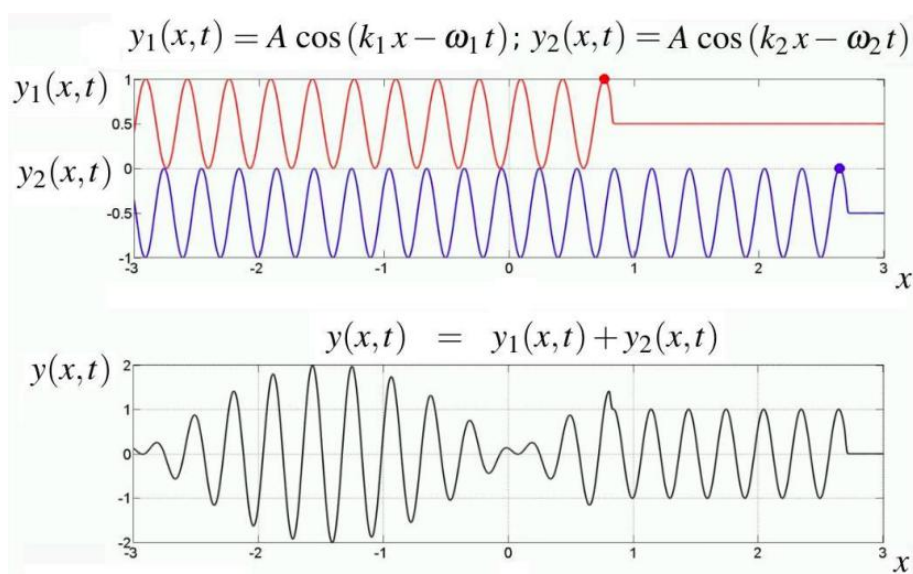


Figura 16.48: Paquete de ondas generado por la superposición de dos ondas

Nace la pregunta de cuál sería la velocidad de propagación para un paquete de ondas como el calculado, dado que hay dos términos en su expresión.

Antes de responder esta pregunta, analicemos primero la pregunta para una onda monocromática. Para estas ondas hemos afirmado, sin demostrar, que la expresión  $v = \omega/k$

<sup>28</sup>El trabajo de Joseph Fourier acerca de la expansión de funciones periódicas en términos de funciones sinusoidales nos permite hacer esto: [https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier\\_series](https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series)



es la velocidad de propagación de la onda. Esta expresión también corresponde a una relación de dispersión, es decir, la dependencia de la velocidad de propagación de una onda en función de la longitud de onda o del número de onda.

La ecuación de onda se puede escribir como

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0, \quad (16.148)$$

usando una notación compacta estándar para las derivadas temporales y espaciales, con un subíndice  $t$  o  $x$  que denota esas derivadas en cada caso. La función de onda se denota  $u(x, t)$  y en su forma compleja, la expresión para una plana es  $u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t + \phi)}$ . La fase es una función de la posición y del tiempo,  $\Phi(x, t) = kx - \omega t + \phi$ . Si nos preguntamos cómo se mueven puntos definidos por una fase constante, entonces obtenemos que

$$\frac{d\Phi(x, t)}{dt} = k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \implies \omega(k) = vk, \quad (16.149)$$

que es la relación de dispersión lineal que ya conocemos. De aquí vemos que la velocidad a la que se propagan esos puntos de fase constante, que como sabemos representan un frente de onda, está definida por

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (16.150)$$

Esta velocidad se denomina **velocidad de fase**.

En el ejemplo anterior, con la superposición de dos ondas viajeras, la velocidad de fase corresponde a la velocidad promedio,

$$v_f = \frac{\omega_{prom}}{k_{prom}}, \quad (16.151)$$

corresponde al movimiento de una fase particular en la onda promedio. En el video mencionado anteriormente, presta atención al punto verde.

En general, esta no es la única velocidad de una onda que puede ser definida.

Sabemos que las ondas propagan energía. La velocidad a la que se propaga la energía se denomina **velocidad de grupo**. Su nombre se origina en el hecho de que se piensa en un paquete de ondas que contiene un grupo de ondas. Sin embargo, como veremos luego, también se puede definir para una onda monocromática.

Si en nuestro ejemplo anterior consideramos que ambas ondas tienen frecuencias levemente diferentes, entonces

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 + \delta\omega \\ k_1 &= k_2 + \delta k. \end{aligned} \quad (16.152)$$

Luego, la velocidad de grupo, que corresponde a la velocidad de la envolvente queda definida por

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}, \text{ o bien, } v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (16.153)$$

**Observación:** Si bien está fuera de nuestro alcance todavía, en Mecánica Cuántica la energía y momentum lineal para una partícula libre se escriben, de acuerdo a las relaciones de De Broglie, como  $E = \hbar\omega$  y  $p = \hbar k$ , respectivamente y entonces

$$v_g = \frac{dE}{dp}. \quad (16.154)$$

Ahora podemos determinar la velocidad de grupo de una onda monocromática

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_f k}{dk} = v_f. \quad (16.155)$$

Es decir, **para una onda monocromática, las velocidades de grupo y de fase coinciden.** Esto no es así en general para paquetes de ondas, pulsos.

**La velocidad de grupo  $v_g$  es la velocidad a la cual se transmite la información** <sup>29</sup>. Para ondas electromagnéticas, ésta corresponde a la velocidad de la luz. ¿Pueden existir velocidades mayores que la de la luz? Sí, la velocidad de fase  $v_f$  puede ser mayor que la velocidad de la luz, pero no corresponde a procesos en los cuales se transmite información.

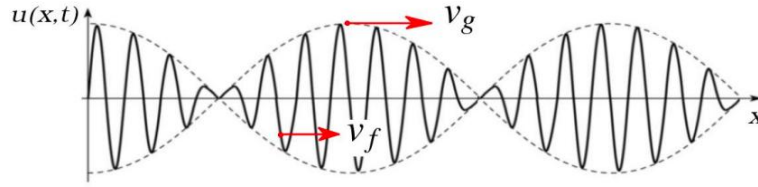


Figura 16.49: Velocidad de fase y velocidad de grupo

Una forma estándar de encontrar la relación de dispersión es usar una onda plana, en forma compleja,  $u(x,t) = A e^{i(kx - \omega t)}$  y reemplazarla en la ecuación diferencial correspondiente. Para la ecuación de onda, Ec. (16.148), obtenemos

$$\omega^2 - v^2 k^2 = 0 \implies \omega(k)^2 = v^2 k^2, \text{ es decir, } \omega(k) = \pm vk \quad (16.156)$$

Debido a que puede ocurrir que para un valor de  $k$  exista algún número de frecuencias angulares es que una expresión de este tipo se denomina relación de dispersión y no función de dispersión.

Cuando queremos conocer algo en profundidad, lo observamos de distintos ángulos o puntos de vista. Reanalicemos la ecuación de onda. La escribimos como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0. \quad (16.157)$$

Es decir, se satisface si se cumple

$$(u_t - v u_x) = 0, \quad (16.158)$$

$$(u_t + v u_x) = 0. \quad (16.159)$$

<sup>29</sup>Esto tiene sentido, porque es imposible enviar información con una onda monocromática pura. Piensa al respecto.

Así escrita, vemos que, como sabemos, estas ecuaciones describen ondas que se mueven hacia la derecha,  $u_+(x,t) = f(x - vt)$  y hacia la izquierda,  $u_-(x,t) = g(x + vt)$ , con velocidad  $v$ , respectivamente. Si nuevamente reemplazamos la forma compleja en ambas ecuaciones, obtenemos

$$-i\omega - vik = 0 \implies \omega(k) = -vk, \quad (16.160)$$

$$-i\omega + vik = 0 \implies \omega(k) = +vk. \quad (16.161)$$

Ahora comprendemos mejor la razón de la relación de dispersión cuadrática original, Ec. (16.156).

## 16.15 Ondas no lineales

Hemos mencionado varias veces el hecho de que las ondas que hemos estudiado son ondas lineales porque satisfacen el principio de superposición lineal, lo que implica que la ecuación que las describe es una ecuación lineal. También hemos dado cuenta de que existen ondas no lineales, descritas por ecuaciones en donde la función de onda aparece en alguna(s) parte(s) con una potencia distinta de 1. Antes de ello, hemos deducido la ecuación para el péndulo simple, que observamos es no lineal debido a la presencia de la función seno (que hemos linealizado para pequeñas oscilaciones).

En la historia de la física, el tema de ondas no lineales tema fue comenzado a estudiar gracias al buen ojo de un ingeniero escocés, John Scott Russell. Russell estaba haciendo estudios acerca de la mejor forma que debía tener el casco de botes de carga que transitaban por canales angostos, tirados por caballos que caminaban por la orilla.

En un día de agosto de 1834, Russell se dió cuenta de que cuando uno de esos botes se detuvo de pronto apareció un pulso en frente del bote que no disminuyó su amplitud y ni desapareció, como habrás observado muchas veces que ocurre con pulsos en el agua. De hecho, Russell cuenta que siguió ese pulso por varios kilómetros.



Figura 16.50: Solitón en líquido de poca profundidad

En el video siguiente <https://www.youtube.com/watch?v=wEbYELtGZwI>, que te invito a observar detenidamente varias veces, podrás ver una onda de este tipo: un pulso creado en el laboratorio. Una de las particularidades de este pulso es que viaja sin deformarse y sin perder energía; es decir, su amplitud no cambia. A este tipo de pulso se le denomina “onda solitaria” o “solitón”<sup>30</sup>

<sup>30</sup>Este último nombre fue acuñado por Martin Kruskal y Norman Zabuzky cuando en 1965 encontraron estas ondas en un sistema diferente. Ya habrás escuchado que el término “ón” se asocia a partículas, como “bosón” y “fermión”. Kruskal y Zabuzky usaron esa descripción por ser estas excitaciones muy estables, como partículas

La descripción matemática de este fenómeno fue encontrada en 1895 por Diederik Korteweg <sup>31</sup> and Gustav de Vries <sup>32</sup>. La ecuación de Korteweg - de Vries (o de KdV, como comúnmente se le dice) describe una onda en un marco de referencia que se mueve con el agua a una rapidez de  $\sqrt{gh_0}$  sobre una capa de agua poco profunda, de profundidad  $h_0$ . <sup>33</sup>

Así, escrita en su forma adimensional, la ecuación de KdV es

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (16.162)$$

Para comprender esta ecuación, que podrás estudiar con mucho mayor profundidad en otros textos o cursos, se analiza en el límite en que el término con tres derivadas es despreciable:

$$u_t + uu_x = 0, \quad (16.163)$$

donde hemos redefinido las variables de modo que el factor 6 no está presente <sup>34</sup>. Al estudiar la solución de esta ecuación se observa que produce un patrón como el mostrado en la Fig. 16.51, donde cada pulso corresponde a un instante posterior. Es decir, existe un instante en que la onda se rompe, como sucede con las olas en el mar, cuando rompen cerca o en la playa (poca profundidad).

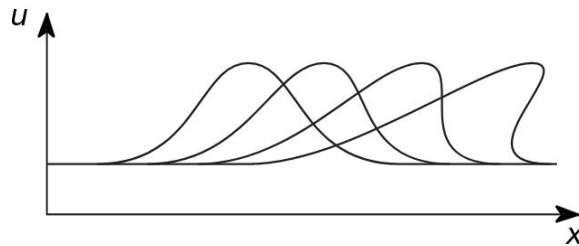


Figura 16.51: Rompimiento de una onda debido a efectos no lineales

La relación de dispersión para la ecuación de KdV, despreciando el término no lineal,

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (16.164)$$

se obtiene reemplazando la función de onda en su forma compleja:

$$-i\omega - ik^3 = 0 \implies \omega(k) = -k^3. \quad (16.165)$$

Claramente esta es una relación no lineal y eso hace una enorme diferencia, pues  $v_f = \omega/k = -k^2$  y  $v_g = -3k^2$ , que nos indica que **la velocidad de propagación depende de la longitud de onda**. Observa que las velocidades de fase y de grupo son diferentes.

Recordemos que para ecuación de onda lineal,  $v_f = v_g = \frac{\omega}{k}$ . Esta velocidad es independiente del número de onda debido a que la relación de dispersión es lineal. Las ondas descritas por una relación de dispersión lineal son **ondas no-dispersivas**. Estas ondas

<sup>31</sup><http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Korteweg.html>

<sup>32</sup>[http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De\\_Vries.html](http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Vries.html)

<sup>33</sup>Te recordarás que ésta es la expresión para la velocidad de ondas utilizada anteriormente para ondas en una cubeta de ondas.

<sup>34</sup>Esta ecuación se denomina **ecuación de Burgers** y tiene su propia historia e importancia: [https://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'_equation)

ondas no cambian de forma a medida que se propagan. Ya hemos visto el ejemplo de ondas sinusoidales, pero la forma puede ser arbitraria.

Cuando las velocidades de fase y de grupo son diferentes, es decir cuando la relación de dispersión es no lineal, tenemos una **onda dispersiva**. En este caso, las diferentes longitudes de onda presentes en el paquete de onda viajan a velocidades de fase diferentes. Esto provoca que las diferentes frecuencias que componen la onda se propagan a diferentes velocidades, produciendo que la onda haga más amplia y disminuya su amplitud, como muestra la Fig. 16.52 <sup>35</sup>. En ésta, un pulso no dispersivo que penetra en una región del espacio, indicada por el punto rojo, en donde el pulso sufre dispersión.

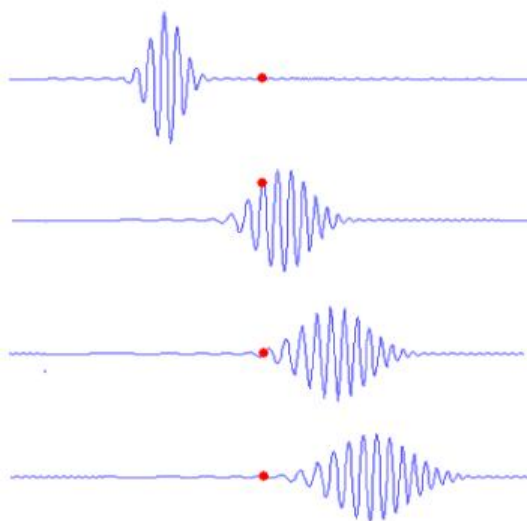


Figura 16.52: Dispersión de un paquete de ondas

La dispersión es muy conocida por nosotros, porque la hemos observado durante nuestra vida. En efecto, es muy probable que todos hemos visto un arco iris, en el cual la dispersión causa la separación espacial de una luz blanca en componentes de diferentes longitudes de onda. Por supuesto, este efecto lo podemos crear haciendo pasar luz por un prisma, como muestra la Fig. 16.53 <sup>36</sup>.

La dispersión no ocurre en la ecuación de KdV (ya hemos visto que el pulso mantiene su forma) porque hay un balance entre el término con tres derivadas parciales espaciales (el término dispersivo) y el término no lineal, el segundo término.

Para un solo pulso que viaja hacia la derecha con velocidad  $v$ , la función de onda de KdV es

$$u(x,t) = \frac{v}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{v}{4}} (x - vt) \right]. \quad (16.166)$$

La ecuación de KdV describe ondas en agua poco profundas, pero también aparece en muchas otras descripciones de fenómenos ondulatorios, incluyendo la descripción de

<sup>35</sup>tomada de <https://blog.soton.ac.uk/soundwaves/further-concepts/2-dispersive-waves>

<sup>36</sup>Autor: Jorge Chávez B.

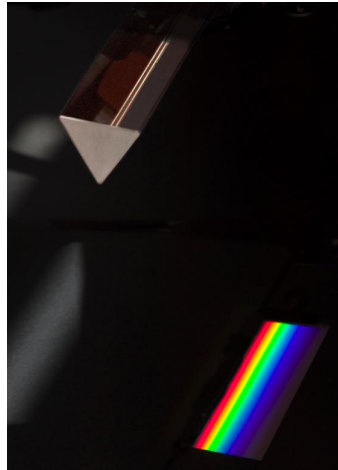


Figura 16.53: Dispersión de la luz por un prisma

un flujo rotante de fluido que baja por un tubo, ondas de presión en mezclas de líquido y burbujas de gas, ondas en plasmas, etc.

Si miras nuevamente el video, verás que se hace colisionar dos solitones. En una colisión de este tipo se observa una recuperación perfecta de las formas de onda y velocidades después de la colisión.

Las aplicaciones de solitones son muy variadas, van desde aplicaciones a telecomunicaciones via fibra óptica; en electrónica, con la generación de pulso ultra angostos en esquemas de comunicación no lineal; aplicaciones en fotónica, física atómica, y un largo etc.

Si quieres conocer más acerca de solitones, te invito a leer este artículo escrito por uno de los físicos que (re)iniciaron este tema <http://www.scholarpedia.org/article/Soliton>.



## 17. ONDAS EN DOS DIMENSIONES

Hemos estudiado algunos conceptos importantes en el tema de ondas usando ondas en una dimensión. En general, por supuesto, las ondas se propagan en 3 dimensiones (o en 4 dimensiones, como es el caso de ondas gravitacionales) y luego se hace necesario estudiarlas. En más dimensiones aparecen fenómenos interesantes que son dignos de estudio, como la difracción o la refracción. A esto nos abocamos aquí, principalmente en dos dimensiones.

### 17.1 Frente de onda: ondas planas y ondas esféricas

La foto de la Fig. 17.1 es el resultado de un experimento en el que se inyecta una pequeña cantidad de aire sobre la superficie de un líquido, perturbándolo en un punto. Esta perturbación genera ondas concéntricas con amplitud que decrece a medida que nos alejamos del origen de la perturbación. El decrecimiento se debe al amortiguamiento de las partículas del medio, del cual no nos preocuparemos. Es decir, supondremos que nuestro medio sufre oscilaciones armónicas simples después de ser perturbado.

En la figura se han marcados dos zonas donde las partículas del líquido están oscilando en fase. En la zona celeste, están todas en un valle, mientras que en la zona de color rojo, todas están en una cresta de la oscilación. Esto significa que las partículas en cada una de esas zona del espacio están en fase entre sí. Definimos un **frente de onda** como el lugar geométrico donde todas las partículas del medio están oscilando en fase.

Así, lo que muestra la figura es un **frente de onda circular**, en dos dimensiones producido por una perturbación puntual. Por supuesto la perturbación no es un punto, sino una pequeña zona; matemáticamente podemos suponer que es un punto. Esto es lo que



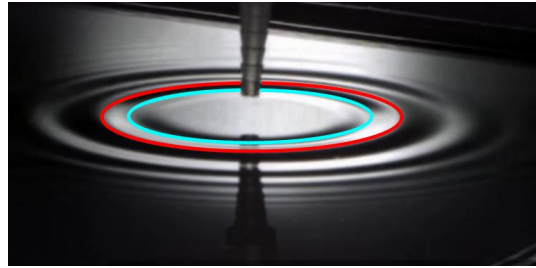


Figura 17.1: Frente de ondas circular en una cubeta de ondas

se denomina una **fente puntual**. La separación espacial entre cada frente de onda del mismo color, es decir por ejemplo entre crestas es, sabemos, la longitud de onda,  $\lambda$ .

### 17.1.1 Ondas planas

Podemos suponer que hay una fuente que tiene una dimensión y que perturba el medio. Esto se puede lograr si toma una vara recta y se hace oscilar sobre la superficie de agua. Lo se observa, al igual que antes son valles (remarcados en color celeste) y crestas (en color rojo) que muestran zonas en el espacio que tienen la misma fase, creando un **frente de onda plano**, como se muestra en la 17.2.

En la Fig. 17.3 se observa un esquema de planos sucesivos, algunos los cuales yacen a lo largo de los valles y otros a lo largo de las crestas de una función sinusoidal que representa una onda perturbación que se mueve en dos dimensiones. La **dirección de propagación** de la onda queda descrita por el **vector de onda**,  $\vec{k}$ . Una característica importante del vector de onda es que **siempre es perpendicular al frente de onda en todo punto**.

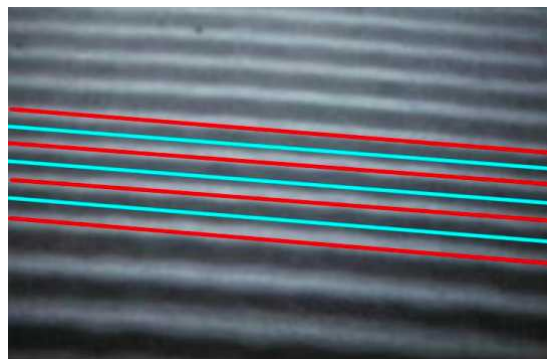


Figura 17.2: Frente de ondas plano en una cubeta de ondas

En una dimensión posicionábamos un punto de la onda con la coordenada  $x$  y en el argumento de la función de onda aparece entonces el producto  $kx$ , donde  $k$  es el número de onda, que es un escalar. En más dimensiones, necesariamente debemos considerar el vector de posición,  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  y el vector de onda  $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ , escrito aquí en coordenadas cartesianas. Sabemos que la única combinación posible para obtener un escalar con un par de vectores es usando el producto punto. Por lo tanto, una función de onda descrita por una sinusoidal en más dimensiones, que describe una onda que se aleja de la fuente, se escribe

$$y(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi), \quad (17.1)$$



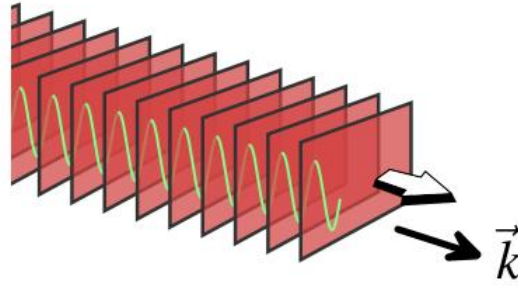


Figura 17.3: Esquema de frente de ondas plano

que se denomina **función de onda plana**. La velocidad de propagación para una onda monocromática es

$$v = \frac{\omega}{|\vec{k}|}. \quad (17.2)$$

Hemos visto también una descripción en variable compleja de una onda, así que podemos escribir la **forma más general para una una función de onda plana** como

$$y(\vec{r}, t) = A e^{(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}, \quad (17.3)$$

donde se deja implícito que tomamos la parte real o la parte imaginaria de la función, dependiendo de la necesidad.

Este es el tipo de onda con la que trabajaremos en este texto. Eso no deja que mencionemos ondas esféricas.

