

Thermomechanisches Verhalten polythermer Eisschilde

– Theorie, Analytik, Numerik –

Vom Fachbereich Mechanik der
Technischen Hochschule Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
genehmigte
DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Ralf Greve

aus Siegburg

Referent: Prof. K. Hutter, Ph. D./Cornell Univ.

Korreferent: Prof. Dr. K. Herterich

Tag der Einreichung: 11.5.1995

Tag der mündlichen Prüfung: 30.8.1995

Darmstadt 1995

D 17

Here is a door ajar through which one may escape a little way and for a short time out of our little world, from the noise and chaos of civilization into the silence and harmony of the cosmos, and for a moment be part of it.

– Richard E. Byrd

Danksagung

Diese Dissertation wurde durch Herrn Prof. Kolumban Hutter, Ph. D., angeregt und ermöglicht. Ich danke ihm für die intensive Unterstützung und Förderung, welche mir von seiner Seite während der Anfertigung der Arbeit zuteil wurden, sowie für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts. Des weiteren möchte ich Herrn Prof. Dr. Klaus Herterich für die Übernahme des Korreferates danken.

Ich danke meinen Kollegen und Ex-Kollegen der Arbeitsgruppe III für die Zusammenarbeit und das stets gute Arbeitsklima. Insbesondere sei den Herren Dr. Stefan Diebels, Dipl.-Phys. Georg Bauer und Magnus Weis für ihre zeitaufwendige Betreuung der institutseigenen Workstations, Herrn Dr. Reinhard Calov für viele Diskussionen und seine Hilfe bei den Grönland-Simulationen, sowie Frau Dipl.-Oz. Imke Hansen für gründliches Korrekturlesen gedankt.

Herrn Dipl.-Ing. Jörg Schneider von der Firma Technosystem danke ich für die Hilfestellung bei der Betreuung der Macintosh-Computer am Institut sowie bei der Anschaffung und Unterhaltung eines privaten Gerätes.

Im Sommer 1994 hatte ich die Möglichkeit, drei Monate am Department of Geophysical Sciences der University of Chicago zu arbeiten. Hierfür sei Herrn Prof. Douglas R. MacAyeal, Ph. D., gedankt.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes, und hier speziell meinem Darmstädter Vertrauensdozenten, Herrn Prof. Dr. Achim Richter, und meinem Ansprechpartner in Bonn, Herrn Dr. Ulf Lange, danke ich für die zweieinhalbjährige Förderung dieser Dissertation.

Weiterhin danke ich Frau Dr. Anne Letréguilly für die Bereitstellung der Topographiedaten für Grönland, sowie Herrn Dr. Sigfus Johnsen für die Überlassung der $\delta^{18}\text{O}$ -Daten des GRIP-Eisbohrkerns.

Schließlich gilt mein Dank meiner lieben Freundin Frau Anke Kurzke und meinen Eltern, Herrn Dieter und Frau Ingrid Greve. Ohne die von dieser Seite erfahrene moralische und finanzielle Unterstützung wäre die Vollendung dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	5
Abstract	7
Notation	9
1 Einleitung	15
1.1 Klimageschichte der Erde	15
1.2 Modellierung von Inlandeisschilden	17
2 Kontinuumsmechanische Grundlagen	23
2.1 Allgemeine Bilanzaussagen	23
2.2 Massenbilanz	24
2.3 Impulsbilanz	24
2.4 Drehimpulsbilanz	25
2.5 Energiebilanz	25
2.6 Entropiebilanz	25
2.7 Materialgesetze für viskose Fluide	26
3 Das polytherme Eismodell	29
3.1 Feldgleichungen	30
3.1.1 Kalter Bereich	30
3.1.2 Temperierter Bereich	31
3.1.3 Lithosphäre	34
3.2 Rand- und Übergangsbedingungen	35
3.2.1 Randbedingungen an der freien Oberfläche	35
3.2.2 Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis	37
3.2.3 Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis	38
3.2.4 Randbedingungen an der Lithosphärenunterseite	41
3.2.5 Übergangsbedingungen an der CTS	41
4 Planparallele, geneigte Eisplatte	47
4.1 Anwendung des Modells	47
4.2 Integration der Slab-Gleichungen	50
4.3 Ergebnisse	55

5	Skalierung und Flacheisannahme	59
5.1	Einführung der Skalierung	59
5.2	Skalierung und SIA für die Modellgleichungen	62
5.2.1	Kalter Bereich	62
5.2.2	Temperierter Bereich	64
5.2.3	Lithosphäre	65
5.2.4	Randbedingungen an der freien Oberfläche	66
5.2.5	Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis	67
5.2.6	Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis	70
5.2.7	Randbedingungen an der Lithosphärenunterseite	71
5.2.8	Übergangsbedingungen an der CTS	71
5.3	Teilintegration der polythermen SIA-Gleichungen	73
5.3.1	Berechnung der Spannungen	74
5.3.2	Berechnung der Geschwindigkeit	74
5.3.3	Evolution der freien Oberfläche	76
5.3.4	Evolution der CTS	76
5.3.5	Evolution der Eisbasis bzw. Lithosphärenoberseite	77
5.3.6	Temperatur und Wassergehalt	77
5.4	Zusammenstellung in dimensionsbehafteter Form	80
5.5	Spezifizierung physikalischer Größen	83
6	Numerische Lösung der polythermen SIA-Gleichungen	87
6.1	σ -Transformation und Transformationsregeln	87
6.2	Transformierte Modellgleichungen	88
6.3	Das numerische Gitter	92
6.4	Diskretisierung der Modellgleichungen	94
6.5	Positionierung der CTS	108
6.6	Das Programmpaket SICOPOLIS	116
7	Simulationen für das EISMINT-Eisschild	119
7.1	Das EISMINT-Eisschild	119
7.2	Diskussion der Simulationen	121
7.3	Abbildungen zu den Simulationen für das EISMINT-Eisschild	127
8	Simulationen für das grönländische Eisschild	153
8.1	Stereographische Projektion	153
8.2	Die heutige Topographie Grönlands	154
8.3	Standard-Randbedingungen für heutiges Klima	155

8.4	Standard-Randbedingungen für andere Klimaszenarien	157
8.5	Diskussion der Simulationen	158
8.5.1	Steady-State-Simulationen	158
8.5.2	Transiente Simulationen mit Milanković-Sinus-Antrieb	168
8.5.3	Transiente Simulationen mit GRIP-Daten-Antrieb	169
8.5.4	Transiente Simulationen zur Auswirkung eines anthropogen ver- stärkten Treibhauseffektes	175
8.6	Abbildungen zu den Simulationen für das grönländische Eisschild	177
9	Ausblick	219
	Literaturverzeichnis	221

Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation befaßt sich mit der theoretischen, analytischen und numerischen Modellierung von landgestützten Eisschilden in drei Dimensionen. Diese werden als polytherm behandelt, d. h., es wird der Tatsache Rechnung getragen, daß im Eisschild zum einen Bereiche mit Temperaturen unter dem Druckschmelzpunkt (“kaltes Eis”), zum anderen Bereiche mit Temperaturen exakt auf dem Druckschmelzpunkt (“temperiertes Eis”) vorkommen können; in letzteren kann auch Wasser in geringer Menge vorhanden sein.

Aufbauend auf frühere Ansätze wird eine verbesserte Theorie für polytherme Eisschilde entwickelt, welche auf den Kontinuumsthermodynamischen Bilanzgleichungen und Sprungbedingungen für Masse, Impuls und Energie basiert. Dabei wird das Eis rheologisch als dichtebeständiges, nichtlinear viskoses und wärmeleitendes Fluid angenommen; wegen der Abhängigkeit der Viskosität von Temperatur und Wassergehalt liegt eine thermomechanische Kopplung vor. Nachdem für eine einfache Geometrie (planparallele, geneigte Eisplatte) analytische Lösungen konstruiert werden, wird die Theorie einer Skalierung unterworfen, wobei die Annahmen eines kleinen Aspektverhältnisses (Verhältnis von typischer Vertikaldimension und typischer Horizontaldimension) sowie einer kleinen Froude-Zahl zugrundegelegt werden. Dies führt zu den polythermen Flacheisgleichungen, auch als Shallow-Ice-Approximation- (SIA-) Gleichungen bezeichnet.

Für diese Gleichungen wird anschließend ein numerisches Lösungsverfahren angegeben, welches auf dem Verfahren der Finiten Differenzen basiert. In der Vertikalen wird das Rechengebiet auf das Einheitsintervall abgebildet, was die Implementierung der Randbedingungen erleichtert. Mit dem hieraus entwickelten Computerprogramm werden Modellläufe für zwei verschiedene Probleme durchgeführt. Zuerst wird das EISMINT-Eisschild behandelt, welches aus einer ebenen quadratischen Platte als Felsgrund besteht, auf die eine räumlich konstante Schneefallrate niedergeht. Schließlich werden Simulationen für das grönländische Eisschild besprochen, welche sowohl unter der Annahme eines stationären Zustandes als auch für zeitabhängige Klimaszenarien (Sinus-Variationen, realistische Klimageschichte gemäß Eisbohrkern-Rekonstruktion, Auswirkung eines verstärkten Treibhauseffektes) durchgeführt werden.

Abstract

This thesis is concerned with the theoretical, analytical and numerical modelling of grounded ice sheets in three dimensions. These are considered as polythermal, i. e., it is accounted for the fact that there may be regions with temperatures below the pressure melting point (“cold ice”) as well as regions with temperatures exactly on the pressure melting point (“temperate ice”). In the latter, small quantities of water may occur in addition.

Based on previous approaches, an improved theory of polythermal ice sheets is developed, which is founded on continuum-thermodynamic balance relations and jump conditions for mass, momentum and energy. The rheologic behaviour is hereby assumed to follow an incompressible, nonlinear viscous and heat conducting fluid; because of the dependence of viscosity on temperature and water content the problem is thermo-mechanically coupled. After giving analytic solutions for a simple geometry (parallel-sided ice slab), the theory is subjected to a scaling procedure with the assumptions of a small aspect ratio (ratio between typical vertical dimension and typical horizontal dimension) and a small Froude number. This leads to the introduction of the polythermal shallow-ice approximation (SIA) equations.

Subsequently, a numerical solution scheme for these equations is given, making use of a finite difference approach. In the vertical, the model domain is mapped onto the unit interval in order to make the implementation of boundary conditions easier. Using the computer code developed from this, model runs for two different problems are carried out. First, the EISMINT ice sheet is dealt with, consisting of a flat square-shaped bedrock subject to spatially uniform snowfall. Second, simulations for the Greenland ice sheet are discussed, that were carried out for both steady state conditions and time-dependent scenarios, namely sinusoidal variations, a realistic climate history deduced from ice core reconstruction, and increased temperatures due to intensified greenhouse warming.

Notation

•	beliebige Größe
•*	Größe • zum neuen Zeitpunkt eines zeitlichen Iterationsschritts
•(*)	provisorischer Wert von • zum neuen Zeitpunkt eines zeitlichen Iterationsschritts
$\bar{\bullet}$	Größe • auf einen Punkt im Staggered Grid interpoliert, auf dem sie ursprünglich nicht definiert ist
• _c	Größe • im Kalteisbereich
• _r	Größe • in der Lithosphäre
• _t	Größe • im temperierten Eisbereich
A	Eisalter
$A_{i,b}$	eisbedeckte Fläche
$A_{t,b}$	von temperiertem Eis bedeckte Fläche
$A(T')$	Rate-Faktor für kaltes Eis
$A_t(\omega)$	Rate-Faktor für temperiertes Eis
$A_{(t)}(\cdot)$	Rate-Faktor für kaltes oder temperiertes Eis
a_m^\perp	Volumenfluß durch die CTS
$a_{m,st}^\perp$	Stationärer Anteil von a_m^\perp
a_s^\perp	Akkumulations-Ablations-Funktion für die Eisoberfläche
a	Streckparameter für die σ -Koordinatentransformation des Kalteisbereichs
b	z -Koordinate der Eisbasis (Lithosphärenoberseite)
b_0	stationärer Wert für b ohne Eislast
b_r	z -Koordinate der Lithosphärenunterseite
C	Gleitfunktion für kalte Basis
C_t	Gleitfunktion für temperierte Basis
C_{sl}	Koeffizient im Gleitgesetz vom Weertman-Typ für temperierte Basis
c	spezifische Wärme für Eis
c_r	spezifische Wärme für die Lithosphäre
$D(\omega)$	Wasserdrainage-Funktion
D_A	numerische Diffusion für die Eisalterberechnung
D_H	Diffusivität für die Evolution der freien Oberfläche
D_{Ht}	Glättungsparameter für die numerische Glättung von H_t
D_V	Hilfsgröße für die Berechnung der Horizontalgeschwindigkeit
E	Enhancement-Faktor im Fließgesetz
E_T	Lufttemperatur-Exzeß über dem Schmelzpunkt
$f(\sigma), f_t(\sigma)$	Kriechfunktion für kaltes bzw. temperiertes Eis

g	Schwerebeschleunigung
h	z -Koordinate der freien Eisoberfläche
h_{\max}	maximales h des gesamten Eisschildes
H	Eisdicke
H_{\max}	maximale Eisdicke H
H_c	Dicke der kalten Eisschicht
H_t	Dicke der temperierten Eisschicht
$H_{t,\max}$	maximale Dicke H_t der temperierten Eisschicht
H_t^{offset}	erstes probeweise angenommenes H_t bei neu entstehender temperierter Schicht
$H_{t,\text{smooth}}$	numerisch geglättetes H_t vor der Korrektur zur Volumenerhaltung
H_r	Dicke der Lithosphäre
$i, j, k_{c,t,r}$	Laufindices für die diskretisierten x -, y - bzw. $\zeta_{c,t,r}$ -Richtungen
i_{\max}, j_{\max}	Maximalwerte für i, j
\mathbf{j}	diffusive Wasserstromdichte
\mathbf{j}_{tot}	totale Wasserstromdichte
$k_{c,t,r,\max}$	Maximalwerte für $k_{c,t,r}$
K	Streckfaktor für die stereographische Projektion
L	latente Schmelzwärme für Eis
M	i) Wasserproduktionsrate im temperierten Eis ii) Ablationsrate (Schmelzrate an der Eisoberfläche)
M^*	Bildungsrate für Überlagerungseis
\dot{m}_b^w	Wasser-Massenstrom in den Boden hinein
n, \tilde{n}	Laufindices für die feinere bzw. grobere Diskretisierung der Zeit
$n_{\max}, \tilde{n}_{\max}$	Maximalwerte für n, \tilde{n}
p	Druck
P_{\max}	Sättigungsgrad von Wasser in Schnee
Q_{geoth}^{\perp}	geothermer Wärmefluß
\mathbf{q}	Wärmefluß (nur fühlbare Wärme)
\mathbf{q}_{ges}	Wärmefluß (fühlbare und latente Wärme)
\mathbf{q}, q_i	horizontaler Massenfluss, bzw. dessen i -Komponente
R	universelle Gaskonstante
R_e	Erdradius
S	Akkumulationsrate (Schneefallrate)
t	Zeit
t_{acc}	Akkumulations-Zeitpunkt für ein Eispartikel
t_{end}	Abbruch-Zeit für numerische Simulationen

t_{Mil}	Periode der Milanković-Zyklen
T	Temperatur
T_M	druckkorrigierte Schmelztemperatur
T_0	Schmelztemperatur bei verschwindendem Druck
T'	homologe Temperatur ($T - T_M$)
T'_{div}	T' in der Säule ($x_{\text{div}}, y_{\text{div}}$)
T'_{half}	T' in der Säule ($x_{\text{half}}, y_{\text{div}}$)
T_{air}	Lufttemperatur über dem Eis
\hat{T}_{air}	Amplitude der jährlichen Variation von T_{air}
T_{ma}	Jahresmittel der Lufttemperatur T_{air}
T_b	Temperatur an der Eisbasis
T'_b	homologe Temperatur an der Eisbasis
$T'_{b,\text{div}}$	T'_b in der Säule ($x_{\text{div}}, y_{\text{div}}$)
T_s	Eisoberflächentemperatur (10 m-Firntemperatur)
\mathbf{T}	Spannungstensor
\mathbf{T}^R	Spannungsdeviator (Reibungsspannungen)
\mathbf{v}, v_i	Geschwindigkeit (baryzentrisch), bzw. deren i -Komponente
$\mathbf{v}_b, (v_b)_i$	Eisgeschwindigkeit (baryzentrisch) an der Basis, bzw. deren i -Komponente
$\mathbf{v}_s, (v_s)_i$	Eisgeschwindigkeit (baryzentrisch) an der Oberfläche, bzw. deren i -Komponente
$\mathbf{v}_{\text{sl}}, (v_{\text{sl}})_i$	Basale Gleitgeschwindigkeit (Differenz zwischen Eisgeschwindigkeit und Lithosphärengeschwindigkeit), bzw. deren i -Komponente
$\mathbf{v}_i, v_{i,j}$	Geschwindigkeit des Eises in der Mischung Eis plus Wasser, bzw. deren j -Komponente
$\mathbf{v}_w, v_{w,j}$	Geschwindigkeit des Wassers in der Mischung Eis plus Wasser, bzw. deren j -Komponente
$v_{x,\text{half}}$	v_x in der Säule ($x_{\text{half}}, y_{\text{div}}$)
$v_{z,\text{div}}$	v_z in der Säule ($x_{\text{div}}, y_{\text{div}}$)
$v_{z,\text{half}}$	v_z in der Säule ($x_{\text{half}}, y_{\text{div}}$)
V_{ges}	gesamtes Eisvolumen
V_{temp}	Volumen des temperierten Eises
$V_{\text{temp}}^{\text{smooth}}$	Volumen des temperierten Eises nach der numerischen Glättung von H_t
\mathbf{w}, w_i	Geschwindigkeit einer singulären Fläche, bzw. deren i -Komponente
x, y	horizontale kartesische Koordinaten
$x_{\text{div}}, y_{\text{div}}$	Position (x, y) des Scheitelpunktes
x_{half}	x -Koordinate auf halbem Weg zwischen Scheitelpunkt und Eisrand

x_2	x -Koordinate des vom Scheitelpunkt aus gesehen zweiten Gitterpunktes mit temperierter Eisschicht längs y_{div}
z	vertikale kartesische Koordinate (Höhe über NN)
z_m	z -Koordinate der CTS
z_m^{shift}	Betrag der probeweisen CTS-Verschiebungen bei deren Positionierung
α	Verhältnis potentielle Energie zu innere Energie in kaltem Eis
α_t	Verhältnis potentielle Energie zu innere Energie in temperiertem Eis
β	Clausius-Clapeyron-Gradient
$\beta_{1,2}$	Koeffizienten für Schmelz-Parameterisierung
$\Delta x, \Delta y$	Ortsauflösung für die x - und y -Richtung
$\Delta \zeta_{c,t,r}$	Ortsauflösung für die $\zeta_{c,t,r}$ -Richtung
$\Delta t, \widetilde{\Delta t}$	feinere bzw. grobere zeitliche Auflösung
$\Delta T_{\text{ma}}(t)$	Abweichung des Jahresmittels der Lufttemperatur über dem Eis T_{ma} von den heutigen Werten
$\Delta T_s(t)$	Abweichung der Eisoberflächentemperatur T_s von den heutigen Werten
ε	i) innere Energie ii) Aspektverhältnis
κ	Wärmeleitfähigkeit für Eis
κ_r	Wärmeleitfähigkeit für die Lithosphäre
λ	geographische Länge
λ_0	Längengrad, der unter der stereographischen Projektion auf die y -Achse abgebildet wird
μ_{fwc}	Firnerwärmungs-Koeffizient
ν	Wasser-Diffusivität im temperierten Eis
ρ	wahre Dichte für Eis bzw. die Mischung Eis plus Wasser
ρ_i	Partialdichte für Eis in der Mischung Eis plus Wasser
ρ_w	Partialdichte für Wasser in der Mischung Eis plus Wasser
ρ_a	wahre Dichte der Asthenosphäre
ρ_r	wahre Dichte der Lithosphäre
σ	effektive Scherspannung
σ_{ij}	ij -Komponente des Spannungstensors
σ_{ij}^R	ij -Komponente des Spannungsdeviators
τ_V	Verzögerungszeit der isostatischen Einstellung der Asthenosphäre
$\tau_{c,t,r}$	Zeit im σ -Koordinatensystem für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. die Lithosphäre
$\xi_{c,t,r}, \eta_{c,t,r}$	horizontale Koordinaten des σ -Koordinatensystems für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. die Lithosphäre

$\zeta_{c,t,r}$	vertikale Koordinate des σ -Koordinatensystems für kaltes Eis, temperiertes Eis bzw. die Lithosphäre
ϕ	geographische Breite
ϕ_0	Breitenkreis der Bildebene der stereographischen Projektion
ω	Wassergehalt des temperierten Eises (Massenanteil)
ω_{\max}	Schwellwert im Wasserdrainage-Gesetz
ω_2	ω in der Säule (x_2, y_{div})
$[A]$	typischer Rate-Faktor
$[c]$	typische spezifische Wärme für Eis
$[c_r]$	typische spezifische Wärme für die Lithosphäre
$[C]$	typische Gleitfunktion für kalte Basis
$[C_t]$	typische Gleitfunktion für temperierte Basis
$[f]$	typische Kriechfunktion
$[H]$	typische Vertikaldimension
$[L]$	typische Horizontaldimension
$[Q_{\text{geoth}}^\perp]$	typischer geothermer Wärmefluß
$[V_H]$	typische Vertikalgeschwindigkeit
$[V_L]$	typische Horizontalgeschwindigkeit
$[\Delta T]$	typische Temperaturdifferenz
$[\kappa]$	typische Wärmeleitfähigkeit für Eis
$[\kappa_r]$	typische Wärmeleitfähigkeit für die Lithosphäre
$[\omega]$	typischer Wassergehalt
\mathcal{B}	Clausius-Clapeyron-Zahl
\mathcal{D}	Wärmediffusionszahl
\mathcal{D}_t	Wasserdiffusionszahl
\mathcal{D}_r	Wärmediffusionszahl der Lithosphäre
$\mathcal{E}(\zeta_c)$	Streckfunktion für die σ -Transformation des Kalteisbereichs
\mathcal{F}	Gleitzahl für kalte Basis
\mathcal{F}_t	Gleitzahl für temperierte Basis
\mathcal{K}	Fluiditätszahl
\mathcal{N}_r	geotherme Wärmezahl in der Lithosphäre
\mathcal{P}_b^w	basale Schmelzrate
\mathcal{P}_m^w	Oberflächenproduktionsrate von Wasser an der CTS
\mathcal{T}_r	Zeitverzögerungszahl für die Asthenosphäre
F	Froude-Zahl

1 Einleitung

1.1 Klimageschichte der Erde

Seit sich die Erde vor etwa 4.6 Milliarden Jahren aus einem kleinen Teil des kosmischen Urnebels, der unser Sonnensystem geworden ist, gebildet hat, unterlag ihr Klima einem beständigen Wandel. Die ersten hundert Millionen Jahre waren als Folge der in Wärme umgewandelten Gravitationsenergie und der Wärmeproduktion radioaktiver Isotope der neu entstandenen Erde sehr heiß mit Oberflächentemperaturen über 100°C , bis diese Grenze vor ungefähr vier Milliarden Jahren unterschritten wurde. Die Abkühlung der Erdoberfläche zog sich anschließend noch weitere zwei Milliarden Jahre hin, bis ca. zwei Milliarden Jahre vor heute ein relatives Gleichgewicht erreicht war; zu dieser Zeit hatte sich auch bereits eine Stickstoff-Sauerstoff-Atmosphäre, ähnlich der heutigen, gebildet. Blickt man auf dieser Jahrtausenden umfassenden Zeitskala in die Zukunft, so wird sich die Erdoberfläche aufgrund der zunehmenden Energieproduktion der Sonne langsam erwärmen und schließlich in ferner Zukunft wieder den Glutofen darstellen, der sie in der Frühzeit der Erdgeschichte einmal war.

Dies beschreibt jedoch nur den langfristigen, die gesamte Lebensdauer der Erde umfassenden Trend der Klimageschichte. Diesem Trend überlagern sich äußerst vielfältige Variationen, die sich auf Zeitskalen von 100 Millionen Jahren bis hin zu Jahrzehnten abspielen. (Natürlich existieren auch noch kurzfristigere Schwankungen, diese werden allerdings nicht mehr als Klima, sondern als Wetter bezeichnet.) Bleibt man zunächst bei den großen Zeitskalen von 10-100 Millionen Jahren, so zeigt sich, daß es in der Klimageschichte der Erde Wechsel zwischen nicht-eisbildenden Warmklimazeitaltern einerseits und Eiszeitaltern andererseits gegeben hat. Warmklimazeitalter zeichnen sich dadurch aus, daß die Erdoberfläche völlig eisfrei war, während in Eiszeitaltern Eisbedeckungen auftraten. Diese Phasen sind sehr ungleich verteilt; auch bei Beschränkung auf die letzten 2.3 Milliarden Jahre der irdischen Klimageschichte seit dem Auftreten des ersten Eiszeitalters ("Archaisches Eiszeitalter") überwiegen die warmen Phasen die sieben identifizierten Eiszeitalter deutlich an Dauer.

Die hauptsächliche Ursache für das Auftreten von Eiszeitaltern ist wahrscheinlich das Vorhandensein von ausgedehnten Landmassen in polaren Regionen aufgrund der Kontinentaldrift, denn nur dann ist die Bildung großer Eismassen aus akkumuliertem Schneefall in polaren Regionen überhaupt möglich. In diesem Fall tritt eine starke positive Rückkopplung auf, die über die hohe Albedo (Rückstrahlvermögen des einfallenden Sonnenlichts) der vereisten Flächen zu verringerter Energieaufnahme der Erdoberfläche und damit zu Abkühlung führt. Sind die polnahen Gebiete dagegen hauptsächlich von Ozeanen bedeckt, wird eventuell fallender Schnee schnell geschmol-

zen, so daß keine großflächige Vereisung möglich ist. Natürlich setzt diese Erklärung voraus, daß das Klima hinreichend kalt ist, um Schneefall in polaren Regionen zuzulassen; daher gab es in den ersten 2.3 Milliarden Jahren nach Entstehung der Erde wahrscheinlich keine Eiszeitalter.

Während des gesamten Erdmittelalters (Mesozoikum, 225-65 Millionen Jahre vor heute, bestehend aus Trias, Jura und Kreide), nachdem die Erde bereits sechs identifizierte Eiszeitalter erlebt hatte, herrschte eine Warmklimaphase vor, in der viele nette kleine Tierchen, genannt Dinosaurier, auf der Erde umherliefen. Nach dem Beginn des Tertiärs der Erdneuzeit (Neozoikum, seit 65 Millionen Jahren vor heute) setzte eine stufenweise Abkühlung ein, einhergehend mit der Bewegung des antarktischen Kontinents in die südpolare Region und dessen Vereisung in der zweiten Hälfte des Tertiärs. Der eigentliche Beginn dieses sich herauskristallisierenden Eiszeitalters wird jedoch üblicherweise erst auf zwei bis drei Millionen Jahre vor heute, den Übergang vom Tertiär zum Quartär, datiert, zusammenfallend mit einer weiteren sprunghaften Abkühlung. Dieses bis heute und wahrscheinlich noch viele Millionen Jahre in die Zukunft (falls nicht durch menschliche Eingriffe verhindert) andauernde Eiszeitalter wird daher als quartäres Eiszeitalter bezeichnet.

Auf einer Zeitskala von 10^4 - 10^5 Jahren ist das quartäre Eiszeitalter geprägt vom Wechselspiel von mindestens 20 Kaltzeiten ("Eiszeiten") und dazwischenliegenden Warmzeiten. Diese Warmzeiten sind nicht zu verwechseln mit Warmklimazeitaltern; auch die Warmzeiten eines Eiszeitalters weisen ausgedehnte Eisbedeckungen auf, wie die heutige, seit etwa 11000 Jahren herrschende Neo-Warmzeit zeigt. Davor lagen die Würm-Kaltzeit (ab ca. 70000 Jahren vor heute), die Eem-Warmzeit (ab ca. 125000 Jahren vor heute), die Riß-Kaltzeit (ab ca. 200000 Jahren vor heute) usw. Dieses Wechselspiel geschieht vor dem Hintergrund einer praktisch stationären Verteilung der Landmassen und kann daher nicht mehr mit der Kontinentaldrift erklärt werden. Die primäre Ursache liegt statt dessen in periodischen Schwankungen von Parametern der Umlaufbahn der Erde um die Sonne (Orbitaltheorie; Milanković [54], Hays, Imbrie & Shackleton [21], Berger [5]). Hierbei treten drei Perioden auf, nämlich die Schwankung der Bahnexzentrizität mit einem Zyklus von 96000 Jahren, die Schwankung der Erdachsenneigung relativ zur Bahnebene (40000 Jahre) und die Präzession der Erdachse zusammen mit der Orientierung der Bahnellipse im Raum (21000 Jahre), welche die Verteilung der Sonneneinstrahlung auf die Erdoberfläche verändern und über mannigfache Rückkopplungen positiver und negativer Art diese Klimaveränderungen bewirken.

Auch innerhalb von Kalt- und Warmzeiten existieren markante Klimaschwankungen. Während der letzten (Würm-) Kaltzeit traten drei besonders kalte Epochen,

sogenannte Stadiale, vor ca. 60000, 40000 und 18000 Jahren auf (letztere ist bekannt als “Last Glacial Maximum”, oder kurz LGM), unterbrochen von wärmeren Interstadialen. Das Ausmaß von Klimaschwankungen in der Eem-Warmzeit davor ist aufgrund sich teilweise widersprechender Rekonstruktionen umstritten (Zahn [72]); die heutige (Neo-) Warmzeit ist geprägt von einem relativ gleichförmigen Klima mit Temperaturschwankungen im Bereich von maximal 1°C seit etwa 10000 Jahren, was eventuell eine große Ausnahmesituation darstellt (Staufer [67]), die eine Entwicklung der menschlichen Kultur (?) erst möglich gemacht hat. Jedoch gab es auch im Rahmen dieser Schwankungen ausgezeichnete Perioden, wie etwa das mittelalterliche Klimaoptimum von ca. 800-1200 n. Chr., die sich daran anschließende “kleine Eiszeit” (ca. 1400-1900 n. Chr., letzter Tiefpunkt um 1850), und schließlich das heutige, wieder etwas wärmere Klima, welches bis jetzt noch im Rahmen der letzten Jahrtausende liegt, sehr wahrscheinlich aber durch menschliche Eingriffe in das komplexe Klimasystem der Erde zumindest mitverursacht wurde und wird.¹

1.2 Modellierung von Inlandeisschilden

Die irdische Kryosphäre (der vereiste Teil des Klimasystems) setzt sich aus mehreren Komponenten zusammen. Unter einem *Inlandeisschild*, auch kurz als Inlandeis oder als Eisschild bezeichnet, versteht man eine ausgedehnte Eismasse, deren Basis auf festem Land aufliegt und die sich im Laufe von Jahrtausenden durch akkumulierten Schneefall gebildet hat. Inlandeisschilde machen bei weitem den größten Anteil des auf der Erde vorhandenen Eisvolumens aus; mit ihrer theoretischen und numerischen Modellierung beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. *Alpine Gletscher* entstehen analog, erstrecken sich jedoch nur über wesentlich kleinräumigere Regionen in Gebirgen und tragen daher lediglich zu einem sehr geringen Teil zur Kryosphäre bei. *Schelfeise* sind aufschwimmende Eismassen, die vom meerwärtigen Massenfluß eines Inlandeises gespeist werden; sie existieren typischerweise in großen Buchten eines von Inlandeis bedeckten Kontinentalschelfs. Bei *Meereis* handelt es sich um gefrorenes Meerwasser, und *Grundeis* bedeutet schließlich gefrorenes Wasser im Boden, wie es in Permafrostgebieten auftritt.

In Gletschern und Eisschilden vorkommendes Eis existiert (bei Vernachlässigung zusätzlicher Beimischungen von Salz und Sediment) in zwei grundsätzlich verschiedenen Zuständen. *Kaltes Eis* ist durch eine Temperatur unterhalb des druckkorrigierten Schmelzpunktes gekennzeichnet und kann als dichtebeständiges, viskoses und wärmeleitendes Ein-Komponenten-Fluid beschrieben werden; es macht in den

¹Die Ausführungen dieses Abschnitts folgen, falls nicht anders erwähnt, Schönwiese [66] und den dort angegebenen Primärquellen.

großen Eisschilden der Erde (Grönland, Antarktis) den weitaus größten Anteil aus. Bei *temperiertem Eis* dagegen befindet sich die Temperatur exakt auf dem druckkorrigierten Schmelzpunkt, was dazu führt, daß dieses zusätzlich Wasser in geringer Menge enthalten kann. Demzufolge muß es im Gegensatz zu kaltem Eis als Zweikomponenten-Fluid aufgefaßt werden. Bereiche aus temperiertem Eis können in Eisschilden in dünnen, bodennahen Schichten existieren, die das Fließverhalten entscheidend verändern. Gletscher und Eisschilde, die sowohl kalte als auch temperierte Zonen enthalten, nennt man *polytherm*.

In der Vergangenheit wurden bereits einige dreidimensionale Modelle zur numerischen Simulation des dynamischen Verhaltens von Inlandeisschilden entwickelt, was erst durch die hohen Rechenleistungen moderner Computer möglich gemacht wurde. Das erste Modell stammt von Mahaffy [53] und wurde angewendet auf die Barnes Ice Cap in der kanadischen Arktis. Es vernachlässigte allerdings die starke Temperaturabhängigkeit der Eisviskosität; so können die Modellgleichungen vertikal integriert werden, und das numerische Problem reduziert sich auf die zwei horizontalen Dimensionen. Das Modell von Jenssen [43] rechnete bereits mit temperaturabhängiger Eisviskosität und wurde auf das grönländische Eisschild angewendet, allerdings mit sehr geringer räumlicher Auflösung aufgrund der damals noch beschränkten Rechnerkapazitäten. Es folgten weitere Modelle, die auf unterschiedliche Probleme, wie Grönland, die Antarktis, Tibet, angewendet wurden (Oerlemans [58, 59], Budd & Smith [11], Budd, Jenssen & Smith [10], Herterich [23, 24], Kuhle, Herterich & Calov [45], Fastook & Chapman [16], Huybrechts & Oerlemans [40, 41], Huybrechts [34, 35, 36, 37, 38], Huybrechts, Letréguilly & Reeh [39], Letréguilly, Huybrechts & Reeh [47], Letréguilly, Reeh & Huybrechts [49], Calov [12], Calov & Hutter [13, 14], Fabré, Letréguilly, Ritz & Mangeney [15]). Herauszuheben sind die Antarktis-Simulationen von P. Huybrechts, welche ausführlich in [36] beschrieben sind; hierbei handelt es sich um das bis heute fortgeschrittenste Modell, welches das gekoppelte Inlandeis-Schelfeis-Lithosphäre-Problem mit sehr hoher Auflösung rechnet.

All diesen Modellen ist jedoch gemein, daß sie das mögliche Auftreten von temperierten Eisbereichen weitgehend vernachlässigen. Modellrechnungen zur Bestimmung des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes von Eisschilden sowie der Evolution von Dicke und Ausdehnung bei gegebenem klimatischen Input werden mit den Prozeßgleichungen für kaltes Eis durchgeführt. Erhält man hierbei Temperaturen oberhalb des Schmelzpunktes, so wird für die betreffenden numerischen Gitterpunkte die Temperatur künstlich auf diesen herabgesetzt. Diese Vorgehensweise stellt jedoch lediglich eine sehr grobe Berücksichtigung der temperierten Bereiche dar, denn es wird nicht der Tatsache Rechnung getragen, daß mit den kalten und temperierten Bereichen zwei

verschiedene Phasen im Eisschild vorhanden sind, die durch eine Phasengrenzfläche voneinander getrennt sind, an welcher bestimmte Sprungbedingungen für die verschiedenen physikalischen Größen erfüllt sein müssen (Müller [56], Hutter [29]). Ferner ist es nicht möglich, so den die Eisviskosität maßgeblich mitbestimmenden Wassergehalt in den temperierten Bereichen zu berechnen.

Die besondere klimatologische Relevanz dieses Problems besteht darin, daß aufgrund der zu erwartenden, durch den verstärkten Treibhauseffekt hervorgerufenen Erwärmung der Erdatmosphäre langfristig die große Gefahr des verstärkten Abschmelzens der großen irdischen Eisschilde besteht, was einen Anstieg des Meeresspiegels um bis zu 70 m zur Folge hätte. Für diesen Abschmelzprozeß sind basale temperierte Bereiche von vielleicht entscheidender Bedeutung. Während nämlich kaltes Eis die Eigenschaft besitzt, an dem Felsgrund des Eisschildes zu haften, gehorcht temperiertes Eis dort aufgrund des Wassergehaltes einem viskosen Gleitgesetz; aus diesem Grunde können temperierte Bereiche das Abfließen der Eismassen (und somit deren Abbau) in die umgebenden Ozeane stark beschleunigen. Aus bisherigen Modellrechnungen mit Kalteismodellen und aus Radarmessungen läßt sich vermuten, daß große Bereiche der Antarktis basale temperierte Bereiche aufweisen (Huybrechts [36]); in Grönland existieren solche wahrscheinlich in der Nähe des Eisrandes (Calov [12]). Diese Betrachtungen zeigen, daß es für realistische Simulationen des Verhaltens großer Eisschilde sehr wichtig ist, die temperierten Bereiche adäquat und physikalisch korrekt zu behandeln.

Ein weiterer Aspekt ist die Interpretation von Eisbohrkernen aus Grönland und der Antarktis. Hierbei geht man davon aus, daß das untersuchte Eis zu allen Zeiten kalt war, sich also nie Wasser bilden konnte, das durch das Eis diffundieren und so die Isotopenkonzentrationen und damit auch die Klimarekonstruktion verfälschen konnte. Das Wissen um temperierte Bereiche und das Verhalten des Wassers darin könnte also eine geänderte Interpretation notwendig machen.

Theoretische Beschreibungen zu polythermem Eis wurden bereits formuliert (Fowler & Larson [17], Hutter [27], Hutter [28], Blatter [6], Hutter [31]). Es werden zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen verwendet: Diffusionsmodelle beschreiben temperiertes Eis mit zwei Massenbilanzen (eine für die Mischung Eis plus Wasser, eine für das Wasser selbst, dessen Anteil als gering angenommen wird), jedoch nur je einer Impuls- und Energiebilanz für die Mischung; der Transport des Wassers in der Eisumgebung wird dabei mit Hilfe eines Fickschen Diffusionsgesetzes dargestellt. Zwei-Phasenmodelle hingegen verwenden für jede der beiden Komponenten sowohl eine Massen- als auch eine Impulsbilanz, ergänzt durch eine Wechselwirkungskraft zwischen den beiden Komponenten (Darcy-Transport). Ergänzt werden diese Mo-

delle durch die hinlänglich bekannten und gut verstandenen Modellgleichungen für kaltes Eis (Hutter [29]) sowie Randbedingungen an der Oberfläche und der Basis und Übergangsbedingungen an der internen Phasengrenzfläche; diese können aus einer allgemeinen Sprungbedingung für singuläre Flächen hergeleitet werden.

Für große Inlandeisschilde kann davon ausgegangen werden, daß ein Diffusionsmodell zur adäquaten Beschreibung hinreichend ist, da sich die temperierten Bereiche auf relativ kleine bodennahe Zonen beschränken und der zu erwartende Wassergehalt gering ist (Hutter [31]). Temperierte Alpengletscher hingegen, in denen im Sommer durch oberflächliches Abschmelzen große Mengen Wasser in das Eis gelangen, verlangen nach einem Zwei-Phasenmodell, da der Wassertransport dann nicht mehr diffusiv beschrieben werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit, die sich mit großen Eisschilden befaßt, wird daher zunächst ein verbessertes Diffusionsmodell ausführlich hergeleitet. Das Modell wird zwecks systematischer Vereinfachungen einer Skalierung unterworfen, wobei von der Flacheisannahme (“Shallow ice approximation”, im folgenden als “SIA” bezeichnet) Gebrauch gemacht wird, d. h., es wird ausgenutzt, daß in Eisschilden die typischen Höhen i. a. wesentlich kleiner als die typischen Längen sind, also ein kleines Aspektverhältnis vorliegt.

Dieses Modell wird anschließend einer numerischen Behandlung zugänglich gemacht. Ausgehend von Erfahrungen mit Modellrechnungen für kaltes Eis (Herterich [24], Huybrechts [36], Abe-Ouchi [1], Calov [12]) wird hierfür ein Finite-Differenzen-Verfahren unter Verwendung von σ -Koordinaten in der Vertikalen (d. h., jede vertikale Säule der Bereiche kaltes Eis, temperiertes Eis und Lithosphäre wird auf ein $[0,1]$ -Intervall abgebildet) mit sich nach unten hin verdichtenden Gitterpunkten für den Kalteisbereich und Upstream-Diskretisierung in den Advektionstermen verwendet. Die Besonderheit der polythermen Rechnung besteht jedoch in der numerischen Positionierung der Phasengrenzfläche zwischen den kalten und temperierten Bereichen, an welcher Unstetigkeiten des Temperaturgradienten und des Wassergehaltes auftreten können und Übergangsbedingungen erfüllt sein müssen, sowie der Berechnung des Wassergehaltes in den temperierten Bereichen. Dies wurde in der Vergangenheit für einfache Geometrien (planparallele Eisplatte, zweidimensionaler stationärer Gletscher) durchgeführt (Hutter, Blatter & Funk [32], Blatter [6], Blatter & Hutter [8], Funk, Echelmeyer & Iken [18]) und kommt hier für zeitabhängige Probleme dreidimensionaler Eisschildgeometrien zur Anwendung. Ziel ist dabei im einzelnen die Berechnung des Geschwindigkeits-, Temperatur- und Wassergehaltsfeldes sowie der Eisdicke, der Ausdehnung des Eisschildes auf dem zugrundeliegenden Kontinentalschelf und der Position der internen Phasengrenzfläche zwischen kaltem und temperiertem Eis (“cold-temperate transition surface”, im folgenden kurz als “CTS” bezeichnet) als

Funktion der Zeit bei gegebener Oberflächentemperatur und oberflächlicher Massenbilanz (Schneefall, Schmelzen) sowie gegebenem geothermen Wärmefluß von unten.

Das daraus resultierende Computerprogramm SICOPOLIS (SIMulation COde for POLythermal Ice Sheets) wird auf zwei verschiedene Probleme angewendet. Die erste Anwendung betrifft das akademische EISMINT- (European Ice Sheet Modelling INiTiative-) Eisschild, welches aus einem ebenen Quadrat als Felsgrund mit räumlich uniformer Schneefallrate besteht; hierfür werden Steady-State-Simulationen sowie transiente Simulationen mit sinusförmiger Variation der Lufttemperatur vorgestellt. Daran anschließend werden umfangreiche Simulationen für das grönländische Eisschild diskutiert; diese gliedern sich in zwei Teilbereiche. Anhand von Steady-State-Simulationen werden zunächst eine Reihe von Parameterstudien durchgeführt. Als Abschluß der Anwendungen werden dann transiente Simulationen gezeigt, wobei für den Lufttemperatur-Antrieb sinusförmige Milanković-Zyklen, Eisbohrkern-Meßdaten des GRIP-Projektes für 250000 Jahre Klimageschichte sowie mehrere Szenarien zur möglichen zukünftigen Erwärmung der Erdatmosphäre aufgrund eines verstärkten Treibhauseffektes zugrundegelegt werden.

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

2.1 Allgemeine Bilanzaussagen

Das Modell, welches im nächsten Kapitel entwickelt werden soll, basiert im wesentlichen auf den Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie; ergänzt durch einige Materialgesetze kann hieraus ein geschlossenes Gleichungssystem erhalten werden. Diese Bilanzgleichungen können als Spezialfälle einer allgemeinen Bilanzgleichung aufgefaßt werden, welche in Eulerscher Darstellung die zeitliche Änderung einer beliebigen physikalischen Größe $j(\omega, t)$ innerhalb eines materiellen Volumens ω bilanziert mit dem konduktiven Fluß ϕ von j durch den Rand $\partial\omega$ sowie der volumemäßigen Produktion p (welche für Erhaltungsgrößen verschwindet) und Zufuhr z im materiellen Volumen ω (vgl. Müller [56], Hutter [29]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} j(\omega, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} g(\mathbf{x}(t), t) dv \\ &= - \oint_{\partial\omega} \phi(\mathbf{x}(t), t) \cdot \mathbf{n} da + \int_{\omega} (p(\mathbf{x}(t), t) + z(\mathbf{x}(t), t)) dv; \end{aligned} \quad (2.1)$$

g ist hierbei die Dichte von j , und \mathbf{n} bedeutet den äußeren Normalenvektor des Volumens ω . Mit Hilfe des Reynoldsschen Transporttheorems (Becker & Bürger [4])

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} g(\mathbf{x}(t), t) dv = \int_{\omega} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \oint_{\partial\omega} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da, \quad (2.2)$$

welches besagt, daß sich die zeitliche Änderung von j in ω (linke Seite) zusammensetzt aus einem lokalen Anteil (erster Term rechts) und dem konvektiven Fluß durch den begrenzenden Rand (zweiter Term rechts, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ ist die Partikelgeschwindigkeit), und des Gaußschen Integralsatzes erhält man aus (2.1) durch Lokalisierung die *allgemeine Bilanzgleichung in lokaler Form*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\operatorname{div}(\phi + g\mathbf{v}) + p + z, \quad (2.3)$$

wobei stetige Differenzierbarkeit der auftretenden Felder innerhalb des Volumens ω vorausgesetzt ist. Enthält dieses eine singuläre Fläche σ , auf welcher Unstetigkeiten auftreten können, so ist auf dieser (2.3) nicht mehr gültig; statt dessen kann über die Betrachtung eines Volumenelements um die singuläre Fläche herum eine *allgemeine Sprungbedingung* abgeleitet werden (Müller [56], Hutter [29]):

$$\llbracket (\phi + g(\mathbf{v} - \mathbf{w})) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \mathcal{P}. \quad (2.4)$$

\mathbf{w} bedeutet hierbei die Geschwindigkeit der singulären Fläche selbst, und \mathcal{P} ist ein Oberflächenproduktions- bzw. Oberflächenzufuhrterm, welcher in den meisten Fällen

verschwindet. Die eckigen Klammern bezeichnen den Sprung des innestehenden Ausdrucks an der singulären Fläche σ : $\llbracket f \rrbracket := f^+ - f^-$; f^\pm ist der Wert von f auf der positiven bzw. negativen Seite von σ , wobei die positive Seite dadurch ausgezeichnet ist, daß der Normalenvektor \mathbf{n} in sie hineinzeigt. Die allgemeine Sprungbedingung besagt somit, daß der Sprung der Normalkomponente des gesamten Flusses (Summe aus konduktivem Fluß und konvektivem Fluß relativ zur Bewegung von σ) gleich ist einer Oberflächenproduktion \mathcal{P} , welche im allgemeinen verschwindet.