### 17.1.2 Pausa matemática

Hasta ahora hemos estudiado la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}. \quad (17.4)$$

Por otro lado, conocemos de la Ec. (8.26) la forma que tiene el operador gradiente

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (17.5)$$

A partir de este operador, haciendo el producto interior consigo mismo, podemos obtener el **operador Laplaciano** o simplemente *nabla cuadrado*:

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (17.6)$$

Este operador, al igual que el gradiente, se puede escribir en otro sistemas coordenados, algo que aprenderás en un libro avanzado de Cálculo.

Para un sistema con simetría esférica, cuándo la función sobre la que actúan estos operadores solo dependen de  $r$ , se escriben

$$\vec{\nabla} = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (17.7)$$

y

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (17.8)$$

respectivamente

Aquí terminamos nuestra pausa matemática.

### 17.1.3 Ondas con simetría esférica

Para la perturbación generada por una fuente puntual, en tres dimensiones tendremos un **frente de onda esférico**, es decir cascarones esféricos concéntricos, como muestra la Fig. 17.4. Las ondas esféricas se propagan con simetría esférica, que significa que la función de onda solo depende de la distancia a la fuente,  $r$ .

Notamos que en una dimensión, con coordenada  $x$  por ejemplo, lo que queda del operador Laplaciano es el primer término, que es el operador que aparece en el lado izquierdo de la ecuación de onda en una dimensión.

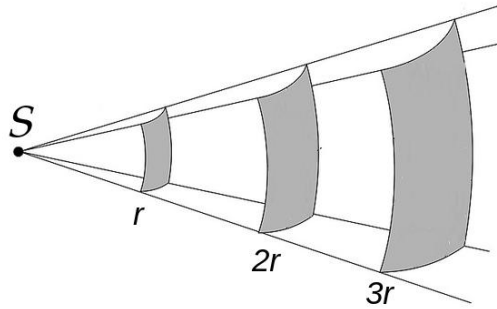


Figura 17.4: Frente de ondas esférico

Por lo tanto, podemos escribir la **ecuación onda para ondas en dos o tres dimensiones** como

$$\nabla^2 y(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (17.9)$$

Podemos usar la Ec. (17.8) para escribir la función de onda de una onda esférica

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial y(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial t^2}, \quad (17.10)$$

que a su vez se puede escribir de una forma más útil (¡entretiénete derivando para confirmar lo afirmado!) como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 r y(r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(r, t)}{\partial t^2}. \quad (17.11)$$

Observamos que aparece naturalmente la combinación  $ry(r, t)$ , y que si definimos ésta como una nueva función de onda  $\Phi(r, t) \equiv ry(r, t)$ , recuperamos **la forma** de la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, t)}{\partial t^2}. \quad (17.12)$$

Como ya conocemos la solución de esta ecuación, escribimos una “onda plana”

$$\Phi(r, t) = ry(r, t) = A e^{(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}, \quad (17.13)$$

o bien, usando el hecho que para simetría esférica  $\vec{k} \cdot \vec{r} = kr$ <sup>1</sup>

$$y(r, t) = A \frac{1}{r} e^{(kr - \omega t + \phi)}, \quad (17.14)$$

que es la solución de la ecuación de onda que describe una onda esférica que se aleja de la fuente.

## 17.2 Efecto Doppler

De seguro habrás notado el cambio en el tono, es decir la frecuencia, de una sirena de ambulancia o de bomberos cuando se acerca y luego se aleja del lugar donde te encuentras. Si estás detenido cuando el vehículo viene hacia tí, la frecuencia es más alta de lo que sería si el vehículo estuviese detenido. Por otro lado, cuando el vehículo se aleja de tí, el observador, la frecuencia es menor. No es necesario que el observador esté estacionario y la fuente moviéndose. El efecto se produce si es la fuente la que está quieta y el observador es quien se mueve respecto de ella. Si no los has notado, el Dr. Sheldon Cooper te puede enseñar: <https://www.youtube.com/watch?v=z0EaoilzgGE>

El efecto de cambio de frecuencia debido a que la fuente se acerca o aleja del observador se denomina **efecto Doppler**, en honor a un físico y matemático austriaco Christian Doppler<sup>2</sup> quien lo descubrió en 1842. El cambio de frecuencia mismo se denomina **corrimiento de Doppler**.

El que normalmente lo veamos asociado a ondas de sonido no significa que solo se observa para ese tipo de ondas. El efecto Doppler se aplica a cualquier tipo de onda. De hecho Doppler lo descubrió al estudiar el color de estrellas binarias.

En la Fig. 17.5 (a)<sup>3</sup> se muestra el resultado experimental de una onda que se propaga con una velocidad de 19 cm/s en una cubeta de ondas. La fuente se mueve hacia la derecha a una velocidad de 7 cm/s. Vemos que en un observador estacionario delante del emisor, en el punto  $P$ , mide una longitud de onda menor que un observador que se encuentra detrás de la fuente, en el punto  $P'$ , y que por tanto ve la fuente alejarse. Debido a que  $v = \lambda f$ , donde  $v$  es la velocidad de la onda, la frecuencia que mide el observador detrás de la fuente es menor que la que se observa delante de la fuente.

En la Fig. 17.5 (b), la fuente se mueve a una velocidad de 14 cm/s, mientras que la onda que se propaga con una velocidad de 19 cm/s. Observamos que el frente onda en la parte frontal de la fuente se ha apretado aún más en la dirección de movimiento, reduciéndose la longitud de onda.

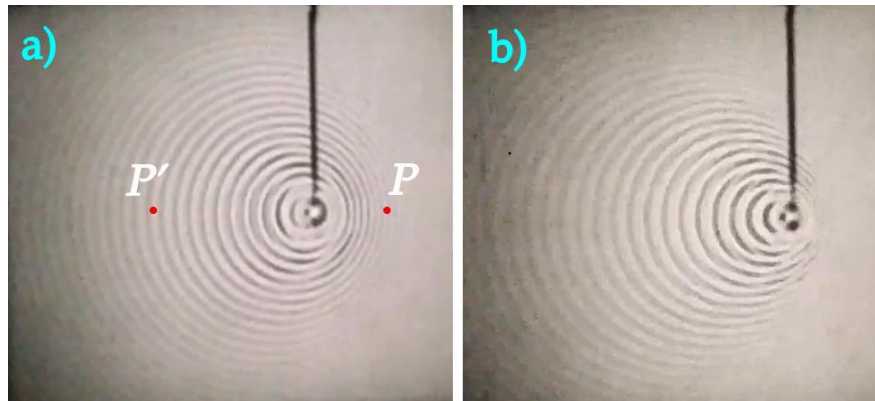


Figura 17.5: Efecto Doppler con fuente a baja velocidad

El efecto Doppler que se observa atrás o delante de una fuente, a lo largo de la dirección de movimiento se denomina **efecto Doppler longitudinal**, que estudiamos a continuación.

### 17.2.1 Observador estacionario respecto de una fuente

Este es un problema de movimiento relativo. La fuente se mueve respecto de un observador estacionario con velocidad  $\vec{v}_s$ , mientras que respecto de la fuente, el frente de onda se mueve isotrópicamente, es decir en todas direcciones de igual modo, a velocidad  $\vec{v}_w$ . La Fig. 17.6 muestra en color rojo el frente de onda emitido por la fuente en tres posiciones distintas. El frente de onda de radio mayor corresponde al frente de onda que fue emitido primero. Vemos con mayor claridad lo que ya habíamos observado en las fotos de la Fig. 17.5: que la longitud de onda observada, en el punto  $P$ ,  $\lambda_o$ , es menor que la longitud de onda de una onda con fuente en reposo en el medio,  $\lambda_s$ ; y que la longitud de onda observada, en el punto  $P'$ , que ve a la fuente alejarse, es mayor que la longitud de onda estacionaria,  $\lambda_s$ .

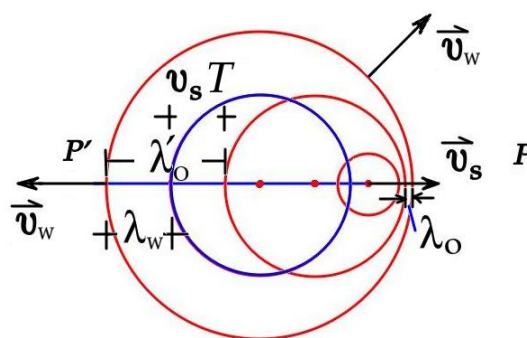


Figura 17.6: Frente de onda según observador estacionario

La velocidad de la onda con la fuente en reposo es  $v_w = \lambda_w f_w$ . Supongamos que el observador estacionario en la posición  $P'$  mide las ondas que pasan por su posición durante

<sup>1</sup>Recuerda que  $\vec{k}$  apunta en la dirección de propagación, que para una esférica es radial

<sup>2</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Christian\\_Doppler](https://en.wikipedia.org/wiki/Christian_Doppler)

<sup>3</sup>Capturas de pantalla de este video: [https://www.youtube.com/watch?v=v-QBLWJZ-\\_M](https://www.youtube.com/watch?v=v-QBLWJZ-_M)

un tiempo  $T = 1/f_w$ , igual al período de la onda. Durante ese tiempo, la fuente habrá viajado una distancia  $v_s T$ . Durante el mismo tiempo, el frente de onda se habrá movido una distancia  $v_w T = \lambda_w$ . La longitud de onda que medirá entonces es

$$\lambda'_o = v_w T + v_s T \implies \lambda'_o = \lambda_w + v_s T, \quad (17.15)$$

que es lo que se observa en la Fig. 17.6. Ahora, la longitud de onda medida por el observador se relaciona con la frecuencia de la oscilación como

$$\lambda'_o = \frac{v_w}{f_o}. \quad (17.16)$$

Por lo tanto, de Ec. (17.17)

$$\frac{v_w}{f_o} = \frac{v_w + v_s}{f_w}. \quad (17.17)$$

Es decir, la relación entre la frecuencia registrada por el observador estacionario en  $P'$  y la frecuencia de la fuente en reposo es

$$f_o = f_w \frac{v_w}{v_w + v_s}, \quad (17.18)$$

de donde deducimos que la frecuencia registrada es menor que la frecuencia original cuando **la fuente se aleja del observador estacionario**.

La existencia del término  $v_w + v_s$  ratifica el hecho que el efecto Doppler se origina en el movimiento relativo entre fuente y observador. Por lo tanto, si la fuente se acerca al observador, como en el punto  $P$ , entonces deberá aparecer la velocidad relativa  $v_w - v_s$ . Otra forma de verlo es que la longitud de onda medida se acorta y

$$\lambda'_o = v_w T - v_s T \quad (17.19)$$

con lo que se obtiene que **si la fuente se acerca al observador estacionario**

$$f_o = f_w \frac{v_w}{v_w - v_s}. \quad (17.20)$$

De aquí se concluye que la frecuencia medida por un observador frente a la fuente en movimiento aumenta.

### 17.2.2 Observador en movimiento respecto de una fuente

Veamos ahora qué sucede si la fuente está en reposo, emitiendo a una frecuencia  $f_w$ , con longitud de onda  $\lambda$ , pero el observador está en movimiento con velocidad  $v_o$ , ya sea alejándose o acercándose a la fuente, como muestra la Fig. 17.7. Supongamos que el observador se acerca a la fuente y el frente de onda se mueve hacia éste con velocidad  $v_w$ , con una longitud de onda  $\lambda_w$ . Denotemos por  $t$  el tiempo que tarda el observador en encontrarse con el siguiente frente de onda. Durante este tiempo el observador se ha movido una distancia  $v_o t$  y el frente de onda una distancia  $v_w t$ . Como la longitud de onda está fija, se cumple entonces que

$$\lambda_w = v_w t + v_o t. \quad (17.21)$$

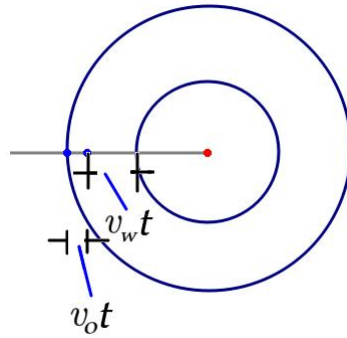


Figura 17.7: Observador móvil y fuente estacionaria

Observa que nuevamente aparece la velocidad relativa  $v_w + v_o$ . Ahora, el tiempo que tarda el observador en encontrarse con el siguiente frente de onda no es más que un período y por lo tanto su inverso es la frecuencia medida por el observador en movimiento. Luego,

$$f_o = \frac{v_w + v_o}{\lambda_w}. \quad (17.22)$$

Pero resulta que  $v_w = \lambda_w f_w$ , por lo tanto, **si el observador se acerca a la fuente estacionaria**

$$f_o = f_w \frac{v_w + v_o}{v_w}. \quad (17.23)$$

De aquí concluimos que la frecuencia registrada por este observador será mayor que la frecuencia original de la onda,  $f_w$ .

Ahora, **si el observador se aleja de la fuente estacionaria**, la velocidad relativa es  $v_w - v_o$  y por lo tanto

$$f_o = f_w \frac{v_w - v_o}{v_w}. \quad (17.24)$$

Consecuentemente, la frecuencia medida será menor que la emitida por la fuente en reposo.

### 17.2.3 Observador y fuente en movimiento

En el caso de que tanto el observador y la fuente se encuentran en movimiento, nuevamente la velocidad relativa es clave. Entonces podemos simplemente resumir lo que ya hemos encontrado. Es decir,

$$f_o = f_w \frac{v_w \pm v_o}{v_w \pm v_s}. \quad (17.25)$$

**Es importante tener claro el significado de los signos.** Por ejemplo, si la fuente y el observador se mueven uno hacia el otro, entonces para compatibilizar con el resultado en la Ec. (17.20) debemos cambiar  $v_s \rightarrow -v_s$ . Esto quedará claro en la sección siguiente.

### 17.2.4 Efecto Doppler con observador en un ángulo

¿Qué sucede cuando un observador estacionario no se ubica en la dirección de movimiento? Supongamos que un observador estacionario se ubica en un punto lateral a la

dirección de movimiento de la fuente. En la Fig. 17.8 vemos un observador delante de la fuente. Llamamos  $\theta$  al ángulo que forman dirección de movimiento y la dirección de observación del fenómeno. Lo que debemos considerar, al igual que cuando hemos visto en los casos anteriores, es cómo se componen las velocidades de la onda y de la fuente a lo largo de la línea que une la fuente y el observador. Entonces podemos utilizar la Ec. (17.20) y escribir

$$f_o = f_w \frac{v_w}{v_w - v_s \cos \theta}. \quad (17.26)$$

De aquí vemos que se obtiene el resultado anterior para  $\theta = 0$ , pero además que en el momento en que la fuente pasa justo perpendicular al observador, es decir cuando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , entonces éste medirá exactamente la frecuencia original de la fuente. Así también, recuperamos el resultado para el registro de un observador estacionario detrás de la fuente, Ec. (17.18) para  $\theta = \pi$ .

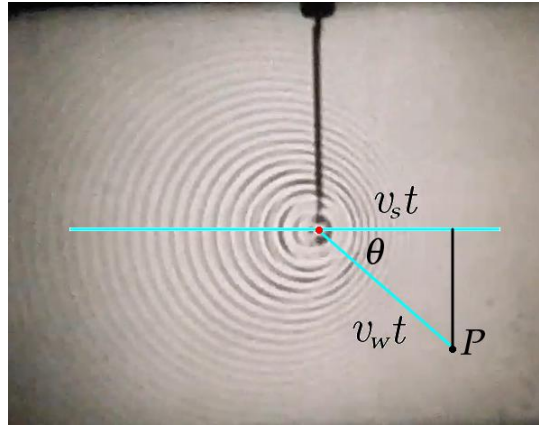


Figura 17.8: Efecto Doppler con observador lateral

¿Cómo aparece el  $\cos \theta$  de un modo más preciso?

Consideremos una fuente puntual que emite una onda de frecuencia constante  $f_s$  en su marco en reposo y se mueve a lo largo de una trayectoria dada por  $\vec{x}_s(t)$ , medida desde un sistema de referencia en reposo, A. Llamamos  $\vec{x}_o(t)$  a la posición donde se mide el sonido, es decir la ubicación del observador y definimos el vector unitario en el instante  $t$ . Esto se muestra en la Fig. 17.28, donde además se ha definido el vector  $\vec{x}_n$ , cuyo vector unitario está definido por

$$\hat{n}(t) = \frac{\vec{x}_o(t) - \vec{x}_s(t)}{|\vec{x}_o(t) - \vec{x}_s(t)|} \quad (17.27)$$

Dado que  $\vec{v}_s = \frac{d\vec{x}_s(t)}{dt}$  es la velocidad de la fuente, entonces  $\vec{v}_s(t) \cdot \hat{n}(t)$  es la proyección de la velocidad sobre la línea de visión del observador.

Si además el observador se está moviendo con velocidad  $\vec{v}_o = \frac{d\vec{x}_o(t)}{dt}$ , entonces  $\vec{v}_o(t) \cdot \hat{n}(t)$  es la proyección de ese vector sobre la línea que une al observador y la fuente en ese instante. Por lo tanto, la expresión más general de la relación entre las frecuencias emitida,  $f_w$  y observada  $f_o$  en un instante dado  $t$  es

$$f_o(t) = f_w \frac{v_w - \vec{v}_o(t) \cdot \hat{n}(t)}{v_w - \vec{v}_s(t) \cdot \hat{n}(t)} = f_w \frac{v_w - v_o(t) \cos \theta_o(t)}{v_w - v_s(t) \cos \theta_s(t)}. \quad (17.28)$$

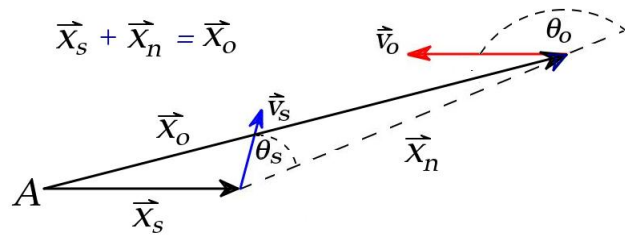


Figura 17.9: Definición de los ángulos formados por el observador y la fuente respecto de la línea que une al observador y la fuente

Por supuesto, en la última igualdad se debe tener cuidado con los signos.

### 17.2.5 Aplicaciones del efecto Doppler

El efecto Doppler se aplica para medir velocidades de partículas de modo no invasivo, ya sea que estén desplazándose o vibrando. Por ejemplo, los velocímetro Doppler acústico (VDA) y el velocímetro Doppler ultrasónica (VDU) se utiliza para medir el flujo en un fluido. Este último se utiliza en medicina para medir flujo sanguíneo, por ejemplo.

Un velocímetro Doppler láser (VDL) emite un haz de luz láser con el que se calcula el corrimiento Doppler en la longitud de onda de ondas reflejadas por partículas de un fluido en movimiento. El mismo instrumento se utiliza para medir la amplitud y frecuencia de vibraciones.

En el control de velocidad en carreteras también se utilizan radares. Los sonares son aplicaciones en navíos, ya sea para uso militar o pesca. También juega un rol importante en el desarrollo de automóviles autónomos. Por supuesto en la Naturaleza, la ecolocalización fue desarrollada probablemente desde temprano. Se observa en delfines y murciélagos, por ejemplo.



Figura 17.10: Ecolocalización

#### Ejemplo 1

Imagina que un camión de bomberos antiguo se mueve a una velocidad de 72 km/h y el sonido de la campana se propaga con una frecuencia de 4 Hz. Si un observador se mueve en sentido contrario a la propagación del sonido de la campana a una velocidad de 18 km/h, acercándose al camión de bomberos, ¿cuál es la frecuencia aparente que percibe el observador? Supón que la velocidad del sonido es 340 m/s.

**Solución** Tenemos que la expresión más general es



$$f_o(t) = f_w \frac{v_w - v_o(t) \cos \theta_o(t)}{v_w - v_s(t) \cos \theta_s(t)}. \quad (17.29)$$

De la Fig. 17.11, y con la ayuda de la Fig. 17.9, vemos que

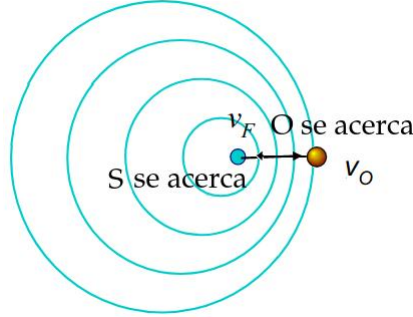


Figura 17.11: Diagrama para Ejemplo 1

$$\cos \theta_o(t) = \cos \pi = -1 \quad (17.30)$$

$$\cos \theta_s(t) = \cos 0 = 1. \quad (17.31)$$

y por lo tanto

$$f_o = f_w \frac{v_w + v_o}{v_w - v_s} = 4 \frac{340 + 5}{340 - 20} = 4,3 \text{ Hz}. \quad (17.32)$$

### Ejemplo 2

Una ambulancia lleva a un enfermo a urgencia a una velocidad de 30 m/s, emitiendo su sirena una frecuencia de 2.000 Hz. Justo te encuentras en un paso de cebra y te enfrentas a la ambulancia que viene a una calle de ti. Compara el cambio en la frecuencia con el caso en que viajas a 30 m/s hacia la ambulancia que está detenida. Supón que la velocidad del sonido es 340 m/s.

#### Solución

Nuevamente usamos la Ec. (17.29). En el primer caso, Fig. 17.12 a),  $v_0 = 0$  m/s y  $\cos \theta_s(t) = \cos 0 = 1$ . Luego,

$$f_o = f_w \frac{v_w}{v_w - v_s} = 2.000 \frac{340}{340 - 30} = 2.194 \text{ Hz}. \quad (17.33)$$

El segundo caso se muestra en la figura b). Aquí,  $v_s = 0$  m/s,  $\cos \theta_o(t) = \cos \pi = -1$  y entonces la Ec. (17.29) da

$$f_o = f_w \frac{v_w + v_0}{v_w} = 2.000 \frac{340 + 30}{340} = 2.176 \text{ Hz}. \quad (17.34)$$

### Ejemplo 3

Consideremos el problema de un emisor que se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad  $v_s$ . El sonido choca con un objeto que se mueve en el mismo sentido con velocidad  $v_{ob}$ . El observador, que se mueve con velocidad  $v_o$ , en el mismo sentido que la

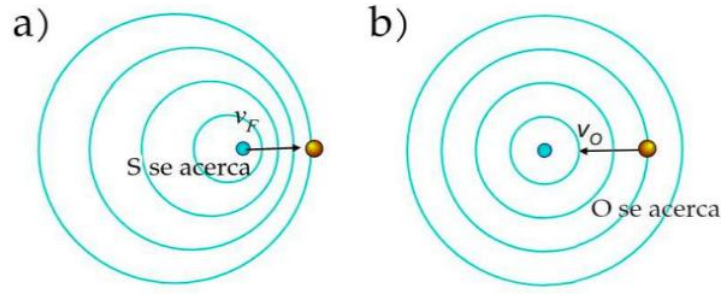


Figura 17.12: Diagrama para Ejemplo 2

fente, mide la frecuencia  $f_o$  del sonido reflejado en el objeto. Supón que las velocidades involucradas en este problemas son menores que la velocidad del sonido,  $v_w$ . Haz el análisis para los siguientes casos:

- a) El observador está en reposo.
- b) El observador es el mismo emisor, como sucede con los murciélagos.

### Solución

Para resolver este problema debemos tener cuidado porque hay eco. Es decir, la onda se refleja en un objeto (que posteriormente sirve como emisor). Para ello es mejor dividir el problema en dos partes:

- i) emisión de sonido por parte de la fuente y recepción por parte de objeto (que resulta ser el observador),
- ii) emisión de sonido por parte del objeto y posterior recepción por el observador.

Luego, i) en este caso el objeto es el observador. En la expresión general,

$$f_o(t) = f_w \frac{v_w - v_o(t) \cos \theta_o(t)}{v_w - v_s(t) \cos \theta_s(t)} \quad (17.35)$$

resulta que

$$\cos \theta_o(t) = \cos 0 = 1 \quad (17.36)$$

$$\cos \theta_s(t) = \cos 0 = 1. \quad (17.37)$$

Entonces,

$$f_{ob} = f_w \frac{v_w - v_{ob}}{v_w - v_s}. \quad (17.38)$$

ii) Ahora, el objeto es el emisor y tiene velocidad  $v_s = v_{ob}$ , en el mismo sentido del observador. Entonces,

$$\cos \theta_o(t) = \cos \pi = -1 \quad (17.39)$$

$$\cos \theta_s(t) = \cos \pi = -1. \quad (17.40)$$

Este resultado requiere una explicación, pues rápida y erradamente se podría haber elegido que los ángulos son  $0^\circ$ , en vez de  $180^\circ$ . Para ellos, hagamos un diagrama, repitiendo la misma forma de pensar que cuando hemos hecho el diagrama de la Fig. 17.9. Esto se muestra en la Fig. 17.13.

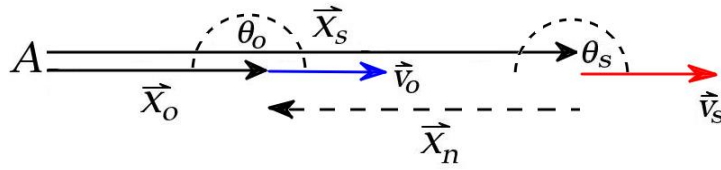


Figura 17.13: Diagrama para Ejemplo 3

Pero esto no es lo único que debe cambiar, pues la frecuencia de la onda de sonido ha cambiado en la reflexión, pasando de  $f_w \rightarrow f_{ob}$ . Entonces, la Ec. (17.35) conduce a

$$f_o = f_{ob} \frac{v_w + v_o}{v_w + v_{ob}}. \quad (17.41)$$

Reemplazando en la Ec. (17.38),

$$f_o = f_w \left( \frac{v_w - v_{ob}}{v_w - v_s} \right) \left( \frac{v_w + v_o}{v_w + v_{ob}} \right). \quad (17.42)$$

Teniendo esta ecuación es ahora muy simple ver los casos preguntados:

a) En este caso,  $v_o = 0$  y

$$f_o = f_w \left( \frac{v_w - v_{ob}}{v_w - v_s} \right) \left( \frac{v_w}{v_w + v_{ob}} \right). \quad (17.43)$$

b) Aquí,  $v_s = v_o$ . entonces

$$f_o = f_w \left( \frac{v_w - v_{ob}}{v_w - v_s} \right) \left( \frac{v_w + v_s}{v_w + v_{ob}} \right). \quad (17.44)$$

Algo curioso que los insectos no han captado, de modo de salvar sus vidas. Si las velocidades del objeto (insecto) y del emisor (murciélago) son iguales (en este caso el observador es el propio murciélago), entonces

$$f_o = f_w \left( \frac{v_w - v_s}{v_w - v_s} \right) \left( \frac{v_w + v_s}{v_w + v_s} \right) = f_w \quad (17.45)$$

¡El murciélago no se percataría de la presencia del insecto!

Para hacer más concreto este problema, resolvamos lo siguiente:

Un murciélago que se mueve a 5,0 m/s está persiguiendo a un insecto volador. Si el murciélago emite un chillido de 40,0 kHz y recibe un eco a 40,4 kHz, ¿a qué velocidad relativa se mueve el murciélago hacia o lejos del insecto? Supón que la velocidad del sonido es 340 m/s.

$$f_o = f_w \left( \frac{v_w - v_{ob}}{v_w + v_{ob}} \right) \left( \frac{v_w + v_s}{v_w - v_s} \right) \implies 40,4 = 40 \left( \frac{340 - v_{ob}}{340 + v_{ob}} \right) \left( \frac{340 + 5}{340 - 5} \right) \quad (17.46)$$

Resolviendo, encontramos

$$0,98 = \frac{340 - v_{ob}}{340 + v_{ob}} \Rightarrow v_{ob} = 3,3 \text{ m/s.} \quad (17.47)$$

Por lo tanto, la velocidad relativa es  $5,0 - 3,3 = 1,7 \text{ m/s}$ .

**Observación:** Si bien nos hemos enfocado en el aspecto técnico para resolver estos ejemplos, te recomiendo que los vuelvas a revisar y piensa qué te dice tu intuición acerca de cómo debe ser la frecuencia

### 17.2.6 Ondas de Choque

En la Fig. 17.14 (a), la fuente se mueve a  $20 \text{ cm/s}$ , mientras que la onda que se propaga con una velocidad de  $19 \text{ cm/s}$ . Nota cómo comienza a distorsionarse el frente de onda cerca de la fuente. En la Fig. 17.14 (b) la velocidad de la fuente ha sobrepasado la velocidad de la onda en el medio. Aquí, la velocidad de la fuente es  $30 \text{ cm/s}$ , y la de la onda  $19 \text{ cm/s}$ .

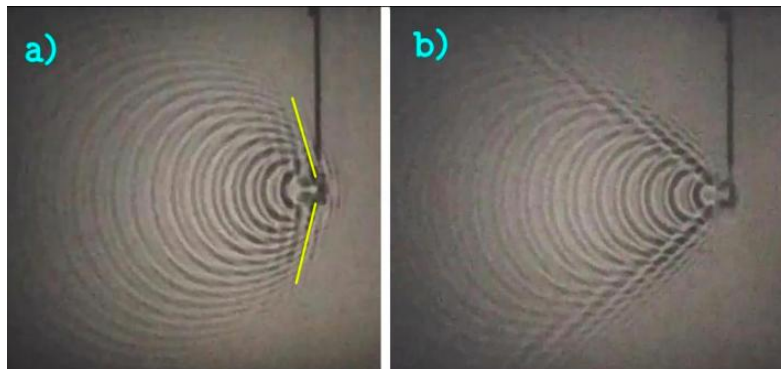


Figura 17.14: Efecto Doppler con velocidad de la fuente (a) cercana a la velocidad de la onda en el medio y (b) sobrepasándola

En la Fig. 17.14 (b) la velocidad de la fuente ha sobrepasado la velocidad de la onda en el medio. Aquí, la velocidad de la fuente es  $30 \text{ cm/s}$  y la de la onda,  $19 \text{ cm/s}$ . Bajo estas circunstancias ocurre el fenómeno denominado **onda de choque**.

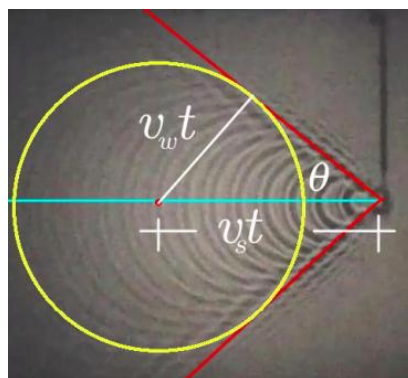


Figura 17.15: Onda de choque. Detalle.

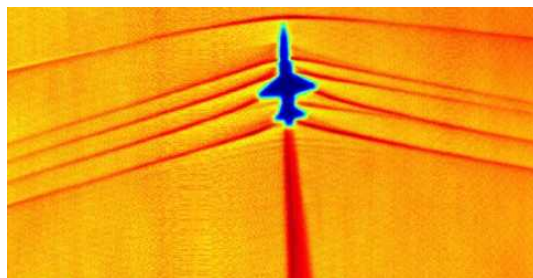


Figura 17.16: Onda de choque producido por un avión T-38 supersónico (NASA)

Si la fuente excede la velocidad de la onda en el medio, el observador no recibe ningún sonido sino hasta que la fuente haya pasado, es decir hasta que pase por su punto de observación el frente de onda triangular que se observa en la Fig. 17.14 (b). Este frente de onda en tres dimensiones resulta ser un cono. La onda de choque que se origina en el hecho de que las ondas se propagan esféricamente desde la fuente, pero la fuente se mueve por delante de cada onda. Se produce interferencia constructiva y el frente de onda resultante. Para el caso de ondas de sonido, se le llama también **boom sónico**.

En la Fig. 17.15 se ha remarcado el frente de onda de la onda de choque e incorporado información de la distancia en que un frente de onda dado ha recorrido en un tiempo  $t$ , junto con la distancia que la fuente ha recorrido. Además, se indica el ángulo de apertura del frente de onda, medido desde la dirección de propagación de la fuente. Este ángulo se denomina **ángulo de Mach** en honor a Ernst Mach <sup>4</sup> y se puede encontrar usando geometría:

$$\sin \theta = \frac{v_w}{v_s}. \quad (17.48)$$

La razón  $\frac{v_s}{v_w}$  da cuenta de cuánto por sobre la velocidad de la onda viaja la fuente; se denomina **número de Mach**, denotado con la letra  $M$ . Luego, el seno del ángulo es igual al inverso del número de Mach.

Las ondas de choque pueden crear cambios violentos de presión en un medio elástico como el aire, el agua o una sustancia sólida. Esto a su vez provoca cambios repentinos y violentos la densidad y la temperatura del medio. Al alterar las propiedades mecánicas, eléctricas y térmicas de los sólidos, se pueden usar para estudiar la ecuación de estado (una relación entre presión, temperatura y volumen) de cualquier material.

Al igual que el efecto Doppler, las ondas de choque también tienen aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en medicina se usa la **litotricia extracorpórea por ondas de choque** que es un método no invasivo para moler cálculos renales de modo que sea expulsado por la orina.

Las ondas de choque no solo se observan en la Tierra, sino también en el resto del Universo. En la Fig. 17.17 muestra una onda de choque, arco de choque <sup>5</sup>, que ocurrió después de que el medio estelar sufrió una colisión con un flujo de partículas cargadas moviéndose rápidamente, alejándose de la estrella LL Ori en la Gran Nebulosa de Orión.

<sup>4</sup>[https://es.wikipedia.org/wiki/Ernst\\_Mach](https://es.wikipedia.org/wiki/Ernst_Mach)

<sup>5</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Bow\\_shock](https://en.wikipedia.org/wiki/Bow_shock)

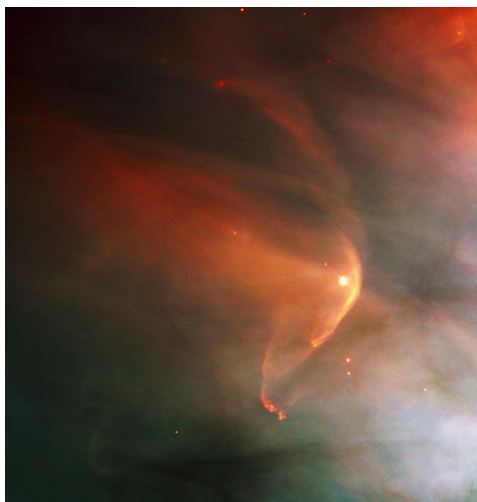


Figura 17.17: Arco de choque LL Orionis en la nebulosa de Orion

### 17.2.7 Nota importante

1) Es importante tener en cuenta que los resultados anteriores son correctos para ondas de sonido y ondas de agua, pero no se pueden aplicar a ondas electromagnéticas. La razón radica, nuevamente, en el hecho que la velocidad relativa fuente-onda o onda-observador es lo relevante en el fenómeno. A diferencia de estos casos, en el electromagnetismo no hay un medio donde las ondas se propagan, ya que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío, sin necesidad de tener un medio <sup>6</sup>. Luego, no existe un medio respecto del cual definir las velocidades relativas. Entonces, para encontrar la versión electromagnética del cambio de frecuencia, debemos usar Relatividad Especial. Esa es otra historia, que no contaremos aquí.

Este artículo ha salido recién en marzo de 2020 y cuenta la historia del efecto Doppler. Te lo recomiendo.

#### **The fall and rise of the Doppler effect**

<https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/PT.3.4429?>

### 17.2.8 Ejercicios

1. Una fuente estacionaria emite una onda sonora de 5.000 Hz. Un objeto se acerca a la fuente estacionaria a 3,5 m/s. ¿Cuál es la frecuencia de la onda reflejada en el objeto?
2. En una demostración común en el aula, se activa un timbre dentro de una pelota de fútbol suave. El zumbador emite un tono de 256 Hz.
  - a) Si la pelota de fútbol se lanza directamente a usted a una velocidad de 12.0 m/s, ¿qué frecuencia escucha?
  - b) Afortunadamente, te agachas a tiempo para que la pelota pase sobre tu cabeza. ¿Qué frecuencia observas cuando la pelota se aleja de ti?

<sup>6</sup>Por supuesto, las ondas electromagnéticas sí se mueven en medios materiales, por eso podemos ver a través de un vidrio, por ejemplo

3. Un tren pasa frente a la estación con velocidad  $40.0 \text{ m/s}$ . El silbato del tren tiene frecuencia  $320 \text{ Hz}$ .

a) ¿Qué cambio en la frecuencia siente una persona parada en la estación cuando pasa el tren?

b) ¿Qué longitud de onda es detectada por una persona en la estación cuando el tren se acerca?

4. Un conductor viaja al norte con velocidad  $25 \text{ m/s}$ . Un auto policial que viaja al sur con velocidad  $40 \text{ m/s}$ , se acerca con su sirena emitiendo a una frecuencia de  $2.500 \text{ Hz}$ .

a) ¿Qué frecuencia observa el conductor cuando se acerca el auto policial?

b) ¿Qué frecuencia observa el conductor cuando se aleja el auto policial?

4. En otra demostración común en el aula del efecto Doppler, el instructor hace girar un timbre, al final de una cuerda o cable eléctrico, en un círculo horizontal alrededor de su cabeza. Si el timbre tiene una frecuencia de  $500 \text{ Hz}$ , el círculo tiene un radio de  $1 \text{ m}$  y el período de movimiento del timbre es de  $0,50 \text{ s}$ , ¿cuáles son las frecuencias máximas y mínimas observadas por los estudiantes en el aula cuando se sientan en sus asientos?

5. Mientras conduce su bicicleta a  $10 \text{ m/s}$  hacia el norte por una carretera, una ambulancia que viaja hacia el sur se le acerca. Observa que la sirena de la ambulancia tiene una frecuencia de  $352 \text{ Hz}$ . Sin embargo, la frecuencia de la sirena es en realidad  $325 \text{ Hz}$ , cuando la ambulancia está en reposo.

a) ¿Qué tan rápido viaja la ambulancia?

b) Después de que la ambulancia te haya pasado, ¿qué frecuencia observas para la sirena?

6. La bocina de tu automóvil tiene la inusual propiedad de emitir un tono puro a una frecuencia de  $440 \text{ Hz}$ . Conduces a  $20 \text{ m/s}$  hacia una pared alta y tocas la bocina brevemente. Después de un corto tiempo, escuchas el eco del sonido, después de que fue reflejado por la pared. ¿Cuál es la frecuencia del eco?

7. Un murciélago en particular emite ondas ultrasónicas con una frecuencia de  $68,0 \text{ kHz}$ . El murciélago vuela a  $12 \text{ m/s}$  hacia una polilla, que viaja a  $3 \text{ m/s}$  hacia el murciélago. La velocidad del sonido es  $340 \text{ m/s}$ .

a) Suponiendo que la polilla pudiera detectar las ondas, ¿qué ondas de frecuencia observaría?

b) ¿Qué frecuencia son las ondas que se reflejan en la polilla y son detectadas por el murciélago?

8. Una ambulancia viaja por una sección recta de la autopista a una velocidad de  $100 \text{ km/h}$ , su sirena emite un sonido a una frecuencia de  $400 \text{ Hz}$ . ¿Qué frecuencia oye un pasajero en un automóvil que viaja en la misma carretera a una velocidad de  $80 \text{ km/h}$ ? Considera todas las posibilidades de velocidad de la fuente y observador, en una dimensión. Supón que la velocidad del sonido en el aire es de  $345 \text{ m/s}$ .

9. Un tren que viaja a  $25 \text{ m/s}$  suena su bocina a una frecuencia de  $800 \text{ Hz}$  cuando se acerca a un túnel en un acantilado.

a) ¿Cuál es la frecuencia observada para una persona de pie cerca de la entrada del túnel?

b) El sonido de la bocina se refleja en el acantilado hacia el conductor del tren. ¿Qué oye el conductor del tren?



10. Un vehículo se desplaza por una carretera recta con exceso de velocidad. Una policía motorizado se encuentra oculto al lado del camino con un radar. El radar microondas de frecuencia  $f = 3 \times 10^9$  Hz. Cuando el auto se está alejando del radar, éste puede medir la velocidad del coche a partir de la interferencia entre las ondas que emite y las ondas que recibe reflejadas en la parte posterior del vehículo. Si en esta interferencia se producen pulsaciones de frecuencia  $f_p = 576$  Hz:

a) Determina qué velocidad lleva el auto.

b) A continuación, la policía se dispone a perseguir al vehículo que se da a la fuga acelerando. Si cuando la policía va a 110 km/h el radar indica pulsaciones de 375 Hz, ¿a qué velocidad va escapando el auto en ese momento?

11. Se emite una onda ultrasónica a  $8,00 \times 10^4$  Hz en una vena donde la velocidad del sonido es de aproximadamente 1,5 km/s. La onda se refleja en los glóbulos rojos que se mueven hacia el receptor estacionario. Si la frecuencia de la señal de retorno es  $8,002 \times 10^4$  Hz,

a) ¿cuál es la velocidad del flujo sanguíneo?

b) ¿Cuál sería la frecuencia de latido detectada y el período de latido?

c) Dibuja un diagrama que muestra el patrón de tiempo e indique el período de tiempo.

12. Supón que la pared ventricular del feto realiza un movimiento armónico simple con amplitud 1,8 mm y frecuencia 115 por minuto.

a) Encuentra la máxima velocidad lineal de la pared del corazón. Supón que el detector de movimiento en contacto con el abdomen materno emite sonido de frecuencia 2 GHz, que viaja a través del tejido a 1,5 km/s.

b) Encuentra la máxima frecuencia del sonido que llega a la pared del corazón del feto.

c) Encuentra la máxima frecuencia a la cual el sonido reflejado llega al detector de movimiento.

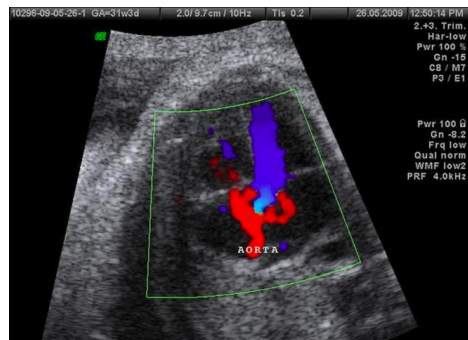


Figura 17.18: Imagen Doppler color del corazón de un feto

13. La velocidad de la sangre en la aorta es normalmente de unos 0,3 m/s. ¿Qué frecuencia de latido esperaría si las ondas de ultrasonido de 4 MHz se dirigieran a lo largo del flujo sanguíneo y se reflejaran desde los glóbulos rojos? Supón que las ondas de sonido viajan a través de la sangre con una velocidad de 1.540 m/s.

14. Una sirena que emite un sonido de frecuencia 1.000 Hz se mueve alejándose de un observador en reposo y dirigiéndose hacia un acantilado con velocidad constante de  $v = 10$  m/s. Determina la diferencia de frecuencia entre la onda que recibe el observador directamente de la sirena y la onda que ha sido reflejada en el acantilado.



15. Un murciélago que persigue una mosca emite ultrasonidos a una frecuencia de 55 kHz. El murciélago se mueve a  $v_M = 13$  m/s y la mosca a  $v_m = 2,4$  m/s ambos en la misma recta y no hay viento apreciable. Calcula en estas condiciones:

- La frecuencia con la que llegan las ondas a la mosca.
- La frecuencia que detectará el murciélago para el sonido reflejado en la mosca.

16. Una sirena policiaca emite una onda senoidal con frecuencia de 300 Hz. Si la rapidez del sonido es de 340 m/s.

- Calcula la longitud de onda del sonido si la sirena está en reposo en aire.
- Si la sirena se mueve a 30 m/s, calcula la longitud de onda para las ondas adelante y atrás de la fuente.
- Si la sirena está en reposo y el receptor se mueve hacia la izquierda a 30 m/s, ¿qué frecuencia oye?
- Si la sirena se está alejando del receptor con una rapidez de 45 m/s relativa al aire, y el receptor se mueve hacia la sirena con una rapidez de 15 m/s relativa al aire, ¿qué frecuencia oye el receptor?
- La patrulla con su sirena de 300 Hz se mueve hacia una bodega a 30 m/s, intentando atravesar su puerta. ¿Qué frecuencia escucha el conductor reflejada de la bodega?

17. Con sus compañeros del curso de física se les ha ocurrido ir a un lago a andar en bote. Seis de ustedes se suben a un bote. Mientras van navegando se ponen a saltar arriba del bote, produciendo una oscilación vertical, a medida que el bote navega velocidad  $v$ . El bote efectúa 12 oscilaciones en 20 segundos y cada oscilación produce una cresta de ola. Cada ola tarda  $\Delta = 6$  s en llegar a la orilla que se encuentra a 12 m de la barca. Además se observa que el ángulo que forman las dos ramas del rastro que deja la embarcación en el lago (ver figura) es de  $90^\circ$ . Para este caso se pide:

- ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas generadas en la superficie del agua?
- ¿A qué velocidad se desplaza la barca por el estanque?