Im folgenden geht es darum, die Gleichungen (2.3) und (2.4) auf die einzelnen Fälle zu spezialisieren. Dies geschieht durch Einsetzen der entsprechenden Werte für g , ϕ , p , z und \mathcal{P} .

2.2 Massenbilanz

In diesem Fall ist $g = \rho$ (ρ : Massendichte), $\phi = \mathbf{0}$, $p = 0$, $z = 0$, $\mathcal{P} = 0$. Dies ergibt für die lokale Massenbilanz²

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} + \rho(\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0; \quad (2.5)$$

($\dot{}$) bedeutet die materielle, der Partikelgeschwindigkeit \mathbf{v} folgende Zeitableitung. Ein wichtiger Spezialfall ist der eines *dichtebeständigen Fluides* ($\dot{\rho} = 0$):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.6)$$

Die Sprungbedingung an singulären Flächen lautet

$$\llbracket \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0. \quad (2.7)$$

2.3 Impulsbilanz

Hier gilt $g = \rho \mathbf{v}$, $\phi = -\mathbf{T}$ (\mathbf{T} : Cauchyscher Spannungstensor), $p = \mathbf{0}$, $z = \rho \mathbf{f}$ (\mathbf{f} : spezifische Kraft, i. a. gleich der Schwerebeschleunigung \mathbf{g}) und $\mathcal{P} = \mathbf{0}$. Hiermit erhält man nach einiger Umformung die lokale Impulsbilanz

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}; \quad (2.8)$$

dies entspricht dem Newtonschen Gesetz “Kraft gleich Masse mal Beschleunigung”.

Die Impulssprungbedingung ergibt sich zu

$$\llbracket \mathbf{T} \mathbf{n} \rrbracket - \llbracket \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

²In Mischungen kann für die einzelnen Konstituenten aufgrund von Phasenübergängen oder chemischen Reaktionen auch $p \neq 0$ und $\mathcal{P} \neq 0$ gelten.

2.4 Drehimpulsbilanz

Für diese ist $g = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\phi} = -\mathbf{x} \times \mathbf{T}$, $p = \mathbf{0}$, $z = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f}$ und $\mathcal{P} = \mathbf{0}$, d. h., die entsprechenden Werte der Impulsbilanz werden mit dem Ortsvektor \mathbf{x} vektoriell multipliziert. Daher könnte man erwarten, daß die Drehimpulsbilanz zur Impulsbilanz äquivalent ist; Aufstellen der allgemeinen Bilanzgleichung (2.3) mit obigen Werten ergibt jedoch

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t, \quad (2.10)$$

also die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors, als unabhängige Aussage. Eine unabhängige Drehimpuls-Sprungbedingung existiert dagegen nicht.

2.5 Energiebilanz

Für den Fall der Energiebilanz ist $g = \rho \epsilon + \rho v^2/2$ (ϵ : spezifische innere Energie), $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{q}_{\text{ges}} - \mathbf{T} \mathbf{v}$ (\mathbf{q}_{ges} : Summe aus fühlbarem und latentem Wärmefluß), $p = 0$, $z = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho r$ (r : spezifische Strahlungsleistung) und $\mathcal{P} = 0$. Somit lautet die lokale Energiebilanz mit einigen Umformungen

$$\rho \dot{\epsilon} = -\text{div } \mathbf{q}_{\text{ges}} + \rho r + \text{tr}(\mathbf{T} \mathbf{D}); \quad (2.11)$$

$\mathbf{D} = \text{sym grad } \mathbf{v}$ ist der Verzerrungsgeschwindigkeits-Tensor.

Die zugehörige Sprungbedingung lautet

$$\llbracket \mathbf{q}_{\text{ges}} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} \rrbracket + \llbracket \rho(\epsilon + v^2/2) (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0. \quad (2.12)$$

2.6 Entropiebilanz

Dieser Fall läßt sich nur auf einem relativ allgemeinen Niveau ausarbeiten, da die Entropiegrößen von Problem zu Problem sehr verschieden sein können. Mit $g = \rho \eta$ (η : spezifische Entropie), $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}^\eta$ ($\boldsymbol{\phi}^\eta$: konduktiver Entropiefluß), $p = \rho \gamma$ (γ : spezifische Entropieproduktion), $z = \rho s$ (s : spezifische Entropiezufuhr) und $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\eta$ (\mathcal{P}^η : Entropie-Oberflächenproduktion) ergibt sich für die lokale Bilanzgleichung

$$\rho \dot{\eta} = -\text{div } \boldsymbol{\phi}^\eta + \rho s + \rho \gamma \quad (2.13)$$

und für die Sprungbedingung an singulären Flächen

$$\llbracket \boldsymbol{\phi}^\eta \cdot \mathbf{n} \rrbracket + \llbracket \rho \eta (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \mathcal{P}^\eta. \quad (2.14)$$

Es ist anzumerken, daß die Entropie im Gegensatz zu den vorher behandelten Größen keine Erhaltungsgröße darstellt, mithin also die Produktionsterme nicht verschwinden müssen. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik impliziert jedoch die Einschränkung, daß sie nicht negativ werden können; es muß also $\gamma \geq 0$ und $\mathcal{P}^\eta \geq 0$ erfüllt sein.

2.7 Materialgesetze für viskose Fluide

Das *allgemeine Materialgesetz für viskose Fluide* (“Reiner-Rivlin-Fluide”) verknüpft den Spannungstensor \mathbf{T} mit dem Verzerrungsgeschwindigkeits-Tensor \mathbf{D} und lautet

$$\mathbf{T} = (-p + \nu_0) \mathbf{1} + \nu_1 \mathbf{D} + \nu_2 \mathbf{D}^2 \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T), \\ \nu_{0,1,2} &= \nu_{0,1,2}(\rho, T, I_D, II_D, III_D), \\ \nu_0(\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{0}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.16)$$

hierbei ist p der Druck, ρ die Massendichte, T die Temperatur, $\nu_{0,1,2}$ sind die Viskositätskoeffizienten, und I_D, II_D, III_D bedeuten die drei Invarianten des Verzerrungsgeschwindigkeits-Tensors \mathbf{D} (vgl. z. B. Hutter [30]).

Im Falle eines *dichtebeständigen Fluids*, wovon in der Eisdynamik ausgegangen wird, gilt gemäß (2.6) $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$. Der Spannungstensor \mathbf{T} wird in diesem Fall aufgespalten in einen isotropen Drucktensor und einen deviatorischen Tensor der Reibungsspannungen,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}^R \quad \text{mit} \quad \operatorname{tr} \mathbf{T}^R = 0, \quad (2.17)$$

wobei der Druck jetzt ein freies Feld ist, und ein Materialgesetz nur noch für \mathbf{T}^R zu formulieren ist. Dieses lautet also für ein dichtebeständiges Reiner-Rivlin-Fluid gemäß (2.15) zunächst

$$\mathbf{T}^R = \nu_0 \mathbf{1} + \nu_1 \mathbf{D} + \nu_2 \mathbf{D}^2. \quad (2.18)$$

Durch Spurbildung erhält man

$$\nu_0 = -\frac{2}{3}\nu_2 II_D, \quad (2.19)$$

wobei $2 II_D = \operatorname{tr} (\mathbf{D}^2)$ verwendet wurde. (2.19) in (2.18) eingesetzt ergibt

$$\mathbf{T}^R = \nu_1 \mathbf{D} + \nu_2 \left(\mathbf{D}^2 - \frac{2}{3} II_D \mathbf{1} \right) \quad (2.20)$$

mit

$$\nu_{1,2} = \nu_{1,2}(T, II_D, III_D) \quad (2.21)$$

als allgemeines Materialgesetz des dichtebeständigen Reiner-Rivlin-Fluids.

In der Eisdynamik wird üblicherweise die Vereinfachung getroffen, daß der nicht-lineare Term proportional zu \mathbf{D}^2 entfällt, ν_2 also vernachlässigbar ist. Weiterhin wird

der verbleibende Rest von (2.20) invertiert dargestellt. Da wegen Gl. (2.20), welche ja \mathbf{T}^R mit \mathbf{D} verknüpft, die Invarianten von \mathbf{D} durch die Invarianten von \mathbf{T}^R ausgedrückt werden können, folgt

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\nu_1(T, II_D, III_D)} \mathbf{T}^R =: \mu_1(T, II_{T^R}, (III_{T^R})) \mathbf{T}^R. \quad (2.22)$$

Als weitere Vereinfachung wird, wie in (2.22) durch die Klammern bereits angedeutet, auch die Abhängigkeit von der dritten Invarianten III_{T^R} des Reibungsspannungstensors vernachlässigt. Das verbleibende Materialgesetz ist jedoch im allgemeinen immer noch nichtlinear.

3 Das polytherme Eismodell

Ein polythermes Eisschild besteht, wie in §1 bereits beschrieben, aus Bereichen mit kaltem Eis und Bereichen mit temperiertem Eis; in letzteren ist zusätzlich Wasser enthalten. Unter dem Eisschild befindet sich die Lithosphäre, welche eine etwa 100 km dicke Schicht aus festem Gestein darstellt, die auf der viskosen Asthenosphäre aufschwimmt. Von der Lithosphäre werden im Modell allerdings nur die obersten Kilometer berücksichtigt, da dies für den Einfluß der thermischen Trägheit ausreichend ist. Die typische Geometrie eines polythermen Eisschildes ist in Abbildung 3.1 dargestellt, in welcher auch ein kartesisches Koordinatensystem (x, y, z) eingeführt wird. x und y spannen hierbei die Horizontalebene auf, z ist die Vertikalkoordinate antiparallel zur Richtung der Erdbeschleunigung.

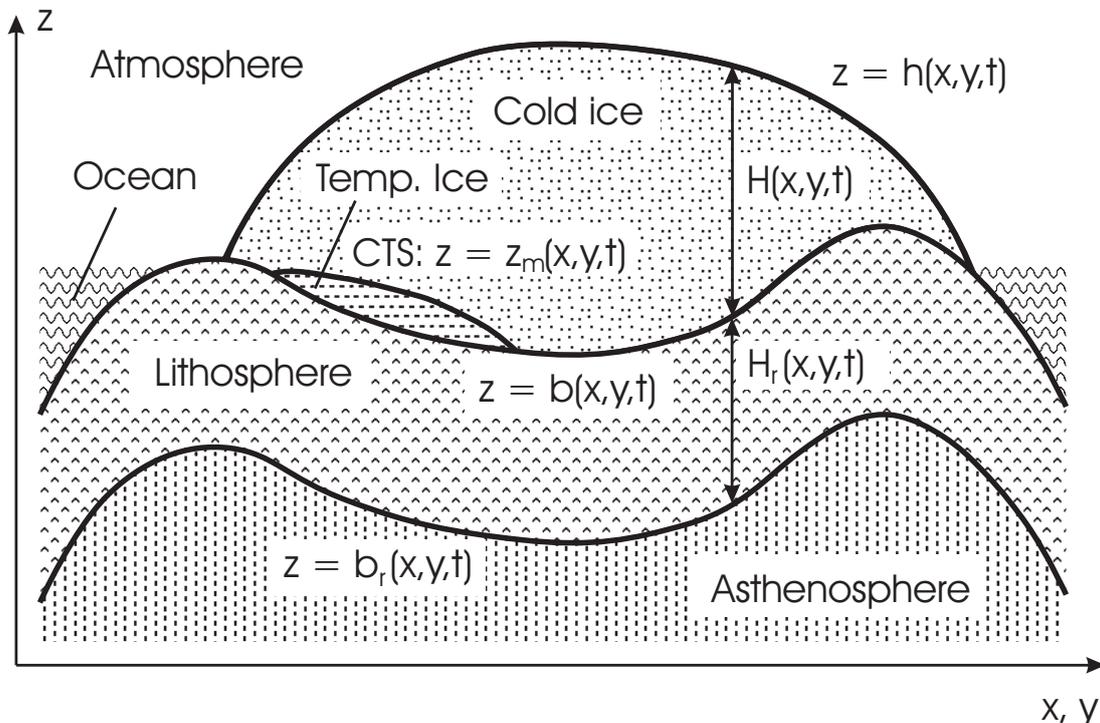


Abbildung 3.1: Skizze eines polythermen Eisschildes, in der Vertikalen stark überhöht dargestellt. Definition des in der Arbeit verwendeten kartesischen Koordinatensystems: x und y bilden die Horizontalebene, z weist nach oben.

Im folgenden werden die Feldgleichungen, Randbedingungen und Übergangsbedingungen für dieses Problem in voller Allgemeinheit, d. h., noch ohne Vereinfachungen, entwickelt.

3.1 Feldgleichungen

3.1.1 Kalter Bereich

Kaltes Eis bedeutet Eis mit einer Temperatur unterhalb des druckkorrigierten Schmelzpunktes. Bei Vernachlässigung zusätzlicher Beimischungen von Salz, Staub und Geröll kann es als viskoses wärmeleitendes dichtebeständiges Einkomponenten-Fluid betrachtet werden. Die *Massenbilanz* lautet somit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.1)$$

Aufgrund der Annahme der Dichtebeständigkeit muß der Spannungstensor \mathbf{T} in einen isotropen Drucktensor und einen deviatorischen Reibungsanteil aufgespalten werden,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}^R; \quad (3.2)$$

der Druck p ist hierbei eine freie Feldgröße, wohingegen für den Spannungsdeviator \mathbf{T}^R eine Konstitutivgleichung anzugeben ist. Mit dieser Aufspaltung lautet die *Impulsbilanz*

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{T}^R + \rho \mathbf{g} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.3)$$

Die noch durchzuführende Skalierung wird ergeben, daß der Beschleunigungsterm $\rho \dot{\mathbf{v}}$ vernachlässigt werden kann, also rein Stokessches Fließen vorliegt.

Es werden drei Konstitutivgleichungen benötigt: eine Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation, ein Konstitutivgesetz für die innere Energie ϵ und eines für den Wärmefluß \mathbf{q} :

$$\mathbf{D} = EA(T')f(\sigma)\mathbf{T}^R \quad \text{mit} \quad \sigma := \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{T}^R)^2}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\epsilon} = c(T)\dot{T}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa(T)\operatorname{grad} T, \quad (3.6)$$

mit im allgemeinen temperaturabhängiger spezifischer Wärme c und thermischer Leitfähigkeit κ . Die erste Gleichung besagt, daß die Fluidität des Eises in eine Funktion $A(T')$ ("Rate-Faktor") der homologen Temperatur T' und eine Funktion $f(\sigma)$ ("Kriechfunktion") der effektiven Schubspannung σ (Wurzel der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators $II_{TR} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{T}^R)^2$) faktorisiert (vgl. (2.22) und Hutter [29]); die homologe Temperatur ist definiert als $T' = T - T_M$, wobei T_M die (druckabhängige) Schmelztemperatur des Eises bedeutet. Der Rate-Faktor und die Kriechfunktion sollen an dieser Stelle nicht näher spezifiziert werden; der zusätzliche Faktor E ("Enhancement-Faktor") kann auf einen Wert größer als Eins gesetzt werden, um

z. B. die leichtere Deformierbarkeit von staubhaltigem Eis gegenüber normalem Eis (Paterson [62]) zu berücksichtigen. Die zweite Gleichung verknüpft Änderungen der inneren Energie über die spezifische Wärme ausschließlich mit Änderungen der Temperatur, und die letzte Gleichung ist schließlich das Fouriersche Wärmeleitgesetz.

Bei Vernachlässigung der Strahlungsleistung r lautet die *Energiebilanz*:

$$\rho \dot{\epsilon} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(\mathbf{T}^R \mathbf{D}). \quad (3.7)$$

Setzt man die obigen drei Konstitutivgleichungen hier ein, so folgt hieraus eine Gleichung für das Temperaturfeld:

$$\rho c \dot{T} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + 2EA(T')f(\sigma)\sigma^2. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung bilanziert lokale Temperaturänderungen mit Advektion (implizit in der materiellen Zeitableitung enthalten), Wärmeleitung und dissipativer Wärmeproduktion.

3.1.2 Temperierter Bereich

Unter temperiertem Eis versteht man Eis, dessen Temperatur sich exakt auf dem druckkorrigierten Schmelzpunkt befindet, so daß dessen Temperatur nicht gesondert berechnet werden muß, sondern unmittelbar aus dem Druckfeld folgt:

$$T = T_M = T_0 - \beta^* p = T_0 - \beta \frac{p}{\rho g}, \quad (3.9)$$

mit $T_0 = 0^\circ\text{C}$ sowie der Clausius-Clapeyron-Konstanten β^* (Paterson [62]) bzw. dem Clausius-Clapeyron-Gradienten $\beta := \rho g \beta^*$, welcher, wie sich noch zeigen wird, dem Temperaturgradienten in temperiertem Eis entspricht. Jedoch kann temperiertes Eis einen bestimmten Anteil an Wasser enthalten; der Wassergehalt (genauer die Wasserkonzentration ω) übernimmt als thermodynamische Größe die Rolle der Temperatur im kalten Eis. Daher muß temperiertes Eis im Gegensatz zu kaltem Eis als Mischung aus zwei verschiedenen Komponenten, nämlich Eis und Wasser, angesehen werden; ρ bedeutet die Dichte dieser Mischung. Es ist somit notwendig, einige Konzepte der Mischungstheorie (vgl. hierzu Müller [56]) zur Anwendung zu bringen. Da allgemein angenommen wird, daß der Wassergehalt in temperierten Zonen polythermer Eisschilde mit maximal ca. 5% relativ gering ist (Hutter [31]), soll temperiertes Eis durch zwei Massenbilanzen (eine für die Mischung als Ganzes, eine für Wasser), jedoch nur eine Impuls- und Energiebilanz für die Mischung beschrieben werden. Das Wasser wird somit als Spurenkomponente behandelt, dessen Bewegung relativ zum Baryzentrum der Mischung durch Ficksche Diffusion beschrieben wird. Alternative Konzepte, die

sich besser für polytherme Gletscher mit zum Teil sehr hohem Wassergehalt eignen, wie sie in den Alpen vorkommen, verwenden statt dessen zwei Impulsbilanzen mit einer Wechselwirkungskraft vom Darcy-Typ, welche Relativbewegungen zwischen den beiden Konstituenten Eis und Wasser ermöglicht (Hutter [31]).

Bevor die Feldgleichungen für temperiertes Eis formuliert werden können, müssen einige Mischungstheoretische Größen eingeführt werden. Die *baryzentrische Geschwindigkeit* \mathbf{v} ist definiert als

$$\mathbf{v} := \frac{1}{\rho}(\rho_i \mathbf{v}_i + \rho_w \mathbf{v}_w). \quad (3.10)$$

Die Indices i bzw. w beziehen sich auf die Komponenten Eis und Wasser, $\rho_{i/w}$ bezeichnet die zugehörige *Partialdichte*. Der *Wassergehalt* wird als Massenkonzentration ω eingeführt:

$$\omega := \frac{\rho_w}{\rho}. \quad (3.11)$$

Schließlich wird eine *diffusive Wasserstromdichte* \mathbf{j} definiert, welche den Wasserstrom relativ zur Bewegung des Baryzenters beschreibt:

$$\mathbf{j} := \rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}) = \rho\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}). \quad (3.12)$$

Wie im Falle des kalten Eises soll auch für temperiertes Eis Dichtebeständigkeit, d. h., Konstanz von ρ , angenommen werden. Dies ist insofern problematisch, als sich die Dichten von Eis und Wasser deutlich unterscheiden (nach Paterson [62] variiert die Dichte von Gletschereis im Bereich von $830 - 910 \text{ kg/m}^3$, demgegenüber steht der Wert 1000 kg/m^3 für Wasser bei Normaldruck); jedoch bewegen sich aufgrund des als gering angenommenen Wassergehaltes von weniger als 5% die durch Änderungen des Wassergehaltes der Mischung Eis plus Wasser bedingten relativen Dichteschwankungen im Bereich von maximal 1% und können somit vernachlässigt werden. Somit haben die *Massenbilanz der Mischung* und die *Impulsbilanz der Mischung* die gleiche Form wie für kaltes Eis; sie lauten

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.13)$$

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{T}^R + \rho \mathbf{g} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (3.14)$$

wobei der Spannungstensor \mathbf{T} wiederum gemäß $\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}^R$ aufgespalten wurde.

Bei der Formulierung der *Massenbilanz für den Wassergehalt* ist zu bedenken, daß die Partialdichte des Wassers ρ_w nicht konstant ist, sondern vom Wassergehalt abhängt, so daß die Bilanz in der allgemeinen Form (2.5) aufgestellt werden muß. Ferner ist der Wassergehalt aufgrund der Möglichkeit von Schmelz- und Gefrierprozessen keine Erhaltungsgröße; es ist daher erforderlich, einen Produktionsterm M zuzulassen:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{v}_w) = M. \quad (3.15)$$

In äquivalenter Form kann dies als

$$\rho\dot{\omega} = -\operatorname{div} \mathbf{j} + M \quad (3.16)$$

geschrieben werden.

Wie im Falle des kalten Eises werden Konstitutivgleichungen benötigt (vgl. auch Hutter [31]):

$$\mathbf{D} = EA_t(\omega)f_t(\sigma)\mathbf{T}^R, \quad (3.17)$$

$$\dot{\epsilon} = L\dot{\omega} + c(T)\dot{T}_M, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{j} = -\nu \operatorname{grad} \omega, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa(T) \operatorname{grad} T_M. \quad (3.20)$$

Die erste Gleichung, die Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation, ist analog zu (3.4) für kaltes Eis, jedoch ist die Temperaturabhängigkeit des Rate-Faktors durch eine Abhängigkeit vom Wassergehalt (Funktion $A_t(\omega)$) ersetzt. Die zweite Gleichung besagt, daß Änderungen der inneren Energie ϵ via die latente Wärme L mit Änderungen des Wassergehaltes ω und via die spezifische Wärme c mit Änderungen der aktuellen Schmelztemperatur zusammenhängen (thermodynamisch nur approximativ, vgl. Svendsen, Greve & Hutter [69]). Die dritte Gleichung ist das bereits erwähnte Ficksche Diffusionsgesetz für die diffusive Wasserstromdichte \mathbf{j} , wobei ν die Diffusivität des Wassers im temperierten Eis bedeutet, und die letzte Gleichung ist schließlich das bereits bei kaltem Eis eingeführte Fouriersche Wärmeleitgesetz. L und ν werden als konstant angenommen.

Im folgenden soll die *Energiebilanz der Mischung* formuliert werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß aufgrund von (3.18) die innere Energie ϵ vom Wassergehalt ω abhängt, so daß ein nichtverschwindender diffusiver Wasserstrom \mathbf{j} einen Fluß innerer Energie (latente Wärme) nach sich zieht. Somit folgt für den gesamten Wärmefluß \mathbf{q}_{ges} (vgl. Gleichung (2.11))

$$\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q} + L\mathbf{j}; \quad (3.21)$$

der Zusatzterm $L\mathbf{j}$ wurde in früheren Arbeiten (Fowler & Larson [17], Hutter [27], Hutter [31]) nicht berücksichtigt. Mit dieser modifizierten Form des Energieflusses folgt die Energiebilanz der Mischung zu

$$\rho\dot{\epsilon} = -\operatorname{div} (\mathbf{q} + L\mathbf{j}) + \operatorname{tr} (\mathbf{T}^R \mathbf{D}). \quad (3.22)$$

Setzt man die Konstitutivgleichungen (3.17) – (3.20) in die Massenbilanz für den Wassergehalt (3.16) und in die Energiebilanz (3.22) ein, so ergibt sich aus ersterer

$$\rho\dot{\omega} = \nu \nabla^2 \omega + M \quad (3.23)$$

und aus letzterer

$$\rho L \dot{\omega} + \rho c \dot{T}_M = L \nu \nabla^2 \omega + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T_M) + 2EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2. \quad (3.24)$$

Konsistenz dieser beiden Gleichungen liegt vor, wenn für die Wasserproduktion

$$M = \frac{1}{L} \left(2EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2 + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T_M) - \rho c \dot{T}_M \right) \quad (3.25)$$

erfüllt ist. Dieses Resultat ist physikalisch sinnvoll, denn es besagt, daß die Wärmedissipation $\operatorname{tr}(\mathbf{T}^R \mathbf{D})$ im wesentlichen zum Schmelzen von Eis zu Wasser aufgebraucht, also in latente Wärme umgesetzt wird; anderes ist aufgrund der (näherungsweise) konstanten Temperatur auch gar nicht möglich. Abweichungen entstehen lediglich durch die kleinen Temperaturvariationen aufgrund des Clausius-Clapeyron-Gradienten.

3.1.3 Lithosphäre

Da das Augenmerk dieser Arbeit auf der Modellierung von Eisschilden liegt, soll für den darunter befindlichen festen Felsgrund (Lithosphäre) nur ein ganz einfaches Modell verwendet werden, welches lediglich die für das Eisschild relevanten Vorgänge in der Lithosphäre erfaßt. Hierzu wird die Wärmeleitung und das Einsinken der Lithosphäre in die darunter befindliche viskose Asthenosphäre aufgrund des isostatischen Gleichgewichtes zwischen Eislast und Auftrieb herangezogen.

Die Temperaturgleichung erhält man ganz analog zum Vorgehen bei kaltem Eis aus der *Energiebilanz*; sie lautet (vgl. Gl. (3.8)):

$$\rho_r c_r \dot{T} = \kappa_r \nabla^2 T. \quad (3.26)$$

Der Index $(\cdot)_r$ bezieht sich jeweils auf die Lithosphäre, so daß ρ_r , c_r und κ_r deren Dichte, spezifische Wärme bzw. Wärmeleitfähigkeit bedeuten. Die beiden letzteren werden im Gegensatz zu den entsprechenden Werten für Eis als konstant angenommen. Weiterhin ist die Dissipationsleistung aufgrund möglicher Verzerrungen der Lithosphäre vernachlässigt; nur reine Wärmeleitungsprozesse sind berücksichtigt.

Für die Einsinktiefe $\Delta b(x, y, t)$ der Lithosphäre in die darunter befindliche Asthenosphäre aufgrund der Eislast wird zunächst eine lokale Kräftebilanz zwischen Auftrieb und Eislast für eine vertikale Säule der Querschnittsfläche dA mit zugehöriger Eishöhe $H = h - b$ aufgestellt (aufgrund dieser Vorstellung von in der Vertikalen gegeneinander frei beweglichen Säulen habe das lithosphärische Geschwindigkeitsfeld keine Horizontalkomponenten):

$$\rho_a g \Delta b dA = \rho g H dA, \quad (3.27)$$

ρ_a ist die Dichte der Asthenosphäre. Ist $z = b_0(x, y, t)$ die Gleichgewichtsposition der Lithosphärenoberseite ohne Eislast, ergibt sich für selbige mit Eislast, b_{Ggw}

$$b_{\text{Ggw}} = b_0 - \Delta b = b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H. \quad (3.28)$$

Aufgrund der Viskosität der Asthenosphäre stellt sich dieses Gleichgewicht nicht instantan, sondern mit einer bestimmten Verzögerungszeit τ_V ein. Für die zeitliche Evolution der Lithosphärenoberseite $z = b(x, y, t)$ wird daher

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V} (b - b_{\text{Ggw}}) = -\frac{1}{\tau_V} \left[b - \left(b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H \right) \right] \quad (3.29)$$

angesetzt (Herterich [24]). Bei fester Eishöhe H entspricht dies einer exponentiellen Annäherung von b an den Gleichgewichtszustand.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß jede vertikale Säule der Lithosphäre starr ist (diese sich aber gegeneinander frei verschieben können) folgt, daß für das Geschwindigkeitsfeld in der Lithosphäre

$$\mathbf{v} = \frac{\partial b}{\partial t}(x, y, t) \mathbf{e}_z \quad (3.30)$$

(\mathbf{e}_z : Einheitsvektor in z -Richtung) erfüllt ist.

3.2 Rand- und Übergangsbedingungen

3.2.1 Randbedingungen an der freien Oberfläche

Wie für jede singuläre Fläche läßt sich auch für die freie Oberfläche des Eisschildes (Grenze zwischen Eis und Atmosphäre) eine *kinematische Randbedingung* formulieren. Hierzu sei angenommen, daß die freie Oberfläche durch die implizite Darstellung $F_s(\mathbf{x}, t) = 0$ gegeben sei (Abbildung 3.2); die positive Seite soll mit der Atmosphäre, die negative mit dem Eis identifiziert werden, so daß der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = \text{grad } F_s / \|\text{grad } F_s\|$ in die Atmosphäre hinein zeigt. Somit muß die der Bewegung der freien Oberfläche folgende zeitliche Ableitung von F_s verschwinden:

$$\frac{dF_s}{dt} = \frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } F_s = 0, \quad (3.31)$$

\mathbf{w} bedeutet die Geschwindigkeit der freien Oberfläche. Die Gleichung läßt sich mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} und dem Volumenfluß durch die freie Oberfläche hindurch $a_s^\perp := (\mathbf{w} - \mathbf{v}^-) \cdot \mathbf{n}$ umschreiben zu

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{v}^- \cdot \text{grad } F_s = -\|\text{grad } F_s\| \cdot a_s^\perp. \quad (3.32)$$

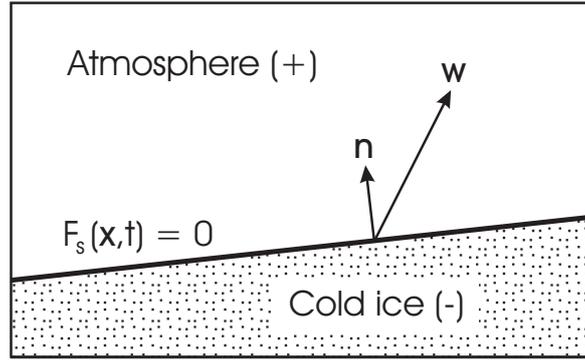


Abbildung 3.2: Geometrie der freien Oberfläche.

Sei die freie Oberfläche in kartesischen Koordinaten durch $z = h(x, y, t)$ gegeben, dann gilt $F_s(\mathbf{x}, t) = z - h(x, y, t)$, und es folgt

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x^- \frac{\partial h}{\partial x} + v_y^- \frac{\partial h}{\partial y} - v_z^- = \left(1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_s^\perp. \quad (3.33)$$

Der Volumenfluß durch die freie Oberfläche a_s^\perp stellt die Akkumulations-Ablations-Funktion dar (positiv für Akkumulation); sie ist eine klimatische Input-Größe und setzt sich zusammen aus dem Schneefall auf das Eisschild minus dem von der Oberfläche wegschmelzenden Eis.

Aus der *Impulssprungbedingung* (2.9) folgt, abgesehen von dem extrem kleinen konvektiven Impulsfluß durch die freie Oberfläche, die Kontinuität des Spannungsvektors $\mathbf{T}\mathbf{n}$. Bei Vernachlässigung der aus dem atmosphärischen Druck p_{atm} und dem Windschub $\boldsymbol{\tau}_{\text{wind}}$ zusammengesetzten Spannung auf der Luftseite, welche klein gegenüber den im Eis auftretenden Spannungen ist, ergibt sich folglich

$$\mathbf{T}^- \mathbf{n} = \mathbf{T}^+ \mathbf{n} = -p_{\text{atm}} \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_{\text{wind}} \approx 0. \quad (3.34)$$

Schließlich wird eine Aussage über die thermodynamischen Größen an der freien Oberfläche benötigt. Für eine kalte freie Oberfläche (der Normalfall) bietet es sich an, hierzu die *Oberflächentemperatur* vorzuschreiben:

$$T^-(\mathbf{x}, t) = T_s(\mathbf{x}, t); \quad (3.35)$$

T_s stellt also eine klimatische Input-Größe dar. Genau genommen verwendet man hierfür die Temperatur in 10 m Tiefe, wo die jahreszeitlichen Temperaturschwankungen, welche auf den für die Eisschilddynamik relevanten Zeitskalen bedeutungslos sind, auf ca. 1% ihres Oberflächenwertes abgeklungen sind. Im Falle einer temperierten freien Oberfläche, welche eventuell in kleinen Bereichen nahe dem Rand des

Eisschildes auftreten kann, muß statt dessen der Wassergehalt ω oder alternativ dessen Normalableitung vorgeschrieben werden.

3.2.2 Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis

Aufgrund der unterschiedlichen Eigenschaften von kaltem und temperiertem Eis ist es für die Formulierung der Übergangsbedingungen zwischen Eisbasis und Felsgrund (Lithosphäre) notwendig, eine Fallunterscheidung zu machen, je nachdem ob an der Basis die Schmelztemperatur erreicht wird (temperierte Basis) oder nicht (kalte Basis). Hier wird zunächst der Fall der kalten Basis betrachtet.

Der Felsgrund des Eisschildes sei als undurchlässige Basis angenommen, d. h., ein etwaiger Massenaustausch zwischen kaltem Eis und Fels an der Eisbasis wird nicht in Betracht gezogen. Er befinde sich bei $z = b(x, y, t)$ (Abbildung 3.3); die positive Seite sei mit der Lithosphäre, die negative mit dem Eis identifiziert. Mit $F_b(\mathbf{x}, t) = b(x, y, t) - z$ folgt die implizite Darstellung $F_b(\mathbf{x}, t) = 0$; der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = \text{grad } F_b / \|\text{grad } F_b\|$ zeigt somit in die Lithosphäre hinein, wie es der Wahl von positiver und negativer Seite entspricht. Diese Festlegungen sollen sowohl für eine kalte als auch für eine temperierte Basis gelten.

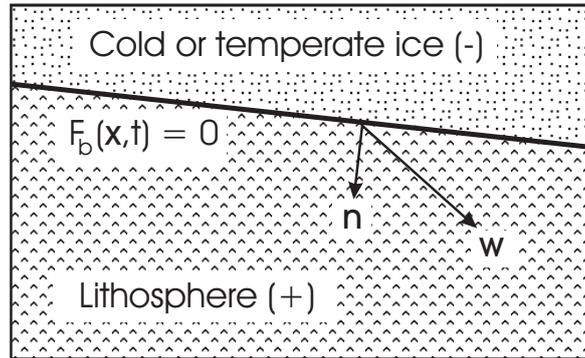


Abbildung 3.3: Geometrie der Eisbasis.

Aufgrund der angenommenen Undurchlässigkeit gilt zunächst

$$(\mathbf{v}^+ - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{v}^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.36)$$

was die Massensprungbedingung automatisch erfüllt. Die *kinematische Bedingung* (vgl. Gleichung (3.32) für die freie Oberfläche) lautet somit

$$\frac{\partial F_b}{\partial t} + \mathbf{v}^- \cdot \text{grad } F_b = 0 \quad (3.37)$$

bzw.

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x^- \frac{\partial b}{\partial x} + v_y^- \frac{\partial b}{\partial y} - v_z^- = 0. \quad (3.38)$$

Weiterhin wird ein *Gleitgesetz* formuliert, welches die Gleitgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{\text{sl}} := \mathbf{v}_{\parallel}^- - \mathbf{v}_{\parallel}^+$ (wobei $\mathbf{v}_{\parallel}^{\pm} = \mathbf{v}^{\pm} - (\mathbf{v}^{\pm} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$) des Eises parallel zur Lithosphärenoberfläche in Beziehung setzt zur tangentialen basalen Spannung \mathbf{t}_{\parallel}^- :

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = -C(t_{\perp}^-, \dots) \mathbf{t}_{\parallel}^-, \quad (3.39)$$

mit $t_{\perp}^- = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}$ und $\mathbf{t}_{\parallel}^- = \mathbf{T}^- \mathbf{n} - t_{\perp}^- \mathbf{n}$. Die Gleitfunktion C ist eine Funktion der normalen basalen Spannung t_{\perp}^- und eventuell weiterer Variablen wie z. B. $\|\mathbf{t}_{\parallel}^-\|$ oder T . Häufig wird in Inlandeis- oder Gletschermodellen im Falle der kalten Basis $C = 0$, mit anderen Worten also Haften an der Basis angenommen.

Aus der *Impulssprungbedingung* (2.9) ergibt sich wegen der Undurchlässigkeit (3.36)

$$\llbracket \mathbf{T} \mathbf{n} \rrbracket = 0, \quad (3.40)$$

also die Kontinuität des Spannungsvektors.

Schließlich wird die *Energiesprungbedingung* benötigt. Aus (2.12) folgt unter Berücksichtigung der Undurchlässigkeit (3.36) und der Spannungsvektor-Kontinuität (3.40)

$$\kappa (\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) - \kappa_r (\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n}) = \llbracket \mathbf{v} \rrbracket \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n} = -\mathbf{v}_{\text{sl}} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}. \quad (3.41)$$

Der Term auf der rechten Seite stellt die basale Reibungswärme dar, welche im Falle einer angenommenen Haftbedingung verschwindet. Die Temperatur selbst soll als stetig angenommen werden:

$$\llbracket T \rrbracket = 0. \quad (3.42)$$

3.2.3 Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis

An dieser Stelle wird die temperierte Eisbasis betrachtet, d. h., die Temperatur erreicht am Übergang zwischen Eis und Lithosphäre die Schmelztemperatur des Eises. Das Vorhandensein einer temperierten Basis bedeutet jedoch nicht notwendigerweise, daß an dieser Stelle auch eine Schicht nichtverschwindender Dicke aus temperiertem Eis vorhanden ist. Vielmehr besteht die Möglichkeit, daß das Temperaturgefälle in normaler Richtung in das Eis hinein dazu führt, daß bereits unmittelbar über der Eisbasis kaltes Eis vorhanden ist, auch wenn die Basis selbst temperiert ist. Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen gelten sowohl für das Auftreten einer Schicht temperierten Eises über der temperierten Basis als auch für den Fall einer temperierten Basis ohne temperierte Eisschicht darüber.

Wie bereits erwähnt sollen die bei der Geometrie der kalten Eisbasis verwendeten Bezeichnungen für den hier betrachteten Fall der temperierten Basis übernommen werden. Die Annahme der Undurchlässigkeit muß jedoch teilweise aufgegeben werden, da die Möglichkeit besteht, daß Wasser vom Boden aufgenommen wird.

Aus der *Massensprungbedingung für die Komponente Wasser* folgt

$$\llbracket \rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \mathcal{P}_b^w, \quad (3.43)$$

wobei eine Wasser-Oberflächenproduktion \mathcal{P}_b^w eingeführt wurde, um das basale Schmelzen von Eis aufgrund des geothermen Wärmeflusses und der Reibungswärme durch Gleiten zu erfassen. Dies läßt sich umformen zu

$$\rho\omega^-(\mathbf{v}_w^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w; \quad (3.44)$$

hier wurde mit $\dot{m}_b^w := \rho_w^+(\mathbf{v}_w^+ - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}$ der Wasser-Massenstrom in den Boden hinein eingeführt, welcher im allgemeinen eine vorzugebende Randbedingung darstellt.

Die *Massensprungbedingung für die Komponente Eis* ergibt analog

$$\llbracket \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = -\mathcal{P}_b^w. \quad (3.45)$$

Da die Lithosphäre für Eis nach wie vor undurchlässig sein soll und somit in dieser kein Eis enthalten ist ($\rho_i^+ = 0$), folgt weiter

$$\rho(1 - \omega^-)(\mathbf{v}_i^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \mathcal{P}_b^w. \quad (3.46)$$

Aufgrund der Definition der baryzentrischen Geschwindigkeit gilt allgemein $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) + (1 - \omega)(\mathbf{v}_i - \mathbf{w})$; durch skalare Multiplikation mit \mathbf{n} erhält man unter Verwendung von (3.44) und (3.46)

$$(\mathbf{v}^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (3.47)$$

Im Falle einer vernachlässigbaren diffusiven Wasserstromdichte \mathbf{j} (mit anderen Worten $\mathbf{v}_w = \mathbf{v}_i = \mathbf{v}$) kann durch Vergleich von (3.46) und (3.47) der Wasser-Massenstrom \dot{m}_b^w berechnet werden,

$$\dot{m}_b^w = \frac{\mathcal{P}_b^w}{1 - \omega^-}, \quad (3.48)$$

muß also im Gegensatz zum allgemeinen Fall nicht mehr vorgegeben werden.

Für die *kinematische Bedingung* ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.47) in Analogie zur kinematischen Bedingung an der freien Oberfläche (3.32) bzw. (3.33):

$$\frac{\partial F_b}{\partial t} + \mathbf{v}^- \cdot \text{grad } F_b = \|\text{grad } F_b\| \cdot \frac{\dot{m}_b^w}{\rho} \quad (3.49)$$

bzw.

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x^- \frac{\partial b}{\partial x} + v_y^- \frac{\partial b}{\partial y} - v_z^- = \left(1 + \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (3.50)$$

Für die *diffusive Wasserstromdichte* \mathbf{j} erhält man mit Hilfe von (3.44) und (3.47)

$$\begin{aligned}\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} &= \rho\omega^-(\mathbf{v}_w^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} - \omega^-\{\rho(\mathbf{v}^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}\} \\ &= \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w - \omega^-\dot{m}_b^w \\ &= (1 - \omega^-)\dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w;\end{aligned}\tag{3.51}$$

unter Verwendung des Fickschen Diffusionsgesetzes (3.19) stellt dies eine gemischte Randbedingung für den basalen Wassergehalt dar. Im Fall verschwindender diffusiver Wasserstromdichte \mathbf{j} nimmt diese Gleichung konsistenterweise wegen (3.48) die Form $\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} = 0$ an.

Wie im Falle der kalten Basis wird ein *Gleitgesetz* angenommen:

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = -C_t(t_\perp^-, \dots) \mathbf{t}_\parallel^-, \tag{3.52}$$

mit $\mathbf{v}_{\text{sl}} := \mathbf{v}_\parallel^- - \mathbf{v}_\parallel^+$ und $t_\perp^- = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}$ und $\mathbf{t}_\parallel^- = \mathbf{T}^- \mathbf{n} - t_\perp^- \mathbf{n}$ wie zuvor. Aufgrund der Möglichkeit, daß sich das im temperierten Eis befindliche Wasser als Schmierfilm zwischen Eis und Fels verhält, ist zu erwarten, daß die Gleitfunktion C_t deutlich größere Werte als C (für kalte Basis) annimmt.

Da der konvektive Impulsfluß, der aus (3.47) bei realistischen Vorgaben für \dot{m}_b^w resultiert, extrem klein ist, ist auch in diesem Fall der Spannungsvektor stetig (*Impulssprungbedingung*):

$$\llbracket \mathbf{T} \mathbf{n} \rrbracket = 0. \tag{3.53}$$

Unter Vernachlässigung der kinetischen Energie $v^2/2$ folgt aus der *Energiesprungbedingung für die Mischung* (2.12)

$$\llbracket \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \rrbracket + L \llbracket \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \rrbracket - \llbracket \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} \rrbracket + \llbracket (\rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}) L\omega \rrbracket = 0, \tag{3.54}$$

was wegen (3.51) vereinfacht werden kann zu

$$\kappa(\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) - \kappa_r(\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v}_{\text{sl}} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n} + \llbracket \rho L\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0. \tag{3.55}$$

Aufgrund obiger Massensprungbedingung für den Wassergehalt (3.43) ist die verbleibende Sprungklammer gleich $L\mathcal{P}_b^w$, so daß folgt:

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} (\kappa_r(\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n}) - \kappa(\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v}_{\text{sl}} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}). \tag{3.56}$$

Dieses Ergebnis ist anschaulich klar; es besagt, daß die Wasserproduktion an der temperierten Basis resultiert aus den zuströmenden Wärmeflüssen von der Lithosphäre und vom Eis sowie der durch basales Gleiten produzierten Reibungswärme. Wie bei der kalten Eisbasis soll die Temperatur selbst als stetig angenommen werden:

$$\llbracket T \rrbracket = 0 \quad \Rightarrow \quad T^+ = T^- = T_M. \tag{3.57}$$

Dies führt also im Gegensatz zur kalten Eisbasis dazu, daß die Temperatur (bei als bekannt vorausgesetztem Druckfeld) festgelegt ist, so daß eine thermische Entkopplung zwischen Eis und Lithosphäre stattfindet.

3.2.4 Randbedingungen an der Lithosphärenunterseite

Die Unterseite der modellierten Lithosphäre befinde sich in expliziter Darstellung bei $z = b_r(x, y, t)$; implizit kann dies wie zuvor in die Form $F_r(\mathbf{x}, t) := b_r(x, y, t) - z = 0$ gebracht werden. Die positive Seite sei die Asthenosphäre, die negative die Lithosphäre; der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = \text{grad } F_r / \|\text{grad } F_r\|$ zeigt somit in die Asthenosphäre hinein (vgl. Abbildung 3.4).

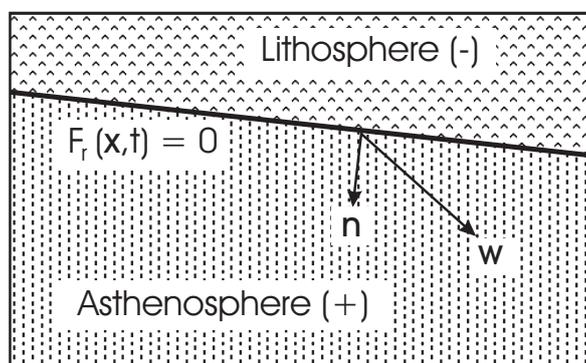


Abbildung 3.4: Geometrie der Felsbasis.

Im Rahmen des hier beschriebenen einfachen Lithosphärenmodells ist es lediglich vonnöten, an der Unterseite der Lithosphäre eine Randbedingung für die Temperatur vorzugeben. Hierzu wird der geotherme Wärmefluß $Q_{\text{geoth}}^\perp := -\mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n}$ als Inputgröße herangezogen. Mit Hilfe des Fourierschen Wärmeleitgesetzes erhält man hieraus

$$\kappa_r (\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) = Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (3.58)$$

Dies stellt eine Neumannsche Bedingung für die Temperatur dar.

3.2.5 Übergangsbedingungen an der CTS

Die CTS (cold-temperate transition surface) stellt die Phasengrenzfläche zwischen den kalten und temperierten Regionen eines Eisschildes dar und ist somit ebenso wie die obere und untere Begrenzungsfläche eine singuläre Fläche, an der Sprünge und Unstetigkeiten auftreten können. Ihre Geometrie ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Sie sei explizit durch $z = z_m(x, y, t)$ und somit implizit durch $F_m(\mathbf{x}, t) = 0$ ($F_m(\mathbf{x}, t) := z - z_m(x, y, t)$) beschrieben; die positive Seite sei der kalte (obere),

die negative der temperierte (untere) Bereich, so daß der Normaleneinheitsvektor $\mathbf{n} = \text{grad } F_m / \|\text{grad } F_m\|$ in das kalte Eis hinein zeigt.

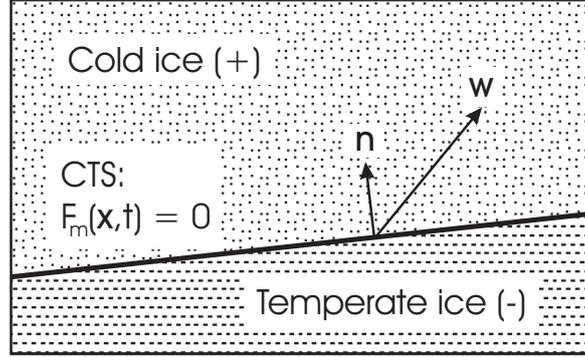


Abbildung 3.5: Geometrie der CTS.

Zunächst kann wie zuvor eine *kinematische Bedingung* formuliert werden. Es ergibt sich in Analogie zu (3.32) für die freie Oberfläche

$$\frac{\partial F_m}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } F_m = -\|\text{grad } F_m\| \cdot a_m^\perp, \quad (3.59)$$

woraus mit obiger Festlegung für F_m

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_m}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_z = \left(1 + \left(\frac{\partial z_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_m}{\partial y}\right)^2\right)^{1/2} a_m^\perp \quad (3.60)$$

folgt. In dieser Gleichung wurde der Volumenfluß durch die CTS $a_m^\perp := (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$ eingeführt. Diese Vorzeichenwahl bewirkt, daß a_m^\perp für Schmelzbedingungen (Strömungsrichtung vom kalten in den temperierten Bereich) positiv und für Gefrierbedingungen (Strömungsrichtung vom temperierten in den kalten Bereich) negativ gezählt wird. Aufgrund der unten abgeleiteten Kontinuität von \mathbf{v} ist es nicht nötig, zwischen \mathbf{v}^+ und \mathbf{v}^- zu unterscheiden. Im Gegensatz zu der Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^\perp bei der freien Oberfläche ist a_m^\perp keine Input-Größe, da sie im Innern des Eisschildes wirkt. a_m^\perp muß folglich vom Modell berechnet werden.

Generelle Eigenschaften von Phasengrenzflächen in der Kontinuumsmechanik (vgl. Hutter [29]) sind die Kontinuität von Temperatur und Tangentialgeschwindigkeit:

$$[[T]] = 0, \quad [[\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]] = \mathbf{0}. \quad (3.61)$$

Bei der Herleitung der Massenbilanz für temperiertes Eis wurde demonstriert, daß sich die Dichten von kaltem und temperiertem Eis um maximal 1% unterscheiden. Vernachlässigt man diesen geringen Unterschied, so besagt die *Massensprungbedingung*

die Kontinuität auch der Normalgeschwindigkeit an der CTS,

$$[[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad (3.62)$$

so daß der gesamte Geschwindigkeitsvektor kontinuierlich ist:

$$[[\mathbf{v}]] = \mathbf{0}. \quad (3.63)$$

Hieraus und aus der *Impulssprungbedingung* (2.9) ergibt sich die Kontinuität des Cauchyschen Spannungsvektors:

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]] = \mathbf{0}. \quad (3.64)$$

Nun soll die *Massensprungbedingung für den Wassergehalt* betrachtet werden. Es ist hierbei zu berücksichtigen, daß an der CTS Schmelz- und Gefrierprozesse auftreten können, so daß ein Oberflächenproduktionsterm \mathcal{P}_m^w für die Komponente Wasser eingeführt werden muß (unten wird gezeigt, daß \mathcal{P}_m^w nur negativ oder Null sein kann, d. h., nur flächenhaftes Gefrieren, jedoch kein Schmelzen ist physikalisch möglich). Gl. (2.7) erweitert sich somit zu

$$[[\rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}]] = \mathcal{P}_m^w \quad (3.65)$$

oder äquivalent dazu mit der diffusiven Wasserstromdichte \mathbf{j} gemäß (3.12) (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß auf der positiven (kalten) Seite der CTS kein Wasser vorhanden ist, so daß die Größen ω^+ und \mathbf{j}^+ gleich Null sind):

$$-\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} + \rho a_m^\perp \omega^- = \mathcal{P}_m^w. \quad (3.66)$$

Dies läßt sich in eine anschaulichere Form bringen, indem statt der diffusiven Wasserstromdichte \mathbf{j} eine totale Wasserstromdichte \mathbf{j}_{tot} relativ zur CTS-Bewegung \mathbf{w} definiert wird, $\mathbf{j}_{\text{tot}} := \rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{w})$; hiermit schreibt sich obige Sprungbedingung als

$$-\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n} = \mathcal{P}_m^w \quad (3.67)$$

und besagt, daß die Normalkomponente der totalen Wasserstromdichte auf der temperierten Seite relativ zur CTS gleich der Oberflächenproduktion von Wasser ist, was unmittelbar einleuchtet.

Zur Formulierung der *Energiesprungbedingung* gemäß (2.12) muß wie für die Ableitung von (3.22) von dem erweiterten Energiefluß in der Form (3.21) für temperiertes Eis Gebrauch gemacht werden, so daß im kalten (positiven) Bereich $\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q}$ und im temperierten (negativen) Bereich $\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q} + L\mathbf{j}$ angesetzt wird. Unter Berücksichtigung von (3.18), (3.63) und (3.64) erhält man

$$\mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n} - L\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} = L\omega^- \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -L\omega^- \rho a_m^\perp \quad (3.68)$$

bzw. mit dem Fourierschen Wärmeleitgesetz und der Definition von \mathbf{j}_{tot}

$$\kappa (\text{grad } T^+ - \text{grad } T_M^-) \cdot \mathbf{n} + L \mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.69)$$

Da die homologe Temperatur $T' = T - T_M$ auf der kalten Seite in normaler Richtung von der CTS weg nicht ansteigen kann (sonst müßte die Temperatur die Schmelztemperatur übersteigen), muß gelten:

$$\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} \leq \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n}. \quad (3.70)$$

Wegen (3.69) ist damit $\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n} \geq 0$, so daß in der Tat für die Wasser-Oberflächenproduktion \mathcal{P}_m^w

$$\mathcal{P}_m^w \quad (= -\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n}) \quad \leq 0 \quad (3.71)$$

gilt; sie kann also nicht positiv sein.

Aufgrund dieser Nebenbedingung ist für jeden Punkt der CTS zwischen drei Fällen zu unterscheiden, und zwar je nach dem Vorzeichen der Größe $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_w^-) \cdot \mathbf{n} = a_m^\perp - \mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} / (\rho\omega^-)$:

i) $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_w^-) \cdot \mathbf{n} > 0$ (“Schmelzbedingung”):

Aufgrund obiger Definition von \mathbf{j}_{tot} und $\rho_w = \rho\omega$ kann (3.71) nur erfüllt sein, wenn

$$\omega^- = 0 \quad (3.72)$$

gilt; in (3.71) gilt dann das Gleichheitszeichen. Einsetzen in (3.69) zeigt, daß auch

$$\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} = \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n} \quad (3.73)$$

sein muß. Dies bedeutet, daß beim Auftreten von Schmelzbedingungen der Wassergehalt und die Normalableitung der Temperatur an der CTS stetig sind (ω^+ ist sowieso gleich Null, da auf der Kalteisseite der CTS nach der Definition von kaltem Eis kein Wasser vorhanden ist).

ii) $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_w^-) \cdot \mathbf{n} < 0$ (“Gefrierbedingung”):

In diesem Fall ist (3.71) mit

$$\omega^- \geq 0 \quad (3.74)$$

vereinbar, und somit kann auch (3.70) in seiner allgemeinen Form

$$\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} \leq \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n} \quad (3.75)$$

gelten. Beim Vorliegen von Gefrierbedingungen können folglich der Wassergehalt und die Normalableitung der Temperatur an der CTS unstetig sein; die Unstetigkeiten

dieser beiden Größen sind über Gl. (3.69) verknüpft.

iii) $(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{v}_w^-) \cdot \boldsymbol{n} = 0$ (Grenzfall):

Auch in diesem Fall ist (3.71) mit

$$\omega^- \geq 0 \quad (3.76)$$

verträglich, es gilt jedoch automatisch Gleichheit in (3.71). Dies in (3.69) eingesetzt ergibt

$$\text{grad } T^+ \cdot \boldsymbol{n} = \text{grad } T_M^- \cdot \boldsymbol{n}. \quad (3.77)$$

Der Grenzfall ist also dadurch ausgezeichnet, daß zwar der Wassergehalt an der CTS unstetig sein kann wie bei der Gefrierbedingung, die Normalableitung der Temperatur jedoch stetig ist wie bei der Schmelzbedingung.

Anschaulich kann dieses Verhalten wie folgt verstanden werden: Erreicht ein nicht-verschwindender totaler Wasserstrom $\boldsymbol{j}_{\text{tot}}^-$ von der temperierten Seite her die CTS (Gefrierbedingung), so kann dieser auf der CTS ausgefrieren (negative Oberflächenproduktion von Wasser). Die hierbei freigesetzte latente Wärme kann dadurch abgeführt werden, daß die Normalableitung der Temperatur auf der Kalteisseite negativer als die auf der temperierten Eisseite der CTS ist. Hiermit einher geht also ein Sprung der Normalableitung der Temperatur und (weil sich im kalten Eis kein Wasser befindet) auch des Wassergehaltes.

Die umgekehrte Situation kann jedoch nicht auftreten; es ist unmöglich, daß kaltes Eis auf die CTS zu fließt, zum Teil auf der CTS schmilzt (positive Oberflächenproduktion von Wasser) und so schon direkt an der CTS einen nichtverschwindenden Wasserstrom in den temperierten Bereich hinein produziert. Der Grund dafür liegt darin, daß die hierzu notwendige Schmelzwärme nicht zur CTS hin transportiert werden kann, denn dazu müßte die Normalableitung der Temperatur auf der Kalteisseite positiver als die auf der temperierten Eisseite sein, was aber nicht möglich ist, da dann die Temperatur auf der Kalteisseite den Schmelzpunkt von Eis übersteigen würde. Ein Eisfluß vom kalten in den temperierten Bereich (Schmelzbedingung) ist nur möglich ohne Oberflächenschmelzen beim Durchgang durch die CTS, so daß in diesem Fall $\omega^- = 0$ und $\text{grad } T^+ \cdot \boldsymbol{n} = \text{grad } T_M^- \cdot \boldsymbol{n}$ gilt; in anderen Worten sind dann Wassergehalt und Temperaturgradient stetig.

Es sei noch erwähnt, daß im Falle eines vernachlässigbaren diffusiven Wasserstromes \boldsymbol{j} im temperierten Eis, mit anderen Worten also einer sehr kleinen Wasserdiffusivität ν , die Unterscheidung zwischen Schmelz- und Gefrierbedingungen einfach anhand des Vorzeichens des Eisstromes durch die CTS hindurch (a_m^\perp) getroffen werden kann, da in diesem Fall $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_w$ gilt. $a_m^\perp > 0$ (Eisstrom vom kalten in das temperierte Eis gerichtet) entspricht dann der Schmelzbedingung, $a_m^\perp < 0$ (Eisstrom vom tempe-

rierten in das kalte Eis gerichtet) der Gefrierbedingung, und $a_m^\perp = 0$ dem Grenzfall, was auch unmittelbar einleuchtet.

Auf eine Überprüfung des Zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (Entropie-Sprungbedingung) sei hier verzichtet. Eine solche Untersuchung findet sich in Svendsen, Greve & Hutter [69].

4 Planparallele, geneigte Eisplatte

4.1 Anwendung des Modells

In diesem Kapitel soll eine erste Anwendung des im vorigen Kapitel vorgestellten polythermen Eismodells gegeben werden. Wir betrachten hierzu eine zweidimensionale, in x -Richtung unendlich ausgedehnte und geneigte polytherme Eisplatte mit parallelen Seiten ("Slab"), deren Eis hangabwärts flieÙe, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Numerische Lösungen für eine solche Geometrie wurden bereits von Hutter, Blatter & Funk [32] und Blatter [6] konstruiert, jedoch wird hier ein etwas anderer Weg beschritten, der sogar weitgehend analytische Lösungen ermöglicht.

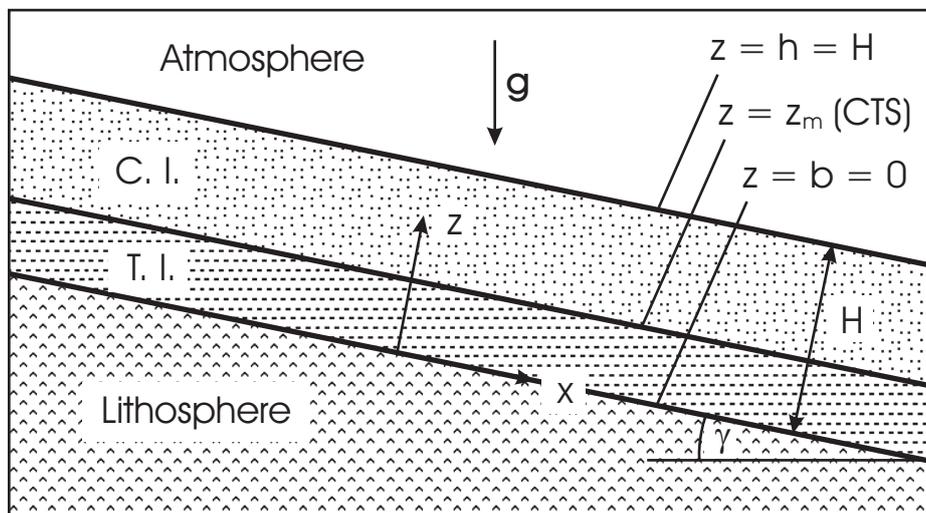


Abbildung 4.1: Planparallele, geneigte, polytherme Eisplatte: Geometrie und Koordinatensystem. C. I.: kaltes Eis, T. I.: temperiertes Eis.

Folgende Annahmen sollen getroffen werden:

- Konstanter Neigungswinkel γ und Uniformität der Prozesse in x -Richtung:
 $(\partial/\partial x)(\cdot) = 0$.
- Stationarität der Prozesse: $(\partial/\partial t)(\cdot) = 0$.
- Glensches Fließgesetz (vgl. Glen [19], Nye [57], Hooke [26], Paterson [62]):
 $f(\sigma) = f_t(\sigma) = \sigma^{n-1}$ (mit $n = 3$).
- Eisfluidität unabhängig von Temperatur und Wassergehalt:
 $EA(T') = EA_t(\omega) \equiv A = 5.3 \cdot 10^{-24} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$
(Wert für $T' = 0^\circ\text{C}$ und $E = 1$, siehe Paterson [62]).

- $\rho = 910 \text{ kg m}^{-3}$, $\kappa = 2.1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$, $c = 2009 \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$, $L = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$,
 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ (vgl. auch §5.5).
- Vernachlässigung der Druckabhängigkeit des Schmelzpunktes von Eis:
 $T_M = 0^\circ\text{C}$.
- Vernachlässigung der Wasserdiffusion: $\nu = 0 \Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{0}$.
- Vernachlässigung von lithosphärischen Einflüssen: kein Einsinken in die Asthenosphäre, keine Berechnung von Temperatur und basaler Schmelzrate.

Mit diesen Annahmen lauten die Modellgleichungen wie folgt:

Massenbilanz, kalter und temperierter Bereich (aus Gln. (3.1), (3.13)):

$$\frac{dv_z}{dz} = 0. \quad (4.1)$$

Impulsbilanz, kalter und temperierter Bereich (aus Gln. (3.3), (3.14) mit vernachlässigter Beschleunigung):

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz} + \rho g \sin \gamma = 0, \quad (4.2)$$

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{d\sigma_z^R}{dz} - \rho g \cos \gamma = 0. \quad (4.3)$$

Energiebilanz, kalter Bereich (aus Gl. (3.8)):

$$\rho c v_z \frac{dT}{dz} = \kappa \frac{d^2 T}{dz^2} + 2A \sigma^4. \quad (4.4)$$

Energiebilanz, temperierter Bereich, bzw. Massenbilanz für den Wassergehalt (aus Gln. (3.23), (3.24)):

$$\rho v_z \frac{d\omega}{dz} = 2 \frac{A}{L} \sigma^4. \quad (4.5)$$

Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation, kalter und temperierter Bereich (aus Gln. (3.4), (3.17)):

$$\sigma_x^R = 0, \quad (4.6)$$

$$\sigma_z^R = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{dv_x}{dz} = 2A \sigma^2 \sigma_{xz}; \quad (4.8)$$

hieraus ergibt sich mit der Definition der effektiven Schubspannung $\sigma := \sqrt{\text{tr}(\mathbf{T}^R)^2/2}$ diese zu $\sigma = \sigma_{xz}$.

Randbedingungen, kalte freie Oberfläche (aus Gln. (3.33), (3.34), (3.35)):

$$v_z = -a_s^\perp, \quad (4.9)$$

$$\sigma = \sigma_{xz} = 0, \quad (4.10)$$

$$-p + \sigma_z^R = -p = 0, \quad (4.11)$$

$$T = T_s. \quad (4.12)$$

Randbedingungen, temperierte Basis:

Aufgrund der Gleichungen (4.1) und (4.9) ist die Vertikalgeschwindigkeit v_z auf der gesamten Höhe des Slabs gleich der negativen Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^\perp . Insbesondere nimmt v_z also auch an der Basis diesen Wert an, die kinematische Bedingung (3.50) wird folglich gar nicht benötigt. Man könnte aus dieser Gleichung den Wasser-Massenstrom \dot{m}_b^w in den Boden hinein berechnen, der erforderlich wäre, um dieses basale v_z aufrechtzuerhalten; dies ist jedoch wenig interessant und wird daher nicht durchgeführt.

Randbedingung (3.51), welche die Normalkomponente der diffusiven Wasserstromdichte bestimmt, ist für das Slab-Problem auch nicht erforderlich, da die Wasserdiffusion sowieso vernachlässigt wird. Somit verbleibt das Gleitgesetz (3.52), um eine Randbedingung für die basale Tangentialgeschwindigkeit $v_{x,b}$ zu erhalten. Der Einfachheit halber soll jedoch auf die explizite Angabe eines Gleitgesetzes verzichtet werden; statt dessen wird $v_{x,b}$ selbst vorgeschrieben. Die einzige Auswirkung des Wertes von $v_{x,b}$ auf die Resultate besteht ohnehin darin, daß sich v_x als Funktion der Höhe z um eine additive Konstante ändert; das Verhalten der Temperatur und des Wassergehaltes wird nicht beeinflusst.

Übergangsbedingungen, CTS (aus Gl. (3.61), (3.63), (3.64), (3.68), (3.70)):

$$T^+ = T^-, \quad (4.13)$$

$$v_x^+ = v_x^-, \quad v_z^+ = v_z^-, \quad (4.14)$$

$$p^+ = p^-, \quad \sigma_{(xz)}^+ = \sigma_{(xz)}^-, \quad (4.15)$$

$$\kappa \frac{dT^+}{dz} = L\omega^- \rho a_m^\perp \quad \text{mit} \quad \frac{dT^+}{dz} \leq 0. \quad (4.16)$$

Die Nebenbedingung in letzterer Gleichung bewirkt, daß zwei verschiedene Fälle unterschieden werden müssen (vgl. Diskussion in §3.2.5):

- $a_m^\perp > 0$ (“Schmelzbedingung”, Eisfluß vom kalten in den temperierten Bereich):
 $dT^+/dz = 0$, $\omega^- = 0$.
- $a_m^\perp < 0$ (“Gefrierbedingung”, Eisfluß vom temperierten in den kalten Bereich):
Gleichung (4.16) in ihrer nichttrivialen Form, d. h., dT^+/dz kann strikt negativ

und ω^- strikt positiv sein; in diesem Fall ist eine zusätzliche Randbedingung für den basalen Wassergehalt erforderlich.

Der Grenzfall $a_m^\perp = 0$ wird nicht betrachtet, da er keinen stationären Zustand zuläßt. Wegen (4.21) wäre nämlich $v_z \equiv 0$, somit müßte die linke Seite in (4.5) verschwinden, gleichzeitig aber deren rechte Seite wegen (4.19) größer als Null sein, was einen Widerspruch darstellt.

4.2 Integration der Slab-Gleichungen

Die oben hergeleiteten Gleichungen, welche aus der Anwendung des polythermen Eismodells aus Kapitel 3 auf das spezielle Slab-Problem hervorgegangen sind, können fast vollständig analytisch integriert werden. Lediglich für die Position $z = z_m$ der CTS verbleibt eine nichtlineare algebraische Gleichung, welche aber leicht mit Hilfe des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung gelöst werden kann. Dies soll im folgenden durchgeführt werden.

Integration von (4.2) und (4.3) ergibt unter Berücksichtigung von (4.7), (4.10), (4.11) und (4.15)

$$p(z) = \rho g \cos \gamma (H - z), \quad (4.17)$$

$$\sigma_{xz}(z) = \rho g \sin \gamma (H - z) \quad (4.18)$$

und somit

$$\sigma = \sigma_{xz} = \rho g \sin \gamma (H - z). \quad (4.19)$$

Der Druck verhält sich offensichtlich rein hydrostatisch.

Das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich mit Hilfe dieses Ergebnisses aus (4.1), (4.8), (4.9), (4.14) sowie vorgeschriebenem $v_{x,b}$ zu

$$v_x(z) = \frac{A}{2} (\rho g \sin \gamma)^3 [H^4 - (H - z)^4] + v_{x,b}, \quad (4.20)$$

$$v_z(z) = \text{const} = -a_s^\perp = -a_m^\perp. \quad (4.21)$$

Die horizontale Geschwindigkeit v_x steigt monoton von ihrem minimalen Wert $v_{x,b}$ an der Basis zu einem maximalen Wert an der freien Oberfläche an, wie man es von einer Scherströmung mit freier Oberfläche erwartet. Die vertikale Geschwindigkeit v_z ist, wie oben bereits bemerkt wurde, über die Höhe hinweg konstant. Sie bilanziert an der freien Oberfläche die Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^\perp , und an der CTS entspricht sie dem (negativen) Volumenfluß a_m^\perp durch die CTS hindurch.

Die Lösung der Gleichungen (4.4) und (4.5) für den Temperatur- und Wassergehalt im kalten bzw. temperierten Bereich sowie die damit verbundene Bestimmung

der CTS-Position erfordert einen ziemlich großen Rechenaufwand. Zunächst wird Gleichung (4.19) für σ und (4.21) für v_z eingesetzt; dies ergibt

$$\kappa \frac{d^2 T}{dz^2} + \rho c a_s^\perp \frac{dT}{dz} = -2A (\rho g \sin \gamma)^4 (H - z)^4 \quad (4.22)$$

und

$$\rho a_s^\perp \frac{d\omega}{dz} = -2 \frac{A}{L} (\rho g \sin \gamma)^4 (H - z)^4. \quad (4.23)$$

Zwecks einfacherer Rechnung wird nun die vertikale Koordinate z mit der Transformation $z = H\zeta$ auf das Intervall $[0,1]$ abgebildet. Man erhält so

$$D \frac{d^2 T}{d\zeta^2} + M \frac{dT}{d\zeta} = -K(1 - \zeta)^4 \quad (4.24)$$

und

$$M \frac{d\omega}{d\zeta} = -K_t(1 - \zeta)^4 \quad (4.25)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} D &= \frac{\kappa}{\rho c}, \\ M &= H a_s^\perp, \\ K &= \frac{2A}{\rho c} H^6 (\rho g \sin \gamma)^4, \\ K_t &= \frac{2A}{\rho L} H^6 (\rho g \sin \gamma)^4. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Zuerst soll die Temperaturgleichung (4.24) betrachtet werden. Zunächst muß die homogene Gleichung gelöst werden; mit dem Ansatz $T \sim \exp(\lambda\zeta)$ ergibt sich

$$D\lambda^2 + M\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{M}{D}. \quad (4.27)$$

Ein Partikularintegral der inhomogenen Gleichung muß in der Form

$$T_p = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5 \quad (4.28)$$

existieren; die Koeffizienten a_1 bis a_5 erhält man durch Einsetzen hiervon in die Temperaturgleichung (4.24) und nachfolgenden Koeffizientenvergleich der Terme von der Ordnung $[\zeta^0]$ bis $[\zeta^4]$. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \zeta^0 : \quad 2Da_2 + Ma_1 &= -K, \\ \zeta^1 : \quad 6Da_3 + 2Ma_2 &= 4K, \\ \zeta^2 : \quad 12Da_4 + 3Ma_3 &= -6K, \\ \zeta^3 : \quad 20Da_5 + 4Ma_4 &= 4K, \\ \zeta^4 : \quad 5Ma_5 &= -K; \end{aligned} \quad (4.29)$$

es hat die Lösung

$$\begin{aligned}
a_5 &= -\frac{K}{5M}, \\
a_4 &= \frac{K}{M} + \frac{DK}{M^2}, \\
a_3 &= -2\frac{K}{M} - 4\frac{DK}{M^2} - 4\frac{D^2K}{M^3}, \\
a_2 &= 2\frac{K}{M} + 6\frac{DK}{M^2} + 12\frac{D^2K}{M^3} + 12\frac{D^3K}{M^4}, \\
a_1 &= -\frac{K}{M} - 4\frac{DK}{M^2} - 12\frac{D^2K}{M^3} - 24\frac{D^3K}{M^4} - 24\frac{D^4K}{M^5}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Mit den obigen Ergebnissen lautet die allgemeine Lösung der Temperaturgleichung (4.24)

$$T = c_1 e^{-(M/D)\zeta} + c_2 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5. \tag{4.31}$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind noch unbestimmt und müssen mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen ermittelt werden.

Zuvor soll jedoch die Wassergehaltsgleichung (4.25) betrachtet werden. Sie läßt sich direkt integrieren:

$$\omega = \frac{K_t}{5M}(1 - \zeta)^5 + c_3, \tag{4.32}$$

mit der ebenfalls zunächst unbestimmten Integrationskonstante c_3 .

Der letzte Schritt zur vollständigen Lösung des Slab-Problems besteht in der Ermittlung der Integrationskonstanten c_1 , c_2 und c_3 sowie der noch unbekanntes CTS-Position ζ_m . Dies muß für den Fall einer vorliegenden Schmelzbedingung ($a_m^\perp > 0$) bzw. Gefrierbedingung ($a_m^\perp < 0$) getrennt durchgeführt werden.

Slab mit Schmelzbedingung:

Die Schmelzbedingung liegt vor, wenn $a_m^\perp > 0$ ist; nach (4.21) bedeutet dies eine negative Vertikalgeschwindigkeit, d. h., das Eis fließt von der freien Oberfläche zur Basis. In diesem Fall haben wir (siehe Gln. (4.12), (4.13) und (4.16) mit nachfolgender Diskussion)

$$T(1) = T_s, \tag{4.33}$$

$$T^+(\zeta_m) = 0, \tag{4.34}$$

$$(dT^+/d\zeta)_{\zeta_m} = 0, \tag{4.35}$$

$$\omega^-(\zeta_m) = 0. \tag{4.36}$$

Einsetzen der ersten drei dieser Gleichungen in die allgemeine Lösung der Temperaturgleichung (4.31) ergibt

$$T_s = c_1 e^{-(M/D)} + c_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \quad (4.37)$$

$$0 = c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} + c_2 + a_1\zeta_m + a_2\zeta_m^2 + a_3\zeta_m^3 + a_4\zeta_m^4 + a_5\zeta_m^5, \quad (4.38)$$

$$0 = -\frac{M}{D}c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} + a_1 + 2a_2\zeta_m + 3a_3\zeta_m^2 + 4a_4\zeta_m^3 + 5a_5\zeta_m^4; \quad (4.39)$$

dies sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten c_1 , c_2 und ζ_m . Die Vorgehensweise ist nun die folgende: Durch Berechnen der Differenz [(4.37) minus (4.38)] wird c_2 eliminiert. Dann wird (4.39) nach c_1 aufgelöst und das Ergebnis in [(4.37) minus (4.38)] eingesetzt. Man erhält so eine nichtlineare algebraische Gleichung, die nur noch die CTS-Position ζ_m enthält:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{M}(1 - e^{(M/D)(\zeta_m-1)})(a_1 + 2a_2\zeta_m + 3a_3\zeta_m^2 + 4a_4\zeta_m^3 + 5a_5\zeta_m^4) + T_s \\ &\quad + a_1(\zeta_m - 1) + a_2(\zeta_m^2 - 1) + a_3(\zeta_m^3 - 1) + a_4(\zeta_m^4 - 1) + a_5(\zeta_m^5 - 1) \\ &=: f(\zeta_m). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Trotz ihrer Komplexität kann diese Gleichung leicht mit dem Newton-Verfahren ($\zeta_m^{(0)}$ als Startwert gegeben, $\zeta_m^{(n+1)} = \zeta_m^{(n)} - f(\zeta_m^{(n)})/f'(\zeta_m^{(n)})$) gelöst werden; man erhält so das gesuchte ζ_m . Wie bereits erwähnt ist dies der einzige Punkt in der Rechnung, der numerisch erledigt werden muß. Mit dem nun bekannten ζ_m ergibt sich c_1 aus Gl. (4.39) und anschließend c_2 aus Gl. (4.37). Die Temperatur im kalten Bereich, welche sich gemäß (4.31) als

$$T = c_1 e^{-(M/D)\zeta} + c_2 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5 \quad (4.41)$$

darstellt, ist somit vollständig bestimmt.

Die noch nicht ausgenutzte vierte Randbedingung (4.36) ergibt durch Einsetzen in die allgemeine Lösung der Wassergehaltsgleichung (4.32) das noch fehlende c_3 :

$$c_3 = -\frac{K_t}{5M}(1 - \zeta_m)^5, \quad (4.42)$$

so daß für den Wassergehalt schließlich gilt:

$$\omega = \frac{K_t}{5M}[(1 - \zeta)^5 - (1 - \zeta_m)^5]. \quad (4.43)$$

Slab mit Gefrierbedingung:

In diesem Fall gilt $a_m^\perp < 0$, also liegt nach (4.21) eine positive Vertikalgeschwindigkeit vor. Die Stromlinien des Eisflusses verlaufen folglich von der Basis weg in Richtung

auf die freie Oberfläche. Es kommen andere Randbedingungen als bei vorliegender Schmelzbedingung zum Tragen (siehe Gln. (4.12), (4.13) und (4.16) mit nachfolgender Diskussion):

$$T(1) = T_s, \quad (4.44)$$

$$T^+(\zeta_m) = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\kappa}{H} \frac{dT^+}{d\zeta} = L\omega^- \rho a_m^\perp, \quad (4.46)$$

$$\omega(0) = 0. \quad (4.47)$$

Es ist hier sinnvoll, sich zuerst der Bestimmung von c_3 zuzuwenden. Einsetzen der letzten Bedingung in die allgemeine Wassergehaltslösung (4.32) ergibt

$$c_3 = -\frac{K_t}{5M}, \quad (4.48)$$

so daß gilt:

$$\omega = \frac{K_t}{5M} [(1 - \zeta)^5 - 1]. \quad (4.49)$$

Für die weitere Rechnung wird der Wassergehalt an der CTS benötigt; er kann direkt aus diesem Ergebnis erhalten werden:

$$\omega^- = \omega(\zeta_m) = \frac{K_t}{5M} [(1 - \zeta_m)^5 - 1]; \quad (4.50)$$

ζ_m ist jedoch noch unbestimmt. Hiermit ergibt Gl. (4.46)

$$\begin{aligned} \frac{dT^+}{d\zeta} &= \frac{H}{\kappa} L \rho a_m^\perp \frac{K_t}{5M} [(1 - \zeta_m)^5 - 1] \\ &= \frac{L \rho K_t}{5\kappa} [(1 - \zeta_m)^5 - 1], \quad \text{weil } M = H a_s^\perp = H a_m^\perp. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Einsetzen der Bedingungen (4.44), (4.45) und (4.51) in die allgemeine Lösung der Temperaturgleichung (4.31) ergibt wie im Fall der Schmelzbedingungen drei Gleichungen für die unbekanntenen c_1 , c_2 und ζ_m :

$$T_s = c_1 e^{-(M/D)} + c_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} + c_2 \\ &\quad + a_1 \zeta_m + a_2 \zeta_m^2 + a_3 \zeta_m^3 + a_4 \zeta_m^4 + a_5 \zeta_m^5, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{L \rho K_t}{5\kappa} [(1 - \zeta_m)^5 - 1] &= -\frac{M}{D} c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} \\ &\quad + a_1 + 2a_2 \zeta_m + 3a_3 \zeta_m^2 + 4a_4 \zeta_m^3 + 5a_5 \zeta_m^4. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ganz analog zur Vorgehensweise bei den Schmelzbedingungen wird zuerst durch Berechnung von [(4.52) minus (4.53)] c_2 eliminiert. Dann wird (4.54) nach c_1 aufgelöst

und das Resultat in [(4.52) minus (4.53)] eingesetzt, was wiederum eine nichtlineare Gleichung zur Berechnung von ζ_m ergibt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{D}{M}(1 - e^{(M/D)(\zeta_m - 1)}) \left(a_1 + 2a_2\zeta_m + 3a_3\zeta_m^2 + 4a_4\zeta_m^3 + 5a_5\zeta_m^4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{L\rho K_t}{5\kappa} [(1 - \zeta_m)^5 - 1] \right) + T_s \\
&\quad + a_1(\zeta_m - 1) + a_2(\zeta_m^2 - 1) + a_3(\zeta_m^3 - 1) + a_4(\zeta_m^4 - 1) + a_5(\zeta_m^5 - 1) \\
&=: g(\zeta_m).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Nach dem Lösen dieser Gleichung mit dem Newton-Verfahren erhält man c_1 aus (4.54) und anschließend c_2 aus (4.52). Hiermit ist dann die Temperatur nach Gleichung (4.31) vollständig bestimmt:

$$T = c_1 e^{-(M/D)\zeta} + c_2 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5. \tag{4.56}$$

4.3 Ergebnisse

Nachdem im letzten Abschnitt die weitgehend analytische Lösung des Slab-Problems sowohl für Schmelzbedingungen als auch für Gefrierbedingungen demonstriert wurde, sollen an dieser Stelle zwei solche Lösungen, eine mit Schmelzbedingung und eine mit Gefrierbedingung, explizit präsentiert werden. Die Rechnung mit Schmelzbedingung wurde durchgeführt mit einer Höhe $H = 200$ m, einem Neigungswinkel $\gamma = 4^\circ$, einer Oberflächentemperatur $T_s = -3^\circ\text{C}$, einer Akkumulations-Ablations-Funktion $a_s^\perp = 0.2 \text{ m a}^{-1}$ (d. h., $a_m^\perp = 0.2 \text{ m a}^{-1}$ und $v_z \equiv -0.2 \text{ m a}^{-1}$) und einer basalen Horizontalgeschwindigkeit $v_{x,b} = 5 \text{ m a}^{-1}$ (siehe Abbildung 4.2), und in der Rechnung mit Gefrierbedingung wurde $H = 200$ m, $\gamma = 4^\circ$, $T_s = -10^\circ\text{C}$, $a_s^\perp = -0.2 \text{ m a}^{-1}$ (d. h., $a_m^\perp = -0.2 \text{ m a}^{-1}$ und $v_z \equiv 0.2 \text{ m a}^{-1}$) und $v_{x,b} = 5 \text{ m a}^{-1}$ verwendet (siehe Abbildung 4.3). In den zugehörigen Bildern ist jeweils in Plot (a) die horizontale Geschwindigkeit v_x als Funktion der Höhe z und in Plot (b) die Temperatur T im kalten Bereich sowie der Wassergehalt ω im temperierten Bereich als Funktion der Höhe z aufgetragen. Das Verhalten der Horizontalgeschwindigkeit ist in beiden Fällen identisch; diese steigt von ihrem minimalen Wert am Boden ausgehend monoton mit wachsender Höhe an, wie es typisch für eine solche Scherströmung ist. Dahingegen ist das Verhalten der Temperatur und des Wassergehaltes grundverschieden: Im Falle der Schmelzbedingung (Abbildung 4.2) sieht man, daß der Temperaturgradient dT^+/dz auf der kalten Seite der CTS und der Wassergehalt ω^- auf der temperierten Seite der CTS verschwinden, wie es bereits in der Diskussion zu Gl. (4.16) dargelegt wurde. Da diese beiden Größen auf der jeweils anderen Seite der CTS (d. h., dT^-/dz bzw. ω^+) sowieso gleich Null sind, bedeutet das, daß sie dort stetig sind, mithin also keinen

Sprung erfahren. Andererseits sieht man im Falle der Gefrierbedingung (Abbildung 4.3), daß ein echt negativer Temperaturgradient dT^+/dz auf der kalten Seite sowie ein echt positiver Wassergehalt ω^- auf der temperierten Seite der CTS auftreten; es liegt hier in der Tat ein nichtverschwindender Sprung des Temperaturgradienten und damit einhergehend auch des Wassergehaltes vor.

Abschließend sei einem etwaigen Einwand, daß diese Lösung keinem realistischen Fließzustand in einem Eisschild oder Gletscher entspreche und daher irrelevant sei, von rein mathematischen Überlegungen aus widersprochen: Die Lösung folgt aus einem gutgestellten mathematischen Randwertproblem und ist bis auf die Bestimmung der CTS-Position rein analytisch und daher exakt. Sie kann somit zur Überprüfung von numerischen Rechnungen verwendet werden und ist schon aus diesem Grunde nützlich.

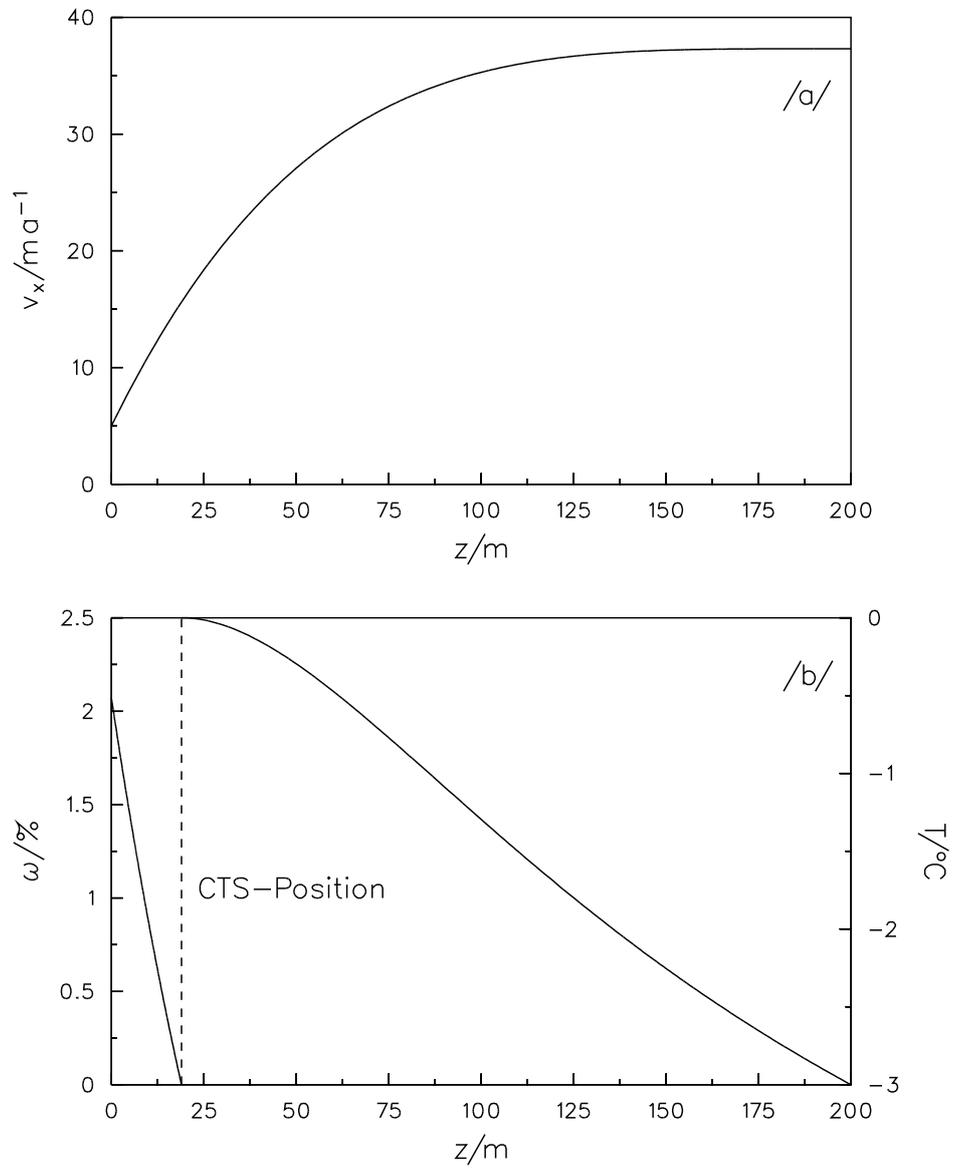


Abbildung 4.2: Horizontalgeschwindigkeit v_x (Plot a) und Temperatur T bzw. Wassergehalt ω (Plot b) für den Slab mit Schmelzbedingung an der CTS. $H = 200$ m, $\gamma = 4^\circ$, $T_s = -3^\circ C$, $a_s^\perp = 0.2$ m a $^{-1}$, $v_{x,b} = 5$ m a $^{-1}$.

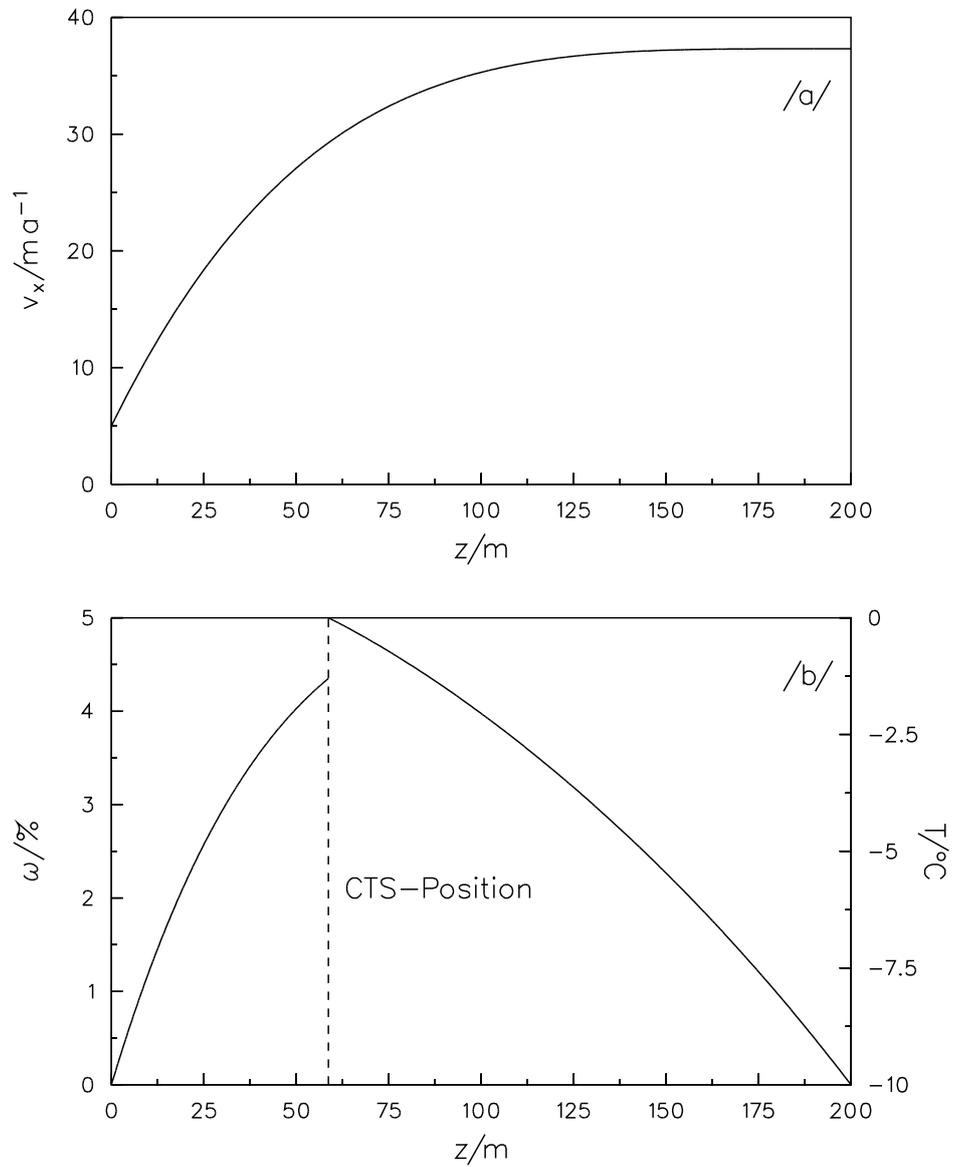


Abbildung 4.3: Horizontalgeschwindigkeit v_x (Plot a) und Temperatur T bzw. Wassergehalt ω (Plot b) für den Slab mit Gefrierbedingung an der CTS. $H = 200\text{ m}$, $\gamma = 4^{\circ}$, $T_s = -10^{\circ}\text{C}$, $a_s^{\perp} = -0.2\text{ m a}^{-1}$, $v_{x,b} = 5\text{ m a}^{-1}$.