Figura 17.19: Rastro dejado por bote en el agua

18. En el planeta Arrakis<sup>7</sup>, un ornitoide macho vuela hacia su compañera a 24 m/s mientras canta a una frecuencia de 1.190 Hz. La hembra estacionaria oye un tono de 1.260 Hz. Calcula la rapidez del sonido en la atmósfera de Arrakis.

<sup>7</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Arrakis>

19. Una persona se encuentra en lo alto de una torre de altura  $h = 300$  m. Hacia la base de la misma se acerca un móvil que dista inicialmente  $d = 400$  m con una velocidad constante de 108 km/h, emitiendo un sonido de frecuencia fija,  $f$ . El aire en que se efectúa la experiencia se encuentra a  $17^\circ\text{C}$ , existiendo un viento en el mismo sentido que el movimiento del móvil de 36 km/h de velocidad. Sabiendo que la frecuencia  $f$  emitida por el móvil es 10 veces mayor que la del sonido fundamental producido por un tubo sonoro cerrado por un extremo y abierto por el otro de 2 m de longitud en el que el aire de su interior esté también a  $17^\circ\text{C}$ , determina la frecuencia inicial del sonido percibido por la persona en lo alto de la torre. La velocidad del sonido en el aire a  $0^\circ$ : 330 m/s.

20.

a) Bob pasea en su auto a 20 m/s por una calle de su ciudad un viernes por la noche. Por una pista paralela se acerca en sentido contrario Alice a una velocidad de 2 m/s. Las dos pistas están separadas 10 m. El viento sopla en el sentido de avance de Alice a 5 m/s y la temperatura es de  $15^\circ\text{C}$ . Bob emite un sonido con un silbato a Alice con una frecuencia de 500 Hz en el instante en que la recta que los une mide 20 m. ¿Qué frecuencia escucha ella?

b) Ambos se detienen y se colocan enfrentados. Si los dos silban con la misma frecuencia (500 Hz) ¿en qué puntos de la calle se producen máximos de interferencia.

c) Poco tiempo después, ambos se encuentran en un bar (a la temperatura de  $25^\circ\text{C}$ ) tomando una cerveza. Para impresionar a Alice, Bob dispone de un vaso de 30 cm de longitud que hace vibrar con un silbido de 5.000 Hz. Bob va llenando el vaso lentamente de cerveza hasta escuchar por primera vez un pitido intenso. ¿Cuál es la altura de cerveza que ha echado?

d) ¿De qué armónico se trata?

e) ¿Qué altura de cerveza es necesaria para que se produzca el tono fundamental si la velocidad del sonido en el aire en calma a  $0^\circ$  es 340 m/s?

21. Un tren se mueve a una velocidad constante de 25 m/s hacia un paso a nivel. Un automóvil está parado cerca de la intersección, a 30 m de distancia de las vías. Si la frecuencia del silbato del tren es de 500 Hz, ¿cuál es la frecuencia que perciben los ocupantes del automóvil cuando el tren se encuentra a 40 m de la intersección?

22. Considera la situación en la que dos vehículos A y B circulan cada uno por su carretera, como se indica en la Fig. 17.20, con velocidades  $v_A = 20$  m/s y  $v_B = 30$  m/s, respectivamente. Un observador O se encuentra en la posición indicada, moviéndose sobre la recta AC a una determinada velocidad  $v$ . La temperatura ambiente es de  $26^\circ\text{C}$  y sopla viento (con velocidad de 8 m/s) en la dirección y sentido de avance del auto A.

a) Si el auto A hace sonar su bocina a  $f_A = 200$  Hz y este sonido es percibido por el observador a 225 Hz, determina la velocidad del observador.

b) En un punto sobre la recta AB a 200 m de A. ¿Se tiene situación de máximo o mínimo de interferencia? (Velocidad del sonido a  $0^\circ$  y con el viento en calma  $v_s = 335$  m/s)

23. Un murciélago vuela hacia una pared lisa emitiendo ultrasonidos del 36 kHz. La frecuencia de la onda reflejada en la pared que percibe el murciélago es de 38 kHz.

a) ¿A qué velocidad viaja el murciélago?

b) Si se aleja de la pared a la misma velocidad, ¿cambiará la frecuencia percibida? ¿En cuánto?

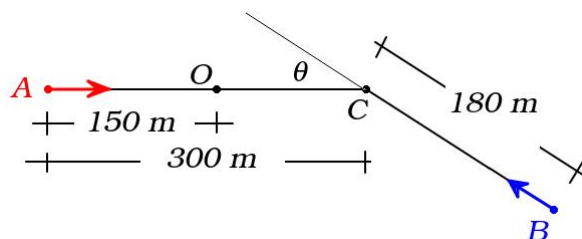


Figura 17.20: Dos vehículos se aproximan en un ángulo

24. Un murciélago, que se mueve a 5 m/s, persigue a un insecto volador. Si el murciélago emite un chillido de 40 kHz y recibe de vuelta un eco a 40,4 kHz, ¿a qué rapidez y en qué dirección (acercándose o alejándose del murciélago) se mueve el insecto?

25. Por una carretera, un camión viaja con velocidad constante de 120 km/h y emite permanentemente una sirena, con frecuencia de 1.500 Hz. Una persona se encuentra detenida en la pista paralela frente a una distancia perpendicular de 10 m. Estando el aire en calma, la velocidad del sonido es 345 m/s. Determina la frecuencia que escucha la persona cuando el camión:

- a) se encuentra a una distancia aproximada de 14 m de la persona.,
- b) se encuentra frente a él,
- c) se ha alejado una distancia aproximada de 14 m de él.
- d) ¿Qué frecuencia escucha el copiloto cuando abre la ventana y se encuentra en la posición especificada en c)?

26. Una sirena montada en el techo de una estación de bomberos emite sonido con una frecuencia de 900 Hz. Un viento estable sopla con una rapidez de 15 m/s. La rapidez del sonido en aire tranquilo es de 343 m/s. Los bomberos se aproximan a la sirena desde diferentes direcciones a 15 m/s. ¿Qué frecuencia escucha un bombero si se aproxima desde una posición a favor del viento? y ¿qué frecuencia escucha un bombero que se mueve en la dirección contraria al viento?

27. Una persona se encuentra parada en un cruce de caminos, y la persona escucha sonidos de diferentes frecuencias que provienen de la sirena de un auto policial que se acerca. La frecuencia de auto policial es  $f_0 = 640$  Hz. En  $t = 0$  s la persona percibe una frecuencia de 660 Hz, y en  $t = 5$  s la persona percibe una frecuencia de 704 Hz. Determina el módulo de la aceleración constante con que se está moviendo el auto policial. Considera que la rapidez del sonido es 330 m/s

28. Los detectores de tormentas que usan los meteorólogos para prevenir desastres, funcionan usando el efecto Doppler. Estos detectores emiten ondas hacia la zona de estudio y detectan las ondas reflejadas por las partículas de la atmósfera. A partir de la rapidez de las partículas de la atmósfera pueden deducir si una tormenta se aproxima o no a cierto lugar. Sea el caso mostrado en la figura, donde una estación meteorológica manda una alerta de que se va a aproximar una tormenta en las próximas horas. Si el detector emitió ondas de frecuencia  $f$  y detectó que la frecuencia de las ondas reflejadas por las partículas de la tormenta es el 101 % de  $f$ .

- a) ¿Es correcta la alerta mandada por la estación meteorológica? Justifica adecuadamente.

b) Si la rapidez de las ondas en el aire es  $V$ , determina la rapidez de las partículas de la atmósfera.

### 17.3 Principio de Huygens

Calcular en general la forma que toma un frente de onda para una fuente arbitraria es complicado. Solo imagine los como interfieren los frentes de onda para la señal de WiFi en una casa, como se muestra en la Fig. 17.21.<sup>8</sup> Cristiaan Huygens<sup>9</sup>, brillante matemático, físico y astrónomo holandés tuvo una idea genial y muy profunda. Se preguntó que dado que los frentes de onda son lugares geométricos, si era posible utilizar geometría para construir los frentes de onda, dado un frente de onda conocido.

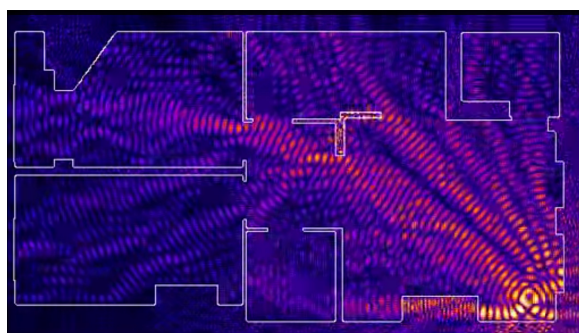


Figura 17.21: Señal de WiFi en una casa

¿Por qué razón podría haber estado Huygens interesado en tal problema? Después de todo en ese tiempo no había WiFi. ¡Óptica y astronomía! Si uno quiere hacer buenas observaciones astronómicas debe poder construir buenos telescopios. Pero si los lentes de los telescopios están contruidos de modo deficiente, no se podría hacer buena astronomía. Para construir buenos lentes se debe poder conocer cómo se modifican las ondas de luz al pasar por las distintas interfases, es decir, cómo cambian los frentes de onda.

La idea de Huygens es como sigue. Él supuso que cada punto de un frente de onda arbitrario es una fuente puntual y por lo tanto genera frentes de onda esféricos. A estos frentes de onda se les denomina **ondículas**. Esto de inmediato genera un problema, porque una fuente puntual genera ondas esféricas en todas las direcciones y el frente de onda original solo se propaga en una dirección dada. Pues bien, hizo una suposición *ad hoc*, sin explicación, solo porque funciona. Supuso que el hipotético frente de onda esférico sobre el frente de onda solo propaga ondas “hacia el futuro”, es decir, hacia donde se propaga la onda originalmente. Además, se vió obligado a suponer que esas ondículas no interferían entre sí. El siguiente paso es considerar el intervalo de tiempo  $\Delta t$  durante el cual se propaga ese frente de onda esférico a una velocidad  $v$ . Esto produce una semi-esfera de radio  $v\Delta t$  con origen en cada fuente puntual. Se repite este procedimiento de modo geométrico tantas veces como sea necesario. La unión de todos los puntos a una distancia  $v\Delta t$  de la posición original es el nuevo frente de onda. En la Fig. 17.22 se muestran dos ejemplos, uno para un frente de onda plano y otro para la construcción de un frente de onda esférico.

<sup>8</sup>Mapa simulado de una señal, por Jason Cole

<sup>9</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan\\_Huygens](https://en.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens)

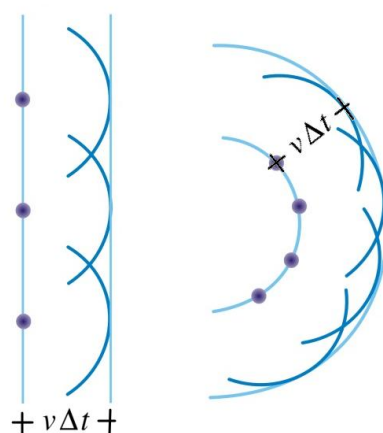


Figura 17.22: Construcción de frentes de ondas por principio de Huygens

La propuesta de Huygens no es perfecta, ya que no pudo explicar bien la modificación de un frente de ondas cuando se topa con obstáculos <sup>10</sup> y fue mejorada casi 140 años después por Augustin-Jean Fresnel, <sup>11</sup> un ingeniero y físico francés, quien hizo grandes contribuciones a la teoría de la óptica. Esto contribuyó a zanjar la disputa de si la luz era una onda o una partícula (corpúsculo), como había planteado Isaac Newton. Al menos durante unos cien años, hasta el descubrimiento de la Mecánica Cuántica.

Aún así, Huygens pudo obtener una demostración geométrica de dos leyes importantes de la óptica, la **ley de la reflexión** y la **ley de la refracción**.

## 17.4 Ley de reflexión

Cuando hablamos de la ley de reflexión nos referimos normalmente a ondas luminosas, ondas electromagnéticas, en el ámbito de la óptica. Pero podemos introducir esta ley usando un sistema distinto, esto es, ondas en agua poco profunda. El equipo experimental para estudiar este tipo de fenómenos es la llamada cubeta de ondas, <sup>12</sup> que es una cubeta con poca agua, elementos para producir perturbaciones periódicas sobre ella y un sistema de luces, incluyendo una estroboscópica para registrar los fenómenos.

Se debe tener en mente que las ondas que se producen en este tipo de sistemas no están descritas por la ecuación de onda que ya hemos aprendido, sino por una ecuación que se deduce de la ecuación que describe la dinámica de fluidos, la **ecuaciones de Navier-Stokes**.

<sup>13</sup> En este tipo de sistema, la velocidad de propagación está dada por

$$v = \sqrt{gh}, \quad (17.49)$$

donde  $h$  es la profundidad del líquido. Luego, para aguas más profundas, las ondas en este sistema viajan más rápido que en uno con aguas menos profundas.

<sup>10</sup> Este fenómeno se denomina **difracción** y lo estudiaremos más adelante

<sup>11</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Jean\\_Fresnel](https://en.wikipedia.org/wiki/Augustin-Jean_Fresnel)

<sup>12</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Ripple\\_tank](https://en.wikipedia.org/wiki/Ripple_tank)

<sup>13</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations)

En la Fig. 17.23 se muestra una onda plana que incide sobre una superficie que forma un ángulo dado con el vector de onda incidente  $\vec{k}_i$ . En la parte *b* se muestra el frente de onda reflejado y su vector de onda,  $\vec{k}_r$ . Además, se ha agregado los ángulos de incidencia,  $\theta_i$ , y reflejado,  $\theta_r$ , que **los frentes de onda forman con la superficie donde ocurre la reflexión**. La ley de reflexión establece que estos ángulos son iguales, es decir,

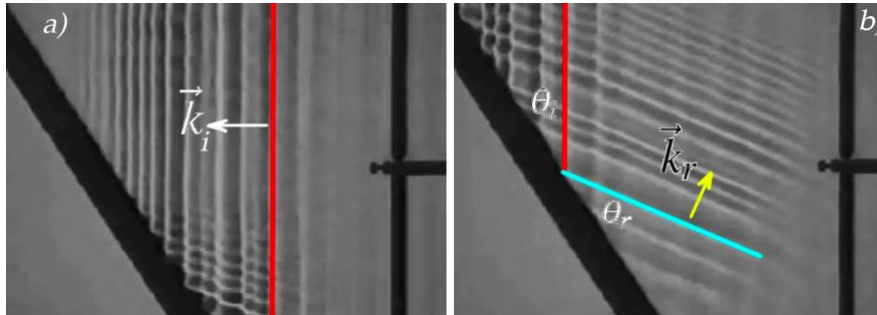


Figura 17.23: Frentes de onda incidente y reflejados

$$\theta_i = \theta_r. \quad (17.50)$$

Es una ley simple, pero importante.

Antes de realizar la demostración de la ley de reflexión mediante el principio de Huygens, introducimos el concepto de *rayo*. Sabemos que el vector de onda es un vector perpendicular al frente de onda en cada punto. Podemos reemplazar la información del vector de onda por unos rayos que tienen la misma dirección y le damos un sentido para indicar hacia dónde se propaga la onda.

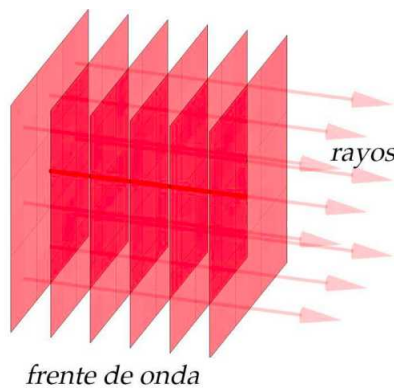


Figura 17.24: Relación entre rayos y frente de onda

La Fig. 17.25 muestra una onda incidente sobre una superficie que lo reflejará por completo. Se muestran tres rayos y tres frentes de onda, junto con una recta normal a la superficie, denotada por la letra *N*. **Cuando se trabaja con rayos, los ángulos de incidencia y reflejados se definen respecto de la normal al plano de incidencia.**

Se observa que los puntos *ABC* a lo largo del frente de onda plano no llegan al plano de incidencia simultáneamente. Esto es, las ondículas en los puntos *DJI* serán emitidas en tiempos distintos, ya que el rayo *B* aún tendrá que recorrer la distancia *EJ* y el rayo *C* deberá haber recorrido una distancia *EI*.

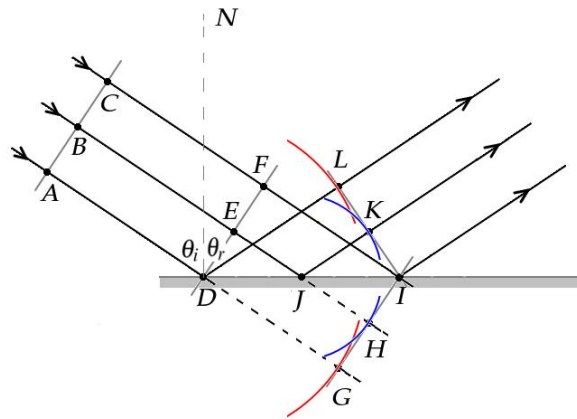


Figura 17.25: Demostración ley de reflexión

En la figura se han dibujado además dos frentes de onda esféricos. El de color rojo corresponde a la ondícula generada en el punto  $D$ , mientras que el frente esférico azul fue producido en el punto  $J$ . Observa que el frente de color rojo ha arribado a los puntos  $L$  y  $G$ , mientras que el de color azul, a los puntos  $K$  y  $H$ . Por supuesto, los puntos  $G$  y  $H$  corresponden a un hipotético frente de onda plano que hubiese tenido la trayectoria del original si la superficie reflectante no estuviese allí. La única opción de que esta coincidencia sea cierta es que los ángulos de incidencia y de reflexión sean iguales.

## 17.5 Ley de refracción

Ahora suponemos que tenemos dos medios donde las ondas viajan con velocidades distintas. Para el caso de ondas en líquido poco profundo, como en la cubeta de ondas, esto se logra sumergiendo una placa transparente de modo de reducir la profundidad y por lo tanto la velocidad de propagación. En la Fig. 17.26 se muestra el resultado experimental de un experimento de este tipo, con una onda plana incidiendo desde la izquierda. Apenas se observa la onda reflejada. Más importante, se observa cómo se “quiebra” el frente de onda, es decir, cómo el frente de onda transmitido cambia su dirección de propagación al pasar al medio con propiedades distintas.

En la Fig. 17.27 se muestra un esquema de una onda plana incidiendo desde un medio con velocidad de propagación  $v_1$ , a uno donde se propaga con velocidad  $v_2$ , tal que  $v_1 > v_2$ . Al igual que en la Fig. 17.26, vemos que el frente cambia de dirección.

Usemos la construcción Huygens para ilustrar la ley de refracción. Supongamos que definimos la mayor velocidad de propagación que una onda puede alcanzar, y que queda descrita por la Ec (17.49). A esta velocidad límite la denominamos  $v_0 = \sqrt{gh_0}$ . Suponemos que la profundidad del líquido  $h_1$  desde donde incide la onda es menor que  $h_0$ , luego  $v_1 < v_0$ . De acuerdo a nuestra suposición, la velocidad en el medio 2 es  $v_2$  y es menor que  $v_1$ .

Podemos definir un **índice de refracción**,  $n$ , que sirve para cuantificar el cambio de velocidad en el medio respecto de la velocidad límite de propagación. Para el medio  $i$ ,

$$n_i = \frac{v_0}{v_i} = \sqrt{\frac{h_0}{h_i}} > 1. \quad (17.51)$$



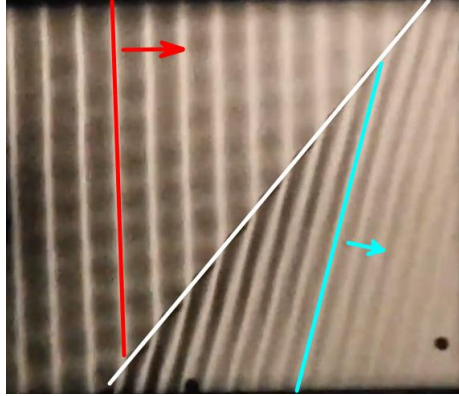


Figura 17.26: Refracción en una cubeta de ondas

Por lo tanto, podemos escribir las velocidades en ambos medios como  $v_i = v_0/n_i$ ,  $i = 1, 2$ .

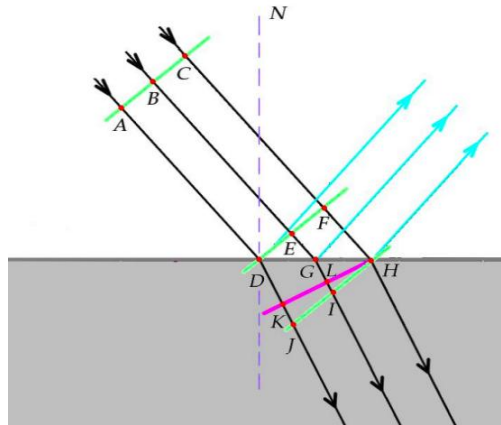


Figura 17.27: Demostración ley de refracción

Los puntos A, B y C en el frente de onda incidente llegan en instantes distintos a los puntos D, G y H en la interfase entre ambos medios. Si la interfase no existiese el frente de onda ABC llegaría hasta los puntos KIH en el mismo instante en que el frente de onda ABC alcanza el punto H. Ahora, durante el tiempo en que el rayo progresa desde el punto F hasta el punto H, en el medio 1, el rayo que sigue la dirección AD ha cruzado la interfase y se ha propagado desde el punto D al punto K, con una velocidad  $v_2$ . La distancia entre estos dos puntos es  $v_2 t$ . También, la distancia  $\overline{DJ}$  es  $v_1 t$  porque estamos suponiendo que la interfase no existe en este caso. Por lo tanto,

$$\overline{DK} = \frac{n_1}{n_2} \overline{DJ} \quad (17.52)$$

En la figura hay una figura inserta donde se observa que hay dos triángulos que comparten el mismo lado,  $\overline{DH}$ . De aquí,

$$\sin \theta_1 = \frac{\overline{DJ}}{\overline{DH}} \quad \text{y} \quad \sin \theta_2 = \frac{\overline{DK}}{\overline{DH}}. \quad (17.53)$$



Por lo tanto, obtenemos la relación entre las funciones seno y la igualamos a la Ec. (17.53) para obtener

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (17.54)$$

Es decir, el resultado al que hemos llegado es una ley física importante llamada **Ley de Snell**.

$$n_2 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2. \quad (17.55)$$

## 17.6 Interferencia

Hemos aprendido cómo superponer ondas en una dimensión y ahora estudiaremos interferencia en más dimensiones. Para ello consideraremos dos fuentes puntuales separadas por una distancia  $d$  que por tanto emiten frentes de onda circulares en dos dimensiones (esféricos en tres dimensiones). Veremos cómo se ve en dos dimensiones este experimento pensado.