5 Skalierung und Flacheisannahme

Das in Kapitel 3 vorgestellte polytherme Eismodell ist für einen numerischen oder gar analytischen Zugang im allgemeinen noch zu kompliziert. Lediglich sehr einfache Probleme mit hochgradiger Symmetrie (z. B. geneigte planparallele Eisplatte, siehe voriges Kapitel) können damit behandelt werden. Es ist also notwendig, die Gleichungen weiter zu vereinfachen. Hierzu werden sie zunächst einer Skalierung unterworfen, wobei die physikalischen Größen durch Wahl von zugehörigen typischen Werten entdimensioniert werden; dies ermöglicht in einem weiteren Schritt systematische Vernachlässigungen von Termen aufgrund der Größenordnung der entstehenden dimensionslosen Produkte. In unserem konkreten Fall beruhen die Vernachlässigungen im wesentlichen auf der Annahme, daß die im Eisschild auftretenden typischen Höhen wesentlich kleiner als die typischen Längendimensionen sind, in anderen Worten auf der Annahme eines hinreichend flachen Eisschildes (“Flacheisannahme” bzw. “Shallow-ice-approximation”, im folgenden als “SIA” bezeichnet; vgl. Hutter [29], Morland [55], Blatter [6]).

5.1 Einführung der Skalierung

Die verschiedenen physikalischen Größen sollen wie folgt skaliert werden:

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= [L] (\tilde{x}, \tilde{y}), \\
 z &= [H] \tilde{z}, \\
 (v_x, v_y) &= [V_L] (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y), \\
 v_z &= [V_H] \tilde{v}_z \quad \text{mit} \quad \varepsilon := \frac{[H]}{[L]} = \frac{[V_H]}{[V_L]}, \\
 t &= \frac{[L]}{[V_L]} \tilde{t}, \\
 (T, T') &= [\Delta T] (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}') \quad (T, T' \text{ in } ^\circ\text{C}), \\
 \omega &= [\omega] \tilde{\omega}, \\
 p &= \rho g [H] \tilde{p}, \\
 (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma) &= \varepsilon \rho g [H] (\tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}, \tilde{\sigma}), \\
 (\sigma_x^R, \sigma_y^R, \sigma_z^R, \sigma_{xy}) &= \varepsilon^2 \rho g [H] (\tilde{\sigma}_x^R, \tilde{\sigma}_y^R, \tilde{\sigma}_z^R, \tilde{\sigma}_{xy}), \\
 (h, z_m, b, b_r) &= [H] (\tilde{h}, \tilde{z}_m, \tilde{b}, \tilde{b}_r), \\
 (a_s^\perp, a_m^\perp) &= [V_H] (\tilde{a}_s^\perp, \tilde{a}_m^\perp), \\
 (A(T'), A_t(\omega)) &= [A] (\tilde{A}(\tilde{\theta}'), \tilde{A}_t(\tilde{\omega})), \\
 (f(\sigma), f_t(\sigma)) &= [f] (\tilde{f}(\tilde{\sigma}), \tilde{f}_t(\tilde{\sigma})),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\text{geoth}}^\perp &= [Q_{\text{geoth}}^\perp] \tilde{Q}_{\text{geoth}}^\perp, \\
\kappa(T) &= [\kappa] \tilde{\kappa}(\tilde{\theta}), \\
\kappa_r &= [\kappa_r] \tilde{\kappa}_r, \\
c(T) &= [c] \tilde{c}(\tilde{\theta}), \\
c_r &= [c_r] \tilde{c}_r, \\
C(t_\perp, \dots) &= [C] \tilde{C}(\tilde{t}_\perp, \dots), \\
C_t(t_\perp, \dots) &= [C_t] \tilde{C}_t(\tilde{t}_\perp, \dots), \\
\mathcal{P}_b^w &= \rho[\omega][V_H] \tilde{\mathcal{P}}_b^w, \\
\dot{m}_b^w &= \rho[\omega][V_H] \tilde{m}_b^w, \\
\mathcal{P}_m^w &= \rho[\omega][V_H] \tilde{\mathcal{P}}_m^w.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Größen in eckigen Klammern bedeuten typische Werte für die jeweiligen Variablen, und mit einer Tilde versehene Variablen sind dimensionslos. Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, werden im folgenden nur noch dimensionslose Größen verwendet; daher werden die Tilden der Einfachheit halber wieder weggelassen.

Die Skalierung soll so gewählt sein, daß die dimensionslosen Größen allesamt von der Ordnung $O(1)$ sind. Dies erscheint bei der zunächst etwas fragwürdigen Skalierung der verschiedenen Spannungen zweifelhaft, jedoch wird sich weiter unten zeigen, daß (ausgehend von der sicherlich vernünftigen Skalierung des Druckes p mit dem Überlagerungsdruck $\rho g[H]$ und der Annahme, daß von den sechs deviatorischen Spannungen die Schubspannungen σ_{xz} und σ_{yz} die dominierenden sind) genau diese Skalierung die richtige ist, d. h., Konsistenz in den Ordnungen von linken und rechten Seiten der Terme der skalierten Impulsbilanzen und der skalierten Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relationen herstellt. Diese Spezifizierung ist adäquat für die hier behandelten Eisschilde, welche auf festem Grund aufliegen, so daß die Schubspannungen σ_{xz} , σ_{yz} am Boden übertragen werden können. Bei Schelfeisen, d. h., aufschwimmenden Eismassen, sind dagegen gerade diese Schubspannungen nicht relevant, da Wasser als näherungsweise ideales Fluid keine Schubspannungen aufrecht erhalten kann. Somit ist dies der Punkt in der Herleitung des Modells, welcher die Aufspaltung zwischen Eisschilden und Schelfeisen darstellt.

Die oben eingeführten 13 typischen Größen $[L]$, $[H]$, $[V_L]$, $[\Delta T]$, $[\omega]$, $[A][f]$ (tritt nur als Produkt auf), $[Q_{\text{geoth}}^\perp]$, $[\kappa]$, $[\kappa_r]$, $[c]$, $[c_r]$, $[C]$, $[C_t]$ ($[V_H]$ ist nicht unabhängig und wird daher nicht aufgeführt) bilden zusammen mit den acht physikalischen Konstanten ρ , g , L , β , ν , ρ_r , ρ_a , τ_V einen Satz von 21 Größen, deren Dimensionen aus den vier Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde und Kelvin bestehen. Die zugehörige

Dimensionsmatrix hat offensichtlich den Rang vier:

	$[L]$	ρ	$[V_L]$	$[\Delta T]$	\dots
m	1	-3	1	0	\dots
kg	0	1	0	0	\dots
s	0	0	-1	0	\dots
K	0	0	0	1	\dots

Nach den Regeln der Dimensionsanalyse (Hutter [30]) existieren also $21 - 4 = 17$ unabhängige dimensionslose Produkte. Ein vollständiger Satz solcher Produkte ist

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{[H]}{[L]} = \frac{[V_H]}{[V_L]}, \\
F &= \frac{[V_L]^2}{g[L]}, \\
\mathcal{D} &= \frac{[\kappa]}{\rho[c][H][V_H]}, \\
\alpha &= \frac{g[H]}{[c][\Delta T]}, \\
\mathcal{K} &= \frac{\rho g[H]^3[A][f]}{[L][V_L]}, \\
\alpha_t &= \frac{g[H]}{L[\omega]}, \\
\mathcal{D}_t &= \frac{\nu}{\rho[H][V_H]}, \\
\mathcal{F} &= \frac{\rho g[H]^2[C]}{[L][V_L]}, \\
\mathcal{F}_t &= \frac{\rho g[H]^2[C_t]}{[L][V_L]}, \\
\mathcal{B} &= \frac{\beta[H]}{[\Delta T]}, \\
\mathcal{D}_r &= \frac{[\kappa_r]}{\rho_r[c_r][H][V_H]}, \\
\mathcal{T}_r &= \frac{\tau_V[V_H]}{[H]}, \\
\mathcal{N}_r &= \frac{[H][Q_{\text{geoth}}]}{[\kappa_r][\Delta T]}, \\
&[\omega], \quad \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]}, \quad \frac{\rho_r}{\rho}, \quad \frac{\rho_a}{\rho};
\end{aligned} \tag{5.2}$$

ε ist das Aspektverhältnis, F die Froude-Zahl, \mathcal{D} die Wärmediffusionszahlzahl, α das Verhältnis potentielle Energie zu innere Energie in kaltem Eis, \mathcal{K} die Fluiditätszahl,

α_t das Verhältnis potentielle Energie zu innere Energie in temperiertem Eis, \mathcal{D}_t die Wasserdiffusionszahl, \mathcal{F} bzw. \mathcal{F}_t die Gleitzahl für kalte bzw. temperierte Basis, \mathcal{B} die Clausius-Clapeyron-Zahl, \mathcal{D}_r die Wärmediffusionszahl der Lithosphäre, \mathcal{T}_r die Zeitverzögerungszahl für das Einsinken der Lithosphäre in die Asthenosphäre, und schließlich \mathcal{N}_r die geotherme Wärmezahl in der Lithosphäre. Die vier letzten Kombinationen erhalten keine speziellen Bezeichnungen.

5.2 Skalierung und SIA für die Modellgleichungen

Im folgenden geht es darum, alle Feldgleichungen, Randbedingungen und Übergangsbedingungen des Kapitels 3 obiger Skalierung zu unterziehen und sie anschließend mit der SIA (Flacheisannahme) zu vereinfachen. Wie bereits erwähnt besteht diese SIA in der Annahme eines hinreichend flachen Eisschildes, dessen typische Längenabmessungen wesentlich größer als dessen typische Höhenabmessungen sind, was in der Natur meist gut erfüllt ist (typische Werte liegen im Bereich von $\varepsilon = 10^{-3}$). Formelhaft ausgedrückt bedeutet dies, daß der Limes

$$\varepsilon \rightarrow 0 \tag{5.3}$$

betrachtet wird, also alle Terme, die von der Ordnung $O(\varepsilon^p)$ mit $p \geq 1$ sind, in den Gleichungen zu vernachlässigen sind. Weiterhin läßt sich leicht abschätzen, daß die Froude-Zahl F bei realen Eisschilden in der Größenordnung $F = 10^{-15}$ und weniger liegt, es also sinnvoll ist, gleichzeitig den Limes

$$\frac{F}{\varepsilon} \rightarrow 0 \tag{5.4}$$

zu betrachten.

5.2.1 Kalter Bereich

Die skalierte *Massenbilanz* ergibt sich durch Einsetzen der Skalierung in die ursprüngliche Massenbilanz (3.1) zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5.5}$$

(wie bereits erwähnt werden die Tilden, welche in Abschnitt 5.1 dimensionslose Größen anzeigen, im folgenden weggelassen, da nur noch mit solchen gerechnet wird), und kann durch die SIA nicht weiter vereinfacht werden.

Aus der *Impulsbilanz* (3.3) folgt

$$\frac{F}{\varepsilon} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_x^R}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \tag{5.6}$$

$$\frac{\mathbf{F}}{\varepsilon} \frac{dv_y}{dt} = \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_y^R}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad (5.7)$$

$$\mathbf{F} \varepsilon \frac{dv_z}{dt} = \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_z^R}{\partial z} - 1. \quad (5.8)$$

Anwendung der SIA ergibt weiter

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (5.9)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (5.10)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 1; \quad (5.11)$$

dies gibt uns ein erstes, sehr eindrucksvolles Beispiel, wie sehr das Modell des Kapitels 3 durch die SIA vereinfacht wird. Das Ergebnis zeigt ferner, daß die Skalierung der Schubspannungen σ_{xz} und σ_{yz} mit $\varepsilon \rho g[H]$ (vgl. Abschnitt 5.1) richtig war, denn ohne das zusätzliche ε im Vergleich zur Druckskalierung wären die Gleichungen (5.9) und (5.10) nicht konsistent in den Ordnungen der Summanden, sondern ein Term der Ordnung $O(\varepsilon)$ und ein Term der Ordnung $O(1)$ müßten sich zu Null aufsummieren, was nicht möglich ist.

Die *Energiebilanz* (3.8) ergibt mit ausgeschriebenem Advektionsterm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\mathcal{D}}{c} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right\} + 2 \frac{\alpha}{c} \mathcal{K}EA(\theta') f(\sigma) \sigma^2; \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit der SIA wird hieraus

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2 \frac{\alpha}{c} \mathcal{K}EA(\theta') f(\sigma) \sigma^2. \quad (5.13)$$

Die horizontale Wärmeleitung kann also im Rahmen des SIA-Limes vernachlässigt werden, jedoch muß sowohl die horizontale als auch die vertikale Advektion berücksichtigt werden.

Von den Materialgesetzen (3.4) – (3.6), die bereits in die Energiebilanz eingearbeitet sind, wird im folgenden nur noch die *Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation* (3.4) benötigt:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{K}EA(\theta') f(\sigma) \sigma_x^R, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathcal{K}EA(\theta') f(\sigma) \sigma_y^R, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathcal{K}EA(\theta') f(\sigma) \sigma_z^R, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2\mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_{xy}, \quad (5.17)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_{xz}, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2\mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_{yz}. \quad (5.19)$$

Mit der SIA vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_x^R, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_y^R, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_z^R, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2\mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_{xy}, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 2\mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_{xz}, \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\mathcal{K}EA(\theta')f(\sigma)\sigma_{yz}. \quad (5.25)$$

Hieraus wird ersichtlich, daß auch die Skalierung der normalen Reibungsspannungen σ_x^R , σ_y^R und σ_z^R sowie der Schubspannung σ_{xy} gemäß Abschnitt 5.1 mit $\varepsilon^2 \rho g[H]$ vernünftig war, also ordnungskonistente Terme ergibt. Diese Spannungen sind folglich für flache Eisschilde sehr klein, was auch intuitiv unmittelbar einleuchtet. Da im folgenden nur die letzten beiden dieser sechs Gleichungen benötigt werden (nämlich zur Berechnung der Horizontalgeschwindigkeiten), brauchen sie nicht weiter betrachtet zu werden.

Schließlich erhält man für die in der Energiebilanz und im Materialgesetz benötigte *effektive Schubspannung*

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{(\sigma_x^R)^2}{2} + \frac{(\sigma_y^R)^2}{2} + \frac{(\sigma_z^R)^2}{2} + \sigma_{xy}^2 \right)}; \quad (5.26)$$

im SIA-Limes ergibt dies

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2}. \quad (5.27)$$

5.2.2 Temperierter Bereich

Wie bereits festgestellt, haben die *Massenbilanz der Mischung* Eis plus Wasser und die *Impulsbilanz der Mischung* die gleiche Form wie die entsprechenden Bilanzen für kaltes Eis (vgl. (3.1), (3.3), (3.13), (3.14)); daher übertragen sich auch die skalierten und die SIA-Versionen hiervon aus dem vorigen Abschnitt (Gln. (5.5) – (5.11)). Sie werden hier nicht noch einmal explizit aufgeführt.

Für die Temperatur gilt gemäß (3.9)

$$\theta = \theta_M = -\mathcal{B}p. \quad (5.28)$$

Aus der *Energiebilanz der Mischung* (3.24) bzw. der *Massenbilanz für den Wassergehalt* (3.23) (diese beiden Gleichungen sind identisch) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{c\alpha_t}{\alpha} \left(\frac{\partial \theta_M}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_M}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta_M}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) \\ &= \mathcal{D}_t \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) \right\} \\ &+ 2\alpha_t \mathcal{K} E A_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.29)$$

was sich durch die SIA vereinfacht zu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{c\alpha_t}{\alpha} \left(\frac{\partial \theta_M}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_M}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta_M}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) \\ &= \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) + 2\alpha_t \mathcal{K} E A_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Wie bei der Energiebilanz für kaltes Eis fällt die horizontale Diffusion durch die SIA heraus.

Die *Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation* (3.17) hat im wesentlichen die gleiche Form wie diejenige für kaltes Eis (3.4). Daher gelten die Gleichungen (5.14) – (5.25) auch für temperiertes Eis; es ist lediglich $A(\theta')$ durch $A_t(\omega)$ und $f(\sigma)$ durch $f_t(\sigma)$ zu ersetzen. Ebenso bleibt das Ergebnis für die *effektive Schubspannung* unverändert.

5.2.3 Lithosphäre

Die Skalierung der *Energiebilanz* (3.26) ergibt

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_r \kappa_r}{c_r} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right), \quad (5.31)$$

bzw. im SIA-Limes

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_r \kappa_r}{c_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (5.32)$$

Die *zeitliche Evolution der Lithosphärenoberseite* folgt aus (3.29) zu

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{T}_r} \left[b - \left(b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H \right) \right]; \quad (5.33)$$

dies kann nicht weiter vereinfacht werden. Entsprechend gilt für die Geschwindigkeit der Lithosphäre gemäß (3.30)

$$v_x = 0, \quad (5.34)$$

$$v_y = 0, \quad (5.35)$$

$$v_z = \frac{\partial b}{\partial t}(x, y, t) \quad (5.36)$$

mit $\partial b/\partial t$ aus obiger Gleichung.

5.2.4 Randbedingungen an der freien Oberfläche

Zunächst soll die kinematische Bedingung (3.33) skaliert werden. Dies ergibt³

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_s^\perp; \quad (5.37)$$

mit der SIA verbleibt

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = a_s^\perp. \quad (5.38)$$

Für das weitere Vorgehen werden die Terme $\text{grad } F_s$ und $\|\text{grad } F_s\|$ benötigt. Man erhält hierfür

$$\text{grad } F_s = \left(-\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right)^t \quad (5.39)$$

und

$$\|\text{grad } F_s\| = \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad (5.40)$$

im SIA-Limes ergibt dies

$$\text{grad } F_s = (0, 0, 1)^t, \quad \|\text{grad } F_s\| = 1. \quad (5.41)$$

Mit dem äußeren Normalenvektor $\mathbf{n} = \text{grad } F_s / \|\text{grad } F_s\|$ folgt aus der *Impulssprungbedingung* (3.34)

$$-(-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) \frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma_{xz} = 0, \quad (5.42)$$

$$-\varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} - (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma_{yz} = 0, \quad (5.43)$$

$$-\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial h}{\partial y} - p + \varepsilon^2 \sigma_z^R = 0. \quad (5.44)$$

³Die hochgestellten Minuszeichen $(\cdot)^-$ zur Kennzeichnung der Eis-Seite bei den Randbedingungen an der freien Oberfläche sowie den Übergangsbedingungen an der Eisbasis (vgl. Kap. 3) werden im folgenden weggelassen. Nicht gekennzeichnete Größen beziehen sich daher stets auf die Eis-Seite.

Anwendung der SIA vereinfacht zunächst die letzte dieser Gleichungen zu

$$p = 0, \quad (5.45)$$

und hiermit ergeben die beiden ersten Gleichungen

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \quad (5.46)$$

Es verbleibt im Falle einer kalten freien Oberfläche die Randbedingung für die *Oberflächentemperatur* (3.35), welche skaliert einfach

$$\theta(x, y, t) = \theta_s(x, y, t) \quad (5.47)$$

ergibt; dies kann offensichtlich nicht weiter vereinfacht werden. Im Falle einer temperierten freien Oberfläche ist in analoger Weise der Wassergehalt ω oder dessen Normalableitung vorzuschreiben.

5.2.5 Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis

Die *kinematische Bedingung* (3.38) wird durch die Skalierung und SIA nicht verändert, sie lautet

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} - v_z = 0. \quad (5.48)$$

Analog zur freien Oberfläche seien nun die Terme $\text{grad } F_b$ und $\|\text{grad } F_b\|$ berechnet:

$$\text{grad } F_b = \left(\varepsilon \frac{\partial b}{\partial x}, \varepsilon \frac{\partial b}{\partial y}, -1 \right)^t \quad (5.49)$$

und

$$\|\text{grad } F_b\| = \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad (5.50)$$

im SIA-Limes erhält man hieraus

$$\text{grad } F_b = (0, 0, -1)^t, \quad \|\text{grad } F_b\| = 1. \quad (5.51)$$

Der äußere Normalenvektor folgt wie zuvor zu $\mathbf{n} = \text{grad } F_b / \|\text{grad } F_b\|$. Mit

$$\mathbf{Tn} = \frac{\rho g[H]}{\|\text{grad } F_b\|} \begin{pmatrix} \varepsilon \sigma_x \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^3 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial y} - \varepsilon \sigma_{xz} \\ \varepsilon^3 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon \sigma_y \frac{\partial b}{\partial y} - \varepsilon \sigma_{yz} \\ \varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial y} - \sigma_z \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

und

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n})\mathbf{n} = \frac{\rho g[H]}{\|\text{grad } F_b\|^3} \times \left(\begin{array}{l} \varepsilon^3 \sigma_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^3 + \varepsilon^3 \sigma_y \frac{\partial b}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon \sigma_z \frac{\partial b}{\partial x} \\ + 2\varepsilon^5 \sigma_{xy} \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial b}{\partial y} - 2\varepsilon^3 \sigma_{xz} \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - 2\varepsilon^3 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} \\ \varepsilon^3 \sigma_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial b}{\partial y} + \varepsilon^3 \sigma_y \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^3 + \varepsilon \sigma_z \frac{\partial b}{\partial y} \\ + 2\varepsilon^5 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 - 2\varepsilon^3 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - 2\varepsilon^3 \sigma_{yz} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \\ -\varepsilon^2 \sigma_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \varepsilon^2 \sigma_y \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 - \sigma_z \\ -2\varepsilon^4 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} + 2\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} + 2\varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial y} \end{array} \right) \quad (5.53)$$

(zur Vereinfachung der Terme wurden in den obigen Gleichungen die totalen Normalspannungen anstelle des Druckes und der Reibungsspannungen verwendet; es ist $\sigma_{x/y/z} = -p + \varepsilon^2 \sigma_{x/y/z}^R$) erhält man aus dem *Gleitgesetz* (3.39)

$$\begin{aligned}
(v_{\text{sl}})_x &= -\frac{\mathcal{F}C}{\|\text{grad } F_b\|} \left[\sigma_x \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial y} - \sigma_{xz} \right. \\ &\quad - \frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2} \left(\varepsilon^2 \sigma_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^3 + \varepsilon^2 \sigma_y \frac{\partial b}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 + \sigma_z \frac{\partial b}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\varepsilon^4 \sigma_{xy} \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial b}{\partial y} - 2\varepsilon^2 \sigma_{xz} \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - 2\varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} \right) \right], \quad (5.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_{\text{sl}})_y &= -\frac{\mathcal{F}C}{\|\text{grad } F_b\|} \left[\varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial b}{\partial y} - \sigma_{yz} \right. \\ &\quad - \frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2} \left(\varepsilon^2 \sigma_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial b}{\partial y} + \varepsilon^2 \sigma_y \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^3 + \sigma_z \frac{\partial b}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\varepsilon^4 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 - 2\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - 2\varepsilon^2 \sigma_{yz} \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \right) \right], \quad (5.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(v_{\text{sl}})_z &= -\frac{\mathcal{F}C}{\|\text{grad } F_b\|} \left[\sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} + \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\sigma_z}{\varepsilon^2} \right. \\ &\quad - \frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2} \left(-\sigma_x \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \sigma_y \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 - \frac{\sigma_z}{\varepsilon^2} \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} + 2\sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} + 2\sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial y} \right) \right]. \quad (5.56)
\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $1/\|\text{grad } F_b\|^2 = 1 - \varepsilon^2(\partial b/\partial x)^2 - \varepsilon^2(\partial b/\partial y)^2 + O(\varepsilon^4)$ (in der letzten Gleichung sind die beiden Terme der Ordnung $O(\varepsilon^2)$ wichtig) vereinfacht sich dies im SIA-Limes zu

$$(v_{\text{sl}})_x = \mathcal{F}C\sigma_{xz}, \quad (5.57)$$

$$(v_{\text{sl}})_y = \mathcal{F}C\sigma_{yz}, \quad (5.58)$$

$$(v_{\text{sl}})_z = \mathcal{F}C \left(\frac{\partial b}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial b}{\partial y}\sigma_{yz} \right). \quad (5.59)$$

Für die Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_{sl} selbst gilt gemäß ihrer Definition (im Anschluß an Gl. (3.38))

$$(v_{\text{sl}})_x = v_x - v_x^+ - \frac{\varepsilon^2}{\|\text{grad } F_b\|^2} \times \left((v_x - v_x^+) \frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+) \frac{\partial b}{\partial y} - (v_z - v_z^+) \right) \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (5.60)$$

$$(v_{\text{sl}})_y = v_y - v_y^+ - \frac{\varepsilon^2}{\|\text{grad } F_b\|^2} \times \left((v_x - v_x^+) \frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+) \frac{\partial b}{\partial y} - (v_z - v_z^+) \right) \frac{\partial b}{\partial y}, \quad (5.61)$$

$$(v_{\text{sl}})_z = v_z - v_z^+ + \frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2} \times \left((v_x - v_x^+) \frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+) \frac{\partial b}{\partial y} - (v_z - v_z^+) \right), \quad (5.62)$$

was sich durch Anwendung der SIA vereinfacht zu

$$(v_{\text{sl}})_x = v_x - v_x^+, \quad (5.63)$$

$$(v_{\text{sl}})_y = v_y - v_y^+, \quad (5.64)$$

$$(v_{\text{sl}})_z = (v_x - v_x^+) \frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+) \frac{\partial b}{\partial y}. \quad (5.65)$$

Im Rahmen des hier verwendeten Lithosphärenmodells verschwinden v_x^+ und v_y^+ ; vgl. Gl. (5.34), (5.35).

Die *Impulssprungbedingung* (3.40) wird nicht weiter benötigt, da in der Lithosphäre keine Spannungen berechnet werden. Sie wird somit nicht der Skalierung unterworfen.

Die *Energiesprungbedingung* (3.41) lautet skaliert

$$\begin{aligned} & \kappa \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \left(\varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \theta^+}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{\mathcal{D}} \left\{ (v_{\text{sl}})_x \frac{\partial b}{\partial x} (-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) + \varepsilon^2 (v_{\text{sl}})_x \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{xy} - (v_{\text{sl}})_x \sigma_{xz} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2(v_{\text{sl}})_y \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xy} + (v_{\text{sl}})_y \frac{\partial b}{\partial y} (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) - (v_{\text{sl}})_y \sigma_{yz} \\
& +\varepsilon^2(v_{\text{sl}})_z \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xz} + \varepsilon^2(v_{\text{sl}})_z \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{yz} - (v_{\text{sl}})_z (-p + \varepsilon^2 \sigma_z^R) \Big\}. \tag{5.66}
\end{aligned}$$

Der Term $-(\alpha/\mathcal{D}) \{ \dots \}$ verschwindet, falls Haften an der kalten Basis angenommen wird. Im Rahmen der SIA ergibt sich

$$\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \frac{\partial \theta^+}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\mathcal{D}} [(v_{\text{sl}})_x \sigma_{xz} + (v_{\text{sl}})_y \sigma_{yz}]; \tag{5.67}$$

die den Druck p enthaltenden Terme in (5.66) verschwinden aufgrund von (5.63) – (5.65).

Schließlich hat man die Kontinuität der Temperatur (Gl. (3.42)):

$$\theta = \theta^+. \tag{5.68}$$

5.2.6 Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen (5.49) – (5.51) für $\text{grad } F_b$ und $\|\text{grad } F_b\|$ gelten unverändert. Die *kinematische Bedingung* (3.50) lautet somit

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} - v_z = \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} [\omega] \dot{m}_b^w; \tag{5.69}$$

mit der SIA verbleibt

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} - v_z = [\omega] \dot{m}_b^w. \tag{5.70}$$

Die *Randbedingung für den Wassergehalt* (3.51) ergibt

$$\frac{\mathcal{D}_t}{\|\text{grad } F_b\|} \left(-\varepsilon^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = (1 - [\omega] \omega) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \tag{5.71}$$

was sich im SIA-Limes zu

$$\mathcal{D}_t \frac{\partial \omega}{\partial z} = (1 - [\omega] \omega) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w \tag{5.72}$$

vereinfacht.

Die Skalierung des *Gleitgesetzes* (3.52) geschieht in analoger Weise zum Vorgehen bei kalter Eisbasis und ergibt ein identisches Ergebnis; es ist lediglich in den Gleichungen $\mathcal{F}C$ durch die entsprechenden Werte $\mathcal{F}_t C_t$ zu ersetzen.

Die Energiesprungbedingung (3.56) ergibt skaliert

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_b^w = & \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \frac{\kappa}{\|\text{grad } F_b\|} \left\{ -\varepsilon^2 \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial z} \right\} \\
& - \frac{\mathcal{D}\alpha_t [\kappa_r]}{\alpha [\kappa]} \frac{\kappa_r}{\|\text{grad } F_b\|} \left\{ -\varepsilon^2 \frac{\partial\theta^+}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial\theta^+}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial\theta^+}{\partial z} \right\} \\
& - \frac{\alpha_t}{\|\text{grad } F_b\|} \left\{ (v_{\text{sl}})_x \frac{\partial b}{\partial x} (-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) + \varepsilon^2 (v_{\text{sl}})_x \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{xy} - (v_{\text{sl}})_x \sigma_{xz} \right. \\
& + \varepsilon^2 (v_{\text{sl}})_y \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xy} + (v_{\text{sl}})_y \frac{\partial b}{\partial y} (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) - (v_{\text{sl}})_y \sigma_{yz} + \varepsilon^2 (v_{\text{sl}})_z \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xz} \\
& \left. + \varepsilon^2 (v_{\text{sl}})_z \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{yz} - (v_{\text{sl}})_z (-p + \varepsilon^2 \sigma_z^R) \right\}. \tag{5.73}
\end{aligned}$$

Anwendung der SIA ergibt hieraus

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \kappa \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\mathcal{D}\alpha_t [\kappa_r]}{\alpha [\kappa]} \kappa_r \frac{\partial\theta^+}{\partial z} + \alpha_t ((v_{\text{sl}})_x \sigma_{xz} + (v_{\text{sl}})_y \sigma_{yz}); \tag{5.74}$$

die Druckterme in (5.73) heben sich aufgrund von (5.63) – (5.65) weg.

Es verbleibt noch die Kontinuität der Temperatur (3.57):

$$\theta = \theta^+ = \theta_M. \tag{5.75}$$

5.2.7 Randbedingungen an der Lithosphärenunterseite

Die Ausdrücke für $\text{grad } F_r$ und $\|\text{grad } F_r\|$ haben die gleiche Form wie für die kalte Eisbasis (vgl. (5.49) – (5.51)); es ist lediglich überall b durch b_r und F_b durch F_r zu ersetzen. Den Normaleneinheitsvektor erhält man dann wie üblich als $\mathbf{n} = \text{grad } F_r / \|\text{grad } F_r\|$. Hiermit erhält man aus (3.58)

$$\kappa_r \left(\varepsilon^2 \frac{\partial b_r}{\partial x} \frac{\partial\theta^-}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial b_r}{\partial y} \frac{\partial\theta^-}{\partial y} - \frac{\partial\theta^-}{\partial z} \right) = \mathcal{N}_r Q_{\text{geoth}}^\perp, \tag{5.76}$$

was im SIA-Limes

$$\kappa_r \frac{\partial\theta^-}{\partial z} = -\mathcal{N}_r Q_{\text{geoth}}^\perp \tag{5.77}$$

ergibt.

5.2.8 Übergangsbedingungen an der CTS

Wie im Falle der freien Oberfläche erhält man aus der *kinematischen Bedingung* (3.60)

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_m}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_z = \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_m^\perp; \tag{5.78}$$

mit der SIA vereinfacht sich das zu

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_m}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_z = a_m^\perp. \quad (5.79)$$

Für $\text{grad } F_m$ und $\|\text{grad } F_m\|$ ergibt sich

$$\text{grad } F_m = \left(-\varepsilon \frac{\partial z_m}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial z_m}{\partial y}, 1 \right)^t \quad (5.80)$$

und

$$\|\text{grad } F_s\| = \left(1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad (5.81)$$

im SIA-Limes folgt hieraus

$$\text{grad } F_m = (0, 0, 1)^t, \quad \|\text{grad } F_m\| = 1. \quad (5.82)$$

Für den Normaleneinheitsvektor gilt wie zuvor $\mathbf{n} = \text{grad } F_m / \|\text{grad } F_m\|$.

Aus der *Kontinuität von Temperatur und Geschwindigkeit* (Gln. (3.61) – (3.63)) ergibt sich

$$\theta^+ = \theta^- = \theta_M \quad (5.83)$$

und

$$v_x^+ = v_x^-, \quad v_y^+ = v_y^-, \quad v_z^+ = v_z^-. \quad (5.84)$$

Die *Impulssprungbedingung* (3.64) stellt sich in skaliertem Form als

$$\left[\left[-(-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \sigma_{xz} \right] \right] = 0, \quad (5.85)$$

$$\left[\left[-\varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial z_m}{\partial x} - (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) \frac{\partial z_m}{\partial y} + \sigma_{yz} \right] \right] = 0, \quad (5.86)$$

$$\left[\left[-\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial z_m}{\partial y} + (-p + \varepsilon^2 \sigma_z^R) \right] \right] = 0, \quad (5.87)$$

dar, was sich mit der SIA zu

$$p^+ = p^-, \quad \sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^-, \quad \sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^- \quad (5.88)$$

vereinfacht.

Schließlich ist noch die *Energiesprungbedingung* (3.69) mit den daraus abgeleiteten Beziehungen (3.72) – (3.77) zu betrachten:

$$\text{i) } -(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0 \quad (\text{Schmelzbedingung}):$$

$$\omega^- = 0, \quad (5.89)$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta^+}{\partial z} = -\varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z}; \quad (5.90)$$

letzteres ergibt in der SIA

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial z} = \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z}. \quad (5.91)$$

ii) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0$ (Gefrierbedingung):

Hier benötigt man (3.69) in seiner vollen Form. Mit dem Diffusionsgesetz (3.19) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{D}\kappa}{\|\text{grad } F_m\|} \left(-\varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta^+}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\mathcal{D}\kappa}{\|\text{grad } F_m\|} \left(-\varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\alpha}{\alpha_t} \frac{\mathcal{D}_t}{\|\text{grad } F_m\|} \left(-\varepsilon^2 \frac{\partial \omega^-}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \omega^-}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \omega^-}{\partial z} \right) \\ & = \frac{\alpha}{\alpha_t} \omega^- a_m^\perp, \end{aligned} \quad (5.92)$$

und weiter mit der SIA

$$\mathcal{D}\kappa \frac{\partial \theta^+}{\partial z} - \mathcal{D}\kappa \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z} - \frac{\alpha}{\alpha_t} \mathcal{D}_t \frac{\partial \omega^-}{\partial z} = \frac{\alpha}{\alpha_t} \omega^- a_m^\perp. \quad (5.93)$$

iii) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) = 0$ (Grenzfall):

$$\omega^- \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad (5.94)$$

Stetigkeit des Temperaturgradienten analog zu Schmelzbedingungen (Gleichungen (5.90) bzw. (5.91)).

5.3 Teilintegration der polythermen SIA-Gleichungen

Die oben hergeleiteten, der Flacheisannahme (SIA) unterworfenen Modellgleichungen können zum Teil analytisch integriert werden. Im folgenden wird gezeigt, daß die relevanten Spannungen p , σ_{xz} und σ_{yz} sogar voll analytisch erhalten werden können; das Problem der Berechnung der drei Komponenten v_x , v_y und v_z des Geschwindigkeitsvektors kann auf einfache numerische Quadraturen zurückgeführt werden und bereitet daher auch keine numerischen Probleme. Die eigentliche "harte" Numerik beschränkt sich somit auf die Berechnung des Temperatur- bzw. Wassergehaltsfeldes und der Evolution der freien Oberfläche und der CTS des polythermen Eisschildes.

5.3.1 Berechnung der Spannungen

Aus Gleichung (5.11) zusammen mit der Randbedingung (5.45) und der Übergangsbedingung (5.88) erhält man für den Druck

$$p(x, y, z, t) = h(x, y, t) - z; \quad (5.95)$$

er unterliegt also einer rein hydrostatischen Verteilung. Unter Verwendung dieses Ergebnisses folgt aus (5.9), (5.10), (5.46) und (5.88)

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial h}{\partial x}(h - z), \quad (5.96)$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial h}{\partial y}(h - z). \quad (5.97)$$

Diese Schubspannungen ergeben sich also als Produkt aus Oberflächenneigung und Überlagerungsdruck. Für die effektive Schubspannung ergibt sich hiermit gemäß (5.27)

$$\sigma = (h - z) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \quad (5.98)$$

Man merke sich, daß die obigen Ergebnisse gleichermaßen im kalten und temperierten Bereich des Eisschildes gelten.

Die verbleibenden, sehr kleinen Spannungen σ_x^R , σ_y^R , σ_z^R und σ_{xy} können nicht direkt berechnet werden, sie werden jedoch auch im weiteren nicht benötigt. Man kann sie im Anschluß an die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus den ersten vier Gleichungen (5.20) – (5.23) der Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation ermitteln.

5.3.2 Berechnung der Geschwindigkeit

Die Horizontalgeschwindigkeiten v_x und v_y lassen sich durch Einsetzen der obigen Ergebnisse für σ_{xz} und σ_{yz} in die beiden letzten Gleichungen (5.24), (5.25) der Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation und anschließende Integration erhalten:

$$v_x = v_{x,b} - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz', \quad (5.99)$$

$$v_y = v_{y,b} - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz'. \quad (5.100)$$

Hierbei ist

$$A_{(t)}(\cdot) = \begin{cases} A(\theta') & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ A_t(\omega) & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}) \end{cases} \quad (5.101)$$

und

$$f_{(t)}(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ f_t(\sigma) & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}). \end{cases} \quad (5.102)$$

Die Integrationskonstanten $v_{x,b}$ und $v_{y,b}$, welche die entsprechenden basalen Geschwindigkeiten darstellen, folgen aus dem Gleitgesetz (5.57), (5.58) unter Verwendung der Ergebnisse für σ_{xz} und σ_{yz} zu

$$v_{x,b} = (v_{sl})_x = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial x}(h-b), \quad (5.103)$$

$$v_{y,b} = (v_{sl})_y = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(h-b). \quad (5.104)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß die Lithosphärendgeschwindigkeit keine x - und y -Komponenten hat (vgl. (5.34), (5.35)), so daß gemäß (5.63), (5.64) die entsprechenden Gleitgeschwindigkeitskomponenten mit den Eisgeschwindigkeitskomponenten identisch sind. Weiterhin wurde

$$\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} = \begin{cases} \mathcal{F}C & \text{für kalte Basis,} \\ \mathcal{F}_tC_t & \text{für temperierte Basis} \end{cases} \quad (5.105)$$

gesetzt.

Mit den obigen Ergebnissen für die Horizontalgeschwindigkeiten kann man aus der Massenbilanz (5.5) auch die Vertikalgeschwindigkeit berechnen:

$$v_z = -\int_b^z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + v_{z,b}. \quad (5.106)$$

Die basale Vertikalgeschwindigkeit $v_{z,b}$ kann gemäß der kinematischen Bedingung (5.48) bzw. (5.70) durch $v_{x,b}$ und $v_{y,b}$ ausgedrückt werden.

Zusammenfassend gilt also für die Geschwindigkeiten:

$$v_x = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial x}(h-b) - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h-z') dz', \quad (5.107)$$

$$v_y = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial y}(h-b) - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h-z') dz', \quad (5.108)$$

$$v_z = -\int_b^z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + \frac{\partial b}{\partial t} + v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} + v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y} - [\omega] \dot{m}_b^w. \quad (5.109)$$

Bei bekanntem Temperatur- und Wassergehaltsfeld können alle Integrale leicht numerisch berechnet werden. Nimmt man die Eisfluidität als temperatur- bzw. wassergehaltsunabhängig an ($A_{(t)} = \text{const}$), so treten Abhängigkeiten von Temperatur und Wassergehalt gar nicht mehr auf, und die Integrationen können sogar analytisch durchgeführt werden.

Abschließend sei noch bemerkt, daß offensichtlich $(v_x, v_y) \propto -(\partial h/\partial x, \partial h/\partial y) = -\text{grad}_{(x,y)} h$ gilt, d. h., der Vektor der Horizontalgeschwindigkeit zeigt in jedem Punkt des Eisschildes in Richtung des stärksten Oberflächengefälles, insbesondere also entlang eines Vertikalprofils immer in die gleiche Richtung (vgl. Hutter [29]). Dieses überraschende Ergebnis ermöglicht es, durch Bestimmung der Richtung der Eisflußgeschwindigkeit in Eisbohrkernen die Gültigkeit der SIA in einem gegebenen realen Eisschild zu überprüfen.

5.3.3 Evolution der freien Oberfläche

Eine Gleichung, die die zeitliche Evolution der freien Oberfläche, mit anderen Worten also die Dickenänderung des Eisschildes mit der Zeit beschreibt, kann aus der Massenbilanz (5.5) in Kombination mit den kinematischen Bedingungen (5.38), (5.48) und (5.70) für die freie Oberfläche bzw. die Basis erhalten werden. Integration der Massenbilanz (5.5) von der Basis bis zur freien Oberfläche liefert unter Verwendung der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned} v_{z,s} - v_{z,b} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h v_x dz' + v_{x,s} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v_y dz' + v_{y,s} \frac{\partial h}{\partial y} - v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Unter Verwendung der kinematischen Bedingungen (5.38) für die freie Oberfläche und (5.48) bzw. (5.70) für die Basis ergibt dies

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(h-b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v_y dz' + a_s^\perp - [\omega] \dot{m}_b^w. \quad (5.111)$$

Diese Gleichung bilanziert die zeitliche Änderung der Eisdicke mit der horizontalen Divergenz der vertikalintegrierten Horizontalgeschwindigkeit und der Akkumulations-Ablations-Funktion; letztere stellt eine klimatische Input-Größe dar.

5.3.4 Evolution der CTS

In ähnlicher Weise wie für die freie Oberfläche kann eine Evolutionsgleichung für die CTS hergeleitet werden. Hierzu wird die Massenbilanz (5.5) von der Basis bis zur CTS integriert, dies ergibt

$$\begin{aligned} v_{z,m} - v_{z,b} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{z_m} v_x dz' + v_{x,m} \frac{\partial z_m}{\partial x} - v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^{z_m} v_y dz' + v_{y,m} \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.112)$$

wobei wiederum die Leibniz-Regel verwendet wurde. Mit den kinematischen Bedingungen (5.70) für die Basis und (5.79) für die CTS erhält man

$$\frac{\partial(z_m - b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{z_m} v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^{z_m} v_y dz' + a_m^\perp - [\omega] \dot{m}_b^w. \quad (5.113)$$

Die Interpretation dieses Ergebnisses ist dieselbe wie im Falle der freien Oberfläche, jedoch ist der Volumenfluß durch die CTS a_m^\perp als innere Variable keine Inputgröße, so daß diese Gleichung zur Bestimmung der Evolution der CTS-Position zunächst nicht geeignet ist.

5.3.5 Evolution der Eisbasis bzw. Lithosphärenoberseite

Hierfür ist keine weitere Rechnung vonnöten, sondern (5.33) kann direkt übernommen werden:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{T}_r} [b - (b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H)]. \quad (5.114)$$

5.3.6 Temperatur und Wassergehalt

Wie bereits erwähnt müssen die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Gleichungen zur Berechnung des Temperatur- und Wassergehaltfeldes numerisch gelöst werden. Der Vollständigkeit halber seien sie an dieser Stelle mit ihren zugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen noch einmal aufgeführt, wobei die Wassergehaltsgleichung und die CTS-Übergangsbedingung mit Hilfe des hydrostatischen Druckfeldes noch etwas vereinfacht werden können. Die Temperaturgleichung für den kalten Bereich (5.13) lautet

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2 \frac{\alpha}{c} \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma^2. \quad (5.115)$$

Im temperierten Bereich ist die Temperatur durch den Druck eindeutig bestimmt; mit (5.28) und (5.95) erhält man

$$\theta = \theta_M = -\mathcal{B}(h(x, y, t) - z). \quad (5.116)$$

Somit gilt

$$\frac{\partial \theta_M}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_M}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta_M}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta_M}{\partial z} = -\mathcal{B} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z \right) \quad (5.117)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) = \mathcal{B} \frac{\partial \kappa}{\partial z} = \mathcal{B}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}; \quad (5.118)$$

es ergibt sich für die Wassergehaltsgleichung im temperierten Bereich (5.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\mathcal{D} \alpha_t}{\alpha} \mathcal{B}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \\ &+ \frac{c \alpha_t}{\alpha} \mathcal{B} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z \right) + 2 \alpha_t \mathcal{K} E A_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.119)$$

wobei für die effektive Schubspannung σ gemäß (5.98)

$$\sigma = (h - z) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} \quad (5.120)$$

gilt. Die Temperaturgleichung für die Lithosphäre (5.32) lautet mit (5.34) – (5.36)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_r \kappa_r}{c_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (5.121)$$

An der kalten freien Oberfläche ist die Temperatur vorgeschrieben (Gl. (5.47), Randbedingung vom Dirichlet-Typ):

$$\theta = \theta_s(x, y, t); \quad (5.122)$$

im unwahrscheinlichen Fall einer temperierten freien Oberfläche wird statt dessen der Wassergehalt ω oder dessen Normalableitung als Randbedingung verwendet. Für eine kalte Eisbasis gelten (5.67) und (5.68):

$$\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \frac{\partial \theta^+}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\mathcal{D}} [(v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}], \quad (5.123)$$

$$\theta = \theta^+, \quad (5.124)$$

und beim Vorliegen einer temperierten Basis kommen (5.72), (5.74), (5.75) zur Anwendung:

$$\mathcal{D}_t \frac{\partial \omega}{\partial z} = (1 - [\omega] \omega) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \quad (5.125)$$

$$\theta = \theta^+ = \theta_M, \quad (5.126)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{\mathcal{D} \alpha_t}{\alpha} \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\mathcal{D} \alpha_t}{\alpha} \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \frac{\partial \theta^+}{\partial z} + \alpha_t ((v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}). \quad (5.127)$$

Gleichung (5.125) wird allerdings nur benötigt, wenn der temperierten Basis eine temperierte Eisschicht nichtverschwindender Dicke überlagert ist. In diesem Fall kann (5.127) noch vereinfacht werden, da dann wegen (5.116) $\partial \theta / \partial z = \mathcal{B}$ gilt. Für den Fall einer temperierten Basis, die von kaltem Eis überlagert ist, ist dies natürlich nicht möglich.