El experimento real, con luz fue realizado en 1803 por el científico Thomas Young<sup>14</sup>, demostró interferencia en el contexto de la luz como una onda. Por eso este tipo de experimento se denomina **experimento de Young** o de doble rendija. Curiosamente, Young también trabajó con cubetas de ondas para estudiar interferencia.

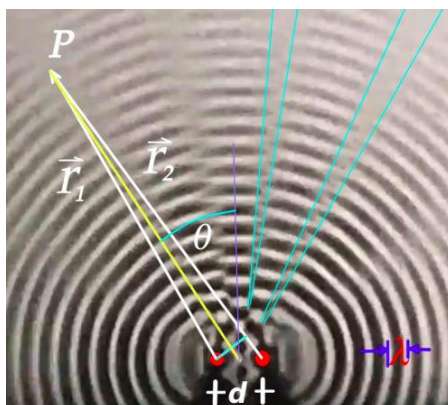


Figura 17.28: Interferencia en dos dimensiones debido a dos fuentes puntuales coherentes

Cuando dos o más fuentes emiten ondas de modo tal que la **diferencia de fase es constante**, se dice que esas son **fuentes coherentes**. En la Fig. 17.28 se muestran dos fuentes puntuales coherentes, marcadas como puntos rojo, cada una de las cuales emite frentes de onda circulares en una cubeta de ondas. Se observan zonas donde hay interferencia destructiva, zonas donde el medio no aparece perturbado. Dos ejemplos de esas zonas se han marcado entre líneas continuas celestes. En la misma figura se ha indicado la longitud de onda,  $\lambda$ .

Hemos elegido un punto  $P$  sobre una zona de interferencia destructiva. Hay dos vectores de posición, que posicionan el punto de observación desde cada fuente, que hemos denotado  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . En la figura, además, hemos dibujado una recta de color amarillo que va

<sup>14</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas\\_Young\\_\(scientist\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Young_(scientist))

desde el punto medio entre las dos fuentes hasta el punto  $P$ . El ángulo polar se ha denotado  $\theta$ .

En la Fig. 17.29 se muestra el detalle de la figura donde aparecen tres líneas paralelas. Las líneas laterales corresponden a los vectores de posición, mientras que la central corresponde a la línea amarilla de la figura anterior. Observa cómo el ángulo  $\theta$  se ha copiado en la figura. ¿Por qué las tres rectas aparecen paralelas? Sucede que hay dos zonas importantes que aparecen naturalmente en el análisis de emisión (radiación) de ondas. Una es la zona cercana y otra es la zona lejana a la fuente. Lo que estamos suponiendo es que estudiamos la zona lejana. En la práctica esto significa en este ejemplo que la distancia a la fuente (desde el punto medio) es mucho mayor que la separación entre las fuentes, es decir,  $r \gg d$ . Por esta razón, los vectores de posición son muy cercanos a ser paralelos, debido a que el punto  $P$  se encuentra “en infinito”.

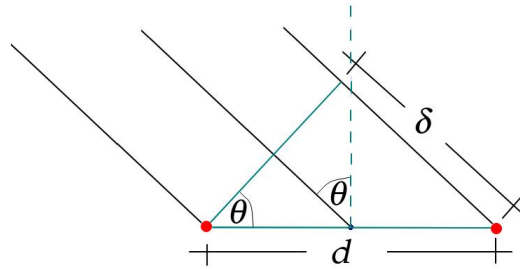


Figura 17.29: Detalle de la Fig. 17.28

En la figura hemos definido la distancia  $\delta$ , que es igual al valor absoluto de la diferencia de los módulos los vectores  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ . Esto es,

$$\delta = |r_2 - r_1| = d \sin \theta \quad (17.56)$$

Si observamos la Fig. 17.28, vemos que  $\delta$  es la diferencia de camino recorrido por cada frente de onda para arribar al punto  $P$ .

Podemos pensar que cada corte que se le haga al frente de onda a lo largo de las direcciones definidas por los vectores de posición  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  está descrito por una función de onda sinusoidal, luego en general escribimos

$$y_i(\vec{r}_i, t) = A_i \sin(\vec{k}_i \cdot \vec{r}_i - \omega_i t + \phi_{i0}), \quad i=1,2 \quad (17.57)$$

Si suponemos dos fuentes iguales, entonces  $k_1 = k_2 = k$ ,  $\omega_1 = \omega_2$  y  $A_1 = A_2$ . Dejamos libre la posibilidad de que ambas fuentes tengan un desfase, y denotamos las constantes de fase de cada fuente como  $\phi_{i0}$ . Luego, la superposición es

$$y(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_1 - \omega t + \phi_{10}) + A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}_2 - \omega t + \phi_{20}). \quad (17.58)$$

Para hacer la superposición podemos utilizar una identidad trigonométrica

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right). \quad (17.59)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 y(\vec{r}, t) &= A \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega t + \phi_{10}) + A \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega t + \phi_{20}) \\
 &= \left[ 2A \cos \left( \frac{1}{2} \left[ (\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) + (\phi_{10} - \phi_{20}) \right] \right) \right] \times \\
 &\quad \times \sin \left( \frac{1}{2} \left[ (\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) + 2\omega t + (\phi_{10} + \phi_{20}) \right] \right). \quad (17.60)
 \end{aligned}$$

El término dentro del paréntesis cuadrado es la amplitud resultante. Usando la definición de  $\delta$  notamos que

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 = k_1 r_1 - k_2 r_2 = k(r_1 - r_2) = -k(r_2 - r_1) = k\delta. \quad (17.61)$$

La última igualdad, sin el signo menos, ocurre porque solo estamos interesados en el valor absoluto de la diferencia de los módulos de los vectores de posición. Lo mismo sucede con la diferencia de las constantes de fase.

Por lo tanto, la amplitud total en el punto de observación está dada por

$$A_{tot} = 2A \cos \left( \frac{1}{2} [k\delta + \Delta\phi_0] \right). \quad (17.62)$$

Este resultado nos informa que la condición para interferencia destructiva o constructiva en el punto  $P$  depende del valor de la fase total

$$\Delta\phi_{tot} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \Delta\phi_0. \quad (17.63)$$

Por supuesto, esta expresión ya la habíamos encontrado al estudiar interferencia en una dimensión. Lo importante es saber cómo utilizarla.

La intensidad de la onda resultante es proporcional al cuadrado de su amplitud. Por la tanto,

$$I = I_{max} \cos^2 \left( \frac{\Delta\phi_{tot}}{2} \right). \quad (17.64)$$

Usualmente, debido a que ambos emisores emiten en fase,  $\Delta\phi_0 = 0$ , y luego

$$I = I_{max} \cos^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right). \quad (17.65)$$

La Fig. 17.30 muestra esta función. Observa que si no hubiese interferencia, la intensidad sería uniforme, con valor  $I_{max}/2$ .

Concluimos que las zonas de interferencia destructiva se localizan en los lugares donde se cumple que el coseno se anula

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.66)$$

Es decir,

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.67)$$

Por supuesto, puedes chequear que máximos de interferencia constructiva se localizan en los lugares donde se cumple que

$$d \sin \theta = m \lambda \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.68)$$

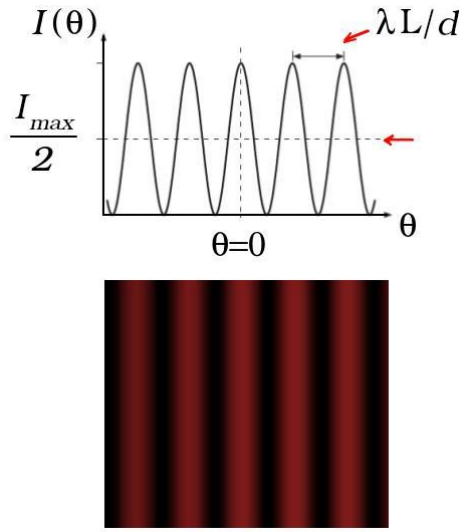


Figura 17.30: Intensidad en experimento de Young: teoría y experimento.

### 17.6.1 Interferencia por fuentes coherentes distintas

Hasta ahora hemos visto el caso de interferencia de fuentes coherentes iguales; en particular, aquellas con la misma amplitud. Analizaremos ahora un caso más general. Consideremos dos fuentes coherentes

$$y(\vec{r}_1, t) = A_1(r_1) \sin(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \phi_1) \quad (17.69)$$

$$y(\vec{r}_2, t) = A_2(r_2) \sin(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \phi_2) \quad (17.70)$$

donde  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores de posición del punto de observación, con origen en la posición de cada fuente. Para encontrar el resultado de la superposición es conveniente utilizar la notación compleja de las ondas planas. Luego, escribimos equivalentemente <sup>15</sup>

$$y(\vec{r}_1, t) = A_1(r_1) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \phi_1)} \quad (17.71)$$

$$y(\vec{r}_2, t) = A_2(r_2) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \phi_2)} \quad (17.72)$$

Por lo tanto, la superposición es

$$y(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \left[ A_1(r_1) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \phi_1)} + A_2(r_2) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \phi_2)} \right] \equiv A(r_1, r_2) e^{i\phi}, \quad (17.73)$$

donde  $A(r_1, r_2)$  es la amplitud resultante y  $\phi$  la fase. Por supuesto, la amplitud de la onda se conecta con la intensidad de la onda y luego es relevante conocerla.

Lo que tenemos es una función compleja. Resulta que el módulo al cuadrado de un número complejo,  $z$ , es igual a  $zz^*$ . Luego, en el caso de una función escribimos

<sup>15</sup>Como hemos mencionado anteriormente, debemos aplicarla parte imaginaria de estas funciones para obtener las funciones de onda anteriores

$y(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) y(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)^* \equiv y_{tot} y_{tot}^*$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 y_{tot} y_{tot}^* &= \left[ A_1(r_1) e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \phi_1)} + A_2(r_2) e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \phi_2)} \right] \cdot \\
 &\quad \left[ A_1(r_1) e^{-i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \omega_1 t + \phi_1)} + A_2(r_2) e^{-i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - \omega_2 t + \phi_2)} \right] \\
 &= A_1(r_1)^2 + A_2(r_2)^2 \\
 &\quad + A_1(r_1) A_2(r_2) \left\{ e^{i[\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)]} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i[\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2)]} \right\} \\
 A(r_1, r_2)^2 &= A_1(r_1)^2 + A_2(r_2)^2 \\
 &\quad + 2A_1(r_1) A_2(r_2) \cos \left[ \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 - (\omega_1 - \omega_2)t + (\phi_1 - \phi_2) \right]
 \end{aligned} \tag{17.74}$$

El tercer término de esta expresión es el más interesante: corresponde al **término de interferencia**. Entonces, los dos primeros términos son los que obtendríamos si no hubiese interferencia.

Es interesante que esta expresión se puede ver como un resultado de vectores en  $\mathbb{R}^3$ . En efecto, consideremos dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , que forman un ángulo  $\theta$  entre ellos, y sumémoslos. Nos preguntamos cuál es el módulo al cuadrado de este vector resultante:

$$\begin{aligned}
 (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B}) &= \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + 2\vec{A} \cdot \vec{B} \\
 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{17.75}$$

Este resultado se denomina **Teorema del Coseno**.<sup>16</sup>

La fase  $\phi$  se obtiene del hecho que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \implies \tan \theta = \frac{\text{Im}[e^{i\theta}]}{\text{Re}[e^{i\theta}]}.$$
(17.76)

Por lo tanto,

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}[y(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)]}{\text{Re}[y(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)]} = \frac{A_1(r_1) \sin \left[ \phi_1 - [\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1] \right] + A_2(r_2) \sin \left[ \phi_2 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 \right]}{A_1(r_1) \cos \left[ \phi_1 - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 \right] + A_2(r_2) \cos \left[ \phi_2 - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 \right]}.$$
(17.77)

### Ejemplo

Dos parlantes vibran gracias osciladores a una frecuencia de 2.000 Hz y con la misma amplitud, pero con una diferencia de fase de  $\pi/6$ . La separación entre los altavoces es de 3 m, como se muestra en la Fig. 17.31. El observador está originalmente en el punto  $P$ , situado a 8 m medidos sobre el eje axial central. ¿Cuánto debe moverse la persona perpendicularmente a ese eje, antes de alcanzar el primer mínimo en la intensidad sonora? Supón que la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s.

<sup>16</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Law\\_of\\_cosines](https://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_cosines)

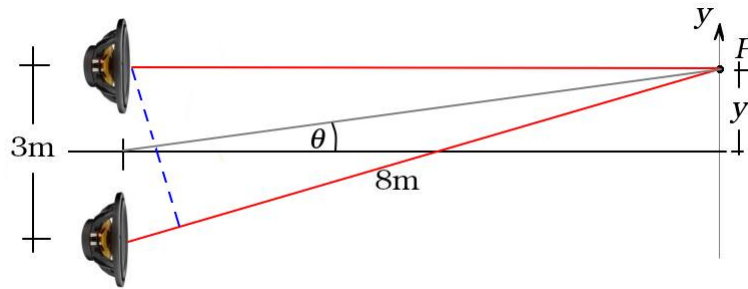


Figura 17.31: Interferencia por dos fuentes

**Solución**

Debemos tener cuidado aquí. Ambas fuentes son coherentes así que observaremos interferencia, pero estas fuentes no están emitiendo en fase. Luego, debemos utilizar la expresión más general

$$I = I_{\max} \cos^2 \left( \frac{\Delta\phi_{\text{tot}}}{2} \right). \quad (17.78)$$

donde

$$\Delta\phi_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta + \Delta\phi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\pi}{6} \quad (17.79)$$

Para que ocurra interferencia destructiva, el argumento de la función coseno,  $\Delta\phi_{\text{tot}}/2$  debe ser un múltiplo impar de  $\pi/2$ . Es decir,

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\pi}{6} \right] = m \frac{\pi}{2} \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.80)$$

Ahora bien, el primer mínimo ocurre para  $m = \pm 1$ , luego

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta + \frac{\pi}{6} = \pi \quad (17.81)$$

Por otro lado, de la figura observamos que

$$\tan \theta = \frac{y}{L}, \quad (17.82)$$

que para ángulos pequeños se puede aproximar  $\tan \theta \approx \sin \theta$ . Esta aproximación siempre la debes chequear. Típicamente ocurre para valores de  $\theta \lesssim 7^\circ$ . Si no se satisface, debes usar la expresión completa, con tangente. Luego, suponiendo que esta aproximación es válida,

$$\frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y}{L} + \frac{\pi}{6} = \pi \quad (17.83)$$

Como  $v = \lambda f$ , encontramos la expresión para la posición del primer mínimo.

$$y = \frac{vL}{2\pi d f} \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = 0,19m. \quad (17.84)$$

Para finalizar, aún queda chequear que la aproximación  $\tan \theta \approx \sin \theta$  es buena:

$$\theta = \arctan \left( \frac{y}{L} \right) = 1,36^\circ. \quad (17.85)$$

Estamos a salvo.

## 17.6.2 Ejercicios

1. Dos parlantes vibran gracias al mismo oscilador a una frecuencia de 2.000 Hz. La separación entre los altavoces es de 3 m, como se muestra en la Fig. 17.32. Un escucha está originalmente en el punto  $P$ , situado a 8 m medidos sobre el eje axial central. ¿Cuánto debe moverse el oyente perpendicularmente a ese eje, antes de alcanzar el primer mínimo en la intensidad sonora?

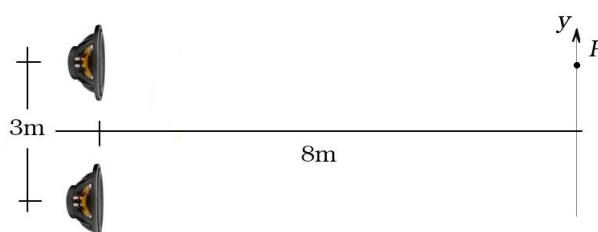


Figura 17.32: Interferencia por dos fuentes

2. Dos altavoces en fase,  $A$  y  $B$ , están separados por 3,2 m. Un oyente está estacionado en  $P$ , que está a 2,4 m frente al parlante  $B$ . Ambos altavoces están reproduciendo tonos idénticos de 214 Hz, y la velocidad del sonido es de 343 m/s. ¿El oyente escucha un sonido fuerte o ningún sonido?

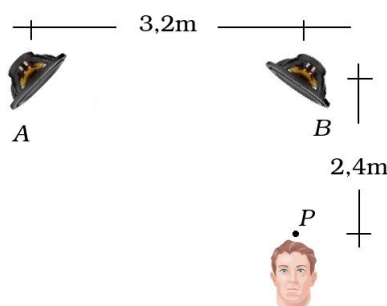


Figura 17.33: Interferencia por dos fuentes

3. Dos altavoces  $A$  y  $B$  están separados por 3,2 m, emiten con una diferencia de fase de  $\pi/4$ . Un oyente está estacionado en  $P$ , que está a 2,4 m frente al parlante  $B$ . Ambos parlantes están reproduciendo tonos idénticos de 214 Hz, y la velocidad del sonido es de 343 m/s. ¿El oyente escucha un sonido fuerte o ningún sonido?

4. Dos altavoces funcionan con el mismo amplificador con una frecuencia de 1.380 Hz. Los dos parlantes están separados por 4 m. Un observador, originalmente en la posición de uno de los altavoces, comienza a alejarse a lo largo de una línea perpendicular a la línea que conecta los dos altavoces. Calcula el número de mínimos de sonido que escuchará el observador mientras el observador se mueve a un lugar a 3 m de los altavoces. Supón que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

5. Dos parlantes vibran debido a dos amplificadores con la misma frecuencia de 2.000 Hz y amplitud. Ambos tienen un desfase de  $\pi/2$ . La separación entre los altavoces es de 3 m,

como se muestra en la figura. Un escucha está originalmente en el punto  $P$ , situado a 8 m medidos sobre el eje axial central. ¿Cuánto debe moverse el oyente perpendicularmente a ese eje, antes de alcanzar el primer mínimo en la intensidad sonora? Supón que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

6. Dos altavoces funcionan con el mismo amplificador y emiten a la misma frecuencia. La señal es fuerte en la posición  $A$ , y en  $B$  se ubica el primer mínimo de la señal. Si  $d = 6,8$  cm,  $L = 11,2$  cm e  $y = 1,73$  cm, ¿cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras?

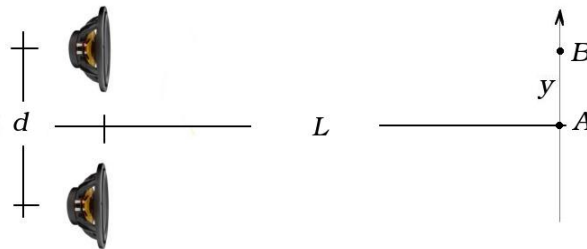


Figura 17.34: Interferencia por dos fuentes

7. Olas de longitud de onda de 5,44 metros inciden sobre un rompeolas con dos aberturas estrechas separadas por una distancia de 247 metros. A la milésima de grado más cercana, ¿cuál es el ángulo correspondiente al primer máximo después del máximo central?

8. Dos altavoces que emiten ondas sonoras de frecuencia única idénticas, en fase entre sí, se colocan a  $d = 6,5$  m de distancia. La longitud de onda de las ondas sonoras es de 3,0 m. Te paras directamente frente al altavoz de arriba, a lo largo de la línea punteada en la Fig. 17.35, a una distancia de 4,5 m. Tu amiga cambia la longitud de onda de las ondas idénticas que emiten los altavoces. ¿Cuáles son las dos longitudes de onda más grandes que, en tu ubicación, resultan en

- interferencia completamente constructiva y
- interferencia completamente destructiva?

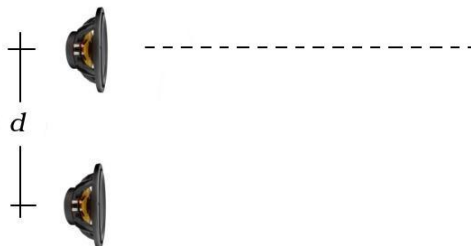


Figura 17.35: Interferencia por dos fuentes

9. Dos altavoces que emiten ondas sonoras de frecuencia única idénticas, en fase entre sí, se colocan a 4,8 m de distancia. La velocidad del sonido es de 340 m/s. Está ubicado en un punto que está a 10 m de un parlante y 8,4 m del otro parlante. ¿Cuál es la frecuencia más baja para la que observa



- a) interferencia completamente constructiva?
- b) interferencia completamente destructiva?

10. Dos altavoces envían ondas sonoras de frecuencia única idénticas, en fase, que tienen una longitud de onda de  $0,80\text{ m}$ . Como se muestra en la Fig. 17.36, los altavoces están separados por  $d = 3,6\text{ m}$ . Tres líneas, etiquetadas de la A a la C, también se muestran en la figura. La línea B mide  $b = 2\text{ m}$ , separada por una distancia de  $a = 1\text{ m}$  de uno de los parlantes. La línea A es parte de la bisectriz perpendicular de la línea que conecta las dos fuentes. Si caminaras por estas líneas, ¿observarías una interferencia completamente constructiva, una interferencia completamente destructiva o algo más? Responde esta pregunta para

- a) línea A,
- b) línea B y
- c) línea C.

Justifica brevemente cada una de tus respuestas

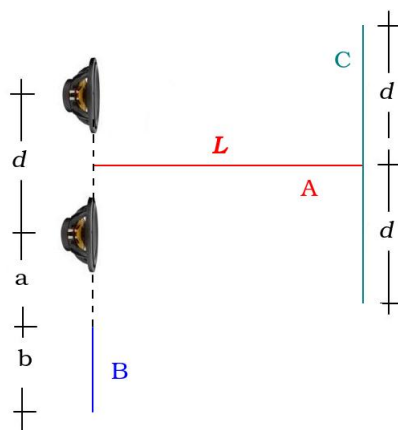


Figura 17.36: Interferencia por dos fuentes

11. Dos altavoces que emiten ondas sonoras de frecuencia única idénticas, con una diferencia de fase entre sí de  $\pi/4$ , se colocan a  $6,5\text{ m}$  de distancia. La longitud de onda de las ondas sonoras es de  $3\text{ m}$ . Te paras directamente frente al altavoz a la izquierda (a lo largo de la línea punteada en la Fig. 17.35), pero a cierta distancia de él. ¿Qué tan lejos está de ese altavoz si la interferencia en su ubicación es

- a) completamente constructiva?
- b) completamente destructiva?