An der Lithosphärenunterseite gilt (5.77):

$$\kappa_r \frac{\partial \theta^-}{\partial z} = -\mathcal{N}_r Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (5.128)$$

Es verbleiben noch die Übergangsbedingungen an der CTS (5.83), (5.89), (5.91) und (5.93):

$$\theta^+ = \theta^- = \theta_M. \quad (5.129)$$

i) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0$ (Schmelzbedingung):

$$\omega^- = 0, \quad (5.130)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial z} = \mathcal{B}. \quad (5.131)$$

ii) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0$ (Gefrierbedingung):

$$\mathcal{D}\kappa \left(\frac{\partial \theta^+}{\partial z} - \mathcal{B} \right) - \frac{\alpha}{\alpha_t} \mathcal{D}_t \frac{\partial \omega^-}{\partial z} = \frac{\alpha}{\alpha_t} \omega^- a_m^\perp. \quad (5.132)$$

Hierfür wurde $\partial \theta_M^- / \partial z = \mathcal{B}$ verwendet.

iii) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) = 0$ (Grenzfall):

$$\omega^- \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad (5.133)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial z} = \mathcal{B}. \quad (5.134)$$

Abschließend sei auf einige Beschränkungen der SIA-Näherung hingewiesen. Zunächst schließt diese Skalierung geschlossene CTS-Linien aus, da sie nur flache CTS-Linien erlaubt. Einschlüsse von temperiertem Eis in einer Umgebung von kaltem Eis sind also nicht erfaßt, sondern nur solche temperierten Bereiche, die bis zur Eisbasis reichen. Das ist aber der weitaus wichtigste Fall. Weiterhin ergibt die SIA Singularitäten an Eisrändern und an Eisdomen (Maxima der Eishöhe über Normal Null). Hutter [31] weist darauf hin, daß unter der Voraussetzung einer beschränkten basalen Gleitfunktion $C_{(t)}$ die Eishöhe an seitlichen Begrenzungen in Form einer Wurzelfunktion gegen Null strebt und somit am Rand eine vertikale Tangente aufweist, was im Widerspruch zur Flachheitsannahme steht. Für Eisdome erhält man bei Verwendung einer pseudoplastischen Kriechfunktion $f_{(t)}(\sigma) = \sigma^{n-1}$ mit $n > 1$, wie sie üblicherweise angesetzt wird (vgl. §5.5), eine unendliche Krümmung der Eisoberfläche, was mit

der gegen unendlich strebenden Viskosität einer solchen Kriechfunktion bei kleinen Spannungen bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten zusammenhängt (Hutter, Yakowitz & Szidarovszky [33]). Diese Ergebnisse sind für den Fall eines reinen Kalteismodells hergeleitet, jedoch auf die SIA für polytherme Eisschilde übertragbar. Weiterhin ist bei Eisdomen die SIA-Annahme, daß die auftretenden Vertikalgeschwindigkeiten von der Ordnung Aspektverhältnis \times Horizontalgeschwindigkeit sind, nicht mehr realistisch, da dort die SIA-Approximation ein rein vertikales Geschwindigkeitsfeld ergibt; vgl. Gleichungen (5.107), (5.108) und (5.109). Eine strenge Behandlung müßte daher in der Nähe von Eisdomen und seitlichen Rändern die SIA aufgeben. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, daß eine numerische Lösung des Modells mit diskreten Gitterpunkten diese lokalen Singularitäten ausreichend verschmiert, so daß sich der verbleibende Fehler in vertretbaren Grenzen hält.

5.4 Zusammenstellung in dimensionsbehafteter Form

Der Übersichtlichkeit und besseren Anschaulichkeit halber sollen an dieser Stelle die in Abschnitt 5.3 hergeleiteten teilintegrierten polythermen SIA-Gleichungen in *dimensionsbehafteter* Form aufgeführt werden. Diese lassen sich leicht aus den dimensionslosen Gleichungen gewinnen, indem alle typischen Werte $[\cdot]$ auf 1 gesetzt werden (vgl. Abschnitt 5.1).

Spannungen:

$$p = \rho g(h - z), \quad (5.135)$$

$$\sigma_{xz} = -\rho g(h - z) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.136)$$

$$\sigma_{yz} = -\rho g(h - z) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.137)$$

$$\sigma = \rho g(h - z) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \quad (5.138)$$

Geschwindigkeit:

$$v_x = -\rho g(h - b) C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial x} - 2\rho g \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz', \quad (5.139)$$

$$v_y = -\rho g(h - b) C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial y} - 2\rho g \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz', \quad (5.140)$$

$$v_z = -\int_b^z \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + \frac{\partial b}{\partial t} + v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} + v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (5.141)$$

Entwicklung der freien Oberfläche:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(h-b)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + a_s^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \quad (5.142)$$

mit dem neu eingeführten Massenfluß \mathbf{q} , definiert als

$$(q_x, q_y) := \int_b^h (v_x, v_y) dz'. \quad (5.143)$$

Entwicklung der CTS:

$$\frac{\partial(z_m - b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{z_m} v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^{z_m} v_y dz' + a_m^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \quad (5.144)$$

Entwicklung der Eisbasis bzw. Lithosphärenoberseite:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V} [b - (b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H)]. \quad (5.145)$$

Temperatur und Wassergehalt:

Temperaturgleichung, kalter Bereich:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{2}{\rho c} EA(T') f(\sigma) \sigma^2. \quad (5.146)$$

Temperatur, temperierter Bereich:

$$T = T_M = T_0 - \beta(h - z). \quad (5.147)$$

Wassergehaltsgleichung, temperierter Bereich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \\ + \frac{c\beta}{L} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z \right) &+ \frac{2}{\rho L} EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2 - \frac{1}{\rho} D(\omega). \end{aligned} \quad (5.148)$$

Hier wurde ein zusätzlicher Term $-D(\omega)/\rho$ eingeführt; $D(\omega)$ ist die *Wasserdrainage-Funktion*, die einer negativen volumenmäßigen Wasserproduktion entspricht und einen einfachen ad-hoc-Ansatz der Beschreibung der Wasserdrainage aus den temperierten Eisbereichen in den Boden hinein darstellt. Dies ist notwendig, da, wie sich bei vorläufigen numerischen Rechnungen ohne Drainage gezeigt hat, ansonsten unrealistische und sogar unphysikalische ($\omega > 100\%$) Werte für den Wassergehalt resultieren können. Es wird in Kauf genommen, daß dieses ‘‘Wegbeamten’’ von Wasser aus dem Eisinnern eine Verletzung der lokalen Massenbilanz darstellt. Realistischere Drainage-Mechanismen, die auf dem Zusammenspiel von Schwerkraft und Wechselwirkungskräften zwischen Wasser und Eis beruhen, würden ein noch komplizierteres

Modell mit zwei getrennten Impulsbilanzen für Wasser und Eis erforderlich machen, was hier nicht verfolgt werden soll (vgl. Bauer [3], Wu [70, 71]).

Temperaturgleichung, Lithosphäre:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5.149)$$

Kalte freie Oberfläche:

$$T = T_s(x, y, t). \quad (5.150)$$

Kalte Eisbasis:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T^+}{\partial z} = -(v_{sl})_x \sigma_{xz} - (v_{sl})_y \sigma_{yz}, \quad (5.151)$$

$$T = T^+. \quad (5.152)$$

Temperierte Eisbasis (keine temperierte Schicht darüber):

$$T = T^+ = T_M, \quad (5.153)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa \frac{\partial T}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T^+}{\partial z} + ((v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}) \right\}. \quad (5.154)$$

Temperierte Eisbasis (von temperierter Schicht überlagert):

$$\nu \frac{\partial \omega}{\partial z} = (1 - \omega) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \quad (5.155)$$

$$T = T^+ = T_M, \quad (5.156)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa \beta - \kappa_r \frac{\partial T^+}{\partial z} + ((v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}) \right\}. \quad (5.157)$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal bemerkt, daß im Falle vernachlässigbarer Wasserdiffusivität ν der im allgemeinen vorzugebende Wasser-Massenstrom in den Boden \dot{m}_b^w via (3.48) durch die basale Schmelzrate \mathcal{P}_b^w ausgedrückt werden kann. Da der Wassergehalt im temperierten Eis als klein angenommen wird (vgl. auch (5.173)), gilt folglich $\dot{m}_b^w \approx \mathcal{P}_b^w$.

Lithosphärenunterseite:

$$\kappa_r \frac{\partial T^-}{\partial z} = -Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (5.158)$$

Übergangsbedingungen, CTS:

$$T^+ = T^- = T_M. \quad (5.159)$$

i) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0$ (Schmelzbedingung):

$$\omega^- = 0, \quad (5.160)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = \beta. \quad (5.161)$$

ii) $-(w_x - v_{w,x})\frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y})\frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0$ (Gefrierbedingung):

$$\kappa \left(\frac{\partial T^+}{\partial z} - \beta \right) - L\nu \frac{\partial \omega^-}{\partial z} = L\rho\omega^- a_m^\perp. \quad (5.162)$$

iii) $-(w_x - v_{w,x})\frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y})\frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) = 0$ (Grenzfall):

$$\omega^- \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad (5.163)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = \beta. \quad (5.164)$$

Es sei daran erinnert (vgl. §3.2.5), daß die im allgemeinen Fall aufwendige Unterscheidung nach Schmelz- bzw. Gefrierbedingungen im Falle vernachlässigbarer Wasserdiffusion einfach nach dem Vorzeichen des Volumenflusses durch die CTS, a_m^\perp , erfolgt.

5.5 Spezifizierung physikalischer Größen

Die im vorigen Abschnitt zusammengestellten Gleichungen des polythermen SIA-Eismodells enthalten eine Reihe von noch unbestimmten physikalischen Größen. Diese sollen hier spezifiziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden im einzelnen verwendet:

Kriechfunktion für kaltes und temperiertes Eis:

Glen'sches Fließgesetz (vgl. Glen [19], Nye [57], Hooke [26], Paterson [62])

$$f(\sigma) = f_t(\sigma) = \sigma^{n-1} \quad \text{mit} \quad n = 3. \quad (5.165)$$

Rate-Faktor für kaltes Eis: Arrhenius-Gesetz (genaue Form nach Paterson [62])

$$A(T') = A_0 e^{-Q/R(T_0+T')}, \quad (5.166)$$

mit der Aktivierungsenergie Q

$$\begin{aligned} Q &= 60 \text{ kJ mol}^{-1} & (T' < -10^\circ\text{C}), \\ Q &= 139 \text{ kJ mol}^{-1} & (T' \geq -10^\circ\text{C}), \end{aligned} \quad (5.167)$$

der universellen Gaskonstanten R , und als verbindendem Wert für die beiden Temperaturbereiche

$$A(T' = -10^\circ\text{C}) = 5.2 \cdot 10^{-25} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}. \quad (5.168)$$

Rate-Faktor für temperiertes Eis: Hierfür kann nach Lliboutry & Duval [50]

$$A_t(\omega) = A(T' = 0^\circ\text{C}) (1 + 184\omega) \quad (5.169)$$

angesetzt werden.

Gleitgesetz für kalte Basis: Haftbedingung

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = \mathbf{v}_b = \mathbf{0}; \quad (5.170)$$

Gleitgesetz für temperierte Basis: Gleitgesetz vom Weertman-Typ

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = \mathbf{v}_b = -\frac{C_{\text{sl}}}{\rho g} \frac{\|\mathbf{t}_{\parallel}\|^p}{(\rho g H)^q} \frac{\mathbf{t}_{\parallel}}{\|\mathbf{t}_{\parallel}\|} \quad \text{mit } p = 3, q = 2, \quad (5.171)$$

woraus

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = \mathbf{v}_b = -C_{\text{sl}} H \|\text{grad } h\|^2 \text{grad } h \quad (5.172)$$

gemäß Calov [12] folgt; in dieser Arbeit wird für den Gleitkoeffizienten $C_{\text{sl}} = 6 \cdot 10^4 \text{ a}^{-1}$ angegeben.

Wasserdrainage-Funktion:

Dies ist sehr problematisch, da darüber keine Messungen vorhanden sind. Es ist zu erwarten, daß das temperierte Eis eine bestimmte Menge an Wasser aufnehmen kann, während überschüssiges Wasser nach unten abläuft. Dies wird dadurch modelliert, daß bis zu einem Schwellwert ω_{max} keine Drainage stattfindet, wohingegen darüberhinaus vorhandenes Wasser instantan verschwindet:

$$D(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \leq \omega_{\text{max}} \\ \infty & \omega > \omega_{\text{max}} \end{cases} \quad (\text{mit } \omega_{\text{max}} = 1\%). \quad (5.173)$$

Diese sehr einfache Parameterisierung hat hinsichtlich des spärlichen Datenmaterials über den Wassergehalt in temperiertem Gletschereis den Vorteil, daß nur ein Parameter vorhanden ist. Die Wahl dieses Parameters ω_{max} entspricht dem experimentell validierten Gültigkeitsbereich des Rate-Faktors für temperiertes Eis (5.169), vgl. Lliboutry & Duval [50].

Sonstige Größen sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

Größe	Wert
Dichte von Eis ρ	910 kg m^{-3}
Wärmeleitfähigkeit von Eis κ	$9.828 e^{-0.0057 T[K]} \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$
Spezifische Wärme von Eis c	$(2127.5 + 7.253 T[^\circ\text{C}]) \text{ J kg}^{-1}\text{K}^{-1}$
Latente Wärme von Eis L	335 kJ kg^{-1}
Clausius-Clapeyron-Gradient β	$8.7 \cdot 10^{-4} \text{ K m}^{-1}$
Wasser-Diffusivität ν	0
Dichte \times spez. Wärme der Lithosphäre $\rho_r c_r$	$2000 \text{ kJ m}^{-3}\text{K}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit der Lithosphäre κ_r	$3 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$
Dicke der Lithosphäre H_r	5 km
Verzögerungszeit der Lithosphäre τ_V	3000 a
Dichte der Asthenosphäre ρ_a	3300 kg m^{-3}
Schwerebeschleunigung g	9.81 m s^{-2}
Universelle Gaskonstante R	$8.314 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$

Tabelle 5.1: Zusammenstellung der im Modell verwendeten physikalischen Größen. Referenzen: ρ , β : Calov [12], τ_V , ρ_a : Abe-Ouchi [1], κ , c , $\rho_r c_r$, κ_r : Ritz [65], L : Blatter [6].

6 Numerische Lösung der polythermen SIA-Gleichungen

6.1 σ -Transformation und Transformationsregeln

Um zu gewährleisten, daß die freie Oberfläche, die CTS (sofern vorhanden), die Lithosphärenoberseite sowie deren Unterseite stets mit Gitterpunkten des numerischen Gitters zusammenfallen, werden die Gleichungen von §5.4 zunächst der σ -Transformation unterworfen. Hierbei werden die drei Bereiche kaltes Eis, temperiertes Eis und Lithosphäre jeder für sich in vertikaler Richtung auf das Einheitsintervall $[0,1]$ abgebildet. Für den Kalteisbereich wird eine zusätzliche exponentielle Streckung durchgeführt, die bewirkt, daß ein äquidistantes Gitter im Raum der σ -Koordinaten sich nach unten verdichtende Gitterpunkte im physikalischen Raum nach sich zieht (Abbildung 6.1). Dies ist notwendig, um den Temperaturgradienten an der Unterseite des Kalteisbereiches sehr genau bestimmen zu können, was für die Bestimmung der Position einer eventuell auftretenden CTS essentiell ist.

Die σ -Transformation mit exponentieller Streckung für den Kalteisbereich lautet

$$x = \xi_c, \quad y = \eta_c, \quad \frac{z - z_m}{H_c} = \frac{e^{a\zeta_c} - 1}{e^a - 1} =: \mathcal{E}(\zeta_c), \quad t = \tau_c, \quad (6.1)$$

wobei a den Streckparameter darstellt (in den Simulationen dieser Arbeit wird stets $a = 5$ verwendet), und die Indices “ c ” Variablen für den Bereich kalten Eises markieren. Für den Bereich temperierten Eises und die Lithosphäre wird eine lineare σ -Transformation durchgeführt:

$$x = \xi_t, \quad y = \eta_t, \quad \frac{z - b}{H_t} = \zeta_t, \quad t = \tau_t, \quad (6.2)$$

und

$$x = \xi_r, \quad y = \eta_r, \quad \frac{z - b_r}{H_r} = \zeta_r, \quad t = \tau_r; \quad (6.3)$$

die Indices “ t ” bzw. “ r ” beziehen sich auf das temperierte Eis bzw. die Lithosphäre.

Zur Formulierung der Modellgleichungen in diesen Koordinaten benötigt man die Transformationsregeln von Ableitungen und vertikalen Integralen. Diese können aus der Kettenregel der Differentiation und der Substitutionsregel der Integration gewonnen werden. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$(m, \mu_{c,t,r}) \in \{(x, \xi_{c,t,r}), (y, \eta_{c,t,r}), (t, \tau_{c,t,r})\}$$

folgt für den Bereich kalten Eises

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu_c} + \frac{\partial \zeta_c}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_c}$$

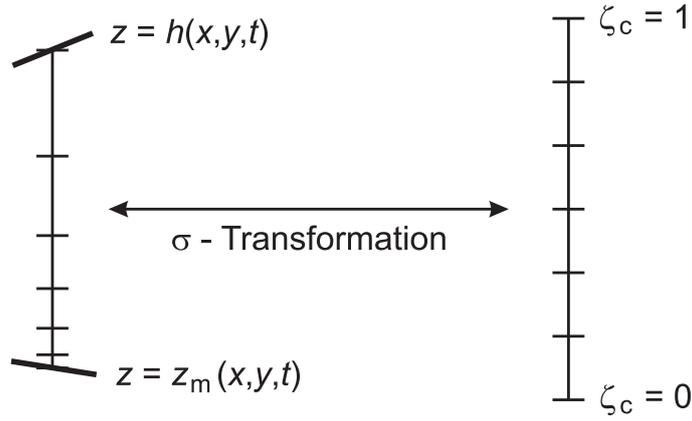


Abbildung 6.1: Wirkung der σ -Transformation für den Kalteisbereich (mit exponentieller Streckung) auf eine vertikale Säule des Rechengebietes.

$$= \frac{\partial}{\partial \mu_c} - \frac{1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial m} + (e^{a \zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_c}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_c}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_c} = \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a \zeta_c}} \frac{\partial}{\partial \zeta_c}, \quad (6.5)$$

$$\int(\cdot) dz' = \int(\cdot) \frac{H_c a e^{a \zeta_c'}}{e^a - 1} d\zeta_c', \quad (6.6)$$

für den Bereich temperierten Eises

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu_t} + \frac{\partial \zeta_t}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_t} = \frac{\partial}{\partial \mu_t} - \frac{1}{H_t} \left(\frac{\partial b}{\partial m} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_t}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_t}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_t} = \frac{1}{H_t} \frac{\partial}{\partial \zeta_t}, \quad (6.8)$$

$$\int(\cdot) dz' = \int(\cdot) H_t d\zeta_t', \quad (6.9)$$

und schließlich für die Lithosphäre

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} + \frac{\partial \zeta_r}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} - \frac{1}{H_r} \left(\frac{\partial b_r}{\partial m} + \zeta_r \frac{\partial H_r}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_r}, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} = \frac{1}{H_r} \frac{\partial}{\partial \zeta_r}, \quad (6.11)$$

$$\int(\cdot) dz' = \int(\cdot) H_r d\zeta_r'. \quad (6.12)$$

6.2 Transformierte Modellgleichungen

Mit Hilfe der oben formulierten Transformationsregeln können nun die in §5.4 zusammengestellten polythermen SIA-Gleichungen auf σ -Koordinaten transformiert werden. Hierfür ist zu beachten, daß Vektoren und Tensoren wie \mathbf{v} und \mathbf{T} bei der

Transformation des Modells nicht in den Einheitsvektoren des krummlinigen, nicht-orthogonalen σ -Koordinatensystems dargestellt werden; statt dessen werden die kartesischen Komponenten der Vektoren und Tensoren bei der Transformation wie skalare Größen betrachtet. Weiterhin werden die Abhängigkeiten der Wärmeleitfähigkeit von Eis κ und der spezifischen Wärme von Eis c von der Temperatur T (vgl. Tabelle 5.1) explizit aufgeführt. Bei nicht von z abhängigen Größen wie etwa h , b ergibt die Transformation von Ableitungen gemäß dem letzten Abschnitt keine Zusatzterme (z. B. gilt $(\partial h/\partial x) = (\partial h/\partial \xi_c)$); solche Terme werden der Einfachheit halber weiterhin mit kartesischen Koordinaten geschrieben.

Spannungen, kalter Bereich:

$$p_c = \rho g H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)), \quad (6.13)$$

$$\sigma_{xz,c} = -\rho g H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (6.14)$$

$$\sigma_{yz,c} = -\rho g H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (6.15)$$

$$\sigma_c = \rho g H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \quad (6.16)$$

Spannungen, temperierter Bereich:

$$p_t = \rho g (H_c + H_t (1 - \zeta_t)), \quad (6.17)$$

$$\sigma_{xz,t} = -\rho g (H_c + H_t (1 - \zeta_t)) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (6.18)$$

$$\sigma_{yz,t} = -\rho g (H_c + H_t (1 - \zeta_t)) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (6.19)$$

$$\sigma_t = \rho g (H_c + H_t (1 - \zeta_t)) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \quad (6.20)$$

Geschwindigkeit, temperierter Bereich:

$$\begin{aligned} v_{x,t} &= -\rho g H C_t \frac{\partial h}{\partial x} \\ &\quad - 2(\rho g)^3 \|\text{grad } h\|^2 \frac{\partial h}{\partial x} H_t \int_0^{\zeta_t} E A_t(\omega_t) (H_c + H_t (1 - \zeta'_t))^3 d\zeta'_t, \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} v_{y,t} &= -\rho g H C_t \frac{\partial h}{\partial y} \\ &\quad - 2(\rho g)^3 \|\text{grad } h\|^2 \frac{\partial h}{\partial y} H_t \int_0^{\zeta_t} E A_t(\omega_t) (H_c + H_t (1 - \zeta'_t))^3 d\zeta'_t, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$v_{z,t} = - \int_0^{\zeta_t} \left\{ H_t \left(\frac{\partial v_{x,t}}{\partial \xi_t} + \frac{\partial v_{y,t}}{\partial \eta_t} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \zeta'_t \frac{\partial H_t}{\partial x} \right) \frac{\partial v_{x,t}}{\partial \zeta'_t} - \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \zeta'_t \frac{\partial H_t}{\partial y} \right) \frac{\partial v_{y,t}}{\partial \zeta'_t} \Big\} d\zeta'_t \\
& + \frac{\partial b}{\partial t} + v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} + v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Geschwindigkeit, kalter Bereich:

$$\begin{aligned}
v_{x,c} &= v_x(z_m) - 2(\rho g)^3 \|\text{grad } h\|^2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{H_c^4 a}{e^a - 1} \times \\
& \int_0^{\zeta_c} EA(T'_c) (1 - \mathcal{E}(\zeta'_c))^3 e^{a\zeta'_c} d\zeta'_c,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

$$\begin{aligned}
v_{y,c} &= v_y(z_m) - 2(\rho g)^3 \|\text{grad } h\|^2 \frac{\partial h}{\partial y} \frac{H_c^4 a}{e^a - 1} \times \\
& \int_0^{\zeta_c} EA(T'_c) (1 - \mathcal{E}(\zeta'_c))^3 e^{a\zeta'_c} d\zeta'_c,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,c} &= v_z(z_m) - \int_0^{\zeta_c} \left\{ \frac{H_c a e^{a\zeta'_c}}{e^a - 1} \left(\frac{\partial v_{x,c}}{\partial \xi_c} + \frac{\partial v_{y,c}}{\partial \eta_c} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial z_m}{\partial x} + \mathcal{E}(\zeta'_c) \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \frac{\partial v_{x,c}}{\partial \zeta'_c} - \left(\frac{\partial z_m}{\partial y} + \mathcal{E}(\zeta'_c) \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \frac{\partial v_{y,c}}{\partial \zeta'_c} \right\} d\zeta'_c.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Entwicklung der freien Oberfläche:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(h-b)}{\partial t} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + a_s^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}, \tag{6.27}$$

mit

$$(q_x, q_y) = H_t \int_0^1 (v_{x,t}, v_{y,t}) d\zeta'_t + \frac{H_c a}{e^a - 1} \int_0^1 (v_{x,c}, v_{y,c}) e^{a\zeta'_c} d\zeta'_c. \tag{6.28}$$

Entwicklung der CTS:

$$\frac{\partial H_t}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(H_t \int_0^1 v_{x,t} d\zeta'_t \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(H_t \int_0^1 v_{y,t} d\zeta'_t \right) + a_m^\perp - \frac{\dot{m}_b^w}{\rho}. \tag{6.29}$$

Entwicklung der Eisbasis bzw. Lithosphärenoberseite:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V} [b - (b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H)]. \tag{6.30}$$

Temperatur und Wassergehalt:

Temperaturgleichung, kalter Bereich:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_c}{\partial \tau_c} + v_{x,c} \frac{\partial T_c}{\partial \xi_c} + v_{y,c} \frac{\partial T_c}{\partial \eta_c} \\
& + \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} \left\{ \frac{v_{z,c}}{H_c a e^{a\zeta_c}} (e^a - 1) - \frac{1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial t} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial t} \right) \right. \\
& \left. - \frac{v_{x,c}}{H_c a e^{a\zeta_c}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial x} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial x} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{v_{y,c}}{H_c a e^{a\zeta_c}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (e^{a\zeta_c} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial y} \right) \Big\} \\
& = \frac{e^a - 1}{\rho c(T_c) H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial}{\partial \zeta_c} \left(\kappa(T_c) \frac{e^a - 1}{H_c a e^{a\zeta_c}} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} \right) \\
& + 2 \frac{g}{c(T_c)} (\rho g)^3 E A(T'_c) H_c^4 (1 - \mathcal{E}(\zeta_c))^4 \|\text{grad } h\|^4. \tag{6.31}
\end{aligned}$$

Schmelztemperatur, kalter Bereich:

$$T_{M,c} = T_0 - \beta H_c (1 - \mathcal{E}(\zeta_c)). \tag{6.32}$$

Temperatur, temperierter Bereich:

$$T_t = T_{M,t} = T_0 - \beta (H_c + H_t (1 - \zeta_t)). \tag{6.33}$$

Wassergehaltsgleichung, temperierter Bereich:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \omega_t}{\partial \tau_t} + v_{x,t} \frac{\partial \omega_t}{\partial \xi_t} + v_{y,t} \frac{\partial \omega_t}{\partial \eta_t} \\
& + \frac{\partial \omega_t}{\partial \zeta_t} \left\{ \frac{v_{z,t}}{H_t} - \frac{1}{H_t} \left(\frac{\partial b}{\partial t} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial t} \right) - \frac{v_{x,t}}{H_t} \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial x} \right) - \frac{v_{y,t}}{H_t} \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \zeta_t \frac{\partial H_t}{\partial y} \right) \right\} \\
& = \frac{\nu}{\rho H_t^2} \frac{\partial^2 \omega_t}{\partial \zeta_t^2} + 2 \frac{g}{L} (\rho g)^3 E A_t(\omega_t) (H_c + H_t (1 - \zeta_t))^4 \|\text{grad } h\|^4 \\
& + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa}{\partial T}(T_{M,t}) + \frac{c(T_{M,t})\beta}{L} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + v_{x,t} \frac{\partial h}{\partial x} + v_{y,t} \frac{\partial h}{\partial y} - v_{z,t} \right) - \frac{D(\omega_t)}{\rho}. \tag{6.34}
\end{aligned}$$

Temperaturgleichung, Lithosphäre:

$$\frac{\partial T_r}{\partial \tau_r} + \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} \left\{ \frac{1}{H_r} \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{H_r} \left(\frac{\partial b_r}{\partial t} + \zeta_r \frac{\partial H_r}{\partial t} \right) \right\} = \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r H_r^2} \frac{\partial^2 T_r}{\partial \zeta_r^2}. \tag{6.35}$$

Kalte freie Oberfläche:

$$T_c = T_s(x, y, t). \tag{6.36}$$

Kalte Eisbasis:

$$T_c = T_r, \tag{6.37}$$

$$\kappa(T_c) \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} - \frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} = (v_{sl})_x \rho g H_c \frac{\partial h}{\partial x} + (v_{sl})_y \rho g H_c \frac{\partial h}{\partial y}. \tag{6.38}$$

Temperierte Eisbasis (keine temperierte Schicht darüber):

$$T_c = T_r = T_{M,c}, \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa(T_c) \frac{e^a - 1}{H_c a} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} - \frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} \right. \\
\left. - (v_{sl})_x \rho g H_c \frac{\partial h}{\partial x} - (v_{sl})_y \rho g H_c \frac{\partial h}{\partial y} \right\}. \tag{6.40}
\end{aligned}$$

Temperierte Eisbasis (von temperierter Schicht überlagert):

$$T_t = T_r = T_{M,t}, \quad (6.41)$$

$$\frac{\nu}{H_t} \frac{\partial \omega_t}{\partial \zeta_t} = (1 - \omega_t) \dot{m}_b^w - \mathcal{P}_b^w, \quad (6.42)$$

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} \left\{ \kappa(T_t) \beta - \frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} - (v_{sl})_x \rho g H \frac{\partial h}{\partial x} - (v_{sl})_y \rho g H \frac{\partial h}{\partial y} \right\}. \quad (6.43)$$

Lithosphärenunterseite:

$$\frac{\kappa_r}{H_r} \frac{\partial T_r}{\partial \zeta_r} = -Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (6.44)$$

Übergangsbedingungen, CTS:

$$T_c = T_t = T_{M,t}. \quad (6.45)$$

i) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0$ (Schmelzbedingung):

$$\omega_t = 0, \quad (6.46)$$

$$\frac{e^a - 1}{H_{ca}} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} = \beta. \quad (6.47)$$

ii) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0$ (Gefrierbedingung):

$$\kappa(T_c) \left(\frac{e^a - 1}{H_{ca}} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} - \beta \right) - \frac{L\nu}{H_t} \frac{\partial \omega_t}{\partial \zeta_t} = L\rho\omega_t a_m^\perp. \quad (6.48)$$

iii) $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) = 0$ (Grenzfall):

$$\omega_t \geq 0 \quad (\text{unbestimmt}), \quad (6.49)$$

$$\frac{e^a - 1}{H_{ca}} \frac{\partial T_c}{\partial \zeta_c} = \beta. \quad (6.50)$$

Dieser Fall ist bei numerischen Berechnungen nicht von Bedeutung, da exakte Gleichheit beim Rechnen mit Gleitkommazahlen nicht auftritt. Er wird daher im folgenden nicht mehr betrachtet.

6.3 Das numerische Gitter

Zur numerischen Lösung der auf σ -Koordinaten transformierten Modellgleichungen des vorigen Abschnitts mit einem Finite-Differenzen-Verfahren wird zunächst ein numerisches Gitter eingeführt. Dieses wird im Raum der σ -Koordinaten äquidistant

gewählt; die Diskretisierung des Raumes und der Zeit ist daher

$$\begin{aligned}
x(i) = \xi_c(i) = \xi_t(i) = \xi_r(i) &= x_0 + i \Delta x \quad (i = 0 \dots i_{\max}), \\
y(j) = \eta_c(j) = \eta_t(j) = \eta_r(j) &= y_0 + j \Delta y \quad (j = 0 \dots j_{\max}), \\
\zeta_c(k_c) &= k_c/k_{c,\max} \quad (k_c = 0 \dots k_{c,\max}), \\
\zeta_t(k_t) &= k_t/k_{t,\max} \quad (k_t = 0 \dots k_{t,\max}), \\
\zeta_r(k_r) &= k_r/k_{r,\max} \quad (k_r = 0 \dots k_{r,\max}), \\
t(n) = \tau_c(n) = \tau_t(n) = \tau_r(n) &= t_0 + n \Delta t \quad (n = 0 \dots n_{\max}), \\
t(\tilde{n}) = \tau_c(\tilde{n}) = \tau_t(\tilde{n}) = \tau_r(\tilde{n}) &= t_0 + \tilde{n} \widetilde{\Delta t} \quad (\tilde{n} = 0 \dots \tilde{n}_{\max}).
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Hierbei bedeuten Δx und Δy die Auflösungen in der Horizontalen; die Vertikalaufösungen für die drei Bereiche kaltes Eis, temperiertes Eis und Lithosphäre sind $\Delta \zeta_{c,t,r} = 1/k_{c,t,r,\max}$. Zwei verschiedene Zeitschrittweiten, nämlich Δt und $\widetilde{\Delta t}$, treten auf, wobei $\widetilde{\Delta t}$ ein ganzzahliges Vielfaches von Δt ist. Diese unterschiedlichen Zeitschrittweiten werden verwendet, weil die Berechnung der Temperatur, des Wassergehaltes, des Eisalters und die Positionierung der CTS mit dem größeren $\widetilde{\Delta t}$ durchgeführt werden, alle übrigen Berechnungen jedoch mit dem kleineren Δt . Dies dient dazu, Rechenzeit bei den Simulationen einzusparen, welche bei 3-d-Strömungsproblemen stets ein kritischer Punkt ist.

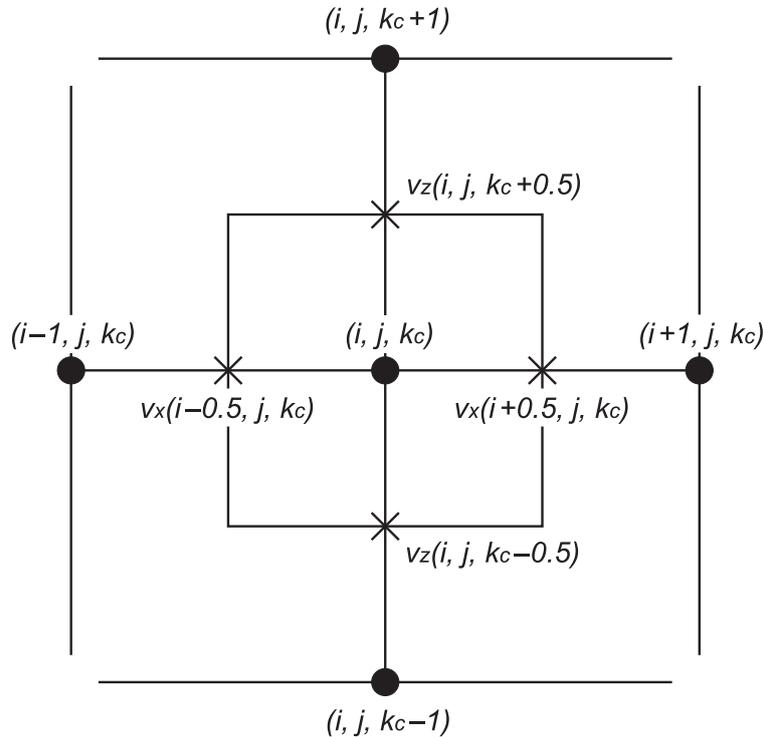


Abbildung 6.2: Vertikalschnitt durch den Kalteisbereich des Rechengebietes. Die Geschwindigkeiten sind zwischen den Gitterpunkten definiert (Staggered Grid).

Zwecks besserer numerischer Stabilität und Uniformität in der Approximation wird ein Staggered Grid (gestaffeltes Gitter) verwendet, wobei die drei Komponenten der Geschwindigkeit \mathbf{v} im kalten bzw. temperierten Eisbereich, die zwei Komponenten des Massenflusses \mathbf{q} sowie die jeweils zwei Komponenten der Gradienten von h , z_m , b , b_r , H_c , H_t und H_r nicht auf, sondern zwischen benachbarten Gitterpunkten der betreffenden Richtung berechnet werden (vgl. auch Abbildung 6.2):

$$\begin{aligned} &v_{x,c}(i \pm \frac{1}{2}, j, k_c, n), v_{y,c}(i, j \pm \frac{1}{2}, k_c, n), v_{z,c}(i, j, k_c \pm \frac{1}{2}, n), \\ &v_{x,t}(i \pm \frac{1}{2}, j, k_t, n), v_{y,t}(i, j \pm \frac{1}{2}, k_t, n), v_{z,t}(i, j, k_t \pm \frac{1}{2}, n), \\ &q_x(i \pm \frac{1}{2}, j, n), q_y(i, j \pm \frac{1}{2}, n), \\ &\frac{\partial h, z_m, b, b_r, H_c, H_t, H_r}{\partial x}(i \pm \frac{1}{2}, j, n), \frac{\partial h, z_m, b, b_r, H_c, H_t, H_r}{\partial y}(i, j \pm \frac{1}{2}, n). \end{aligned}$$

Alle übrigen Größen sind auf den Gitterpunkten selbst definiert, z. B. die Temperatur im kalten Eis $T_c(i, j, k_c, \tilde{n})$, oder der Wassergehalt im temperierten Bereich $\omega_t(i, j, k_t, \tilde{n})$. Zuweilen werden jedoch bei der numerischen Lösung Größen an Stellen benötigt, wo sie eigentlich nicht definiert sind; in diesem Fall wird lineare Interpolation angewendet, um sie dorthin zu transportieren. Dies wird im folgenden durch einen Querstrich über der betreffenden Größe kenntlich gemacht. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} \bar{v}_{x,c}(i, j, k_c, n) &:= \frac{1}{2} \left(v_{x,c}(i - \frac{1}{2}, j, k_c, n) + v_{x,c}(i + \frac{1}{2}, j, k_c, n) \right), \\ \frac{\overline{\partial h}}{\partial x}(i, j, n) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x}(i - \frac{1}{2}, j, n) + \frac{\partial h}{\partial x}(i + \frac{1}{2}, j, n) \right), \\ \bar{T}_c(i, j, k_c + \frac{1}{2}, \tilde{n}) &:= \frac{1}{2} \left(T_c(i, j, k_c, \tilde{n}) + T_c(i, j, k_c + 1, \tilde{n}) \right). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Die Notwendigkeit solcher Interpolationen, welche zunächst sehr umständlich anmuten, ist gerade der große Vorteil des Staggered Grid, denn durch diese Mittelungen werden sich entwickelnde numerische Instabilitäten recht wirkungsvoll gedämpft.

6.4 Diskretisierung der Modellgleichungen

Im folgenden wird das den numerischen Berechnungen dieser Arbeit zugrundeliegende Diskretisierungsschema für die Modellgleichungen angegeben. Die Reihenfolge ist dabei identisch mit der im Computerprogramm tatsächlich verwendeten Abarbeitungsfolge im Rahmen einer zeitlichen Iteration. Das Problem der Bestimmung der CTS-Position wird zunächst noch ausgeklammert; dies wird im folgenden Abschnitt ausführlich besprochen.

Im allgemeinen muß zwischen drei verschiedenen Fällen unterschieden werden, nämlich einer kalten Eisbasis, einer temperierten Eisbasis ohne überlagerte tempe-

rierte Eisschicht, und einer temperierten Eisbasis mit überlagerter temperierter Eisschicht. Hat die Eissäule über dem horizontalen Gitterpunkt (i, j) eine kalte Basis, soll dies als *Fall CB* bezeichnet werden, bei einer temperierten Basis ohne überlagerte temperierte Schicht als *Fall TB*, und bei einer temperierten Basis mit temperierter Schicht als *Fall TL*.

Zur Vereinfachung der Notation werden die Zeitindices n bzw. \tilde{n} nicht mehr explizit aufgeführt. Statt dessen werden Größen, die bei einem zeitlichen Iterationsschritt von z. B. n_0 nach $n_0 + 1$ für den neuen Zeitpunkt $n_0 + 1$ gelten sollen, mit einem hochgestellten Stern gekennzeichnet. $h(i, j)$ ist in diesem Fall also gleichbedeutend mit $h(i, j, n_0)$, $h^*(i, j)$ mit $h(i, j, n_0 + 1)$; entsprechendes gilt für alle übrigen Größen.

Temperatur und Wassergehalt

Die Gleichungen (6.31), (6.34) und (6.35) enthalten jeweils die zeitliche Ableitung der Temperatur bzw. des Wassergehaltes, sind also prognostischer Natur. Wie bereits weiter oben erwähnt, wird das Problem der Bestimmung der CTS-Position hier noch nicht besprochen. Die Diskretisierungen werden daher unter der Annahme angegeben, daß bereits bekannt sei, ob Fall CB, Fall TB oder Fall TL vorliegt, und daß bei letzterem die CTS-Position bestimmt sei.

Die Diskretisierung wird derart durchgeführt, daß Ableitungen in vertikaler Richtung implizit gemacht werden, also zum jeweils neuen Zeitpunkt genommen werden; andere Ableitungen werden dagegen explizit diskretisiert. Dies ermöglicht bereits deutlich größere Zeitschrittweiten verglichen mit einem voll expliziten Verfahren, da bei tatsächlichen Simulationen in vertikaler Richtung wesentlich kleinere Gitterweiten auftreten als in horizontaler Richtung. Andererseits sind durch die Beschränkung auf implizite Vertikalableitungen lediglich lineare Gleichungssysteme mit tridiagonaler Matrix (für jede Vertikalsäule des Rechengebietes getrennt) zu lösen, was schnell und unproblematisch durchgeführt werden kann.

Für die horizontalen Advektionsterme in (6.31), (6.34) wird zur numerischen Stabilisierung ein Upstream- (auch: Upwind-) Diskretisierungsschema verwendet, wobei Horizontalgeschwindigkeiten und horizontale Temperatur- bzw. Wassergehaltsableitungen um einen halben Gitterpunkt in x - bzw. y -Richtung versetzt genommen werden. Diese Verschiebung erfolgt stets stromaufwärts, also entgegen der Richtung von v_x bzw. v_y ; sie kann auch als numerische Diffusion ausgedrückt werden.

Fall CB:

Lithosphärenunterseite:

$$\frac{\kappa_r}{H_r} \cdot \frac{T_r^*(i, j, 1) - T_r^*(i, j, 0)}{\Delta\zeta_r} = -Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (6.53)$$

Temperaturgleichung, Lithosphäre:

$$\begin{aligned} & \frac{T_r^*(i, j, k_r) - T_r(i, j, k_r)}{\Delta t} \\ &= \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r H_r^2} \cdot \frac{T_r^*(i, j, k_r + 1) - 2T_r^*(i, j, k_r) + T_r^*(i, j, k_r - 1)}{\Delta \zeta_r^2} \\ & \quad (k_r = 1 \dots k_{r, \max} - 1). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Kalte Eisbasis:

$$T_c^*(i, j, 0) = T_r^*(i, j, k_{r, \max}), \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa(T_c(i, j, 0)) (e^a - 1)}{a H_c(i, j)} \cdot \frac{T_c^*(i, j, 1) - T_c^*(i, j, 0)}{\Delta \zeta_c} \\ & - \frac{\kappa_r}{H_r} \cdot \frac{T_r^*(i, j, k_{r, \max}) - T_r^*(i, j, k_{r, \max} - 1)}{\Delta \zeta_r} \\ &= \rho g \bar{v}_{x,c}(i, j, 0) H_c(i, j) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(i, j) \\ & \quad + \rho g \bar{v}_{y,c}(i, j, 0) H_c(i, j) \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}(i, j). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Temperaturgleichung, kalter Bereich:

$$\begin{aligned} & \frac{T_c^*(i, j, k_c) - T_c(i, j, k_c)}{\Delta t} \\ &+ \frac{1}{2} \left(v_{x,c}(i + \frac{1}{2}, j, k_c) - |v_{x,c}(i + \frac{1}{2}, j, k_c)| \right) \cdot \frac{T_c(i + 1, j, k_c) - T_c(i, j, k_c)}{\Delta x} \\ &+ \frac{1}{2} \left(v_{x,c}(i - \frac{1}{2}, j, k_c) + |v_{x,c}(i - \frac{1}{2}, j, k_c)| \right) \cdot \frac{T_c(i, j, k_c) - T_c(i - 1, j, k_c)}{\Delta x} \\ &+ \frac{1}{2} \left(v_{y,c}(i, j + \frac{1}{2}, k_c) - |v_{y,c}(i, j + \frac{1}{2}, k_c)| \right) \cdot \frac{T_c(i, j + 1, k_c) - T_c(i, j, k_c)}{\Delta y} \\ &+ \frac{1}{2} \left(v_{y,c}(i, j - \frac{1}{2}, k_c) + |v_{y,c}(i, j - \frac{1}{2}, k_c)| \right) \cdot \frac{T_c(i, j, k_c) - T_c(i, j - 1, k_c)}{\Delta y} \\ &+ \frac{T_c^*(i, j, k_c + 1) - T_c^*(i, j, k_c - 1)}{2 \Delta \zeta_c} \times \\ & \left\{ \frac{\bar{v}_{z,c}(i, j, k_c)}{a H_c(i, j) e^{a \zeta_c(k_c)}} (e^a - 1) \right. \\ & - \frac{1}{a H_c(i, j) e^{a \zeta_c(k_c)}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial t}(i, j) + (e^{a \zeta_c(k_c)} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial t}(i, j) \right) \\ & - \frac{\bar{v}_{x,c}(i, j, k_c)}{a H_c(i, j) e^{a \zeta_c(k_c)}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial x}(i, j) + (e^{a \zeta_c(k_c)} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial x}(i, j) \right) \\ & \left. - \frac{\bar{v}_{y,c}(i, j, k_c)}{a H_c(i, j) e^{a \zeta_c(k_c)}} \left((e^a - 1) \frac{\partial z_m}{\partial y}(i, j) + (e^{a \zeta_c(k_c)} - 1) \frac{\partial H_c}{\partial y}(i, j) \right) \right\} \\ &= \frac{e^a - 1}{\rho c (T_c(i, j, k_c)) H_c(i, j) e^{a \zeta_c(k_c)} \Delta \zeta_c} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\kappa(\bar{T}_c(i, j, k_c + \frac{1}{2})) (e^a - 1)}{a\bar{H}_c(i, j, k_c + \frac{1}{2}) e^{a\bar{\zeta}_c(k_c + \frac{1}{2})}} \cdot \frac{T_c^*(i, j, k_c + 1) - T_c^*(i, j, k_c)}{\Delta\zeta_c} \right. \\
& \left. - \frac{\kappa(\bar{T}_c(i, j, k_c - \frac{1}{2})) (e^a - 1)}{a\bar{H}_c(i, j, k_c - \frac{1}{2}) e^{a\bar{\zeta}_c(k_c - \frac{1}{2})}} \cdot \frac{T_c^*(i, j, k_c) - T_c^*(i, j, k_c - 1)}{\Delta\zeta_c} \right\} \\
& + 2 \frac{g}{c(T_c(i, j, k_c))} (\rho g)^3 EA(T_c'(i, j, k_c)) H_c^4(i, j) (1 - \mathcal{E}(\zeta_c(k_c)))^4 \times \\
& \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2(i, j) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2(i, j) \right)^2 \quad (k_c = 1 \dots k_{c,\max} - 1). \quad (6.57)
\end{aligned}$$

Kalte freie Oberfläche:

$$T_c^*(i, j, k_{c,\max}) = T_s(x(i), y(j), t^*). \quad (6.58)$$

Lithosphärentemperatur und Kalteistemperatur stellen ein gekoppeltes Problem dar und müssen simultan berechnet werden. Durch Sortieren der Terme nach den Unbekannten $T_r^*(i, j, k_r)$ und $T_c^*(i, j, k_c)$ erhält man tridiagonale Gleichungssysteme des Ranges $k_{r,\max} + k_{c,\max} + 2$, die unabhängig voneinander für alle Säulen (i, j) mit kalter Basis zu lösen sind.

Gleichung (6.54) enthält, verglichen mit der ursprünglichen Gleichung (6.35), keine erste Ableitung der Temperatur nach ζ_r mehr. Dies kommt daher, daß für die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen stets mit konstanter Lithosphärendicke H_r (vgl. §5.5) gerechnet wird, so daß die eingeklammerte Differenz in (6.35) verschwindet. Der allgemeine Fall ist jedoch problemlos zu implementieren.

Fall TB:

Dies entspricht weitgehend dem Fall CB; lediglich (6.55), (6.56) sind zu ersetzen durch das Pendant für die temperierte Eisbasis:

$$T_c^*(i, j, 0) = T_{M,c}(i, j, 0), \quad (6.59)$$

$$T_r^*(i, j, k_{r,\max}) = T_{M,c}(i, j, 0). \quad (6.60)$$

Als Folge hiervon entkoppeln die Berechnungen von Lithosphärentemperatur und Kalteistemperatur; man erhält getrennte tridiagonale Gleichungssysteme für $T_r^*(i, j, k_r)$ (vom Rang $k_{r,\max} + 1$) und $T_c^*(i, j, k_c)$ (vom Rang $k_{c,\max} + 1$).

Fall TL:

Auch hier sind Lithosphäre und Eisbereich entkoppelt. Die Berechnung der Lithosphärentemperatur erfolgt analog zum Fall TB nach (6.53), (6.54) und (6.60) und ergibt wiederum tridiagonale Gleichungssysteme für $T_r^*(i, j, k_r)$ vom Rang $k_{r,\max} + 1$.

Für die Berechnung des Wassergehaltes im temperierten Bereich wird zunächst ausgenutzt, daß keine physikalische Wasserdiffusion berücksichtigt werden soll (§5.5, Tabelle 5.1). Daher verschwindet (6.42) identisch, der basale Wassergehalt ist also keiner Randbedingung mehr unterworfen. Weiterhin kann an der CTS die Unterscheidung nach Schmelz- bzw. Gefrierbedingungen einfach nach dem Vorzeichen des Volumenstromes durch die CTS a_m^\perp vorgenommen werden, und der Diffusionsterm in (6.48) verschwindet ebenfalls.

Zwecks numerischer Stabilität wird jedoch der vertikale Diffusionsterm in der Wassergehaltsgleichung (6.34) beibehalten und als *numerische* Diffusion interpretiert, wobei die kleine Diffusivität $\nu = 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ verwendet wird. Dies führt aber wegen der parabolischen Natur von Diffusionsgleichungen dazu, daß für den basalen Wassergehalt eine Randbedingung nötig ist, welche die Physik nicht zur Verfügung stellt. Um das Ergebnis möglichst wenig zu verfälschen, wird eine Neumannsche Bedingung angenommen, nämlich das Verschwinden der Vertikalableitung des Wassergehaltes an der Basis. Ein ähnliches Problem tritt an der CTS als Obergrenze des temperierten Eisbereiches auf. Im Falle von Schmelzbedingungen gilt die Dirichlet-Bedingung (6.46); für Gefrierbedingungen ist jedoch keine Randbedingung vorhanden (Gleichung (6.48) wird zur Berechnung des Temperaturfeldes im Kalteisbereich verwendet, siehe weiter unten, und kann daher nicht auch für die Berechnung des Wassergehaltes ausgenutzt werden), so daß wiederum das Verschwinden der Vertikalableitung des Wassergehaltes als numerische Randbedingung angesetzt wird⁴.

Temperierte Eisbasis: numerische Randbedingung

$$\frac{\omega_t^*(i, j, 1) - \omega_t^*(i, j, 0)}{\Delta \zeta_t} = 0. \quad (6.61)$$

Wassergehaltsgleichung, temperierter Bereich:

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_t^*(i, j, k_t) - \omega_t(i, j, k_t)}{\widetilde{\Delta t}} \\ & + \frac{1}{2} \left(v_{x,t}(i + \frac{1}{2}, j, k_t) - |v_{x,t}(i + \frac{1}{2}, j, k_t)| \right) \cdot \frac{\omega_t(i + 1, j, k_t) - \omega_t(i, j, k_t)}{\Delta x} \\ & + \frac{1}{2} \left(v_{x,t}(i - \frac{1}{2}, j, k_t) + |v_{x,t}(i - \frac{1}{2}, j, k_t)| \right) \cdot \frac{\omega_t(i, j, k_t) - \omega_t(i - 1, j, k_t)}{\Delta x} \\ & + \frac{1}{2} \left(v_{y,t}(i, j + \frac{1}{2}, k_t) - |v_{y,t}(i, j + \frac{1}{2}, k_t)| \right) \cdot \frac{\omega_t(i, j + 1, k_t) - \omega_t(i, j, k_t)}{\Delta y} \end{aligned}$$

⁴Natürlich birgt die Einführung von solchen künstlichen Randbedingungen eine gewisse Problematik, da sie die Resultate beeinflussen, auch wenn die Verfälschung durch eine hinreichend kleine Diffusivität und Wahl einer Neumannschen statt Dirichletschen Bedingung begrenzt werden kann. Leider besteht bei numerischen Simulationen häufig die Notwendigkeit, derartige Kompromisse einzugehen, um überhaupt stabile Modellläufe zu ermöglichen.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(v_{y,t}(i, j - \frac{1}{2}, k_t) + |v_{y,t}(i, j - \frac{1}{2}, k_t)| \right) \cdot \frac{\omega_t(i, j, k_t) - \omega_t(i, j - 1, k_t)}{\Delta y} \\
& + \frac{\omega_t^*(i, j, k_t + 1) - \omega_t^*(i, j, k_t - 1)}{2\Delta\zeta_t} \times \\
& \left\{ \frac{\bar{v}_{z,t}(i, j, k_t)}{H_t^{(*)}(i, j)} - \frac{1}{H_t^{(*)}(i, j)} \left(\frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \zeta_t(k_t) \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) \right) \right. \\
& - \frac{\bar{v}_{x,t}(i, j, k_t)}{H_t^{(*)}(i, j)} \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}(i, j) + \zeta_t(k_t) \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial x}(i, j) \right) \\
& \left. - \frac{\bar{v}_{y,t}(i, j, k_t)}{H_t^{(*)}(i, j)} \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial y}(i, j) + \zeta_t(k_t) \frac{\partial \bar{H}_t}{\partial y}(i, j) \right) \right\} \\
& = \frac{\nu}{\rho \left(H_t^{(*)} \right)^2(i, j)} \cdot \frac{\omega_t^*(i, j, k_t + 1) - 2\omega_t^*(i, j, k_t) + \omega_t^*(i, j, k_t - 1)}{\Delta\zeta_t^2} \\
& + 2 \frac{g}{L} (\rho g)^3 EA_t (\omega_t(i, j, k_t)) \left(H_c^{(*)}(i, j) + H_t^{(*)}(i, j) (1 - \zeta_t(k_t)) \right)^4 \times \\
& \left(\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \right)^2(i, j) + \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right)^2(i, j) \right)^2 \\
& + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa}{\partial T} + \frac{\beta c(T_{M,t}(i, j, k_t))}{L} \times \left(\frac{\partial h}{\partial t}(i, j) + \bar{v}_{x,t}(i, j, k_t) \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}(i, j) \right. \\
& \left. + \bar{v}_{y,t}(i, j, k_t) \frac{\partial \bar{h}}{\partial y}(i, j) - \bar{v}_{z,t}(i, j, k_t) \right) \quad (k_t = 1 \dots k_{t,\max} - 1). \quad (6.62)
\end{aligned}$$

CTS, $(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) > 0$: physikalische Randbedingung

$$\omega_t^*(i, j, k_{t,\max}) = 0. \quad (6.63)$$

CTS, $(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) < 0$: numerische Randbedingung

$$\frac{\omega_t^*(i, j, k_{t,\max}) - \omega_t^*(i, j, k_{t,\max} - 1)}{\Delta\zeta_t} = 0. \quad (6.64)$$

In dieser Formulierung ist die Berechnung des Wassergehaltes im temperierten Eisbereich entkoppelt von Temperaturberechnungen in der Lithosphäre bzw. im Kalteisbereich; das Problem besteht aus tridiagonalen Gleichungssystemen für $\omega_t^*(i, j, k_t)$ vom Rang $k_{t,\max} + 1$. In der diskretisierten Wassergehaltsgleichung (6.62) treten Terme auf, die einen hochgestellten, eingeklammerten Stern tragen (z. B. $H_t^{(*)}$). Hierbei handelt es sich um provisorische Werte für den neuen Zeitpunkt des zeitlichen Iterationsschritts, die im Rahmen der probeweisen CTS-Verschiebungen zur Bestimmung von deren Position (siehe nächster Abschnitt) berechnet werden; die endgültigen neuen Werte werden erst bei der Topographie-Berechnung bestimmt. Der Wasserdrainage-Funktion $D(\omega)$ ist in (6.62) noch nicht Rechnung getragen. Sie wird gemäß ihrer Darstellung

(siehe §5.5) durch nachträgliches Zurücksetzen von Werten $\omega_t^*(i, j, k_t) > \omega_{\max}$ auf $\omega_t^*(i, j, k_t) = \omega_{\max}$ eingebracht; der dabei auftretende Massenverlust wird zur basalen Schmelzrate $\mathcal{P}_b^w(i, j)$ addiert und so in der globalen Massenbilanz (Topographieberechnung) berücksichtigt.

Da die Berechnung der Temperatur im Kalteisbereich bei Gefrierbedingungen an der CTS über (6.48) an das Wassergehaltsproblem im temperierten Bereich gekoppelt ist, wird sie zuletzt abgearbeitet.

CTS, $(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) > 0$:

$$\frac{e^a - 1}{aH_c(i, j)} \cdot \frac{T_c^*(i, j, 1) - T_c^*(i, j, 0)}{\Delta\zeta_c} = \beta. \quad (6.65)$$

CTS, $(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) < 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{e^a - 1}{aH_c(i, j)} \cdot \frac{T_c^*(i, j, 1) - T_c^*(i, j, 0)}{\Delta\zeta_c} - \beta \\ &= \frac{L\rho}{\kappa(T_c(i, j, 0))} \omega_t^*(i, j, k_{t, \max}) (a_m^\perp)^{(*)}(i, j). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Weiterhin gilt an der CTS die Dirichlet-Bedingung $T_c^*(i, j, 0) = T_{M,c}(i, j, 0)$; diese wird jedoch für die eigentliche Rechnung nicht verwendet und dient statt dessen zur Positionierung der CTS (siehe nächster Abschnitt).

Temperaturgleichung, kalter Bereich; kalte freie Oberfläche:

Analog zu (6.57) und (6.58). In der Temperaturgleichung (6.57) sind allerdings die zum alten Zeitpunkt genommenen H_c , $(\partial z_m / \partial t)$, $(\partial H_c / \partial t)$ durch die provisorischen Werte zum neuen Zeitpunkt $H_c^{(*)}$, $(\partial z_m / \partial t)^{(*)}$, $(\partial H_c / \partial t)^{(*)}$ (siehe oben) zu ersetzen. Wiederum ergeben sich tridiagonale lineare Gleichungssysteme für die gesuchten neuen Temperaturen $T_c^*(i, j, k_c)$.

Eisalter

Für das Eisalter A , also den Zeitabstand zwischen aktueller Zeit und dem Zeitpunkt, an dem sich ein bestimmtes Eispartikel als Schnee auf der Eisoberfläche niedergeschlagen hat, gilt die Advektionsgleichung

$$\frac{dA}{dt} = 1 \quad \left(+D_A \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right), \quad (6.67)$$

durch den eingeklammerten numerischen Diffusionsterm mit der kleinen Diffusivität $D_A = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ergänzt. Die zugehörige physikalische Randbedingung besagt $A = 0$ in den Akkumulationsgebieten ($a_s^\perp > 0$) an der freien Oberfläche; für die

Ablationsgebiete der freien Oberfläche und die gesamte Eisbasis wird als numerische Randbedingung wiederum die Neumannsche Bedingung $\partial A/\partial z = 0$ verwendet. An einer eventuell vorhandenen CTS gilt ferner Stetigkeit des Eisalters. Im Kalteisbereich ergibt (6.67) eine Gleichung analog zur Temperaturgleichung (6.31), im temperierten Eisbereich eine Gleichung analog zur Wassergehaltsgleichung (6.34), jedoch jeweils ohne Produktionsterme. Daher entsprechen die diskretisierten Versionen weitgehend (6.57) und (6.62); sie werden hier nicht explizit aufgeführt.

Horizontalgeschwindigkeit

Im Gegensatz zu Temperatur, Wassergehalt und Eisalter berechnet sich das gesamte Geschwindigkeitsfeld rein diagnostisch aus Topographie, Temperatur und Wassergehalt zu einem gegebenen Zeitpunkt, d. h., es stellt sich quasistatisch auf diese Vorgaben ein. Aus den Gleichungen für die Horizontalgeschwindigkeit (6.21), (6.22), (6.24) und (6.25) kann der Gradient der freien Oberfläche abgespalten werden; sie lassen sich schreiben als

$$(v_x, v_y) = -D_V \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right), \quad (6.68)$$

wobei die Form von D_V durch Vergleich mit den ursprünglichen Gleichungen folgt. Der Vorteil dieser Darstellung ist, daß nur die skalare Hilfsgröße D_V berechnet werden muß; das Horizontalgeschwindigkeitsfeld ergibt sich daraus durch einfache Multiplikation mit den Komponenten des Oberflächengradienten. Im Gegensatz zu den Geschwindigkeitskomponenten selbst sei D_V auf den Gitterpunkten des Staggered Grid definiert; die numerische Quadratur zur Berechnung wird mit Hilfe der Trapezregel durchgeführt.

Fall TL:

$$D_{V,t}^*(i, j, 0) = \rho g H(i, j) C_t(i, j), \quad (6.69)$$

$$\begin{aligned} D_{V,t}^*(i, j, k_t + 1) &= D_{V,t}^*(i, j, k_t) + (\rho g)^3 H_t(i, j) \Delta \zeta_t \times \\ &\quad \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2(i, j) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2(i, j) \right) \times \\ &\quad \left\{ EA_t(\omega_t^*(i, j, k_t)) \left(H_c(i, j) + H_t(i, j) (1 - \zeta_t(k_t)) \right)^3 \right. \\ &\quad \left. + EA_t(\omega_t^*(i, j, k_t + 1)) \left(H_c(i, j) + H_t(i, j) (1 - \zeta_t(k_t + 1)) \right)^3 \right\} \\ &\quad (k_t = 0 \dots k_{t,\max} - 1), \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$D_{V,c}^*(i, j, 0) = D_{V,t}^*(i, j, k_{t,\max}), \quad (6.71)$$

$$D_{V,c}^*(i, j, k_c + 1) = D_{V,c}^*(i, j, k_c) + (\rho g)^3 \frac{a H_c^4(i, j)}{e^a - 1} \Delta \zeta_c \times$$

$$\begin{aligned}
& \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 (i, j) + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 (i, j) \right) \times \\
& \left\{ EA((T'_c)^*(i, j, k_c)) \left(1 - \mathcal{E}(\zeta_c(k_c)) \right)^3 e^{a\zeta_c(k_c)} \right. \\
& \left. + EA((T'_c)^*(i, j, k_c + 1)) \left(1 - \mathcal{E}(\zeta_c(k_c + 1)) \right)^3 e^{a\zeta_c(k_c + 1)} \right\} \\
& (k_c = 0 \dots k_{c,\max} - 1). \tag{6.72}
\end{aligned}$$

Fall TB:

Analog Fall TL, jedoch anstelle von (6.69), (6.70)

$$D_{V,t}^*(i, j, k_t) = \rho g H(i, j) C_t(i, j) \quad (k_t = 0 \dots k_{t,\max}). \tag{6.73}$$

Fall CB:

Analog Fall TB, jedoch anstelle von (6.73)

$$D_{V,t}^*(i, j, k_t) = 0 \quad (k_t = 0 \dots k_{t,\max}). \tag{6.74}$$

Das Horizontalgeschwindigkeitsfeld selbst ergibt sich hieraus für alle drei Fälle gemäß

$$\begin{aligned}
v_{x,t}^*(i + \frac{1}{2}, j, k_t) &= -\bar{D}_{V,t}^*(i + \frac{1}{2}, j, k_t) \frac{\partial h}{\partial x}(i + \frac{1}{2}, j), \\
v_{y,t}^*(i, j + \frac{1}{2}, k_t) &= -\bar{D}_{V,t}^*(i, j + \frac{1}{2}, k_t) \frac{\partial h}{\partial y}(i, j + \frac{1}{2}), \\
v_{x,c}^*(i + \frac{1}{2}, j, k_c) &= -\bar{D}_{V,c}^*(i + \frac{1}{2}, j, k_c) \frac{\partial h}{\partial x}(i + \frac{1}{2}, j), \\
v_{y,c}^*(i, j + \frac{1}{2}, k_c) &= -\bar{D}_{V,c}^*(i, j + \frac{1}{2}, k_c) \frac{\partial h}{\partial y}(i, j + \frac{1}{2}). \tag{6.75}
\end{aligned}$$

Vertikalgeschwindigkeit

Mit Hilfe des soeben berechneten Horizontalgeschwindigkeitsfeldes ist es nun möglich, auch die neuen Vertikalgeschwindigkeiten zu berechnen. Dazu werden zuerst die in (6.23) und (6.26) auftretenden räumlichen Ableitungen der Horizontalgeschwindigkeiten diskretisiert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{x,c,t}^*}{\partial \xi_{c,t}}(i, j, k_{c,t}) &= \frac{v_{x,c,t}^*(i + \frac{1}{2}, j, k_{c,t}) - v_{x,c,t}^*(i - \frac{1}{2}, j, k_{c,t})}{\Delta x}, \\
\frac{\partial v_{y,c,t}^*}{\partial \eta_{c,t}}(i, j, k_{c,t}) &= \frac{v_{y,c,t}^*(i, j + \frac{1}{2}, k_{c,t}) - v_{y,c,t}^*(i, j - \frac{1}{2}, k_{c,t})}{\Delta y}, \tag{6.76}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_{x,c,t}^*}{\partial \zeta_{c,t}}(i, j, 0) = \frac{\bar{v}_{x,c,t}^*(i, j, 1) - \bar{v}_{x,c,t}^*(i, j, 0)}{\Delta \zeta_{c,t}},$$

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial v_{x,c,t}}{\partial \zeta_{c,t}}}^* (i, j, k_{c,t}) &= \frac{\bar{v}_{x,c,t}^*(i, j, k_{c,t} + 1) - \bar{v}_{x,c,t}^*(i, j, k_{c,t} - 1)}{2\Delta\zeta_{c,t}} \\
&\quad (k_{c,t} = 1 \dots k_{c,t,\max} - 1), \\
\overline{\frac{\partial v_{x,c,t}}{\partial \zeta_{c,t}}}^* (i, j, k_{c,t,\max}) &= \frac{\bar{v}_{x,c,t}^*(i, j, k_{c,t,\max}) - \bar{v}_{x,c,t}^*(i, j, k_{c,t,\max} - 1)}{\Delta\zeta_{c,t}}, \tag{6.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{\partial v_{y,c,t}}{\partial \zeta_{c,t}}}^* (i, j, 0) &= \frac{\bar{v}_{y,c,t}^*(i, j, 1) - \bar{v}_{y,c,t}^*(i, j, 0)}{\Delta\zeta_{c,t}}, \\
\overline{\frac{\partial v_{y,c,t}}{\partial \zeta_{c,t}}}^* (i, j, k_{c,t}) &= \frac{\bar{v}_{y,c,t}^*(i, j, k_{c,t} + 1) - \bar{v}_{y,c,t}^*(i, j, k_{c,t} - 1)}{2\Delta\zeta_{c,t}} \\
&\quad (k_{c,t} = 1 \dots k_{c,t,\max} - 1), \\
\overline{\frac{\partial v_{y,c,t}}{\partial \zeta_{c,t}}}^* (i, j, k_{c,t,\max}) &= \frac{\bar{v}_{y,c,t}^*(i, j, k_{c,t,\max}) - \bar{v}_{y,c,t}^*(i, j, k_{c,t,\max} - 1)}{\Delta\zeta_{c,t}}. \tag{6.78}
\end{aligned}$$

Damit können die Quadraturen in (6.23), (6.26) ausgeführt werden, wobei sich wegen des Staggered Grid hier die Gauß-Quadratur (Tangentenregel) anbietet, welche von gleicher Fehlerordnung wie die Trapezregel ist.

Fall TL:

$$\begin{aligned}
v_{z,b}^*(i, j) &= \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \bar{v}_{x,t}^*(i, j, 0) \frac{\overline{\partial b}}{\partial x}(i, j) \\
&\quad + \bar{v}_{y,t}^*(i, j, 0) \frac{\overline{\partial b}}{\partial y}(i, j) - \frac{\mathcal{P}_b^w(i, j)}{\rho}, \tag{6.79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,t}^*(i, j, \tfrac{1}{2}) &= v_{z,b}^*(i, j) - \frac{\Delta\zeta_t}{2} \times \\
&\quad \left\{ H_t(i, j) \left(\frac{\partial v_{x,t}^*}{\partial \xi_t}(i, j, 0) + \frac{\partial v_{y,t}^*}{\partial \eta_t}(i, j, 0) \right) \right. \\
&\quad - \left(\frac{\overline{\partial b}}{\partial x}(i, j) + \zeta_t(0) \frac{\overline{\partial H_t}}{\partial x}(i, j) \right) \frac{\overline{\partial v_{x,t}^*}}{\partial \zeta_t}(i, j, 0) \\
&\quad \left. - \left(\frac{\overline{\partial b}}{\partial y}(i, j) + \zeta_t(0) \frac{\overline{\partial H_t}}{\partial y}(i, j) \right) \frac{\overline{\partial v_{y,t}^*}}{\partial \zeta_t}(i, j, 0) \right\}, \tag{6.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,t}^*(i, j, k_t + \tfrac{1}{2}) &= v_{z,t}^*(i, j, k_t - \tfrac{1}{2}) - \Delta\zeta_t \times \\
&\quad \left\{ H_t(i, j) \left(\frac{\partial v_{x,t}^*}{\partial \xi_t}(i, j, k_t) + \frac{\partial v_{y,t}^*}{\partial \eta_t}(i, j, k_t) \right) \right. \\
&\quad - \left(\frac{\overline{\partial b}}{\partial x}(i, j) + \zeta_t(k_t) \frac{\overline{\partial H_t}}{\partial x}(i, j) \right) \frac{\overline{\partial v_{x,t}^*}}{\partial \zeta_t}(i, j, k_t) \\
&\quad \left. - \left(\frac{\overline{\partial b}}{\partial y}(i, j) + \zeta_t(k_t) \frac{\overline{\partial H_t}}{\partial y}(i, j) \right) \frac{\overline{\partial v_{y,t}^*}}{\partial \zeta_t}(i, j, k_t) \right\} \\
&\quad (k_t = 1 \dots k_{t,\max} - 1), \tag{6.81}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,m}^*(i, j) &= v_{z,t}^*(i, j, k_{t,\max} - \frac{1}{2}) - \frac{\Delta\zeta_t}{2} \times \\
&\left\{ H_t(i, j) \left(\frac{\partial v_{x,t}^*}{\partial \xi_t}(i, j, k_{t,\max}) + \frac{\partial v_{y,t}^*}{\partial \eta_t}(i, j, k_{t,\max}) \right) \right. \\
&- \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial x}(i, j) + \zeta_t(k_{t,\max}) \frac{\partial \overline{H_t}}{\partial x}(i, j) \right) \frac{\partial v_{x,t}^*}{\partial \zeta_t}(i, j, k_{t,\max}) \\
&\left. - \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial y}(i, j) + \zeta_t(k_{t,\max}) \frac{\partial \overline{H_t}}{\partial y}(i, j) \right) \frac{\partial v_{y,t}^*}{\partial \zeta_t}(i, j, k_{t,\max}) \right\}, \quad (6.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,c}^*(i, j, \frac{1}{2}) &= v_{z,m}^*(i, j) - \frac{\Delta\zeta_c}{2} \times \\
&\left\{ \frac{aH_c(i, j) e^{a\zeta_c(0)}}{e^a - 1} \left(\frac{\partial v_{x,c}^*}{\partial \xi_c}(i, j, 0) + \frac{\partial v_{y,c}^*}{\partial \eta_c}(i, j, 0) \right) \right. \\
&- \left(\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial x}(i, j) + \mathcal{E}(\zeta_c(0)) \frac{\partial \overline{H_c}}{\partial x}(i, j) \right) \frac{\partial v_{x,c}^*}{\partial \zeta_c}(i, j, 0) \\
&\left. - \left(\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial y}(i, j) + \mathcal{E}(\zeta_c(0)) \frac{\partial \overline{H_c}}{\partial y}(i, j) \right) \frac{\partial v_{y,c}^*}{\partial \zeta_c}(i, j, 0) \right\}, \quad (6.83)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z,c}^*(i, j, k_c + \frac{1}{2}) &= v_{z,c}^*(i, j, k_c - \frac{1}{2}) - \Delta\zeta_c \times \\
&\left\{ \frac{aH_c(i, j) e^{a\zeta_c(k_c)}}{e^a - 1} \left(\frac{\partial v_{x,c}^*}{\partial \xi_c}(i, j, k_c) + \frac{\partial v_{y,c}^*}{\partial \eta_c}(i, j, k_c) \right) \right. \\
&- \left(\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial x}(i, j) + \mathcal{E}(\zeta_c(k_c)) \frac{\partial \overline{H_c}}{\partial x}(i, j) \right) \frac{\partial v_{x,c}^*}{\partial \zeta_c}(i, j, k_c) \\
&\left. - \left(\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial y}(i, j) + \mathcal{E}(\zeta_c(k_c)) \frac{\partial \overline{H_c}}{\partial y}(i, j) \right) \frac{\partial v_{y,c}^*}{\partial \zeta_c}(i, j, k_c) \right\} \\
&\quad (k_c = 1 \dots k_{c,\max} - 1); \quad (6.84)
\end{aligned}$$

$v_{z,b}$ und $v_{z,m}$ bedeuten den Wert von v_z an der Eisbasis bzw. an der CTS.

Fall CB, TB:

Analog Fall TL, jedoch können wegen des Nichtvorhandenseins einer temperierten Schicht die Schritte (6.80) bis (6.82) entfallen und statt dessen direkt $v_{z,m}^*(i, j)$ gleich $v_{z,b}^*(i, j)$ gesetzt werden.

Topographie: Lithosphärenoberseite und freie Oberfläche

Dies sind neben der Berechnung von Temperatur, Wassergehalt, CTS-Position und Eisalter die zentralen prognostischen Berechnungen des Inlandeismodells. Für die zeitliche Evolution der Position b der Lithosphärenoberseite wird eine implizite Diskretisierung gewählt,

$$\frac{b^*(i, j) - b(i, j)}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau_V} \left(b^*(i, j) - \left(b_0(i, j) - \frac{\rho}{\rho_a} H(i, j) \right) \right). \quad (6.85)$$

Diese Gleichung kann direkt nach $b^*(i, j)$ aufgelöst werden. Weiterhin wird die im folgenden ebenfalls benötigte Zeitableitung von b berechnet:

$$\frac{\partial b^*}{\partial t}(i, j) = \frac{b^*(i, j) - b(i, j)}{\Delta t}. \quad (6.86)$$

Zur Diskretisierung der Evolutionsgleichung für die freie Oberfläche wird zunächst ausgenutzt, daß der Massenfluß \mathbf{q} (vertikalintegrierte Horizontalgeschwindigkeit) mit Hilfe von (6.68) ausgedrückt werden kann als

$$(q_x, q_y) = - \int_b^h D_V dz' \times \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) =: -D_H \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right); \quad (6.87)$$

die Diffusivität D_H sei dabei ebenso wie D_V auf den Gitterpunkten definiert. Mit Hilfe von (6.87) kann (6.27) als Diffusionsgleichung geschrieben werden,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_H \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_H \frac{\partial h}{\partial y} \right) + a_s^\perp + \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\mathcal{P}_b^w}{\rho}; \quad (6.88)$$

wegen der vernachlässigten Wasserdiffusion ν wurde ferner m_b^w durch \mathcal{P}_b^w ersetzt (vgl. Bemerkung im Anschluß an Gleichung (5.157)). Die Berechnung von D_H erfolgt durch numerische Quadratur von D_V mit der Trapezregel:

$$\begin{aligned} D_H^*(i, j) = & H_t(i, j) \frac{\Delta \zeta_t}{2} \left\{ D_{V,t}^*(i, j, 0) + \sum_{k_t=1}^{k_{t,\max}-1} 2D_{V,t}^*(i, j, k_t) + D_{V,t}^*(i, j, k_{t,\max}) \right\} \\ & + \frac{aH_c(i, j)}{e^a - 1} \frac{\Delta \zeta_c}{2} \left\{ D_{V,c}^*(i, j, 0) e^{a\zeta_c(0)} + \sum_{k_c=1}^{k_{c,\max}-1} 2D_{V,c}^*(i, j, k_c) e^{a\zeta_c(k_c)} \right. \\ & \left. + D_{V,c}^*(i, j, k_{c,\max}) e^{a\zeta_c(k_{c,\max})} \right\}; \end{aligned} \quad (6.89)$$

als Nebenprodukt hiervon kann der nicht weiter benötigte Massenfluß berechnet werden:

$$\begin{aligned} q_x^*(i + \frac{1}{2}, j) &= -\bar{D}_H^*(i + \frac{1}{2}, j) \frac{\partial h}{\partial x}(i + \frac{1}{2}, j), \\ q_y^*(i, j + \frac{1}{2}) &= -\bar{D}_H^*(i, j + \frac{1}{2}) \frac{\partial h}{\partial y}(i, j + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (6.90)$$

Für die Diskretisierung von (6.88) wird ein modifiziertes ADI-Schema (“Alternating Direction Implicit”) verwendet, d. h., bei einer Iteration wird die Ableitung nach x implizit und die Ableitung nach y explizit gemacht, bei der nächsten Iteration umgekehrt usw. Dies bewirkt einerseits eine verbesserte Stabilität im Vergleich zu einem rein expliziten Verfahren, andererseits treten wiederum nur tridiagonale lineare

Gleichungssysteme bei der Lösung auf. Mit impliziten x -Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned}
& \frac{h^*(i, j) - h(i, j)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{\Delta x} \left(\bar{D}_H^*(i + \frac{1}{2}, j) \frac{h^*(i + 1, j) - h^*(i, j)}{\Delta x} - \bar{D}_H^*(i - \frac{1}{2}, j) \frac{h^*(i, j) - h^*(i - 1, j)}{\Delta x} \right) \\
&+ \frac{1}{\Delta y} \left(\bar{D}_H^*(i, j + \frac{1}{2}) \frac{h(i, j + 1) - h(i, j)}{\Delta y} - \bar{D}_H^*(i, j - \frac{1}{2}) \frac{h(i, j) - h(i, j - 1)}{\Delta y} \right) \\
&+ (a_s^\perp)^*(i, j) + \frac{\partial b^*}{\partial t}(i, j) - \frac{\mathcal{P}_b^w(i, j)}{\rho}, \tag{6.91}
\end{aligned}$$

was für jedes $j = 1 \dots j_{\max} - 1$ getrennt ein tridiagonales Gleichungssystem in den Unbekannten $h^*(i, j)$, ($i = 0 \dots i_{\max}$) darstellt (analog für implizite y -Ableitungen, wird nicht extra gezeigt). An den Berandungen $i = 0, i_{\max}$ bzw. $j = 0, j_{\max}$ des Rechengebietes wird bei der Lösung $h^*(i, j) = b^*(i, j)$ vorausgesetzt, d. h., das Rechengebiet muß das simulierte Eisschild ganz umfassen.

Mit den gewonnenen $b^*(i, j)$ und $h^*(i, j)$ und ggfs. den aus der Positionierungsroutine für die CTS (nächster Abschnitt) erhaltenen provisorischen $H_t^{(*)}(i, j)$ können nun die neuen Dicken $H^*(i, j)$, $H_c^*(i, j)$ und $H_t^*(i, j)$ sowie die neue CTS-Position $z_m^*(i, j)$ berechnet werden:

Fall CB, TB:

$$\begin{aligned}
H^*(i, j) = H_c^*(i, j) &= h^*(i, j) - b^*(i, j), \\
H_t^*(i, j) &= 0, \\
z_m^*(i, j) &= b^*(i, j). \tag{6.92}
\end{aligned}$$

Fall TL:

$$\begin{aligned}
H^*(i, j) &= h^*(i, j) - b^*(i, j), \\
H_t^*(i, j) &= H_t^{(*)}(i, j) \frac{H^*(i, j)}{H(i, j)}, \\
z_m^*(i, j) &= b^*(i, j) + H_t^*(i, j), \\
H_c^*(i, j) &= h^*(i, j) - z_m^*(i, j). \tag{6.93}
\end{aligned}$$

Hierbei wird die provisorische Dicke der temperierten Bereiche $H_t^{(*)}(i, j)$, welche noch unter dem Einfluß der alten Topographie bestimmt wurde, im Verhältnis der neuen zur alten Gesamtdicke gestreckt.

Nachdem nun die gesamte neue Topographie bekannt ist, können die noch fehlenden Zeitableitungen von h , z_m , H und H_c (für die Zeitableitungen von b und H_t siehe (6.86) bzw. (6.107)) sowie alle räumlichen Ableitungen von h , z_m , b , H , H_c und H_t

berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h^*}{\partial t}(i, j) &= \frac{h^*(i, j) - h(i, j)}{\Delta t}, \\
\frac{\partial H^*}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial h^*}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial b^*}{\partial t}(i, j), \\
\frac{\partial z_m^*}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial b^*}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^*}{\partial t}(i, j), \\
\frac{\partial H_c^*}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial h^*}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^*}{\partial t}(i, j),
\end{aligned} \tag{6.94}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h^*}{\partial x}(i + \frac{1}{2}, j) &= \frac{h^*(i + 1, j) - h^*(i, j)}{\Delta x}, \\
\frac{\partial h^*}{\partial y}(i, j + \frac{1}{2}) &= \frac{h^*(i, j + 1) - h^*(i, j)}{\Delta y}
\end{aligned} \tag{6.95}$$

(entsprechend für die räumlichen Ableitungen von z_m , b , H , H_c , H_t).

Schließlich wird für den Fall TL der Volumenfluß durch die CTS a_m^\perp bestimmt. Aufgrund der Vorgehensweise bei der CTS-Positionierung wird dessen stationärer Anteil $a_{m, \text{st}}^\perp$ (ohne Einfluß der CTS-Eigenbewegung) gesondert berechnet,

$$\begin{aligned}
(a_{m, \text{st}}^\perp)^*(i, j) &= \bar{v}_{x, c}^*(i, j, 0) \overline{\frac{\partial z_m^*}{\partial x}}(i, j) \\
&+ \bar{v}_{y, c}^*(i, j, 0) \overline{\frac{\partial z_m^*}{\partial y}}(i, j) - \bar{v}_{z, c}^*(i, j, 0),
\end{aligned} \tag{6.96}$$

das vollständige a_m^\perp folgt hiermit gemäß

$$(a_m^\perp)^*(i, j) = (a_{m, \text{st}}^\perp)^*(i, j) + \frac{\partial z_m^*}{\partial t}(i, j). \tag{6.97}$$

Schmelztemperatur

Diagnostische Berechnung aus der soeben bestimmten Topographie:

Kalter Eisbereich:

$$T_{M, c}^*(i, j, k_c) = T_0 - \beta H_c^*(i, j) \left(1 - \mathcal{E}(\zeta_c(k_c))\right). \tag{6.98}$$

Temperierter Eisbereich:

$$T_{M, t}^*(i, j, k_t) = T_0 - \beta \left(H_c^*(i, j) + H_t^*(i, j) (1 - \zeta_t(k_t))\right). \tag{6.99}$$

Basale Schmelzrate

Diagnostische Berechnung mit Hilfe der neuen Werte für Temperatur, Geschwindigkeit und Topographie:

Fall CB:

$$(\mathcal{P}_b^w)^*(i, j) = 0. \quad (6.100)$$

Fall TB:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_b^w)^*(i, j) = & \frac{\kappa(T_c^*(i, j, 0))(e^a - 1)}{LaH_c^*(i, j)} \cdot \frac{T_c^*(i, j, 1) - T_c^*(i, j, 0)}{\Delta\zeta_c} \\ & - \frac{\kappa_r}{LH_r} \cdot \frac{T_r^*(i, j, k_{r,\max}) - T_r^*(i, j, k_{r,\max} - 1)}{\Delta\zeta_r} \\ & - \frac{\rho g}{L} \bar{v}_{x,c}^*(i, j, 0) H_c^*(i, j) \frac{\partial h^*}{\partial x}(i, j) \\ & - \frac{\rho g}{L} \bar{v}_{y,c}^*(i, j, 0) H_c^*(i, j) \frac{\partial h^*}{\partial y}(i, j). \end{aligned} \quad (6.101)$$

Fall TL:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_b^w)^*(i, j) = & \frac{\beta\kappa(T_{M,t}^*(i, j, 0))}{L} - \frac{\kappa_r}{LH_r} \cdot \frac{T_r^*(i, j, k_{r,\max}) - T_r^*(i, j, k_{r,\max} - 1)}{\Delta\zeta_r} \\ & - \frac{\rho g}{L} \bar{v}_{x,t}^*(i, j, 0) H^*(i, j) \frac{\partial h^*}{\partial x}(i, j) \\ & - \frac{\rho g}{L} \bar{v}_{y,t}^*(i, j, 0) H^*(i, j) \frac{\partial h^*}{\partial y}(i, j); \end{aligned} \quad (6.102)$$

hierzu wird die Gesamtmenge des aus der temperierten Schicht der Eissäule (i, j) drainierten Wassers (parameterisiert durch die Drainagefunktion $D(\omega)$) addiert.

6.5 Positionierung der CTS

Bei der Berechnung von Temperatur und ggfs. Wassergehalt für eine bestimmte Eissäule (i, j) tritt das Problem auf zu bestimmen, ob zum neuen Zeitpunkt des Iterationsschritts Fall CB (kalte Eisbasis), Fall TB (temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht) oder Fall TL (temperierte Eisbasis mit überlagerter temperierter Schicht) vorliegt, und wo sich im letzteren Fall die CTS befindet. Dies wird mit einem Try-and-Error-Verfahren durchgeführt, wobei die Vorgehensweise unterschiedlich ist, je nachdem von welchem der drei Fälle zum alten Zeitpunkt der Iteration ausgegangen wird.

Ausgangspunkt Fall CB für Säule (i, j)

Schritt 1: Testrechnung unter der Annahme des Falles CB zum neuen Zeitpunkt, d. h., Lösung von (6.53) – (6.58). Weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Abfrage, ob die erhaltene Eisbasistemperatur den Druckschmelzpunkt unterschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{<} T_0 - \beta H(i, j).$$

Falls ja, Verfahren beendet.

Falls nein, weiter mit Schritt 3.

Schritt 3: Testrechnung unter der Annahme des Falles TB zum neuen Zeitpunkt, d. h., Lösung von (6.53), (6.54), (6.57) – (6.60). Weiter mit Schritt 4.

Schritt 4: Abfrage, ob die erhaltene vertikale Temperaturableitung an der Eisbasis kleiner ist als der Clausius-Clapeyron-Gradient,

$$\frac{e^a - 1}{aH_c(i, j)} \cdot \frac{T_c^*(i, j, 1) - T_c^*(i, j, 0)}{\Delta\zeta_c} \stackrel{?}{<} \beta.$$

Falls ja, Verfahren beendet.

Falls nein, weiter mit Schritt 5.

Schritt 5: Testrechnung unter der Annahme des Falles TL zum neuen Zeitpunkt, wobei die CTS um $H_t^{\text{offset}} := 1$ mm über die Eisbasis gelegt wird. Es werden also die provisorischen Topographiegrößen zu

$$\begin{aligned} H_t^{(*)}(i, j) &= H_t^{\text{offset}}, \\ z_m^{(*)}(i, j) &= b(i, j) + H_t^{\text{offset}}, \\ H_c^{(*)}(i, j) &= H(i, j) - H_t^{\text{offset}} \end{aligned}$$

gesetzt und das Problem (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66) gelöst. Weiter mit Schritt 6.

Schritt 6: Abfrage, ob die erhaltene Temperatur an der Unterseite des Kalteisbereichs den Druckschmelzpunkt unterschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{<} T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j).$$

Falls ja, Verfahren beendet.

Falls nein, weiter mit Schritt 7.

Schritt 7: Iterative Verschiebung der CTS um jeweils $z_m^{\text{shift}} := 1 \text{ m}$ nach oben gemäß

$$\begin{aligned}
H_t^{(*)}(i, j) &= H_t^{(*)}(i, j) + z_m^{\text{shift}}, \\
z_m^{(*)}(i, j) &= z_m^{(*)}(i, j) + z_m^{\text{shift}}, \\
H_c^{(*)}(i, j) &= H_c^{(*)}(i, j) - z_m^{\text{shift}}, \\
\frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\widetilde{\Delta t}}, \\
\frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\
\frac{\partial H_c^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial h}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\
(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) &= a_{m, \text{st}}^\perp(i, j) + \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j),
\end{aligned}$$

hiermit Lösung

des Fall-TL-Problems (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66);

diese Verschiebungs-Prozedur wird gestoppt, wenn entweder die CTS um weniger als z_m^{shift} von der Eisoberfläche entfernt ist,

$$z_m^{(*)}(i, j) \stackrel{?}{>} h(i, j) - z_m^{\text{shift}},$$

oder die erhaltene Temperatur an der Unterseite des Kalteisbereichs den Druckschmelzpunkt unterschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{<} T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j).$$

Bei Erfüllung des ersten Kriteriums wird das Verfahren beendet, bei Erfüllung des zweiten weiter mit Schritt 8.

Schritt 8: Interpolation der endgültigen CTS-Position aus der letzten ($z_a := z_m^{(*)}(i, j)$) und vorletzten ($z_b := z_m^{(*)}(i, j) - z_m^{\text{shift}}$) provisorischen CTS-Position der Verschiebe-Prozedur, gewichtet mit den zugehörigen Differenzen der errechneten Temperaturen an der Unterseite des Kalteisbereichs vom Druckschmelzpunkt,

$$\text{diff}_a, \text{diff}_b := T_c^*(i, j) - (T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j))$$

(für die CTS-Positionen z_a bzw. z_b). Hierbei gilt $\text{diff}_a < 0$ und $\text{diff}_b > 0$; die

Interpolationsvorschrift lautet

$$interpol := \frac{diffa}{diffb - diffa} \cdot z_m^{\text{shift}} \quad (< 0),$$

$$H_t^{(*)}(i, j) = H_t^{(*)}(i, j) + interpol,$$

$$z_m^{(*)}(i, j) = z_m^{(*)}(i, j) + interpol,$$

$$H_c^{(*)}(i, j) = H_c^{(*)}(i, j) - interpol,$$

$$\frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) = \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\widetilde{\Delta t}},$$

$$\frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j) = \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j),$$

$$\frac{\partial H_c^{(*)}}{\partial t}(i, j) = \frac{\partial h}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j),$$

$$(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) = a_{m, \text{st}}^\perp(i, j) + \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j),$$

hiermit Lösung

des Fall-TL-Problems (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66).

Beendigung des Verfahrens.

Ausgangspunkt Fall TB für Säule (i, j)

Schritt 1: Testrechnung unter der Annahme des Falles TB zum neuen Zeitpunkt, d. h., Lösung von (6.53), (6.54), (6.57) – (6.60). Weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Abfrage, ob die erhaltene vertikale Temperaturableitung an der Eisbasis kleiner ist als der Clausius-Clapeyron-Gradient,

$$\frac{e^a - 1}{aH_c(i, j)} \cdot \frac{T_c^*(i, j, 1) - T_c^*(i, j, 0)}{\Delta \zeta_c} \stackrel{?}{<} \beta.$$

Falls ja, weiter mit Schritt 3a.

Falls nein, weiter mit Schritt 3b.

Schritt 3a: Testrechnung unter der Annahme des Falles CB zum neuen Zeitpunkt, d. h., Lösung von (6.53) – (6.58). Weiter mit Schritt 4a.

Schritt 4a: Abfrage, ob die erhaltene Basistemperatur den Druckschmelzpunkt unterschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{<} T_0 - \beta H(i, j).$$

Falls ja, Verfahren beendet.

Falls nein, weiter mit Schritt 5a.

Schritt 5a: Rechnung unter der Annahme des Falles TB zum neuen Zeitpunkt, d. h., Lösung von (6.53), (6.54), (6.57) – (6.60); Beendigung des Verfahrens.