Encuentra todas las respuestas posibles en cada caso.

12. Dos parlantes están alimentados por un mismo oscilador de modo que emiten sonidos en fase y de igual frecuencia ( $680\text{ Hz}$ ), como se indica en la Fig. 17.37. Una persona se encuentra en el punto A, ubicado a  $4,0\text{ m}$  frente al parlante 2. (Velocidad del sonido =  $340\text{ m/s}$ )

- a) ¿Qué percibe la persona: un máximo o un mínimo de intensidad?
- b) Si a continuación la persona se desplaza lentamente desde A hasta el punto B que equidista de los parlantes: ¿Cuánto mínimos de la intensidad percibe durante el recorrido?
- c) Si una persona inicialmente en A, camina alejándose en línea recta del parlante 2: ¿Cuántos mínimos de intensidad podría percibir durante el recorrido?

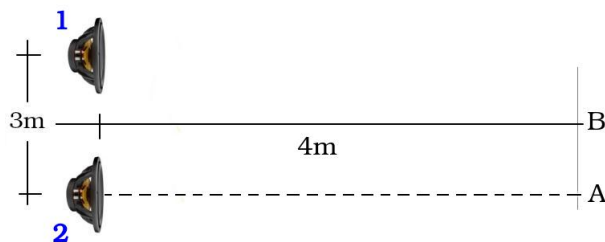


Figura 17.37: Interferencia por dos fuentes

13. En la Fig. 17.38 se muestran dos parlantes que están emitiendo sonidos de igual frecuencia y en fase. Una persona detenida en el punto  $P$  percibe un máximo local de la intensidad del sonido. Las distancias de  $P$  a cada parlante son 9,6 m y 8 m como se indica en la figura.

- ¿Qué valores podría tener la longitud de onda del sonido emitido por cada parlante?
- A continuación la persona se desplaza hacia el punto  $Q$  comprobando que durante el camino percibe un solo mínimo local de intensidad y al llegar  $Q$ , percibe un máximo local de intensidad. Las distancias de  $Q$  a cada parlante son 10 m y 7,6 m como se indica en la figura. ¿Cuál es el valor de la longitud de onda del sonido emitido por cada parlante?

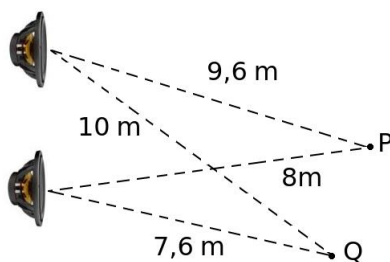


Figura 17.38: Interferencia por dos fuentes

Los siguientes problemas tratan de ondas electromagnéticas, pero puedes hacerlo siguiendo el mismo trabajo que has hecho para ondas de sonido, aun cuando la naturaleza de las ondas son distintas. Basta tener en cuenta, por ahora, que ambos tipos de ondas se puede describir por funciones sinusoidales.

14. La Fig. 17.39 muestra dos antenas que emiten ondas de radio de igual frecuencia, 600 kHz, y en fase. La velocidad de propagación de las ondas de radio en el aire es aproximadamente igual a la de la luz en el vacío,  $3 \times 10^8$  m/s.

- Un observador detecta un mínimo local de la intensidad en el punto  $P$ : ¿Qué valores podría posiblemente tener la distancia  $D$  entre la antena 1 y el punto  $P$ ?
- A continuación, el observador se desplaza hacia el punto  $Q$ , encontrando en el camino cuatro mínimos locales de intensidad, antes de llegar a  $Q$ . Usando esta información: ¿qué valor tiene la distancia  $D$ ?

15. Supón que se desea realizar el experimento de la doble rendija de Young con las ondas de radio de una estación cuya frecuencia es de 106 Hz. ¿Cuál deberá ser la separación entre las rendijas (antenas) para que el primer máximo ocurra a un ángulo de

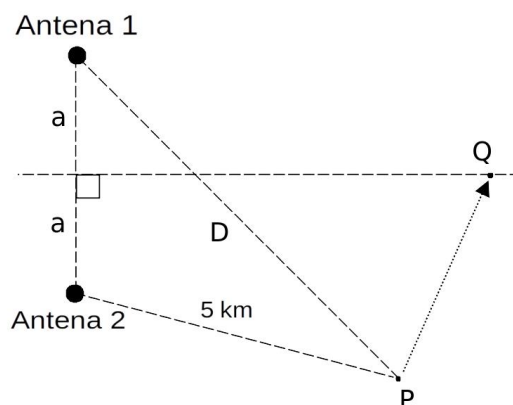


Figura 17.39: Interferencia por dos fuentes

37° respecto de la perpendicular a la línea que une ambas antenas, cuando se observa a una gran distancia de las rendijas?

16. Dos rendijas separadas 1 mm se iluminan con  $\lambda = 6,5 \times 10^{-7}$  m (rojo). Se sitúa una pantalla a 1 m de las mismas para observar las interferencias correspondientes. Determina la distancia entre dos franjas oscuras y dos franjas brillantes consecutivas.

## 17.7 Difracción

La idea esta sección es dar una introducción a este tema, que será estudiado con mayor profundidad cuando visites un curso de electromagnetismo.

Sabemos que una onda queda descrita, entre otras cosas, por un frente de onda. El fenómeno de difracción ocurre cada vez que este frente de onda se ve interrumpido por un objeto. Lo que sucede entonces es que el frente de onda original cambia de dirección producto de la interacción con el objeto. La difracción siempre existe, pero distinto es que se pueda observar: la difracción se observa cuando se distorsiona una onda por un obstáculo cuyas dimensiones son comparables a la longitud de onda de aquella.

La descripción matemática completa de este fenómeno queda más allá del objetivo de este libro. Sin embargo, podemos ganar comprensión de este fenómeno viendo algunos resultados experimentales. En la Fig. 17.40 se muestra el resultado experimental de ondas en una cubeta de ondas cuyo frente de onda se ve cortado por un objeto de tamaño, que llamamos  $a$ , mayor que la longitud de onda, en la figura a), y con un tamaño menor que  $\lambda$ , (figura b). Observamos que si  $a \ll \lambda$  aparece claramente cómo el frente de onda se ve cortado por el objeto, generándose detrás de éste una zona donde no se aprecian oscilaciones. Esto es lo que podríamos llamar una “sombra”, al igual que ocurre con una zona con sombra cuando un objeto es iluminado con luz.

Si  $a < \lambda$ , como muestra la figura b), entonces la zona posterior al objeto sí contiene ondas y si bien el frente de ondas se ve distorsionado por la presencia del objeto, el frente de ondas se ve apenas levemente modificado. En cierto modo, la onda incidente casi no ve el objeto.

**Observación:**

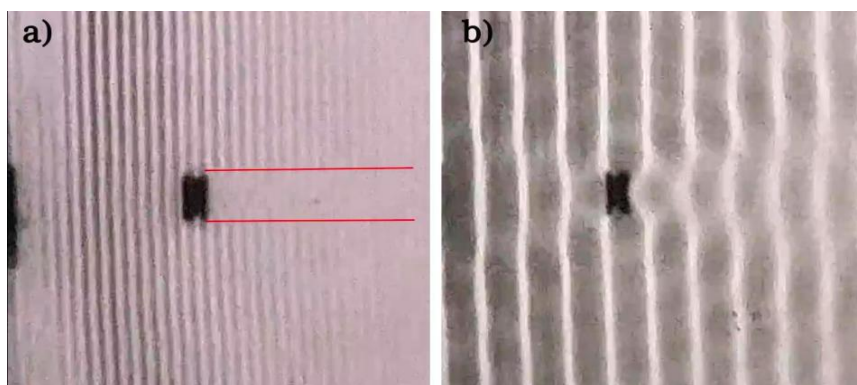


Figura 17.40: Difracción por un objeto, a) de tamaño  $a \gg \lambda$  y b) de tamaño  $a < \lambda$

Un descubrimiento reciente es que gran parte del lenguaje del elefante existe en un rango que los humanos ni siquiera pueden escuchar. Los sonidos más profundos que podemos escuchar son los tonos leves del sonido de baja frecuencia de 1 y 20 Hz, que está por debajo del nivel de la audición humana. Tales sonidos son tan bajos y potentes que viajan sin obstáculos por millas a través del bosque, lo que permite a los elefantes enviar mensajes y advertencias a largas distancias; esto es clave para ayudar a grupos familiares separados a encontrarse. ¡Los elefantes saben que deben usar longitudes de onda largas para comunicarse a largas distancias, aunque no hayan estudiado el fenómeno de difracción!

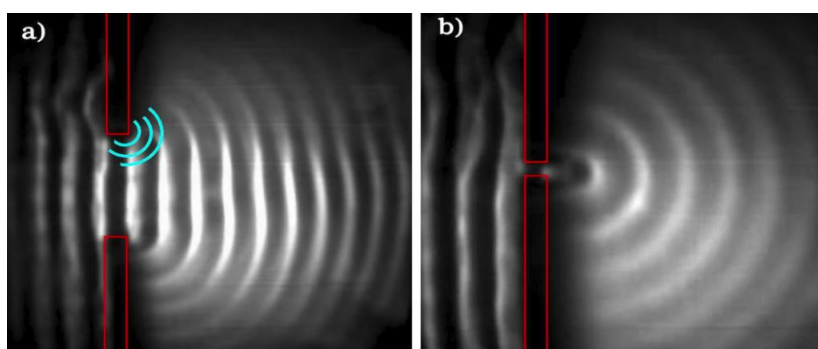


Figura 17.41: Difracción por una apertura

La pregunta que nace es qué sucede si en vez de un objeto lo que interrumpe el frente de onda es cortado por un orificio, una apertura. En la Fig. 17.41 a) se observa que el tamaño de la apertura  $a$  es mayor que la longitud de onda (plana) incidente. Vemos que una porción importante del frente de onda, en la zona correspondiente a la apertura, es transmitido casi sin modificación. Esto es similar al caso a) de la figura anterior. Por supuesto la difracción existe y por eso el frente de onda interrumpido “dobla las esquinas” de las aperturas hacia la zona que esperaríamos fuese de de sombra.

La figura b) muestra el caso en que la apertura  $a$  es más pequeña que la longitud de onda. Notamos que en este caso el frente de onda a ha “doblado la esquina” de modo mucho más pronunciado, “iluminado” la zona oscura. El nuevo frente de onda se aproxima muy bien a un frente de onda esférico. Esto debe ser así, porque entre más cerrada la apertura, más se aproxima a un punto. Y un punto emite un frente de onda esférico.

Si bien Cristiaan Huygens no logró describir correctamente el problema de la difracción, aun podemos usarlo para lograr una descripción al menos cualitativa del fenómeno. Recuerda que según el principio de Huygens todo punto sobre un frente de onda genera un frente de ondas esférico hacia el futuro. Luego, podemos enfocarnos qué sucede con la porción del frente de onda plano que está casi justo sobre la apertura. Esto se muestra en la Fig. 17.41 con tres frentes de onda esféricos. Esto nos permite explicar por qué el frente de onda inicialmente plano puede “doblar esquinas”.

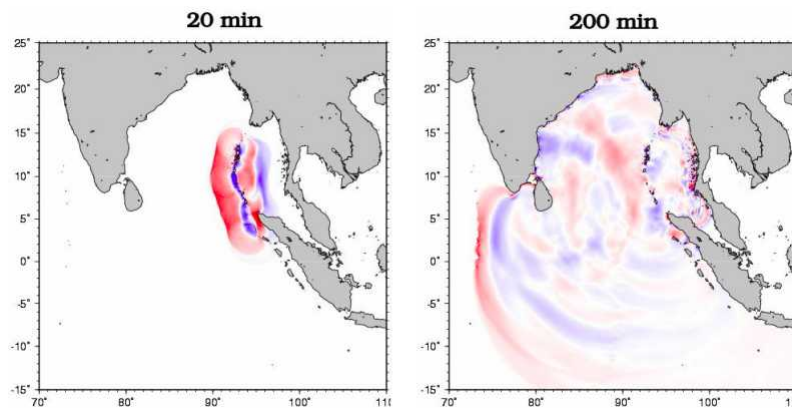


Figura 17.42: Simulación del Tsunami de Sumatra, 2004

El año 2004 ocurrió un devastador terremoto y posterior Tsunami que mató cerca de 230 mil personas en 14 países. La Fig. 17.42 se observa la simulación de Tsunami a los 20 minutos y 200 minutos de producido el terremoto. Observa cómo ocurre el efecto difractivo, con las olas dando vuelta la esquina en la isla de Ceylan.

Un caso menos dramático de difracción y posterior interferencia por múltiples aperturas ocurre en las aguas bajas del mediterráneo frente a la ciudad de Tel Aviv, en Israel. Allí han puesto rompeolas igualmente espaciados que producen el efecto mostrado en la foto de la Fig. 17.43.

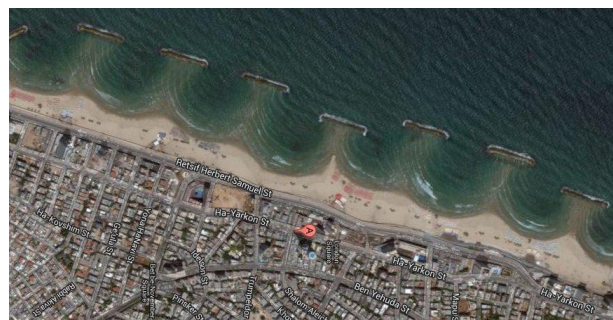


Figura 17.43: Difracción e interferencia en la costa de Tel Aviv, Israel.

### 17.7.1 Difracción por una apertura

Consideremos el resultado de este experimento en una cubeta de ondas, mostrado en la Fig. 17.44. En este tipo de experimentos con luz, hay que

tener un poco de imaginación porque las ondas superficiales en el agua pierden energía y su amplitud decrece bastante más allá de la apertura.

Observamos en la figura que hay una zona central donde las ondas son intensas, mientras que a ambos costados aparecen zonas donde no se observan ondas (zonas oscuras las llamaríamos si fuesen ondas luminosas). Más allá de estas, hacia el costado, vuelven a aparecer ondas, pero con menor amplitud.

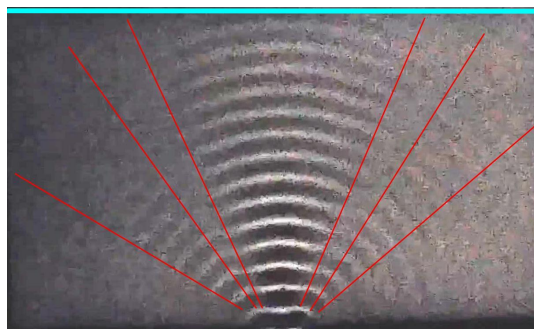


Figura 17.44: Difracción por apertura en cubeta de ondas

Esquemáticamente, lo que se observa es algo similar a lo que muestra la Fig. 17.45, en el caso de que colectáramos las ondas en una región (pantalla) como la marcada con una línea celeste en la figura, pudiendo medir su intensidad. Observa que hay un **máximo central de difracción**, de mucha intensidad, seguido a ambos lados por mínimos laterales, intercalados por zonas de interferencia destructiva.

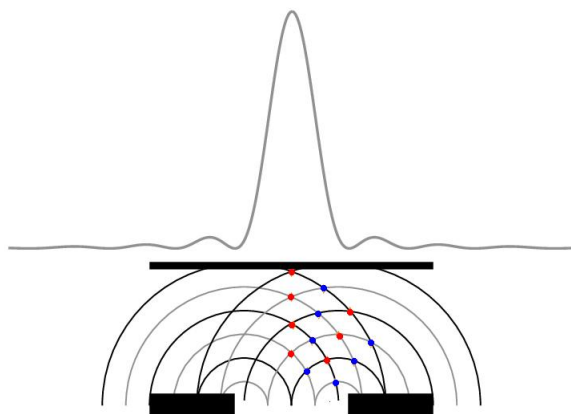


Figura 17.45: Esquema de difracción por una rendija

La imagen de abajo esboza cómo los frentes de onda interfieren para formar el patrón de difracción. Los máximos corresponden a lugares donde las olas se suman de manera constructiva (puntos rojos en la figura de abajo) y los mínimos son lugares donde se producen interferencias destructivas (puntos azules).

Una versión óptica de este fenómeno se muestra en la Fig. 17.46, donde un láser Helio-Neón (He-Ne) se hizo pasar por una apertura.

Este fenómeno lo podemos comprender como sigue. Sabemos que podemos construir un frente de onda en el futuro usando la construcción de Huygens. En particular, podemos construir el frente de onda en un instante posterior al instante en que está justo en la





Figura 17.46: Difracción de luz de láser Helio-Neón (He-Ne) por una rendija

apertura. Un esquema de esta situación se muestra en la Fig. 17.47. Allí, se muestran los rayos de la onda plana incidente y los rayos difractados. Justo en la apertura, de ancho  $a$ , se han marcado puntos equidistantes correspondientes a las fuentes puntuales de Huygens. Claramente todas ellas están emitiendo en fase. Además, se ha dividido **arbitrariamente** la apertura en dos mitades iguales de tamaño  $a/2$ .

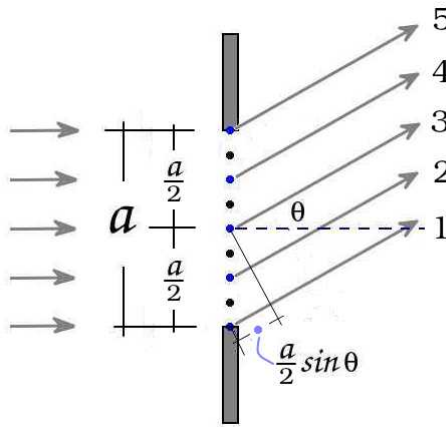


Figura 17.47: Difracción por apertura

Los rayos difractados se han dibujado paralelos por la misma razón dada respecto de la Fig. 17.29, en el caso del experimento de doble rendija. Esta aproximación se denomina **difracción de Fraunhofer**, cuando se supone que que observamos el patrón de difracción a una distancia lo suficientemente grande como para que se reciban únicamente rayos difractados paralelos.

Si fijamos nuestra atención en los rayos 1 y 3, vemos que ellos tienen una diferencia de camino igual a  $\frac{a}{2} \sin \theta$ . debido a que emiten en fase,  $\Delta\phi_0 = 0$ . Por lo tanto, el cambio de fase total en el punto de medición, lejos de la fuente, es

$$\Delta\phi_{tot} = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (17.86)$$

Con este resultado, vemos que en el punto de medición habrá interferencia destructiva si

$$\Delta\phi_{tot} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \implies n\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta. \quad (17.87)$$

Es decir, se observarán zonas nodales (sin modificación del nivel de agua) para ángulos que satisfacen la condición

$$\sin \theta = n \frac{a}{\lambda}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (17.88)$$

Los signos  $\pm$  se han incluido porque los ángulos para los cuales encontramos interferencia destructiva ocurren simétricamente alrededor del máximo, como se muestra en las figuras anteriores.

Para calcular la intensidad de la onda en una posición alejada de la apertura, suponemos que la apertura contiene  $N$  fuentes puntuales separadas una distancia  $\Delta y$  entre dos de ellas, que emiten en fase ( $\Delta y \ll \lambda$ ), como muestra la Fig. 17.48.

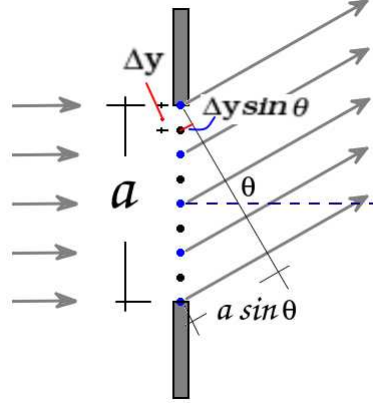


Figura 17.48: Difracción por apertura. Subdivisión con  $N$  fuentes de Huygens

La amplitud total de la onda emitida por la apertura,  $A$ , es  $N$  veces la amplitud de la onda emitida por cada fuente, es decir:  $A = NA_0$ . Así también, la diferencia de camino recorrido por ondas emitidas por fuentes puntuales de Huygens adyacentes es  $\Delta y \sin \theta$ . La diferencia de fase entre estas ondas es

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin \theta. \quad (17.89)$$

La diferencia de fase total, por supuesto, es igual a  $\phi = N\Delta\phi$ .

Por supuesto, si queremos conocer la función de onda total en algún punto lejano a la apertura, donde colectamos la información de la difracción (llamémosle pantalla), entonces debemos sumar las contribuciones de cada ondícula en esa posición. Para ello resulta muy conveniente, una vez más, utilizar la representación compleja de las ondas planas. Sumamos entonces la contribución de  $N$  ondículas separadas una distancia  $\Delta y$ . Suponemos que la posición es en  $x = 0$  por simplicidad.

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A_0 e^{i\omega t} + A_0 e^{i(\omega t + \Delta\phi)} + A_0 e^{i(\omega t + 2\Delta\phi)} + \dots A_0 e^{i(\omega t + N\Delta\phi)} \\ &= A_0 e^{i\omega t} \left\{ 1 + e^{i\Delta\phi} + e^{i2\Delta\phi} + \dots e^{iN\Delta\phi} \right\} \\ &= A_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi} \end{aligned} \quad (17.90)$$

Par calcular esta suma hacemos uso de la serie geométrica finita.<sup>17</sup>

### **Pausa matemática**

La serie geométrica finita es

$$\sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}. \quad (17.91)$$

<sup>17</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric\\_series](https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_series)



Si reemplazamos  $r = e^{i\Delta\phi}$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi} &= \frac{1 - e^{i(N+1)\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} \\
 &= \frac{e^{-i\frac{(N+1)}{2}\Delta\phi} - e^{i\frac{(N+1)}{2}\Delta\phi}}{e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{i\frac{\Delta\phi}{2}}} \frac{e^{i\frac{(N+1)}{2}\Delta\phi}}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}}} \\
 &= \frac{\sin\left[\frac{(N+1)}{2}\Delta\phi\right]}{\sin\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right]} e^{i\frac{N}{2}\Delta\phi}.
 \end{aligned} \tag{17.92}$$

Con esto terminamos nuestra pausa matemática.