Schritt 3b: Annahme des Falles TL zum neuen Zeitpunkt, Durchführung der Schritte 5-8 von “Ausgangspunkt Fall CB für Säule (i, j) ” zur Positionierung der CTS, Beendigung des Verfahrens.

Ausgangspunkt Fall TL für Säule (i, j)

Schritt 1: Testrechnung unter der Annahme des Falles TL zum neuen Zeitpunkt mit der alten CTS-Position, d. h., Lösung von (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66). Weiter mit Schritt 2.

Schritt 2: Abfrage, ob die erhaltene Temperatur an der Unterseite des Kalteisbereichs den Druckschmelzpunkt überschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{>} T_0 - \beta H_c(i, j).$$

Falls ja, weiter mit Schritt 3a.

Falls nein, weiter mit Schritt 3b.

Schritt 3a: Durchführung der Schritte 5-8 von “Ausgangspunkt Fall CB für Säule (i, j) ” zur Positionierung der CTS (Verschiebung nach oben), Beendigung des Verfahrens.

Schritt 3b: Iterative Verschiebung der CTS um jeweils $z_m^{\text{shift}} := 1$ m nach unten gemäß

$$\begin{aligned} H_t^{(*)}(i, j) &= H_t^{(*)}(i, j) - z_m^{\text{shift}}, \\ z_m^{(*)}(i, j) &= z_m^{(*)}(i, j) - z_m^{\text{shift}}, \\ H_c^{(*)}(i, j) &= H_c^{(*)}(i, j) + z_m^{\text{shift}}, \\ \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\widetilde{\Delta t}}, \\ \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\ \frac{\partial H_c^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial h}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\ (a_m^\perp)^{(*)}(i, j) &= a_{m, \text{st}}^\perp(i, j) + \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j), \end{aligned}$$

hiermit Lösung

des Fall-TL-Problems (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66);

diese Verschiebungs-Prozedur wird gestoppt, wenn entweder die CTS um weniger als z_m^{shift} von der Eisbasis entfernt ist,

$$z_m^{(*)}(i, j) \stackrel{?}{<} b(i, j) + z_m^{\text{shift}},$$

oder die erhaltene Temperatur an der Unterseite des Kalteisbereichs den Druckschmelzpunkt überschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{>} T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j).$$

Bei Erfüllung des ersten Kriteriums weiter mit Schritt 4b α , bei Erfüllung des zweiten weiter mit Schritt 4b β .

Schritt 4b α : Positionierung der CTS um $H_t^{\text{offset}} := 1$ mm über der Eisbasis,

$$\begin{aligned} H_t^{(*)}(i, j) &= H_t^{\text{offset}}, \\ z_m^{(*)}(i, j) &= b(i, j) + H_t^{\text{offset}}, \\ H_c^{(*)}(i, j) &= H(i, j) - H_t^{\text{offset}}, \\ \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\Delta t}, \\ \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\ \frac{\partial H_c^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial h}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\ (a_m^\perp)^{(*)}(i, j) &= a_{m, \text{st}}^\perp(i, j) + \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j), \end{aligned}$$

Lösung des Fall-TL-Problems (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66). Weiter mit Schritt 5b α .

Schritt 5b α : Abfrage, ob die erhaltene Temperatur an der Unterseite des Kalteisbereichs den Druckschmelzpunkt unterschreitet,

$$T_c^*(i, j, 0) \stackrel{?}{<} T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j).$$

Falls ja, weiter mit Schritt 6b α .1.

Falls nein, weiter mit Schritt 6b α .2.

Schritt 6b α .1: Rechnung unter der Annahme des Falles TB zum neuen Zeitpunkt, d. h., Lösung von (6.53), (6.54), (6.57) – (6.60). Beendigung des Verfahrens.

Schritt 6b α .2: Interpolation der endgültigen CTS-Position aus der letzten ($z_a := z_m^{(*)}(i, j) = b(i, j) + H_t^{\text{offset}}$) und vorletzten (z_b) provisorischen CTS-Position der Verschiebe-Prozedur, gewichtet mit den zugehörigen Differenzen der errechneten Temperaturen an der Unterseite des Kalteisbereichs vom Druckschmelzpunkt,

$$\text{diffa}, \text{diffb} := T_c^*(i, j) - (T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j))$$

(für die CTS-Positionen z_a bzw. z_b). Hierbei gilt $\text{diffa} > 0$ und $\text{diffb} < 0$; die Interpolationsvorschrift lautet

$$\text{interpol} := \frac{\text{diffa}}{\text{diffa} - \text{diffb}} \cdot (z_b - z_a) \quad (> 0),$$

$$H_t^{(*)}(i, j) = H_t^{(*)}(i, j) + \text{interpol},$$

$$z_m^{(*)}(i, j) = z_m^{(*)}(i, j) + \text{interpol},$$

$$H_c^{(*)}(i, j) = H_c^{(*)}(i, j) - \text{interpol},$$

$$\frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) = \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\widetilde{\Delta t}},$$

$$\frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j) = \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j),$$

$$\frac{\partial H_c^{(*)}}{\partial t}(i, j) = \frac{\partial h}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j),$$

$$(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) = a_{m, \text{st}}^\perp(i, j) + \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j),$$

hiermit Lösung

des Fall-TL-Problems (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66).

Beendigung des Verfahrens.

Schritt 4b β : Interpolation der endgültigen CTS-Position aus der letzten ($z_a := z_m^{(*)}(i, j)$) und vorletzten ($z_b := z_m^{(*)}(i, j) + z_m^{\text{shift}}$) provisorischen CTS-Position der Verschiebe-Prozedur, gewichtet mit den zugehörigen Differenzen der errechneten Temperaturen an der Unterseite des Kalteisbereichs vom Druckschmelzpunkt,

$$\text{diffa}, \text{diffb} := T_c^*(i, j) - (T_0 - \beta H_c^{(*)}(i, j))$$

(für die CTS-Positionen z_a bzw. z_b). Hierbei gilt $\text{diffa} > 0$ und $\text{diffb} < 0$; die

Interpolationsvorschrift lautet

$$\begin{aligned}
interpol &:= \frac{diffa}{diffa - diffb} \cdot z_m^{\text{shift}} \quad (> 0), \\
H_t^{(*)}(i, j) &= H_t^{(*)}(i, j) + interpol, \\
z_m^{(*)}(i, j) &= z_m^{(*)}(i, j) + interpol, \\
H_c^{(*)}(i, j) &= H_c^{(*)}(i, j) - interpol, \\
\frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\widetilde{\Delta t}}, \\
\frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial b}{\partial t}(i, j) + \frac{\partial H_t^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\
\frac{\partial H_c^{(*)}}{\partial t}(i, j) &= \frac{\partial h}{\partial t}(i, j) - \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j), \\
(a_m^\perp)^{(*)}(i, j) &= a_{m, \text{st}}^\perp(i, j) + \frac{\partial z_m^{(*)}}{\partial t}(i, j),
\end{aligned}$$

hiermit Lösung

des Fall-TL-Problems (6.53), (6.54), (6.57), (6.58), (6.60) – (6.66).

Beendigung des Verfahrens.

Glättung der CTS

Die Durchführung des oben beschriebenen Verfahrens zur Unterscheidung zwischen Fall CB, Fall TB und Fall TL sowie bei letzterem zur Positionierung der CTS für alle Eissäulen (i, j) des Rechengebietes tendiert dazu, räumliche Oszillationen des CTS-Verlaufes von Gitterpunkt zu Gitterpunkt zu produzieren. Daher wird nach Abarbeitung aller Eissäulen eine numerische Glättung der erhaltenen Dicken der temperierten Bereiche $H_t^{(*)}(i, j)$ vorgenommen, wobei auf die vier nächsten Nachbarn zugegriffen wird. Im ersten Schritt wird hierzu das Volumen temperierten Eises V_{temp} vor der Glättung berechnet,

$$V_{\text{temp}} = \sum_{i=1}^{i_{\text{max}}-1} \sum_{j=1}^{j_{\text{max}}-1} H_t^{(*)}(i, j) \Delta x \Delta y. \quad (6.103)$$

Der zweite Schritt besteht in der eigentlichen Glättung, welche jedoch nur unter der Voraussetzung einer temperierten Basis zum neuen Zeitpunkt ausgeführt wird,

$$\begin{aligned}
H_{t, \text{smooth}}^{(*)}(i, j) &= (1 - 4D_{Ht}) H_t^{(*)}(i, j) \\
&\quad + D_{Ht} H_t^{(*)}(i + 1, j) + D_{Ht} H_t^{(*)}(i - 1, j) \\
&\quad + D_{Ht} H_t^{(*)}(i, j + 1) + D_{Ht} H_t^{(*)}(i, j - 1) \quad (\text{Fall TB, TL}), \\
H_{t, \text{smooth}}^{(*)}(i, j) &= 0 \quad (\text{Fall CB}). \quad (6.104)
\end{aligned}$$

Für den Glättungsparameter D_{Ht} hat sich der Wert $D_{Ht} = 0.15$ gut bewährt. Im dritten Schritt wird das Volumen temperierten Eises $V_{\text{temp}}^{\text{smooth}}$ nach der Glättung berechnet,

$$V_{\text{temp}}^{\text{smooth}} = \sum_{i=1}^{i_{\text{max}}-1} \sum_{j=1}^{j_{\text{max}}-1} H_{t,\text{smooth}}^{(*)}(i, j) \Delta x \Delta y, \quad (6.105)$$

und im letzten Schritt werden die erhaltenen $H_{t,\text{smooth}}^{(*)}(i, j)$ so korrigiert, daß das ursprüngliche Volumen V_{temp} wiederhergestellt wird,

$$H_t^{(*)}(i, j) = \frac{V_{\text{temp}}}{V_{\text{temp}}^{\text{smooth}}} \cdot H_{t,\text{smooth}}^{(*)}(i, j). \quad (6.106)$$

Schließlich wird mit diesen Werten die Zeitableitung von H_t berechnet:

$$\frac{\partial H_t^*}{\partial t}(i, j) = \frac{H_t^{(*)}(i, j) - H_t(i, j)}{\Delta t}. \quad (6.107)$$

6.6 Das Programmpaket SICOPOLIS

Die Implementierung des in den Abschnitten §6.3 - §6.5 beschriebenen numerischen Lösungsverfahrens des polythermen Eismodells auf dem Rechner erfolgte mit der Programmiersprache FORTRAN 77. Hieraus ist das Programmpaket SICOPOLIS (Simulation COde for POLythermal Ice Sheets) entstanden, dessen Aufbau schematisch in Abbildung 6.3 gezeigt ist.

SICOPOLIS bietet verschiedene Optionen für die Wahl des Anfangszustandes. Zum einen ist es möglich, hierfür Standardkonfigurationen zu verwenden (z. B. Eisfreiheit, heutige Topographie bei isothermer Temperaturverteilung), zum anderen kann auch der Endzustand einer früheren Simulation als Anfangszustand eingelesen werden, wodurch verschiedene Szenarien aneinandergehängt werden können.

Bei der eigentlichen Iteration besteht die Möglichkeit, den polythermen Mode optional abzuschalten und den gesamten Eisbereich mit der Temperaturgleichung (6.57) für kaltes Eis zu rechnen, wobei eventuell erhaltene Temperaturen über dem Druckschmelzpunkt T_M nach der Berechnung auf diesen zurückgesetzt werden. Dies ermöglicht einen direkten Vergleich zwischen polythermer Simulation und Kalteis-Simulation mit einem ansonsten identischen Programm. Weiterhin kann die Berechnung der lithosphärischen Temperatur nach (6.54) unterdrückt werden; statt dessen bei kalter Eisbasis der geotherme Wärmefluß Q_{geoth}^{\perp} direkt an dieser statt an der Lithosphärenbasis vorgegeben werden. Das ist hilfreich für Steady-State-Simulationen, bei denen man sich nur für den resultierenden Gleichgewichtszustand interessiert, welcher ohne den Einfluß der thermischen Trägheit der Lithosphäre wesentlich schneller erreicht wird. Außerdem enthält SICOPOLIS eine Subroutine, die den Enhancement-Faktor E im Fließgesetz als Funktion des Ortes im Eisschild berechnet, wodurch dieser

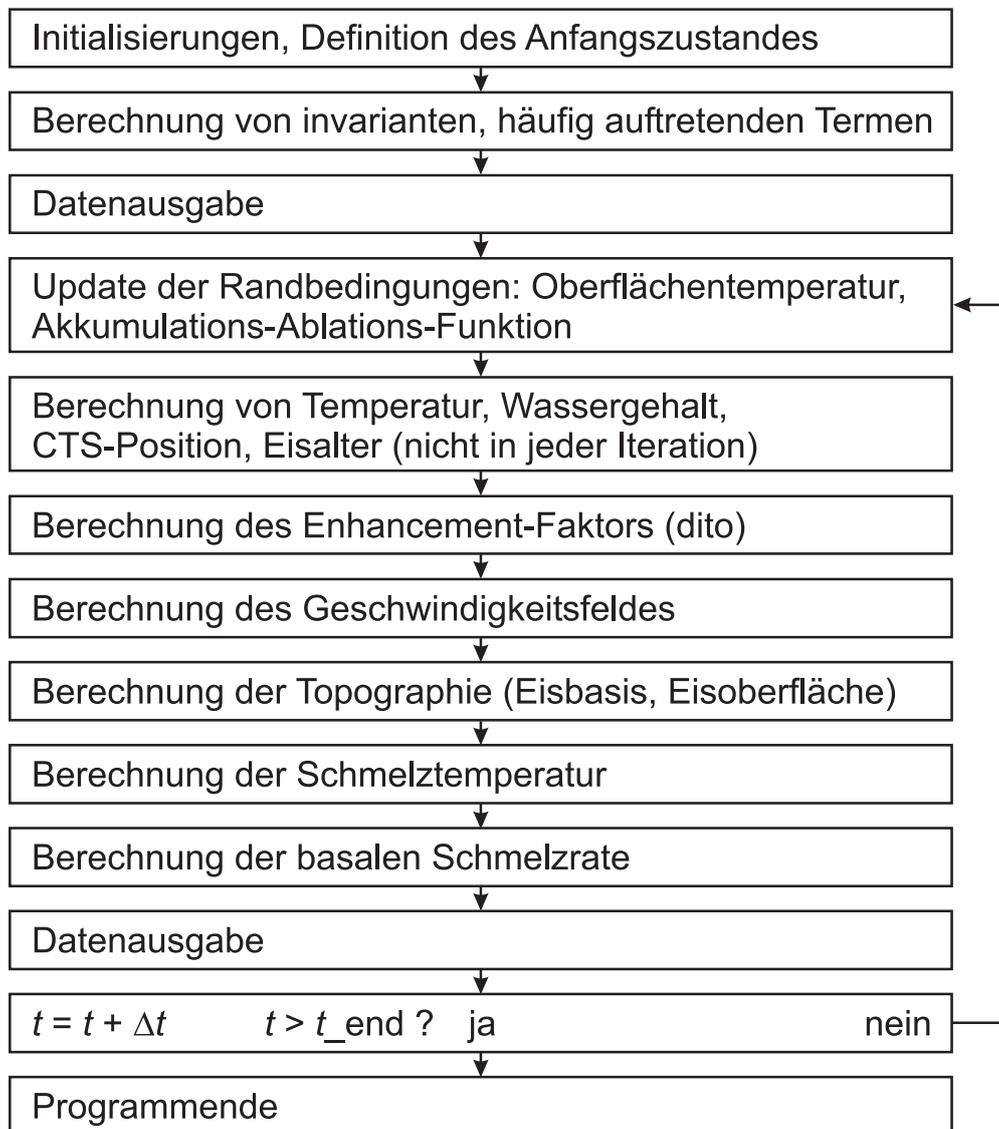


Abbildung 6.3: Ablaufschema des Programms SICOPOLIS zur numerischen Simulation des dynamisch-thermodynamischen Verhaltens polythermer Eisschilde.

z. B. an das Eisalter gekoppelt werden kann, um die unterschiedliche Fluidität von warmzeitlichem und eiszeitlichem Eis zu berücksichtigen (Paterson [63]).

Zwei verschiedene Ausgabedateien werden von SICOPOLIS produziert. In kurzen Zeitabständen (z. B. alle 100 Modelljahre) wird eine Minimalinformation über das aktuelle Eisschild, bestehend aus einfachen Parametern wie Maximalhöhe und -dicke, Volumina des gesamten Eisschilds und des temperierten Eises, eisbedeckte Fläche, von temperiertem Eis bedeckte Fläche, herausgeschrieben. Ergänzend werden in wesentlich größeren Zeitschritten (≥ 10000 Modelljahre) die gesamten berechneten Felder abgespeichert, was jedoch immens viel Plattenplatz benötigt und daher aus naheliegenden Gründen nicht zu oft geschehen kann.

Die zeitliche Iteration, welche die Hauptschleife von SICOPOLIS bildet, wird solange abgearbeitet, bis die Modellzeit einen vorgegebenen Endwert t_{end} überschreitet. Anschließend werden die Hauptschleife beendet, alle angelegten Dateien geschlossen und eine Meldung über die reguläre Beendigung des Programmlaufs ausgegeben. Die graphische Darstellung der Ergebnisse wird schließlich von einem separaten Programm SICOGRAPH vorgenommen, wobei das Graphikpaket DISSPLA zugrundegelegt ist.

7 Simulationen für das EISMINT-Eisschild

EISMINT (European Ice Sheet Modelling INiTiative) ist ein von der European Science Foundation (ESF) gefördertes Programm, in dessen Rahmen verschiedene existierende 2-d- und 3-d-Eisschildmodelle auf ein standardisiertes Problem angewendet werden, um die Ergebnisse miteinander vergleichen zu können. Dieser Modellvergleich geschieht auf zwei Ebenen: In Level 1 wird die gesamte Physik vorgeschrieben, hier geht es um Vergleiche der verwendeten numerischen Schemata. Level 2 definiert dagegen nur die klimatischen Randbedingungen; den Modellierern ist freigestellt, welche physikalischen Effekte (z.B. temperaturabhängige thermische Parameter, basales Gleiten, polythermes Eis) berücksichtigt werden sollen. Es ist geplant, die Ergebnisse im Rahmen einer Publikation aller an dem Projekt beteiligten Modellierern zu veröffentlichen. In diesem Kapitel werden als erste Anwendung von SICOPOLIS Simulationen für das EISMINT-Eisschild beschrieben.

7.1 Das EISMINT-Eisschild

Das Problem, welches von den Teilnehmern an der oben beschriebenen Modellvergleichsinitiative behandelt wird, wurde von Huybrechts & Payne [42] formuliert. Die Eisbasis besteht aus einem ebenen Quadrat der Seitenlänge 1500 km, das sowohl für Level 1 als auch für Level 2 starr auf Meereshöhe verbleiben soll, d.h., es wird keine zeitliche Evolution der Position der Eisbasis (bzw. Lithosphärenoberseite) berücksichtigt. An den Rändern dieses Bereiches wird die Eisdicke zu Null gesetzt; der Massenfluß durch den Rand wird als Kalbungsrate interpretiert. Die horizontale Gitterweite ist zu 50 km vorgegeben, so daß das numerische Gitter aus 31×31 Gitterpunkten besteht.

Für die Level 1-Simulationen sind die physikalischen Größen vorgegeben. Folgende Unterschiede zu dem in §5.5 festgelegten Satz bzw. dem in §6 beschriebenen numerischen Modell ergeben sich:

- Konstanter Rate-Faktor im Fließgesetz:
 $EA(T') = EA_t(\omega) \equiv A_{\text{level1}} = 3.169 \cdot 10^{-24} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$;
dies bewirkt eine Entkopplung von Dynamik und Thermodynamik.
- Temperaturunabhängige thermische Parameter:
 $\kappa = 2.1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $c = 2009 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.
- Haftbedingung sowohl für kalte als auch für temperierte Eisbasis, somit kein basales Gleiten.

- Keine Berechnung der Lithosphärentemperatur (thermische Trägheit der Lithosphäre wird nicht berücksichtigt).
- Keine Berücksichtigung der basalen Schmelzrate \mathcal{P}_b^w bei der Berechnung von v_z und h .

Bei Level 2 wird hingegen das Modell wie in §6 beschrieben (abgesehen von der starren Lithosphäre; $b(x, y, t) \equiv 0$) mit den in §5.5 definierten Standardwerten verwendet.

Zwei verschiedene Sätze von stationären Randbedingungen für die Oberflächentemperatur T_s , die Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^\perp und den geothermen Wärmefluß Q_{geoth}^\perp sind definiert: ein Satz ohne Ablation, bei dem sich das Eisschild tatsächlich bis zum Rand ausdehnt und der gesamte Massenverlust durch Kalbung vonstatten geht, und ein Satz mit Ablation, bei dem das Eisschild den Rand nicht erreicht. In dieser Arbeit sollen nur die Simulationen zum ablationslosen Fall vorgestellt werden; hierfür ist

$$\begin{aligned}
T_s &= -34.15^\circ\text{C} + 8 \cdot 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C km}^{-3} \times (\text{dist})^3, \\
a_s^\perp &= 0.3 \text{ m a}^{-1}, \\
Q_{\text{geoth}}^\perp &= 42 \text{ mW m}^{-2},
\end{aligned} \tag{7.1}$$

wobei dist das Maximum der beiden Abstände des betrachteten Punktes von den beiden Mittellinien des Quadrates bedeutet: $\text{dist} = \max(|x - x_{\text{div}}|; |y - y_{\text{div}}|)$, mit $(x_{\text{div}}, y_{\text{div}}) := (750 \text{ km}, 750 \text{ km})$. Weiterhin sind Randbedingungen für transiente (zeitabhängige) Simulationen mit Sinusantrieb definiert. Die Abweichungen von den obigen stationären Werten sind für den Fall ohne Ablation

$$\begin{aligned}
\Delta T_s &= 10^\circ\text{C} \times \sin(2\pi t/t_{\text{Mil}}), \\
\Delta a_s^\perp &= 0.2 \text{ m a}^{-1} \times \sin(2\pi t/t_{\text{Mil}}),
\end{aligned} \tag{7.2}$$

der geotherme Wärmefluß Q_{geoth}^\perp bleibt konstant. Für die Perioden des Sinusantriebs werden die Werte $t_{\text{Mil}} = 20 \text{ ka}, 40 \text{ ka}$ gewählt, was näherungsweise Milanković-Zyklen entspricht (Schönwiese [66]).

Der Enhancement-Faktor E im Fließgesetz soll für Level 2 räumlich und zeitlich uniform so gewählt werden, daß im stationären Zustand eine maximale Eisdicke von etwa 3500 m resultiert. Diese Vorgabe dient dazu, eine bessere Vergleichbarkeit zwischen den verschiedenen Modellen mit unterschiedlicher Physik und Numerik zu erreichen. Daher sind alle hier vorgestellten Level 2-Simulationen mit $E = 2.8$ durchgeführt worden.

7.2 Diskussion der Simulationen

Sechs verschiedene Modellläufe zum EISMINT-Eisschild sollen im folgenden besprochen werden. Im einzelnen sind dies:

Lauf ssfml1: Level 1, Steady-State-Lauf, eisfreier Anfangszustand, $t = 0 \dots 200$ ka.

Lauf ssfml2: Level 2, Steady-State-Lauf (daher trotz Level 2 keine Berechnung der Lithosphärentemperatur), eisfreier Anfangszustand, $t = 0 \dots 200$ ka.

Lauf t2fml1: Level 1, transienter Lauf mit Sinusantrieb ($t_{\text{Mil}} = 20$ ka), Anfangszustand: stationärer Endzustand von ssfml1, $t = 0 \dots 200$ ka.

Lauf t4fml1: Wie t2fml1, jedoch $t_{\text{Mil}} = 40$ ka.

Lauf t2fml2: Level 2, transienter Lauf mit Sinusantrieb ($t_{\text{Mil}} = 20$ ka), Anfangszustand: stationärer Endzustand von ssfml2, $t = 0 \dots 200$ ka.

Lauf t4fml2: Wie t2fml2, jedoch $t_{\text{Mil}} = 40$ ka.

Alle Läufe wurden mit einer Vertikalauflösung von 51 Gitterpunkten im Kalteisbereich, 11 Gitterpunkten im temperierten Eisbereich und 11 Gitterpunkten in der Lithosphäre durchgeführt; die verwendeten Zeitschrittweiten betragen $\Delta t = 10$ a und $\widetilde{\Delta t} = 100$ a.

Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in den Abbildungen 7.1 – 7.24 dargestellt. Folgende Größen werden gezeigt:

- Topographie der Eisoberfläche h , Oberflächengeschwindigkeit \mathbf{v}_s , basale homologe Temperatur T'_b , jeweils als Isolinienplots über x und y (nur für die beiden Steady-State-Läufe).
- Geschwindigkeit \mathbf{v} , homologe Temperatur T' , Dicke der temperierten Eisschicht H_t für den Querschnitt $y = y_{\text{div}}$ durch den Scheitelpunkt des Eisschildes.
- Oberflächengeschwindigkeit $v_{x,s}$, basale homologe Temperatur T'_b , Massenfluß q_x über x im Querschnitt $y = y_{\text{div}}$.
- Geschwindigkeit $v_{x,\text{half}}$ in der Säule $(x_{\text{half}}, y_{\text{div}})$, Wassergehalt ω_2 in der Säule (x_2, y_{div}) (wobei x_2 den vom Scheitelpunkt aus gesehen zweiten Gitterpunkt mit temperierter Eisschicht längs y_{div} bezeichnet), Geschwindigkeiten $v_{z,\text{div}}$ und $v_{z,\text{half}}$ in den Säulen $(x_{\text{div}}, y_{\text{div}})$ bzw. $(x_{\text{half}}, y_{\text{div}})$, homologe Temperaturen T'_{div} und T'_{half} analog, jeweils als Funktion von z .

- Oberflächentemperatur-Antrieb ΔT_s , basale homologe Temperatur $T'_{b,\text{div}}$ bei $(x_{\text{div}}, y_{\text{div}})$, gesamtes Eisvolumen V_{ges} , maximale Eishöhe h_{max} , temperiertes Eisvolumen V_{temp} , maximale Dicke der temperierten Eisschicht $H_{t,\text{max}}$, eisbedeckte Bodenfläche $A_{i,b}$, von temperiertem Eis bedeckte Bodenfläche $A_{t,b}$, Massenfluß $q_{x,\text{half}}$ bei $(x_{\text{half}}, y_{\text{div}})$, jeweils als Funktion der Zeit t .

Hierbei bedeuten $x_{\text{div}} := 750$ km und $y_{\text{div}} := 750$ km die Position des Scheitelpunktes des Eisschildes (Mittelpunkt des Quadrates) sowie $x_{\text{half}} := 1150$ km eine Position auf halbem Weg von x_{div} bis zum rechten Eisrand. Abgesehen von den Zeitentwicklungs-Plots beziehen sich alle Größen auf den erreichten Endzustand der betreffenden Simulation.

Im Vergleich der beiden Steady-State-Läufe `ssfm1` und `ssfm2` zeigen sich einige charakteristische Unterschiede. So erkennt man beim Vergleich der resultierenden Topographien (Abb. 7.1, 7.4, 7.7, 7.10), daß zwar beide Läufe ein kappenförmiges Eisschild produzieren, die Eiskappe des Level 2-Laufes jedoch wesentlich spitzer erscheint. Das liegt daran, daß bei Level 2 basales Gleiten auf temperierter Eisbasis berücksichtigt ist, wodurch das randnahe Eis schneller zu den Seiten hin abfließt als bei Level 1 und die Randbereiche somit dünner werden. Damit einher gehen auch die bei `ssfm2` größeren Oberflächengeschwindigkeiten (Abb. 7.2, 7.5, 7.8, 7.11).

Eine zusätzliche Konsequenz des basalen Gleitens bei Level 2 ist die durch die generell größeren Geschwindigkeiten im Eis verstärkte Advektion von kaltem Oberflächeneis nach unten, wodurch `ssfm2` ein kälteres Eisschild als `ssfm1` hervorbringt (Abb. 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.9, 7.10, 7.11, 7.12). Sehr kraß tritt dieser Unterschied bei der Ausdehnung der temperierten Bereiche zutage. Zwar unterscheiden sich die Bodenflächen mit temperierter Eisbasis $A_{t,b}$ mehr in der Geometrie als in der Größe (Abb. 7.3, 7.9), die temperierten Eisvolumina sind jedoch etwa um den Faktor 20 verschieden (Abb. 7.4, 7.6, 7.10, 7.12). Dies zeigt, daß eine gute Kenntnis der physikalischen Vorgänge an der Eisbasis sehr wichtig für die Vorhersage der Ausdehnung einer temperierten Eisschicht ist.

Ein weiterer bemerkenswerter Unterschied zwischen `ssfm1` und `ssfm2` besteht im Verlauf des Geschwindigkeitsprofils $v_{x,\text{half}}$ (Abb. 7.5, 7.11). Hier ist der Grenzschichtcharakter des bodennahen, großen Scherkräften unterliegenden Eises für den Level 2-Lauf wesentlich stärker ausgeprägt als beim Level 1-Lauf, bei dem der Anstieg der Geschwindigkeit mit der Höhe deutlich gleichmäßiger verläuft. Das hat seine Ursache darin, daß bei Level 2 der starke Anstieg der Eisfluidität mit der Temperatur berücksichtigt ist, wodurch die Scherung des relativ warmen, bodennahen Eises gegenüber dem kälteren Eis weiter oben begünstigt wird.

Der Verlauf des Wassergehaltes ω_2 scheint bei `ssfm1` (Abb. 7.5) eine Inkonsi-

stanz aufzuweisen. Obwohl bei der zugehörigen Position (x_2, y_{div}) Schmelzbedingungen an der CTS herrschen (Abb. 7.4), geht der Wassergehalt an der CTS nicht auf Null zurück. Die Ursache für dieses Verhalten liegt in der Glättungsprozedur für die CTS-Position (§6.5) zusammen mit den bei Level 1 auftretenden sehr großen Dicken der temperierten Eisschicht aufgrund des unberücksichtigten basalen Gleitens (siehe oben). Die Glättung nach erfolgter CTS-Positionierung bewirkt, daß bei (x_2, y_{div}) die relativ kleine Dicke H_t der temperierten Eisschicht durch größere Dicken in der Nachbarschaft vergrößert wird. In der darauffolgenden Iteration hat die CTS daher die Tendenz, wieder nach unten zu wandern, wodurch bei der Berechnung des Wassergehaltes Gefrierbedingungen diagnostiziert werden. Dieses Phänomen tritt jedoch bei der physikalisch realistischeren Level 2-Simulation nicht auf, weil dort wegen der wesentlich geringeren Dicken der temperierten Eisschicht der absolute Einfluß der CTS-Glättung auf H_t kleiner ist. In Abb. 7.11 erkennt man daher auch einen an der CTS auf Null zurückgehenden Wassergehalt ω_2 , wie es den dort vorherrschenden Schmelzbedingungen entspricht.

Bei den vier transienten Läufen t2fml1, t4fml1, t2fml2, t4fml2 erkennt man zunächst, daß in der zeitlichen Entwicklung mit Ausnahme der sowieso konstanten Vereisungsfläche $A_{i,b}$ alle gezeigten Größen der antreibenden Milanković-Periode $t_{\text{Mil}} = 20$ bzw. 40 ka folgen (Abb. 7.15, 7.18, 7.21, 7.24). Das antreibende Sinussignal erscheint zwar bei einigen Größen verzerrt, was auf Oberschwingungen hindeutet, jedoch treten keine Effekte wie Periodenverdopplungen oder gar chaotisches Verhalten auf, wie dies von Abe-Ouchi [1] bei der Modellierung der EGIG-Traversal Grönlands gefunden wurde⁵. Es fällt auf, daß sowohl für Level 1 als auch für Level 2 die Schwingungsamplituden der rein dynamischen Größen V_{ges} , h_{max} und $q_{x,\text{half}}$ im Vergleich der beiden verschiedenen Anregungsperioden fast gleich sind, während die Amplituden der direkt mit dem Temperaturfeld zusammenhängenden Größen $T'_{b,\text{div}}$, V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$ und $A_{t,b}$ bei 40 ka-Anregung deutlich größer sind als bei 20 ka-Anregung. Das liegt daran, daß sich die Eistopographie wesentlich schneller auf geänderte Randbedingungen einstellt als das Temperaturfeld (vgl. auch die Zeitentwicklung bei den Steady-State-Läufen; Abb. 7.6, 7.12), wodurch das Temperaturfeld der kleineren Periode deutlich schlechter folgen kann als der größeren.

Es mag erstaunen, daß in allen vier Fällen das Eisvolumen V_{ges} und die Maximalhöhe h_{max} in Phase statt in Gegenphase mit der antreibenden Temperatur ΔT_s sind, würde man doch bei wärmeren Lufttemperaturen ein dünneres Eisschild erwarten. Der Grund dafür ist in der speziellen Vorgabe der Randbedingungen zu su-

⁵Das bedeutet jedoch nicht, daß die einfache Geometrie des EISMINT-Eisschildes prinzipiell kein irreguläres Verhalten zuläßt. Es besagt lediglich, daß dies *im Rahmen der hier gewählten transienten klimatischen Randbedingungen* nicht auftritt.

chen, denn erstens ist kein Oberflächenschmelzen vorgegeben, welches bei wärmeren Temperaturen verstärkt Eis abbauen würde, und zweitens nimmt gemäß (7.2) die Akkumulationsrate mit steigender Oberflächentemperatur stark zu. Diese Zunahme überkompensiert offenbar die leichtere Eisdeformierbarkeit aufgrund der höheren Temperaturen und des größeren temperierten Eisvolumens.

Vergleicht man die Endzustände der transienten Läufe mit denen der Steady-State-Läufe, so zeigt sich, daß bei den transienten Läufen ausgeprägte oberflächennahe Temperaturinversionen (d. h., die Temperatur nimmt mit steigender Tiefe ab statt zu) sowohl im Randbereich als auch in der Mitte des Eisschildes auftreten (Abb. 7.13, 7.16, 7.19, 7.22), während dies bei den Steady-State-Läufen nur für den Randbereich gilt (Abb. 7.4, 7.10). Besonders augenfällig wird das durch die geschlossenen -35°C -Isolinien der homologen Temperatur. Diese Erscheinung liegt darin begründet, daß die letzte Viertelphase der Anregung vor dem Ende des jeweiligen Laufes nach $t = 200$ ka in allen Fällen einen Temperaturanstieg von $\Delta T_s = -10^{\circ}\text{C}$ auf $\Delta T_s = 0^{\circ}\text{C}$ beinhaltet (welcher im übrigen den Übergang von der letzten (Würm-) Kaltzeit zur heutigen (Neo-) Warmzeit ziemlich realistisch wiedergibt). Das Eis in einiger Tiefe hat diese niedrigen Temperaturen noch gespeichert, woraus die beobachtete Inversion resultiert. Bei den Steady-State-Läufen läßt sich die nahe dem Eisrand ebenfalls vorhandene Temperaturinversion natürlich nicht so erklären; hier liegt die Ursache in der Form der Eisbewegung selbst, welche kaltes Oberflächeneis aus den randferneren Gebieten advektiv unter das wärmere Oberflächeneis in Randnähe befördert (selbstverständlich tritt dieser Effekt auch bei den transienten Läufen auf und trägt dort ebenfalls zur Temperaturinversion in Randnähe bei).

Die bereits oben bei der Besprechung der Steady-State-Läufe erwähnte Erscheinung, daß der Wassergehalt ω_2 bei *ssfml1* trotz Schmelzbedingungen an der CTS nicht verschwindet, tritt auch bei *t2fml1* und *t4fml1* auf (Abb. 7.14, 7.17) und hat die gleiche Ursache. Bei den realistischeren Level 2-Läufen *t2fml2* und *t4fml2* (Abb. 7.20, 7.23) geht hingegen ω_2 an der CTS auf Null zurück; *t4fml2* ergibt zudem als einziger der sechs betrachteten Läufe ein Wassergehaltsprofil ω_2 , welches auf einigen Gitterpunkten auch Werte zwischen Null und $\omega_{\text{max}} = 1\%$ annimmt.

Abschließend sei auf eine deutlich sichtbare Auswirkung der bei den transienten Level 2-Läufen berücksichtigten thermischen Trägheit der Lithosphäre hingewiesen. Betrachtet man die Zeitentwicklung der homologen Basaltemperatur unter dem Scheitelpunkt des Eisschildes $T'_{b,\text{div}}$, so sieht man, daß diese bei den beiden Level 1-Läufen (Abb. 7.15, 7.18) bereits nach ca. 75 ka gut eingeschwungen ist, während für die Level 2-Läufe (Abb. 7.21, 7.24) selbst am Ende der jeweiligen Simulation nach 200 ka noch eine Drift zu größeren Werten hin festzustellen ist. Solche extrem großen Zeit-

konstanten bei der Einstellung der Temperatur auf geänderte Randbedingungen sind typisch für die Auswirkung der Lithosphäre und zeigen auf, daß diese für realistische Simulationen transienter Temperaturentwicklungen in Eisschilden (und damit einhergehend auch temperierter Eisbereiche) unbedingt berücksichtigt werden muß.

7.3 Abbildungen zu den Simulationen für das EISMINT-Eisschild

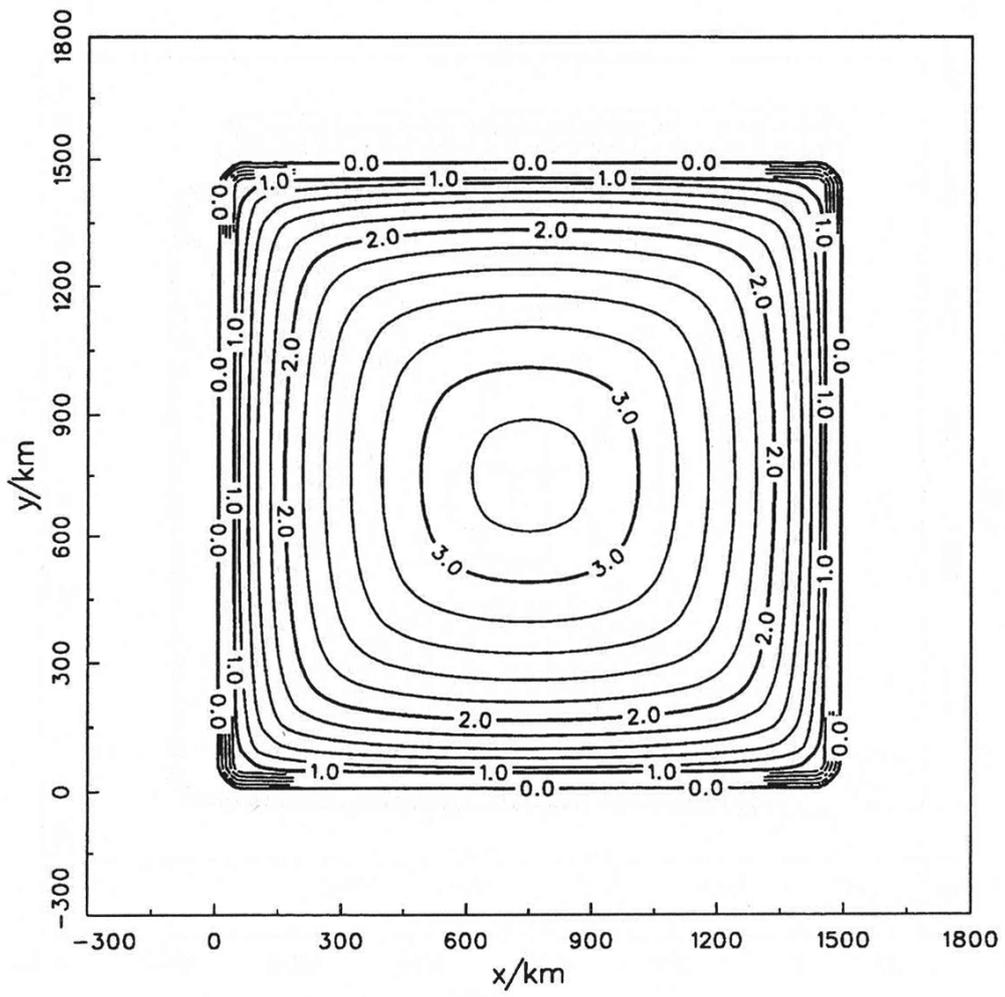


Abbildung 7.1: Endzustand von Lauf ssfm1: Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m.

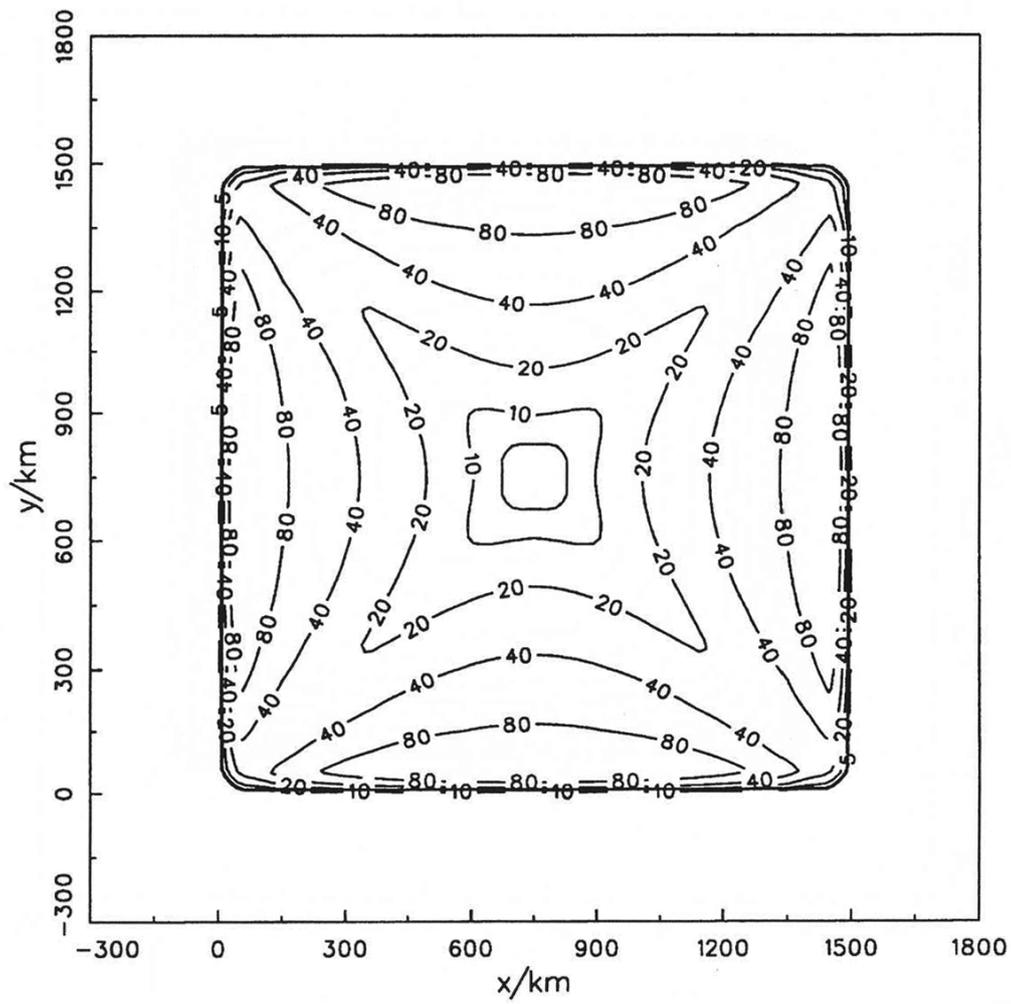


Abbildung 7.2: Endzustand von Lauf ssfn1: Eisoberflächengeschwindigkeit (in km/a). Die Geschwindigkeiten zu aufeinanderfolgenden Isolinien unterscheiden sich jeweils um den Faktor zwei.

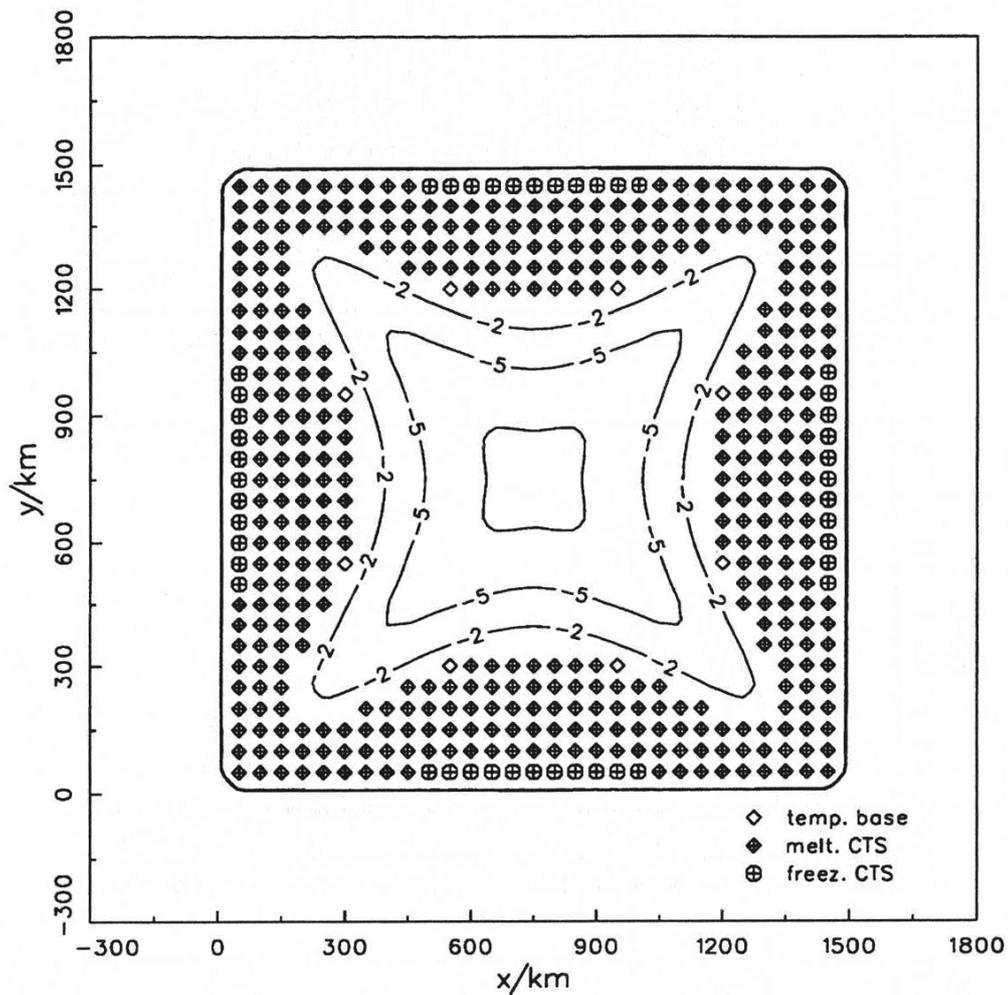


Abbildung 7.3: Endzustand von Lauf ssfml1: Homologe Temperatur an der Eisbasis (in °C). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C. Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten.