Por lo tanto, la función de onda total en la posición de la pantalla es:

$$\begin{aligned}
 y(x, t) &= A_0 \frac{\sin\left[\frac{(N+1)}{2}\Delta\phi\right]}{\sin\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right]} e^{i(\omega t + \frac{N}{2}\Delta\phi)} \\
 &= \frac{A}{N} \frac{\sin\left[\frac{2\pi}{2\lambda} a \sin\theta + \frac{\Delta\phi}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right]} e^{i(\omega t + \frac{N}{2}\Delta\phi)} \\
 &= \frac{A}{N} \frac{\sin\left[\frac{\beta}{2} + \frac{\Delta\phi}{2}\right]}{\sin\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right]} e^{i(\omega t + \frac{\beta}{2})},
 \end{aligned} \tag{17.93}$$

donde hemos utilizado el hecho que el tamaño de la apertura  $a$  es igual a  $N\Delta y$  y hemos definido

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} N\Delta y \sin\theta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta. \tag{17.94}$$

Sabemos que las ondículas de Huygens son una abstracción y debemos tomar el límite al continuo de ellas. Esto significa tomar los límites  $N \rightarrow \infty$  y  $\Delta y \rightarrow 0$  simultáneamente, de modo tal que  $a = N\Delta y$  permanece fijo.

Veamos cómo se modifica el denominador de la función de onda en este límite. Sabemos que para  $\alpha \rightarrow 0$ , podemos aproximar  $\sin\alpha \approx \alpha$ . Luego, en el límite  $\Delta y \rightarrow 0$ , que corresponde a tomar  $N \rightarrow \infty$ , obtenemos que la fase  $\phi$  es

$$N \sin\left[\frac{\Delta\phi}{2}\right] \approx \frac{2\pi}{2\lambda} N\Delta y \sin\theta = \frac{\beta}{2}. \tag{17.95}$$

También, el término  $\Delta\phi/2$  en el argumento de la función seno del numerador se anula en ese límite. Por lo tanto, la función de onda total es

$$y(x, t) = A \frac{\sin[\beta/2]}{\beta/2} e^{i(\omega t + \frac{\beta}{2})} = A \frac{\sin[\beta/2]}{\beta/2} \sin\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right). \tag{17.96}$$

Esto nos indica que la amplitud de la onda resultante es

$$A(\beta) = A \frac{\sin[\beta/2]}{\beta/2}. \tag{17.97}$$

Espero que logres apreciar la potencia, eficacia y simplicidad de calcular con variable compleja, en vez de usar funciones trigonométricas.

Sabemos que para determinar la intensidad de una onda debemos promediar en el tiempo la amplitud al cuadrado de la función de onda; es decir en un período de la onda. Si promediamos en el tiempo, un período, obtenemos <sup>18</sup>

$$I = I_{max} \left[ \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right]}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right]^2, \quad (17.98)$$

donde  $I_{max}$  es la intensidad máxima. La intensidad está representada en la Fig. 17.45 .

Observa que la condición para interferencia constructiva aparece de aquí de inmediato, bajo la condición de que la intensidad se anula cuando hay interferencia destructiva. Esto implica que

$$\sin \left[ \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right] = 0 \implies \pi \lambda a \sin \theta = n \pi, \quad (17.99)$$

que no es más que la (Ec. 17.88).

Notar que cuando la longitud de onda incidente es mucho mayor que el tamaño de la apertura,  $\lambda \gg a$ , entonces esto es equivalente a tomar el límite de  $x \rightarrow 0$  en la función  $\text{sinc}(x)$ . Pero este límite es igual a 1. Esto significa que el máximo central se extiende sobre toda la pantalla y no se observan máximos ni mínimos de difracción. Si observas la Fig. 17.41 b), verás que está dentro de este caso. En cambio, la Fig. 17.44 muestra la situación para cuando la longitud de onda es menor que la apertura,  $\lambda < a$ .

La Fig. 17.53 muestra en más detalle el diagrama de intensidad de la onda resultante en el lugar donde se colecta.

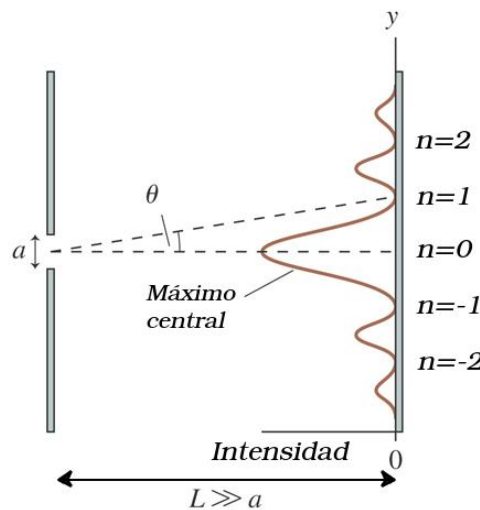


Figura 17.49: Difracción en apertura y diagrama de intensidad

<sup>18</sup>Recuerda que el promedio en un período de una función seno o coseno cuadrado en un período es 1/2.

### Fasores

Podemos comprender el cálculo que hemos hecho desde un punto de vista gráfico, usando lo que se denomina **diagrama de fasores**. Un fasor es simplemente un vector pero no en el espacio real, sino en el plano complejo; corresponde a la representación gráfica de la cantidad  $e^{i\gamma}$ . Sus componentes son la parte real y la parte imaginaria de esta cantidad. Un ejemplo de fasores son los términos que hemos sumado en la Ec. (17.90). Esta suma queda representada en la Fig. 17.50, donde hemos representado 4 fasores, en color azul, cada uno de ellos representa la emisión de una ondícula, desfasada en  $\Delta\phi$  de la adyacente. Es decir, el caso  $N = 4$ . La resultante  $AB$  de la suma se ha dibujado en color rojo. Observa, además, que el ángulo entre dos fasores es  $\Delta\phi$ .

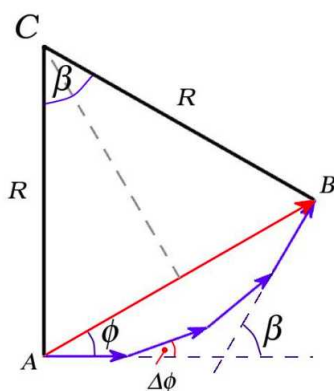


Figura 17.50: Diagrama de fasores

En el límite en que  $N \rightarrow \infty$  los fasores siguen el arco de un círculo de radio  $R$  cuyo centro está ubicado en el punto  $C$ .

Más sobre fasores aprenderás en un curso de electromagnetismo, porque se utilizan comúnmente para estudiar circuitos eléctricos.<sup>19</sup>

Retomando nuestro resultado de la Ec. (17.105) para la intensidad de una onda colectada lejos de la apertura, vemos que tiene la forma del cuadrado de la **función sinc(x)**<sup>20</sup>

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \quad (17.100)$$

Dado que se puede demostrar que el análisis que hemos hecho se puede aplicar a luz (ondas electromagnéticas), los ejercicios de esta sección contendrá mayoritariamente problemas con ondas electromagnéticas. No te preocupes, solo debes conocer (por ahora) que son ondas.

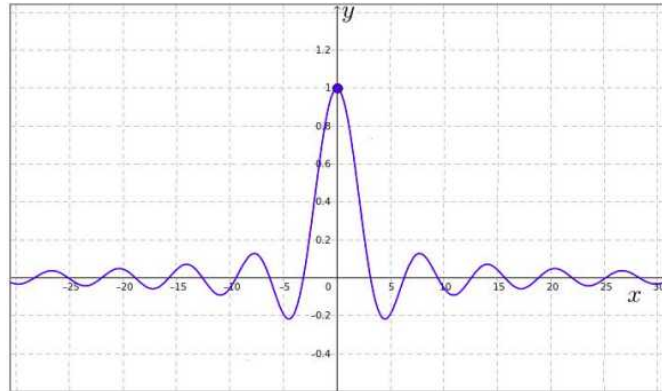
### Ejemplo

Luz monocromática con longitud de onda 700 nm pasa por una rendija de ancho  $a = 1 \mu\text{m}$ . Suponiendo que las franjas formadas sobre una pantalla localizada a 15 cm de la fuente, encuentra el ancho de la franja central en

a) grados

<sup>19</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Phasor>

<sup>20</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Sinc_function). Esta función es un ejemplo típico en un curso de Cálculo, para demostrar cómo funciona la regla de L'Hôpital para derivación

Figura 17.51: Función  $y(x)=\text{sinc}(x)$ 

b) centímetros.

### Solución

De la Ec. (17.106) tenemos que

$$a \sin \theta = n \lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.101)$$

a) Luego, para encontrar el ancho del máximo central, debemos elegir  $n = 1$ :

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{\lambda}{a} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{7 \times 10^{-7}}{10^{-6}} \right) \Rightarrow \theta = 44,4^\circ, \quad (17.102)$$

lo que implica que el ancho angular del máximo central es  $88,8^\circ$ .

b) Para determinar la distancia desde el origen del máximo central al primer mínimo, calculamos la tangente del ángulo de apertura,  $\theta$ , usando la Fig. 17.52:

$$\tan \theta = \frac{y}{L}. \quad (17.103)$$

Luego,  $y = 15 \tan \theta = 14,7 \text{ cm}$ . Es decir, el ancho del máximo central, es  $\Delta y = 29,4 \text{ cm}$ .

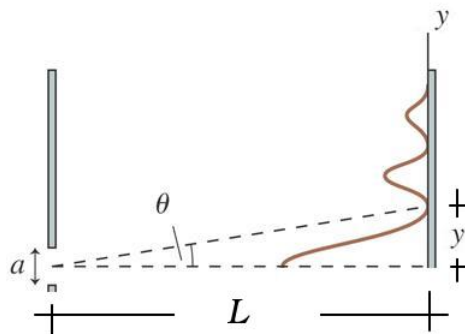


Figura 17.52: Posición del primer mínimo

### 17.7.2 Ejercicios

1. Calcula el tamaño aproximado que debe tener un obstáculo para que experimente el fenómeno de la difracción un sonido de:

- a) 60 Hz,
- b) 500 Hz,
- c) 2 kHz

2. Calcula el tamaño aproximado que debe tener un obstáculo para que experimente el fenómeno de la difracción con los siguientes tipos de ondas electromagnéticas:

- a) Rayos X de  $10^{18}$  Hz,
- b) Luz visible de  $5 \times 10^{14}$  Hz
- c) Microondas de  $10^{10}$  Hz.

3. Un sonido de 1500 Hz y un sonido de 8.500 Hz emergen cada uno de un parlante a través de una abertura circular cuyo diámetro es de  $0,30 \text{ m}$ <sup>21</sup>. Suponiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s, encuentra el ángulo de difracción  $\theta$  para cada sonido.

**Observación:** Esta es la razón por la que los buenos altavoces estéreo se dividen en un woofer para los sonidos de baja frecuencia, un tweeter para los sonidos de alta frecuencia; es para ayudar a dispersar los sonidos.

4. Un parlante tiene un diámetro de 0,25 m.

a) suponiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s, encuentra el ángulo de difracción para un tono de 2,0 kHz.

b) ¿Qué diámetro de altavoz debe usarse para generar un tono de 6,0 kHz cuyo ángulo de difracción es tan ancho como el del tono de 2,0 kHz en la parte a)?

5. Si se observa en una pantalla alejada el patrón de difracción al hacer incidir luz monocromática en una ranura de ancho  $a$ , ¿cuál es el efecto si:

a) Se aumenta el ancho  $a$

b) Se aumenta la longitud de onda de la luz que incide en la ranura. En cada caso realice el diagrama de intensidad y justifique.

6. El ancho central de intensidad, medido sobre una pantalla, cuando la luz atraviesa una rendija rectangular es de 5,4 mm. La luz tiene una longitud de onda de 584 nm y la pantalla está a 1,31 m de la rendija.

a) Qué fenómeno está observándose? Realice un esquema de la variación angular de la intensidad que debería verse en la pantalla, donde aparezcan varios máximos y mínimos.

b) Cuál es el ancho de la rendija?

7. ¿Puedes explicar por qué el centro del patrón de difracción para un obstáculo circular siempre contiene un punto brillante?

Ayuda: piensa en Huygens.

8. Las ondas de luz no se doblan notablemente alrededor de los edificios, pero las ondas de radio que también son ondas electromagnéticas se alteran alrededor de los edificios. Discute este efecto.

---

<sup>21</sup>El problema para aperturas circulares no lo hemos tratado aquí. Por simplicidad, supón que se puede aplicar lo estudiado en este capítulo

9. La luz con una longitud de onda de 500 nm pasa a través de una ranura de 0,2 mm de ancho. El patrón de difracción se observa en una pantalla a 60 cm de distancia. Determine la distancia entre el máximo central y el segundo mínimo.

10. Mientras caminas hacia la puerta abierta de una habitación, puedes escuchar la conversación entre dos personas adentro, a pesar de que no puedes ver a las personas. Explica por qué las ondas de sonido son difractadas por la puerta, mientras que la luz no.

11. En una demostración sobre la difracción, se hace pasar un haz láser de 700 nm de longitud de onda a través de una rendija vertical de 0,5 mm de ancho que luego incide sobre una pantalla distante 6 m. Halla la longitud horizontal del máximo principal de difracción en la pantalla, es decir, halla la distancia entre el primer mínimo a la izquierda y el primer mínimo a la derecha del máximo central, como muestra la Fig. 17.46.

12. Una onda de longitud de onda  $\lambda$  se difracta a través de una rendija de ancho  $a$  y la intensidad resultante se observa en una pantalla situada a una distancia grande  $L \gg a$  de la rendija.

a) Demostrar que el ancho del máximo principal en la pantalla viene dada aproximadamente por  $2L\lambda/a$ .

b) Si se corta una rendija de ancho  $a' = 2L\lambda/a$  en la pantalla y se ilumina, demuestra que el ancho de su máximo principal a la misma distancia  $L$  vale  $a$  en la misma aproximación.

13. La luz con una longitud de onda de  $500 \times 10^{-9}$  m incide sobre una rendija de ancho  $30 \times 10^{-9}$  m. ¿Qué ondas se difractan en mayor medida?

14. Un láser de longitud de onda de 633 nm incide en una sola rendija de 0,15 mm de ancho, produciendo un patrón de difracción en una pantalla, que se muestra en el siguiente gráfico.

¿Cuál es la distancia entre la ranura y la pantalla (en metros)?

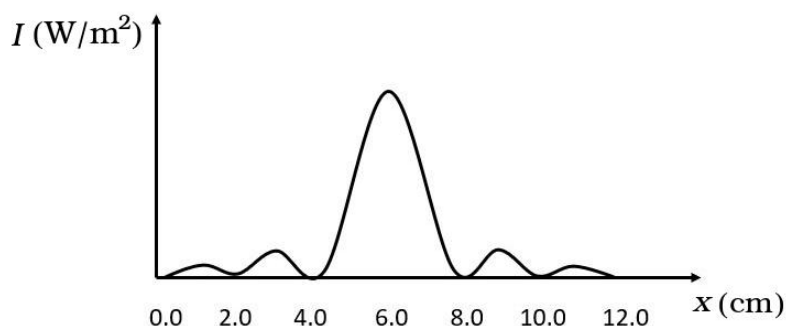


Figura 17.53: Difracción en apertura y diagrama de intensidad

15. Cuando un haz láser de luz verde, con  $\lambda = 532$  nm incide una sola rendija de ancho  $65 \mu\text{m}$ , se forma un patrón de interferencia a una distancia de 55,0 de la apertura, donde hay una pantalla. Se observa una franja media más ancha y en ambos lados franjas más tenues y estrechas.

a) ¿A qué distancia del centro del máximo central están los primeros y segundos mínimos de intensidad ( $n = 1$  y  $n = 2$ )?

b) Dibuja la intensidad en función de la distancia desde el centro del máximo central al segundo mínimo.

16. Estima el ancho angular del máximo central del patrón de difracción producido por una apertura de 2,0 mm de diámetro. Considera que  $\lambda = 500 \text{ nm}$ .

17. La luz de longitud de onda de 441 nm incide en una rendija estrecha. En una pantalla a 2 metros de distancia, la distancia entre el segundo mínimo de difracción y el máximo central es de 1,5 cm.

a) Calcula el ángulo de difracción  $\theta$  del segundo mínimo.

b) Encuentra el ancho de la ranura.

## 17.8 Revisión del experimento de doble rendija de Young

En el experimento de doble rendija de Young analizado anteriormente en este capítulo hemos usado dos fuentes puntuales. Esto es equivalente a utilizar dos rendijas de ancho,  $a$ , despreciable respecto de la longitud de onda,  $\lambda$ . Como ya sabemos que el ancho de las rendijas juegan un rol en la difracción, analizamos ahora cómo cambia el resultado si agregamos esa información.

Debemos combinar los efectos, el de interferencia entre ambas fuentes y el de difracción debido al tamaño finito de las fuentes. La función de onda total se escribe de modo similar a la Ec. (17.90), pero ahora la diferencia de fase total contiene dos contribuciones: la diferencia de fase entre las fuentes,  $\Delta\phi_0$  y de las rendijas  $\Delta\phi_a$ :

$$\begin{aligned}
 y(x,t) &= A_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi_a} + A_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi_a + \Delta\phi_0} \\
 &= A_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi_a} \left[ 1 + e^{i\Delta\phi_0} \right] \\
 &= A_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi_a} \left[ e^{i\Delta\phi_0/2} + e^{-i\Delta\phi_0/2} \right] \cdot e^{i\Delta\phi_0/2} \\
 &= 2A_0 e^{i\omega t} \sum_{n=0}^N e^{in\Delta\phi_a} \cos \left[ \frac{\Delta\phi_0}{2} \right] e^{i\Delta\phi_0/2}.
 \end{aligned} \tag{17.104}$$

Lo bueno es que ya hemos hecho el resto del trabajo, así que el resultado para la función de onda total es

$$y(x,t) = 2A_0 \left[ \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right]}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right] \cos \left[ \frac{\Delta\phi_0}{2} \right] e^{i(\omega t + \Delta\phi_0/2 + \beta/2)}. \tag{17.105}$$

Por lo tanto, la intensidad en la pantalla se expresa como

$$I = I_{\max} \left[ \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right]}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right]^2 \cos^2 \left[ \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]. \tag{17.106}$$

En la Fig. 17.54 se muestra en color rojo tenue el resultado para la intensidad sin el término de difracción. La línea segmentada es el resultado de la difracción y la curva en rojo es la combinación de ambos efectos: interferencia y difracción. La figura de abajo muestra el resultado de un experimento con un láser de He-Ne.

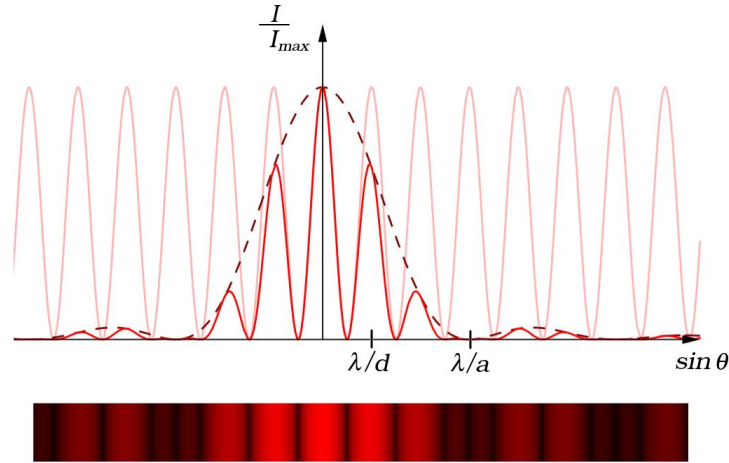


Figura 17.54: Intensidad en experimento de doble rendija

### 17.8.1 Cálculo con diagrama de fasores

Por supuesto, podemos encontrar la función de onda resultante de la Ec. (17.104) de modo distinto: primero hacemos las sumas en las definiciones de ambas funciones de ondas  $y_1(x, t)$  y  $y_2(x, t)$ , y después sumar esos resultados. Pero mejor aún, en vez de seguir el método analítico, podemos usar la técnica gráfica de fasores. En esta caso, entonces, habrá dos fasores para sumar.

En la Fig. 17.55 a) se han dibujado los dos fasores correspondientes a las dos funciones de onda, una para cada apertura. También se ha informado de la componente sobre el eje  $y$ . Debido a que estamos tratando con fasores, esta componente corresponde a la parte imaginaria del fasor, es decir la función seno.

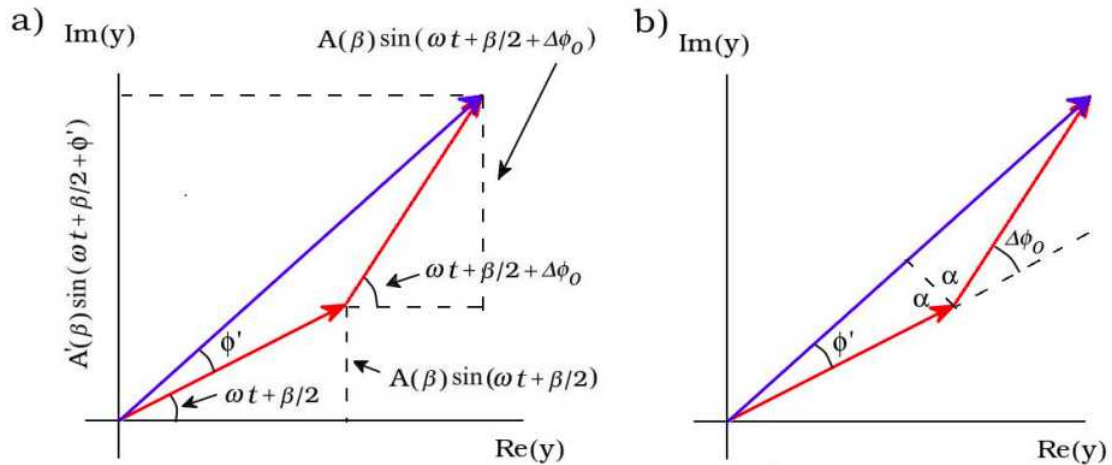


Figura 17.55: Intensidad en experimento de doble rendija

De la Fig. 17.55 b) vemos que el ángulo de fase  $\phi'$  satisface

$$\phi' = \pi - (\alpha + \pi/2) = \pi/2 - \alpha. \quad (17.107)$$

Pero como

$$2\alpha + \Delta\phi_0 = \pi, \quad (17.108)$$



entonces podemos reemplazar al ángulo  $\alpha$  en la Ec. (17.107) para obtener

$$\phi' = \pi - (\alpha + \pi/2) = \pi/2 - \Delta\phi_0/2 - \pi/2 = -\frac{\Delta\phi_0}{2}. \quad (17.109)$$

Por lo tanto, de la figura a), vemos que

$$y(x,t) = A'(\beta) \sin\left(\omega t + \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta\phi_0}{2}\right). \quad (17.110)$$

Para saber cuánto vale la nueva amplitud  $A'(\beta)$  usamos nuevamente el diagrama de la figura b).

$$\cos \phi' = \frac{A'(\beta)/2}{A(\beta)}. \quad (17.111)$$

Finalmente, entonces,

$$y(x,t) = 2A(\beta) \cos\left(\frac{\Delta\phi_0}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\beta}{2} + \frac{\Delta\phi_0}{2}\right), \quad (17.112)$$

que es resultado de la Ec. (17.106).

### Ejemplo 1

Se tiene un dispositivo de doble ranura para el cual la distancia entre los centros de cada ranura es igual al doble del ancho de cada ranura. Calcula cuántas franjas de interferencia hay en la envolvente central de difracción.

### Solución

Tenemos que el primer mínimo de difracción ocurre cuando  $a \sin \theta = \lambda$ . También, el  $n$ -ésimo máximo de interferencia ocurre para  $d \sin \theta = n\lambda$ . Entonces,

$$\sin \theta = n \frac{\lambda}{d} \implies \frac{\lambda}{a} = n \frac{\lambda}{d} \quad (17.113)$$

Pero resulta que  $d = 2a$ . Luego,

$$\frac{\lambda}{a} = n \frac{\lambda}{2a} \implies n = 2. \quad (17.114)$$

Esto significa que también hay dos máximos hacia la izquierda. Pero además se debe agregar el máximo central. Luego, observamos en total  $2 + 2 + 1 = 5$  franjas de interferencia dentro del máximo central.

### Ejemplo 2

Considera un patrón de difracción de doble rendija, similar al mostrado en la Fig. 17.54. En su interior hay  $n$  franjas. Si la longitud de onda con la que se crea ese patrón es  $\lambda = 420$  nm, la separación entre las rendijas es  $d = 0,20$  nm y el ancho de la apertura de cada rendija es  $a = 45 \mu\text{m}$ ,

¿Cuál es la razón de la intensidad de la franja central con la de la tercera franja?

### Solución:

a) Tenemos que evaluar

$$I = I_{max} \left[ \frac{\sin \left[ \frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta \right]}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta} \right]^2 \cos^2 \left[ \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right]. \quad (17.115)$$

Si nos hablan de la tercera franja, significa que nos hablan del tercer máximo de interferencia. Luego, de la Ec. (17.68),  $m = 3$

$$d \sin \theta = 3 \lambda, \quad (17.116)$$

donde hemos considerado solo el signo positivo porque solo necesitamos conocer la intensidad. Con esto ya tenemos el argumento de la función coseno:

$$\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = 3 \pi. \quad (17.117)$$

Falta el argumento de la función seno:

$$\frac{\pi}{\lambda} a \sin \theta = 3 \pi \frac{a}{d} \quad (17.118)$$

Por lo tanto, reemplazando los datos (házlo), la razón de la intensidad de la franja central con la de la tercera franja es

$$\frac{I}{I_{max}} = 9,4 \times 10^{-32} \quad (17.119)$$

### Ejemplo 3

Considera un patrón de difracción de doble rendija, similar al mostrado en la Fig. 17.54. En su interior hay  $n$  franjas. Si la longitud de onda con la que se crea ese patrón es  $\lambda = 420$  nm, la separación entre las rendijas es  $d = 0,2$  mm y el ancho de la apertura de cada rendija es  $a = 45 \mu\text{m}$ ,

¿A qué distancia  $L$  se debe colocar una pantalla para que la separación entre las franjas más cercanas sean de  $0,2$  mm?

#### Solución:

Con esa distancia entre máximos, podemos suponer que el ángulo  $\theta$  es pequeño, algo que de todas maneras debemos chequear al final. Luego, podemos aproximar

$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{L} \quad (17.120)$$

y entonces

$$\frac{d \sin \theta}{\lambda} \approx \frac{d y}{L \lambda} \quad (17.121)$$

Franjas cercanas ocurren para  $m$  y  $m + 1$ . Luego, su separación es

$$\Delta y = \frac{(m+1)L\lambda}{d} - \frac{mL\lambda}{d} = \frac{L\lambda}{d}. \quad (17.122)$$

Por lo tanto, la distancia a la que se debe colocar una pantalla para que la separación entre las franjas más cercanas sean de  $0,2$  mm es

$$\Delta y = \frac{\Delta y d}{\lambda} = 0,095 \text{ m}. \quad (17.123)$$

### 17.8.2 Ejercicios

1. Grafica el patrón de interferencia, difracción y el combinado, para el experimento de doble rendija con un láser de He-Ne, de modo similar a la Fig. 17.54, cuando

- a)  $a = \lambda$
- b)  $a = 5\lambda$
- c)  $a = 10\lambda$

2. Se realiza una experiencia de difracción por doble rendija con una fuente que emite en 400 nm. La separación entre los puntos medios de las rendijas es de 0,4 mm y el ancho de cada una de ellas es de 0,04 mm. La pantalla está a 1 m de las rendijas. Si se cambia la fuente por otra que emite en 600 nm, determine:

- a) ¿en cuánto varió la separación entre franjas?
- b) ¿en cuánto varió el número total de franjas de interferencia contenidas en el máximo principal de difracción?
- c) ¿en cuánto varió el ancho angular del máximo central de difracción?

3. ¿Qué verías en un experimento de doble rendija si iluminaras las rendijas con luz blanca?

4. Luz monocromática verde, de longitud de onda 554 nm, ilumina dos rendijas angostas paralelas separadas por  $7,7 \mu\text{m}$ .

- a) Calcula la desviación angular de la franja de 3er orden,  $n = 3$ , en radianes y en grados.
- b) Las mismas rendijas son iluminadas por un láser de HeNe, con longitud de onda  $\lambda = 632 \text{ nm}$ . El patrón de interferencia se observa sobre una pantalla plana a 10 cm de distancia y se ve como una sucesión de máximos y mínimos separados a una distancia  $\Delta x$  (de máximo a máximo). Calcula  $\Delta x$ .

5. Se lleva a cabo un experimento de Young con luz azul-verdosa de longitud de onda 512 nm. La pantalla está a 5,4 m de las rendijas y las franjas brillantes sobre la misma distan 2,3 mm entre sí. ¿Cuál es la separación de las rendijas?

6. Considera un patrón de difracción de Fraunhofer en el experimento de doble rendija. Si el valor de la separación entre las rendijas es de  $a = 10 \mu\text{m}$ ,

- a) calcula el ancho de las rendijas para que haya 40 franjas brillantes (o parte de ellas) dentro del máximo central de difracción.
- b) Para este patrón de difracción, ¿cuál será el ancho del máximo central proyectado sobre una pantalla a 1 m de las mismas si las rendijas se iluminan con un láser de He-Ne ( $\lambda = 632 \text{ nm}$ ) ?

7. Se realiza una experiencia de difracción por doble rendija con una fuente que emite en 600 nm. La separación entre los puntos medios de ambas rendijas es 0,4 mm y el ancho de las rendijas es 0,04 mm. La pantalla está a 1 m de las fuentes.

- a) ¿Para qué posiciones sobre el máximo central habrá máximos y mínimos de interferencia? ¿Y mínimos de difracción?
- b) ¿Cuántas líneas de interferencia están contenidas en el máximo central (hasta el primer mínimo)? Haz una figura de la intensidad de luz sobre la pantalla en función de  $y$ , la posición vertical sobre la pantalla.
- c) Se cambia la fuente por otra que emite en 700 nm. ¿Cuánto varió la distancia entre máximos de interferencia? ¿Y el ancho del máximo central de difracción?

8. ¿Cuál es la posición del cuarto máximo para un aparato de doble rendija, con rendijas separadas 0,05 centímetros y una pantalla a 1,5 metros de distancia cuando se realiza con luz roja monocromática de frecuencia  $384 \times 10^{12}$  Hz?

9. Dos rendijas separadas 1 mm se iluminan con  $\lambda = 6,5 \times 10^{-7}$  m (rojo). Se sitúa una pantalla a 1 m de las mismas para observar las interferencias correspondientes. Determina la distancia entre dos franjas oscuras y dos franjas brillantes consecutivas.

10. Dos rendijas de ancho  $a = 0,015$  mm están separadas por una distancia  $d = 0,06$  mm y se encuentran iluminadas por luz de longitud de onda  $\lambda = 650$  nm.

a) ¿Cuántas franjas brillantes se ven en el máximo central de difracción?

b) Realiza un esquema de la variación angular de la intensidad que se observa en una pantalla.

11. Se cortan dos rendijas rectangulares, cada una de ellas de  $1 \times 10^{-4}$  m de ancho, en una lámina opaca. Las rendijas se iluminan con luz coherente monocromática de 540 nm de longitud de onda. La separación entre los centros de las dos rendijas es de  $3 \times 10^{-4}$  m.

a) Calcula la posición angular del máximo de interferencia de 3er. orden.

b) Dibuja en forma aproximada el gráfico de intensidad que se observaría en una pantalla alejada. Procura que el diagrama de intensidad llegue al menos hasta el orden 7 de interferencia ( $n=7$ ). Identifica claramente los mínimos y/o máximos según corresponda.

c) Determina si pueden resolverse dos longitudes de onda: 540 nm y 550 nm en el primer orden. Justifica tu respuesta.

d) Si se cubre una de las dos rendijas, haz el diagrama de intensidad aproximado que se vería (para luz monocromática).

12. En el experimento de doble rendija de Young, supón que la separación entre las dos rendijas es  $d = 0,32$  mm. Si un haz de luz de 500 nm golpea las rendijas y produce un patrón de interferencia. ¿Cuántos máximos habrá en una apertura angular  $-45^\circ < \theta < 45^\circ$ ?

## 17.9 Ondas estacionarias bidimensionales

A finales de 1700, un científico alemán llamado Ernst Chladni <sup>22</sup> fue el primero en mostrar que el sonido se propaga como ondas al idear una forma de visualizar sus vibraciones.

Al titularse como abogado Chladni hizo un cambio abrupto de su carrera y dirigió su atención a la física, que era lo que siempre le había interesado.

Chladni fue el fundador de la acústica experimental. Entre sus logros, fue capaz de determinar las velocidades del sonido en gases usando un tubo de órgano y desarrolló la ley de Chladni, que relaciona la frecuencia de modos de vibración para una placa circular plana, con la pudo predecir patrones de vibración en superficies planas y describir la vibración de platillos y campanas.

Su trabajo fue inspirado por Robert Hooke, quien había desarrollado experimentos para visualizar de patrones nodales.

La forma de una placa Chladni puede tener cualquier forma, pero debe estar fija en el centro. La lámina está espolvoreada con un material para ver los patrones, como

<sup>22</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst\\_Chladni](https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni)

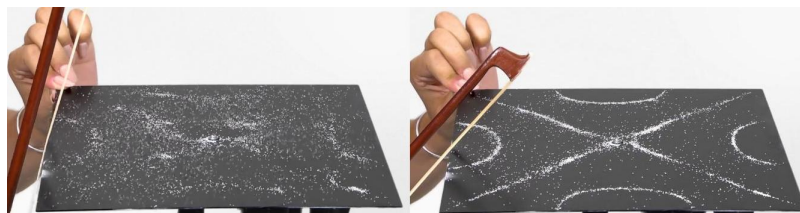


Figura 17.56: Figura de Chladni producida por vibraciones de cuerda de violín sobre placa con polvo

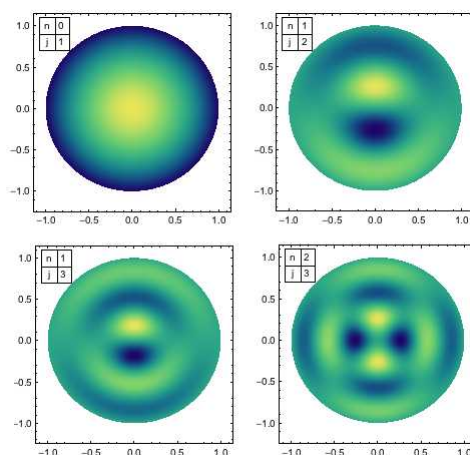


Figura 17.57: Modos normales de oscilación de la membrana de un tambor.

harina, arena o sal. La placa se excita con un arco de violín en el costado y se puede observar las ondas estacionarias a lo largo de las líneas nodales de la placa. La arena se aleja de los antinodos, donde la amplitud de la onda estacionaria es máxima, y hacia las líneas nodales, donde la amplitud es mínima, formando patrones conocidos como **figuras de Chladni**. Aquí puedes ver un video donde se muestra este efecto: <https://www.youtube.com/watch?v=OLNFrXgMJ6E>.

Todos los objetos, incluidas las placas Chladni, tienen un conjunto de frecuencias naturales en las que vibran. Un sistema, como las ondas estacionarias en un instrumento musical, tiende a vibrar a ciertas frecuencias discretas llamadas frecuencias naturales o frecuencias propias. Estos modos de oscilación se denominan **eigenmode**.<sup>23</sup>

Estos modos propios de oscilación se pueden ver por supuesto también cuando se resuelve la ecuación de onda numéricamente. En la Fig. 17.57<sup>24</sup> se muestran estos modos propios para una superficie, una membrana como la de un tambor, con condiciones de borde fijas (de Dirichlet) en los bordes. También puede ver este video para obtener más información: url <https://www.youtube.com/watch?v=DZ8VGAX4178>.

<sup>23</sup>Eigenmode es una palabra alemana y se puede traducir como modos propios

<sup>24</sup>Fuente: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/56698/circular-membrane-vibration-simulation>





# Índice alfabético

Álgebra Vectorial, 23

Aceleración angular media e instantánea, 102

Aceleración media y aceleración instantánea, 61

Aceleración de gravedad y campo gravitatorio, 364

Adición de vectores, 24

ANÁLISIS DIMENSIONAL, 47

Análisis general de sistemas no inerciales, 405

Aplicación de interferencia: audífonos con cancelación de ruido, 466

Aplicaciones de ondas sísmicas, 519

Aplicaciones del efecto Doppler, 536

Aplicaciones:, 348

Baricentro: un ejemplo desde la astronomía, 223

Cálculo con diagrama de fasores, 576

Caída libre, 78

Cambiando unidades, 38

Cantidad vectorial, 20

Centro de gravedad, 221

CENTRO DE MASA, 213

Cifras Significativas, 43

CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES, 87

Cinemática en una dimensión, 51

CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN, 51

Coefficiente de restitución, 236

Colisión de dos partículas en 1 dimensión, 232

Colisión vista desde marco de referencia en movimiento, 233

Colisiones, 231

Colisiones en 2 dimensiones, 241

Comparación de los tres casos, 429

Comportamiento de ondas en interfaces, 484

Compresión y rarefacción, 496

Conservación de la Energía, 194

Conservación del momentum angular, 340

Curvas cónicas, 356

Dígitos para el número  $\pi$ , 46

Decibeles, 513

Definición general para el coeficiente de restitución, 240

Definición del centro de masa, 213

Desplazamiento, 52

Diagrama de cuerpo libre, 134

Difracción, 563



- Difracción por una apertura, 565  
 Dinámica, 151  
 DINÁMICA DE LA PARTÍCULA, 127  
 DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO, 269
- Ec. de la trayectoria, 90  
 Ecuación de onda, 470  
 Ecuaciones de Newton para el cuerpo rígido, 287  
 Efecto Doppler, 531  
 Efecto Doppler con observador en un ángulo, 534  
 Ejemplo, 262  
 Ejercicios, 32, 40, 43, 45, 49, 56, 68, 76, 94, 109, 122, 145, 158, 172, 203, 224, 249, 264, 274, 280, 284, 297, 317, 332, 348, 391, 413, 442, 459, 467, 474, 482, 487, 491, 499, 505, 508, 515, 542, 559, 573, 579  
 El giróscopo, 346  
 El problema de la energía, 466  
 El puente de Tacoma, 438  
 Energía Potencial,  $U$ , 189  
 Energía del oscilador forzado, 435  
 Energía en el Oscilador Armónico, 420  
 Energía en un oscilador amortiguado, 429  
 Energía en una onda, 478  
 Energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio, 367  
 Energía total en interacción gravitacional y órbitas, 376  
 Escalares y Vectores, 19  
     Cantidad escalar, 19  
 Estática, 140  
 Estática del cuerpo rígido, 289
- Factor  $Q$ , 430  
 Fasores, 571  
 Forma general de una onda viajera, 455  
 Formas de energía, 182  
 Frente de onda: ondas planas y ondas esféricas, 527  
 Fuerza de fricción, 130  
 Fuerza elástica que satisface la Ley de Hooke, 133  
 Fuerzas conservativas y no-conservativas, 188
- Fuerzas de Marea, 387  
 Fuerzas en Movimiento Circular, 168  
 Funciones de onda para ondas de sonido, 498
- GRAVITACIÓN, 355
- Impulso, 244  
 Intensidad de ondas de sonido, 510  
 Intensidad del campo gravitatorio terrestre, 373  
 Interferencia, 553  
 Interferencia en el tiempo: batido de onda, 507  
 Interferencia por fuentes coherentes distintas, 556  
 Interpretación geométrica del producto interior, 30
- Líneas de campo gravitatorio, 366  
 Ley de Gravitación Universal de Newton, 359  
 Ley de reflexión, 549  
 Ley de refracción, 551  
 Leyes de Kepler, 358  
 Leyes de Kepler desde la perspectiva de Newton, 374  
 Leyes de Newton, 127
- Marco de referencia del centro de masa, 235  
 Masa gravitacional y masa inercial: Principio de Equivalencia, 389  
 Momento de inercia, 281  
 Momentum Angular, 278  
 Momentum angular alrededor de un eje fijo, 288
- MOMENTUM LINEAL E IMPULSO, 229
- Movimiento circular, 98  
 Movimiento circular con aceleración angular constante, 104  
 Movimiento circular con aceleración variable, 107  
 Movimiento circular uniforme, 102  
 Movimiento con aceleración constante, 64  
 Movimiento del centro de masa, 221  
 Movimiento parabólico, 87



- Movimiento Relativo y Relatividad de Galileo, 115
- Multiplicación de vectores, 26
- Multiplicación por escalar, 23
- Nota importante, 542
- NOTACIÓN CIENTÍFICA Y APROXIMACIONES, 37
- Notación Científica, 41
- Observador en movimiento respecto de una fuente, 533
- Observador estacionario respecto de una fuente, 532
- Observador y fuente en movimiento, 534
- Ondas con simetría esférica, 530
- Ondas de Choque, 540
- Ondas de compresión y de corte en sólidos, 518
- Ondas de sonido, 495
- Ondas de sonido estacionarias, 501
- ONDAS EN DOS DIMENSIONES, 527
- ONDAS EN UNA DIMENSIÓN, 455
- Ondas estacionarias bidimensionales, 580
- Ondas estacionarias en cuerdas tensas, 487
- Ondas no lineales, 523
- Ondas planas, 528
- Ondas viajera sinusoidales, 461
- Orbitando en cuatro dimensiones, 390
- OSCILACIONES, 417
- Oscilador armónico amortiguado, 425
- Oscilador armónico en circuitos eléctricos, 422
- Oscilador Armónico Simple, 417
- Oscilador críticamente amortiguado:  $-b^2 + \omega_0^2 = 0$ , 429
- Oscilador forzado, 432
- Oscilador forzado en circuitos eléctricos, 437
- Oscilador sobre amortiguado:  $-b^2 + \omega_0^2 < 0$ , 428
- Oscilador subamortiguado:  $-b^2 + \omega_0^2 > 0$ , 427
- Péndulo de torsión, 441
- Péndulo físico, 440
- Péndulo simple, 423
- Pérdida continua de masa, 260
- Pérdida discreta de masa: Saturno V y los elefantes, 259
- Pares acción y reacción, 137
- Pausa matemática, 193, 262, 418, 426, 433, 457, 463, 510, 529
- Potencia, 195
- PREFACIO, 13
- Principio de Huygens, 548
- Problemas de encuentro, 73
- Producto escalar, 27
- Producto vectorial, 269
- Pulsos, 456
- Representación de un vector en coordenadas cartesianas, 21
- Representación de un vector en coordenadas polares planas, 29
- Representación gráfica de un vector, 21
- Representación tipográfica de un vector, 20
- Resolviendo problemas de sólido rígido con momentum angular, 341
- Resortes en paralelo, 142
- Resortes en serie, 140
- Revisión del experimento de doble rendija de Young, 575
- Rodadura sin deslizamiento, 305
- Segunda ley de Kepler y momentum angular, 374
- Sistema de Coordenadas, 17
- Sistema de coordenadas cartesiano (u ortogonal), 17
- Sistema de coordenadas polares planas, 18
- Sistema masa-resorte vertical, 439
- Sistema masa-resorte: una masa más un resorte, 417
- SISTEMAS CON MASA VARIABLE, 257
- Sistemas de referencia de centro de masa y de laboratorio, 231
- SISTEMAS NO INERCIALES, 401
- Superficies equipotenciales, 372
- Superposición e interferencia de ondas sinusoidales, 463
- Superposición e interferencia de pulsos, 457
- Sustracción de vectores, 26

- Teorema de Coriolis: aceleración en sistemas no inerciales, 409
- Teorema de Steiner, 283
- Teorema del cascarón esférico, 362
- TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA, 181
- Teorema Trabajo-Energía, 193, 324
- Tercera ley de Kepler, 375
- Tipos de Fuerzas, 130
- Torque, 272
- Trabajo, 183
- Trabajo debido a fuerza de Hooke, 187
- Trabajo debido a una fuerza constante, 184
- Transformaciones de Galileo, 117
- Traslación de sistemas acelerados, 402
  
- Unidades y Prefijos, 37
  
- VECTORES Y COORDENADAS, 17
- Velocidad angular media, 100
- Velocidad de escape, 378
- Velocidad de fase y velocidad de grupo, 519
- Velocidad en el sistema de referencia no inercial, 408
- Velocidad instantánea, 58
- Velocidad Relativa, 119
- Velocidad y aceleración, 422
- Velocidad y rapidez medias, 54