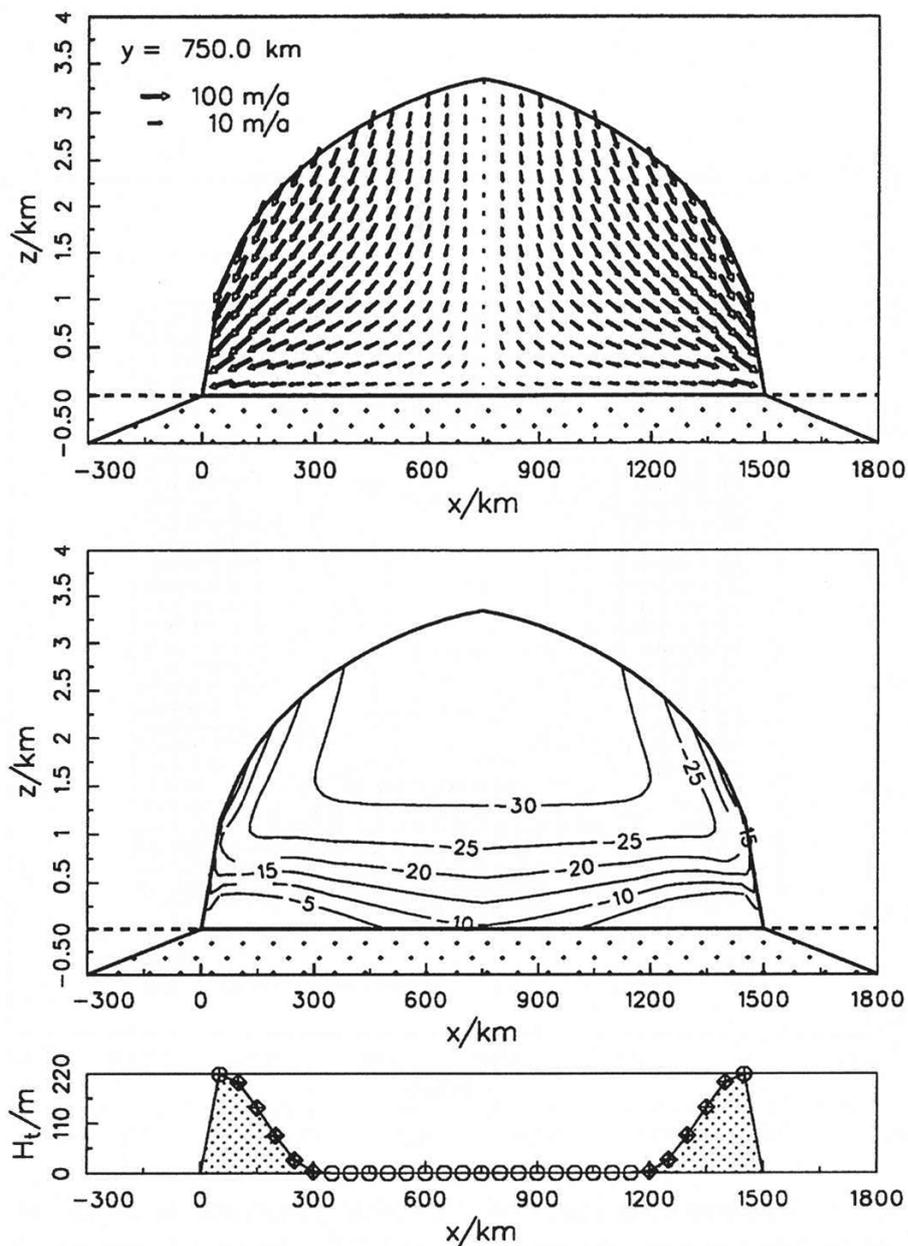


Abbildung 7.4: Endzustand von Lauf ssfm1: Querschnitt bei $y = 750$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

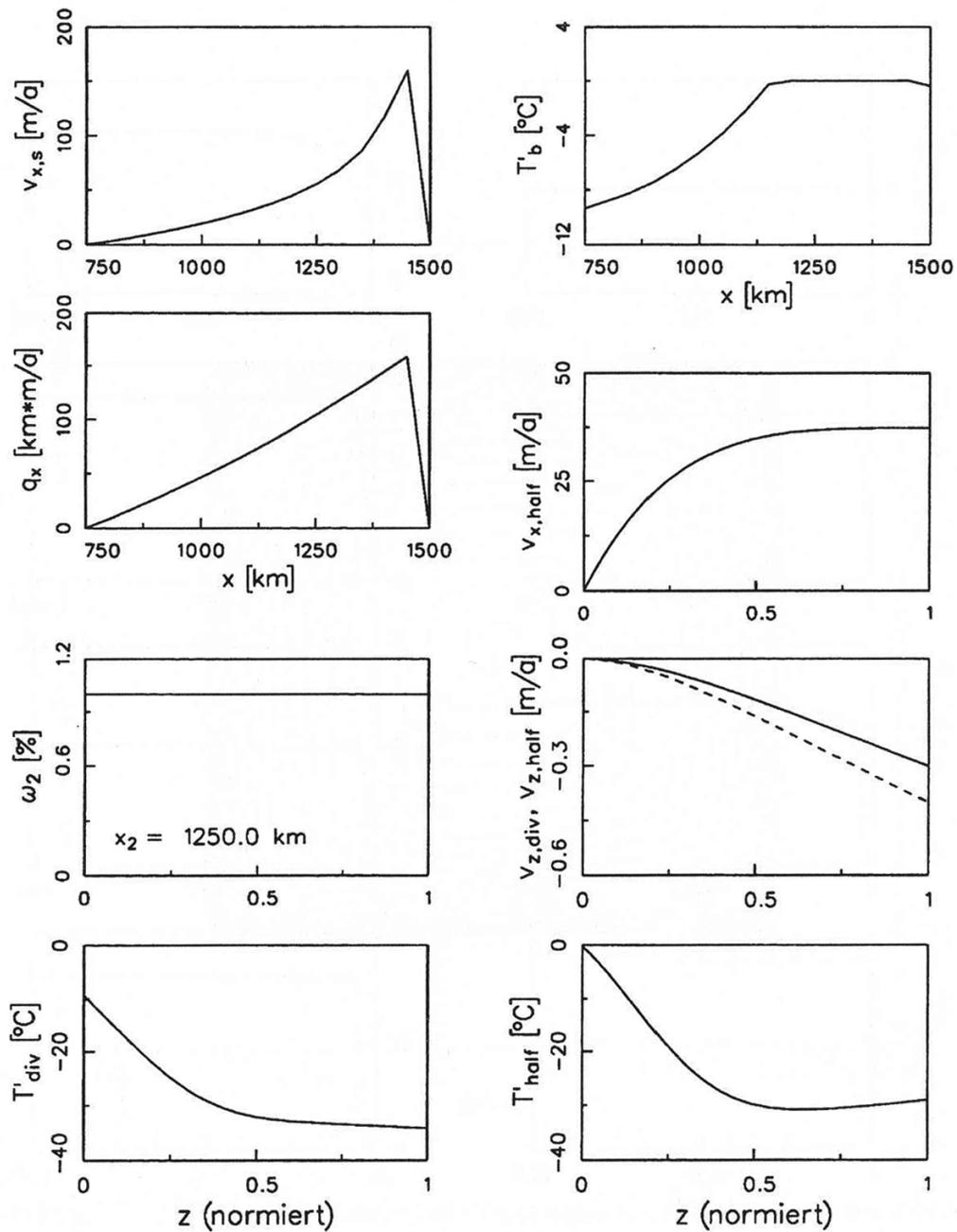


Abbildung 7.5: Endzustand von Lauf ssfml1: Querschnitt bei $y = 750$ km. $v_{x,s}$, T'_b , q_x als Funktion von x ; $v_{x,half}$, ω_2 (mit Angabe der zugehörigen Position x_2), $v_{z,div}$, $v_{z,half}$ (gestrichelt), T'_{div} , T'_{half} als Funktion von z (für ω_2 auf H_t , für die anderen Plots auf H normiert). Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

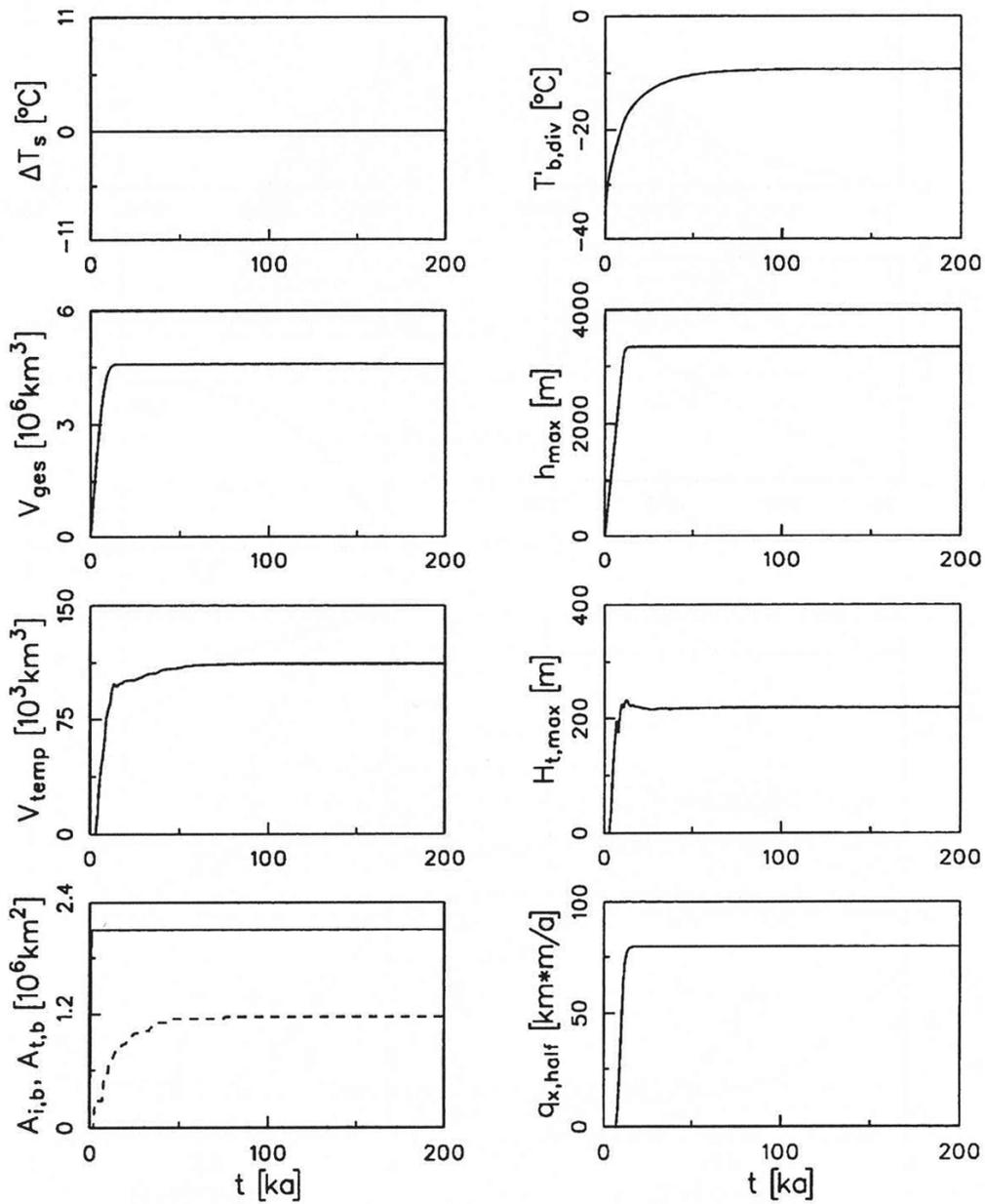


Abbildung 7.6: Lauf ssfml1: Zeitliche Entwicklung von ΔT_s , $T'_{b,div}$, V_{ges} , h_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$, $A_{t,b}$ (gestrichelt), $q_{x,half}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

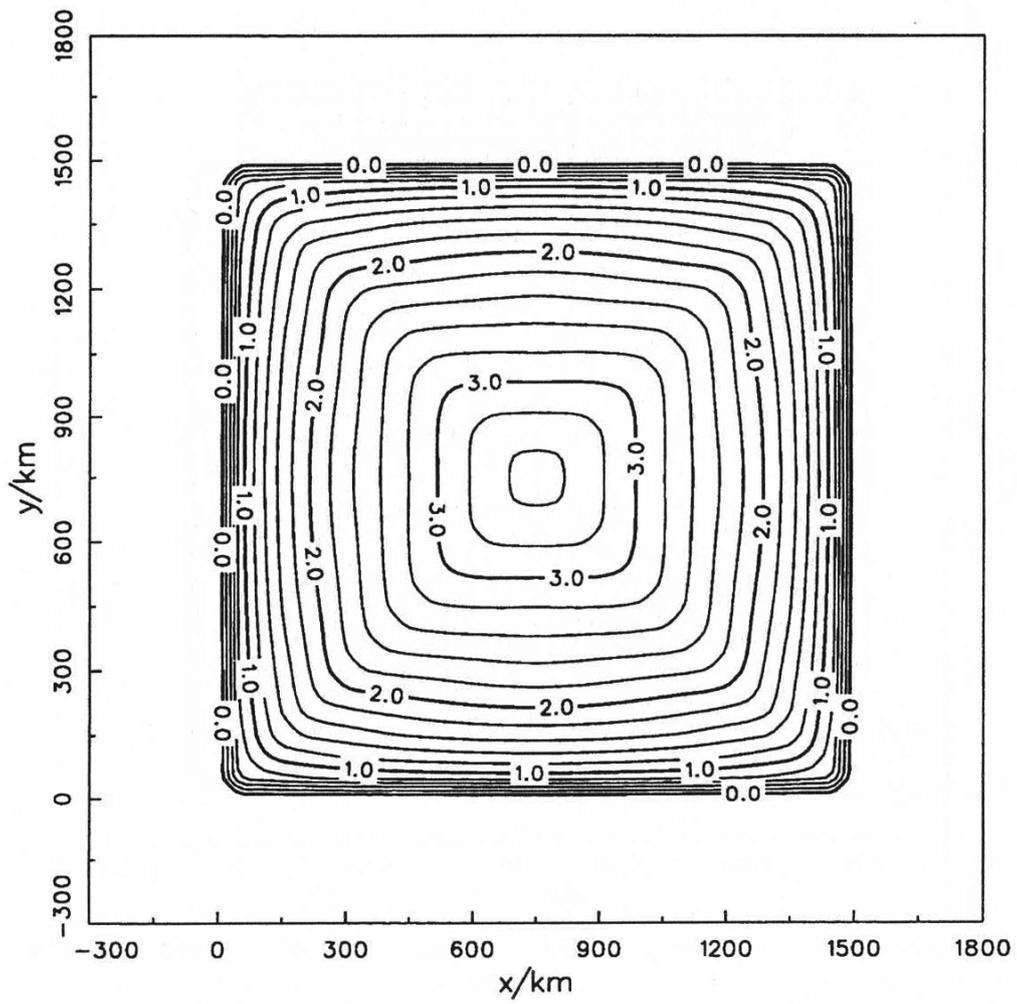


Abbildung 7.7: Endzustand von Lauf ssfm12: Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m.

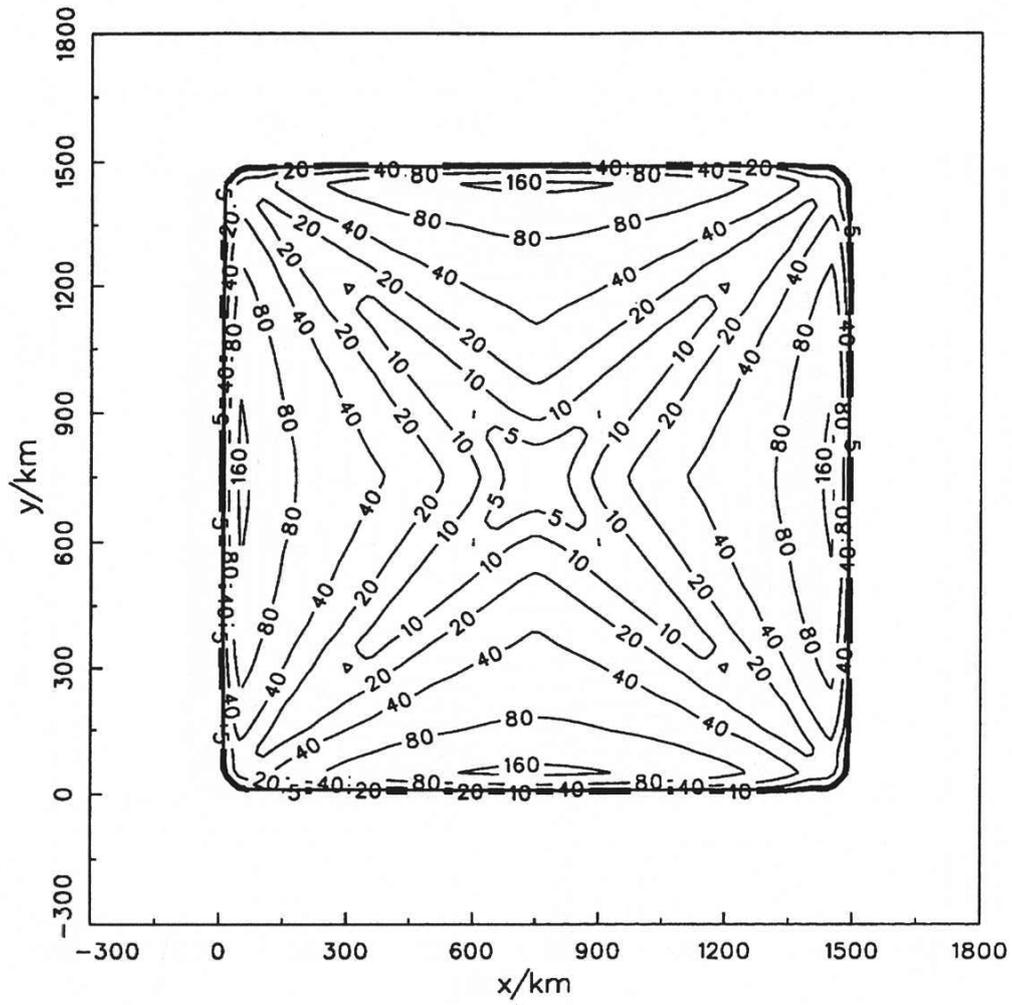


Abbildung 7.8: Endzustand von Lauf ssfnl2: Eisoberflächengeschwindigkeit (in km/a). Die Geschwindigkeiten zu aufeinanderfolgenden Isolinien unterscheiden sich jeweils um den Faktor zwei.

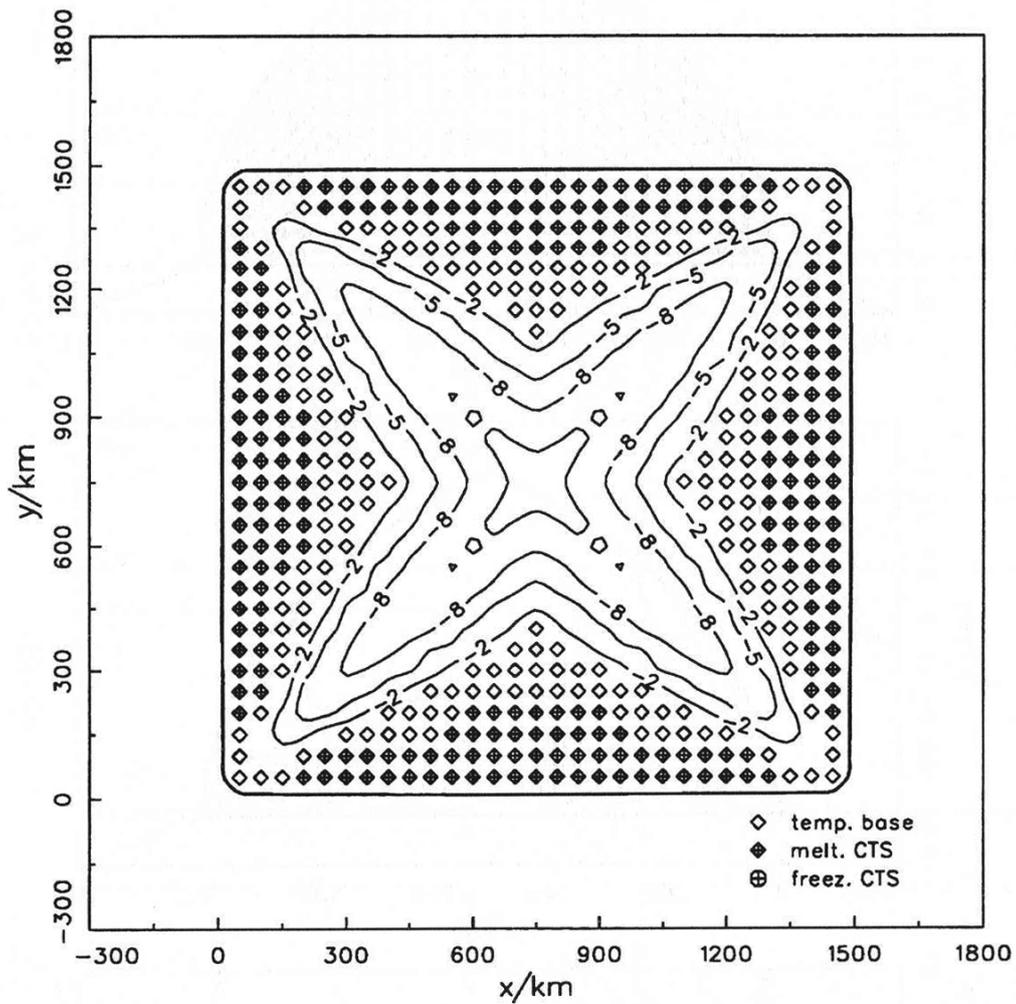


Abbildung 7.9: Endzustand von Lauf ssfml2: Homologe Temperatur an der Eisbasis (in °C). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C. Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten.

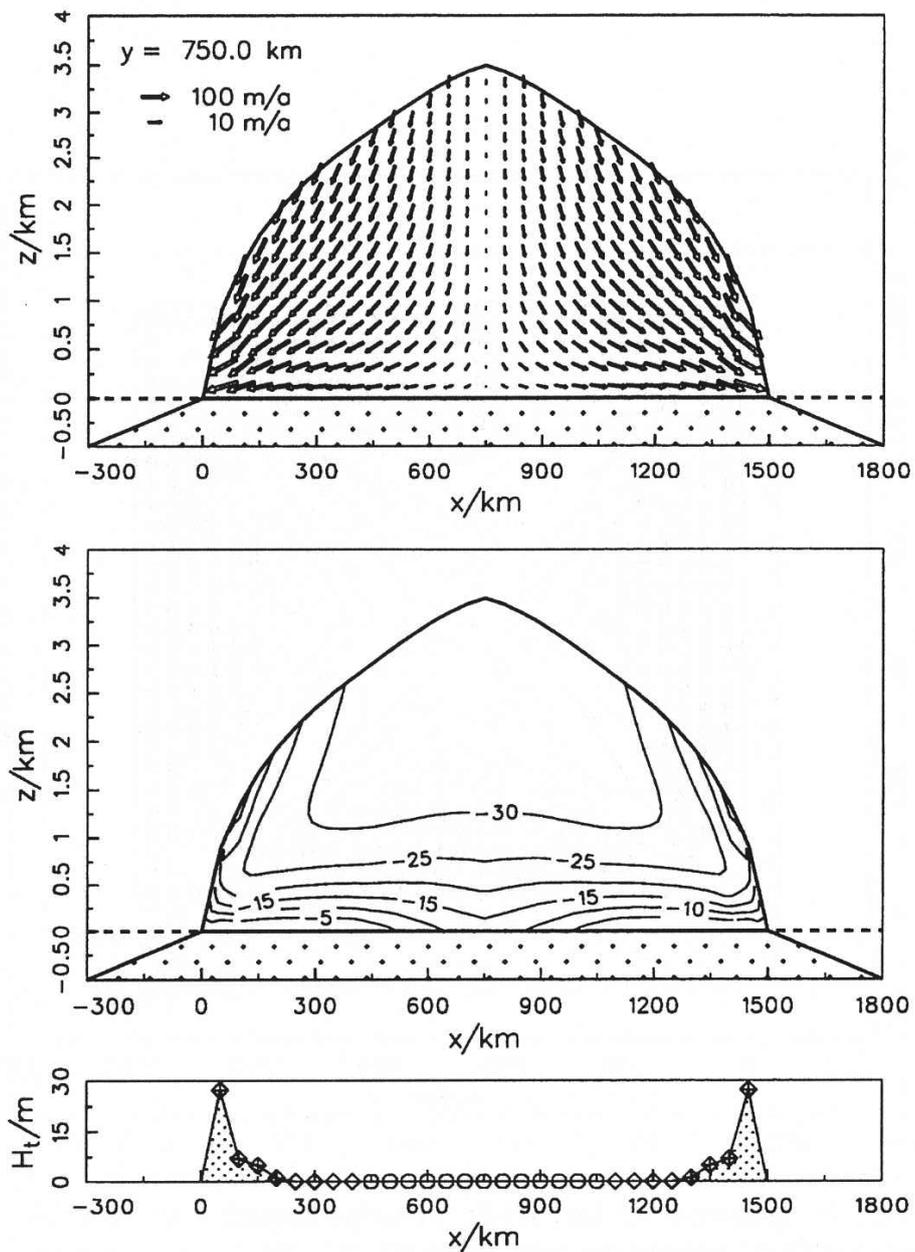


Abbildung 7.10: Endzustand von Lauf ssfml2: Querschnitt bei $y = 750$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

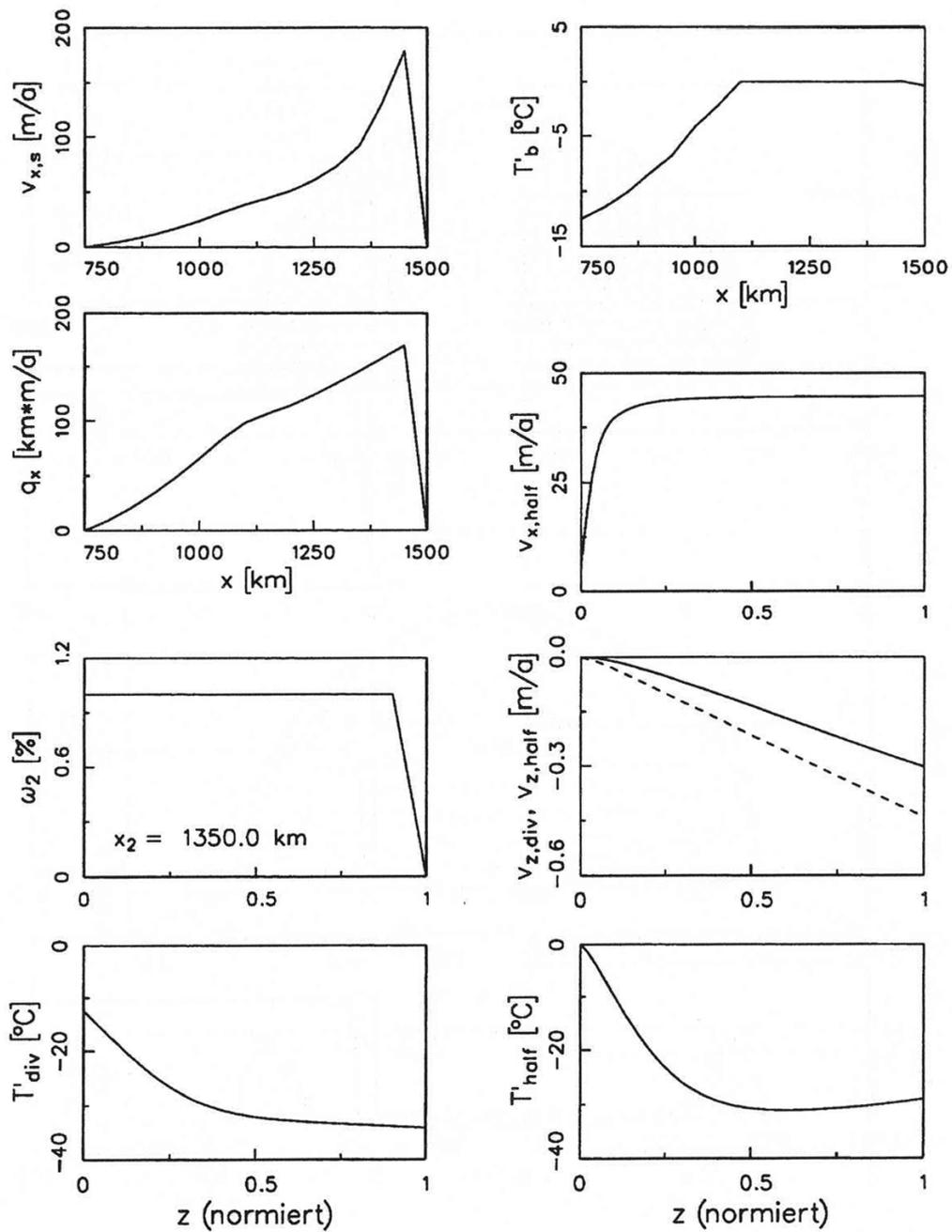


Abbildung 7.11: Endzustand von Lauf ssfml2: Querschnitt bei $y = 750$ km. $v_{x,s}$, T'_b , q_x als Funktion von x ; $v_{x,half}$, ω_2 (mit Angabe der zugehörigen Position x_2), $v_{z,div}$, $v_{z,half}$ (gestrichelt), T'_{div} , T'_{half} als Funktion von z (für ω_2 auf H_t , für die anderen Plots auf H normiert). Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

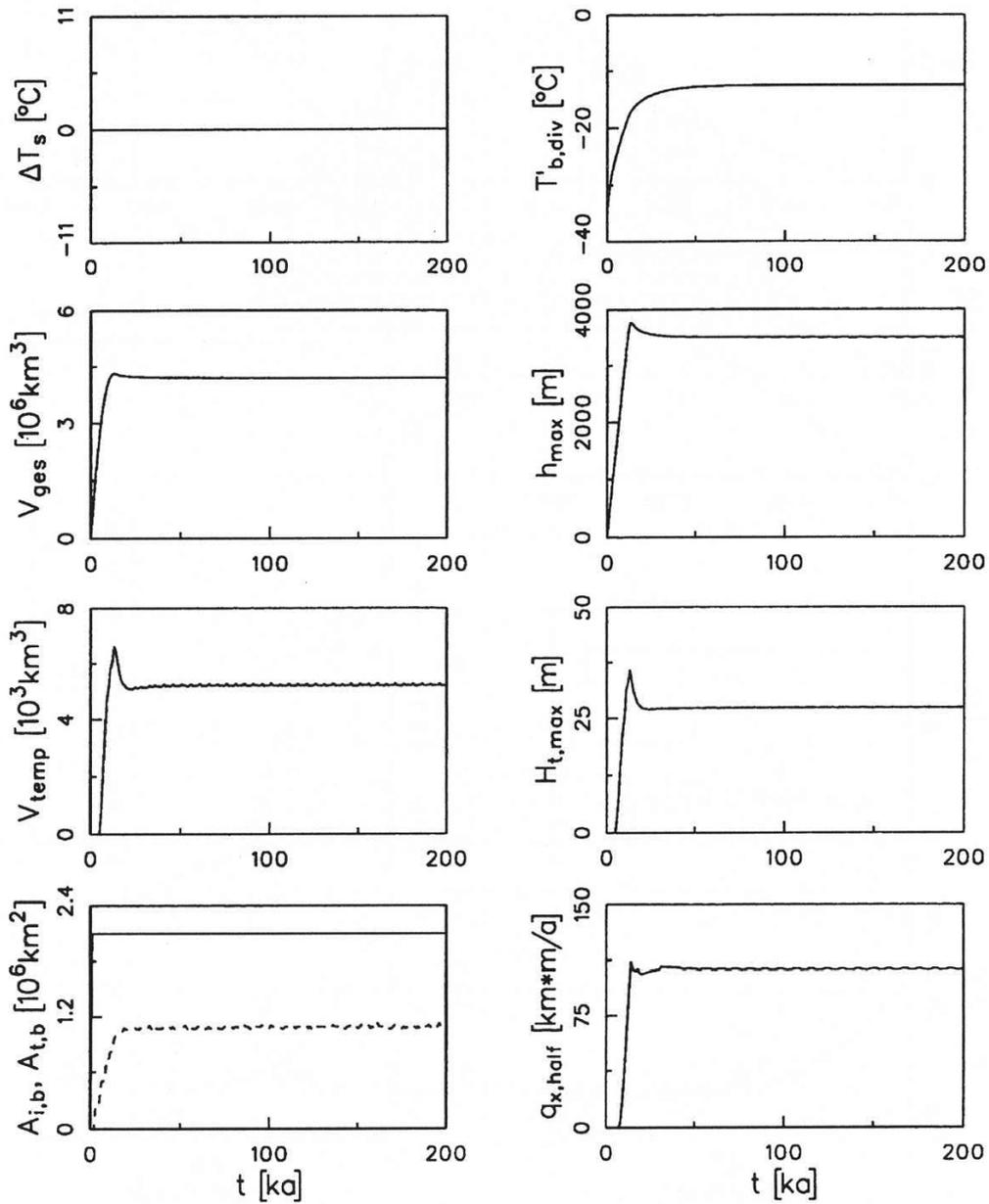


Abbildung 7.12: Lauf ssfml2: Zeitliche Entwicklung von ΔT_s , $T'_{b,div}$, V_{ges} , h_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$, $A_{t,b}$ (gestrichelt), $q_{x,half}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

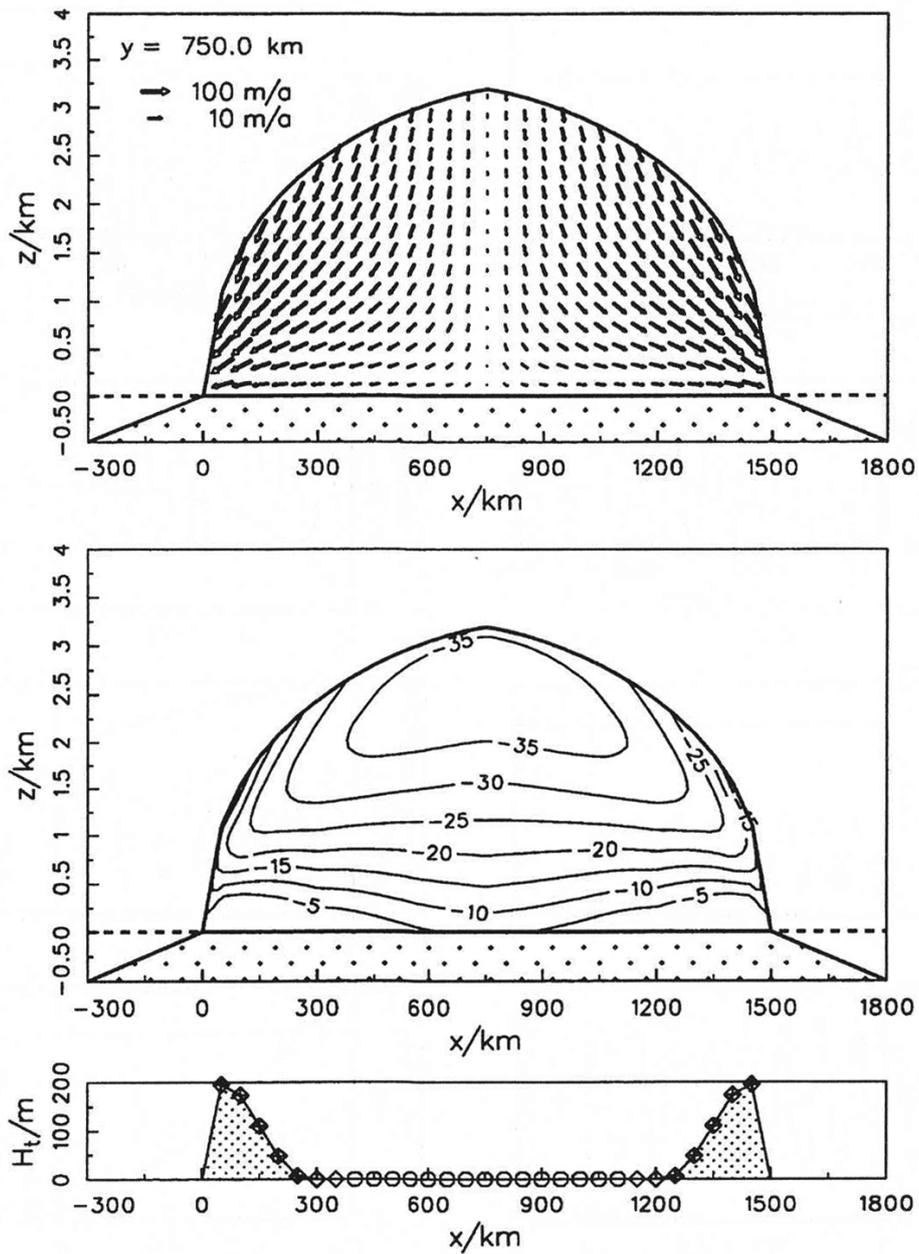


Abbildung 7.13: Endzustand von Lauf t2fml1: Querschnitt bei $y = 750 \text{ km}$. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

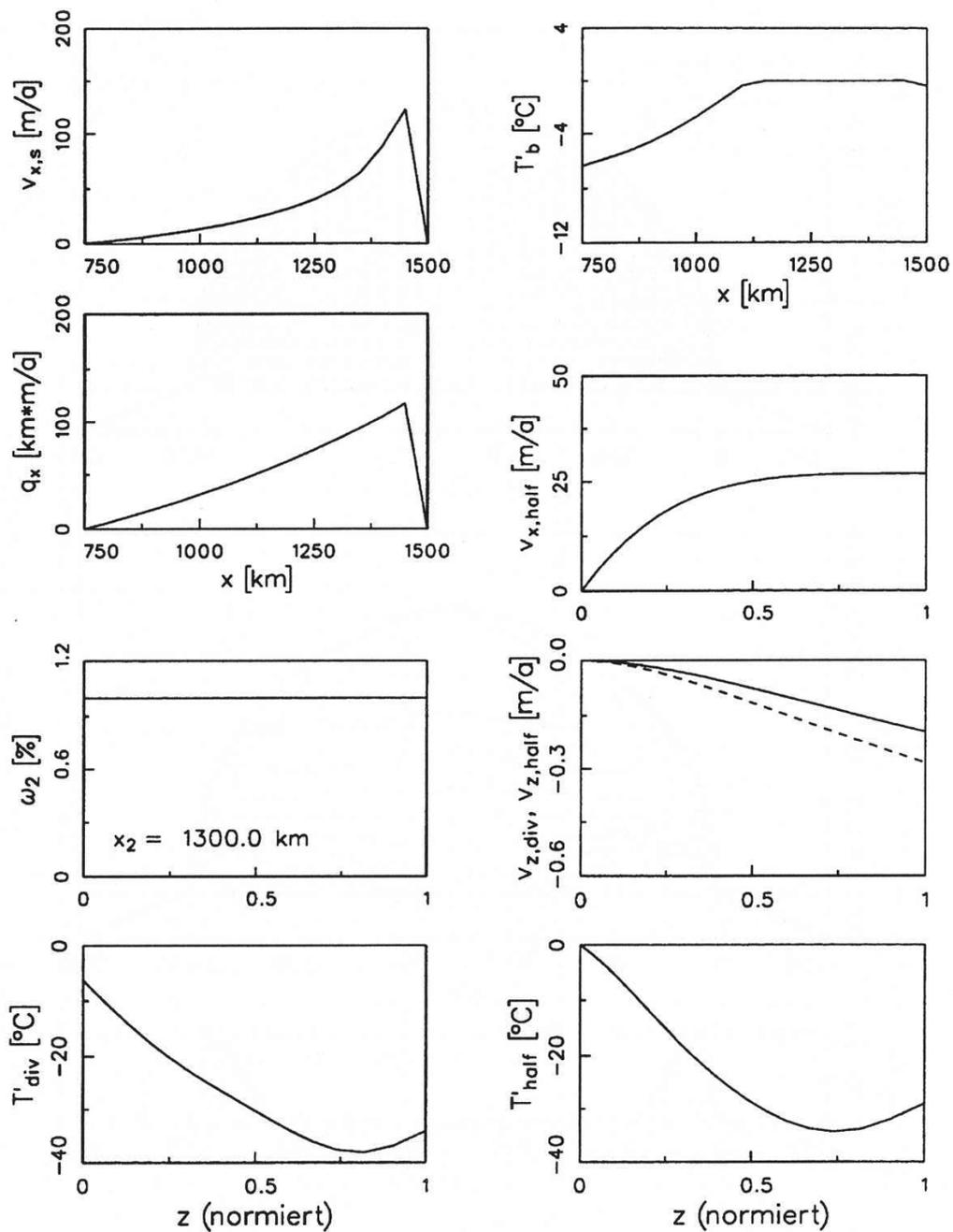


Abbildung 7.14: Endzustand von Lauf t2fml1: Querschnitt bei $y = 750$ km. $v_{x,s}$, T'_b , q_x als Funktion von x ; $v_{x,half}$, ω_2 (mit Angabe der zugehörigen Position x_2), $v_{z,div}$, $v_{z,half}$ (gestrichelt), T'_{div} , T'_{half} als Funktion von z (für ω_2 auf H_t , für die anderen Plots auf H normiert). Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

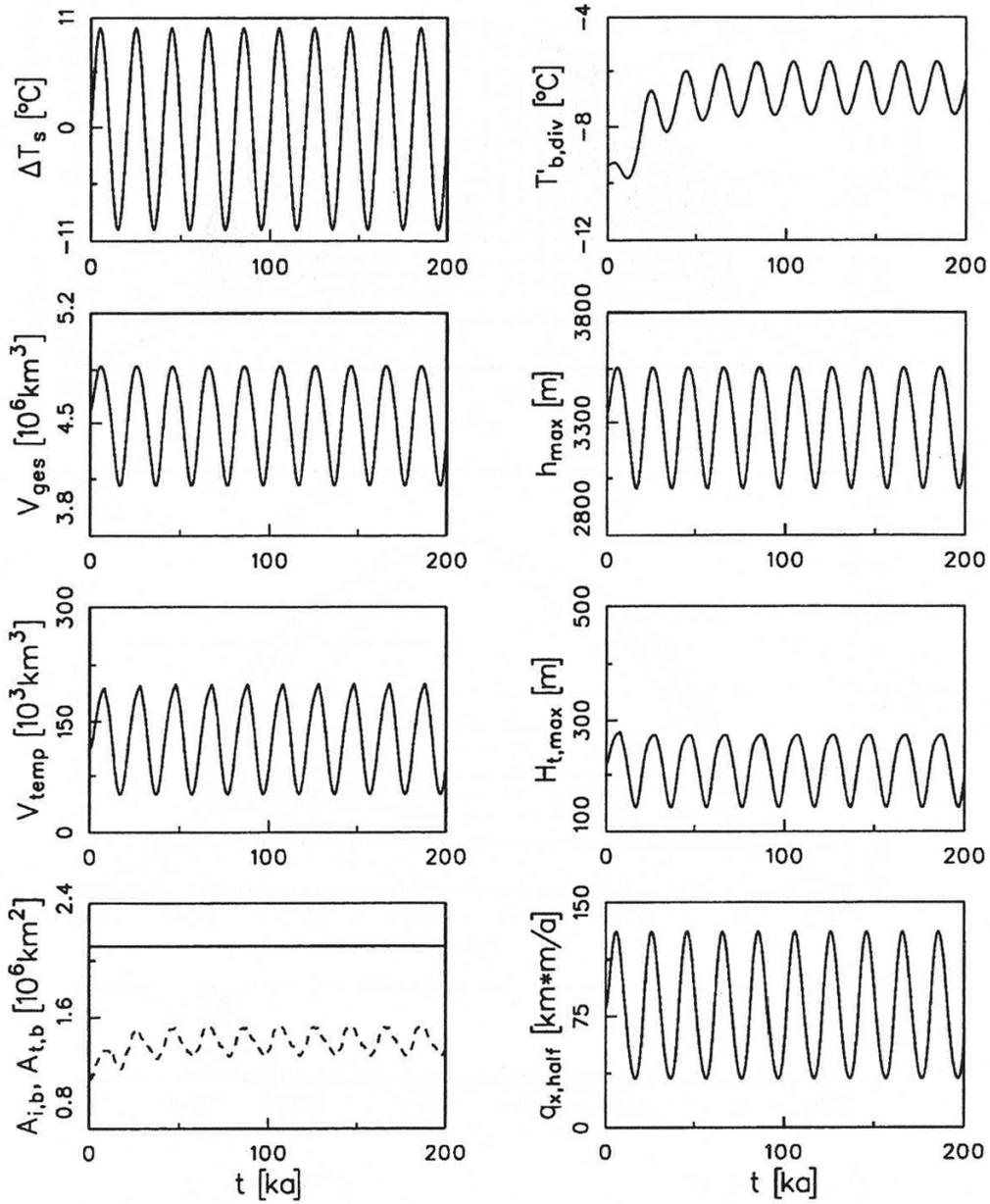


Abbildung 7.15: Lauf t2fml1: Zeitliche Entwicklung von ΔT_s , $T'_{b,div}$, V_{ges} , h_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$, $A_{t,b}$ (gestrichelt), $q_{x,half}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

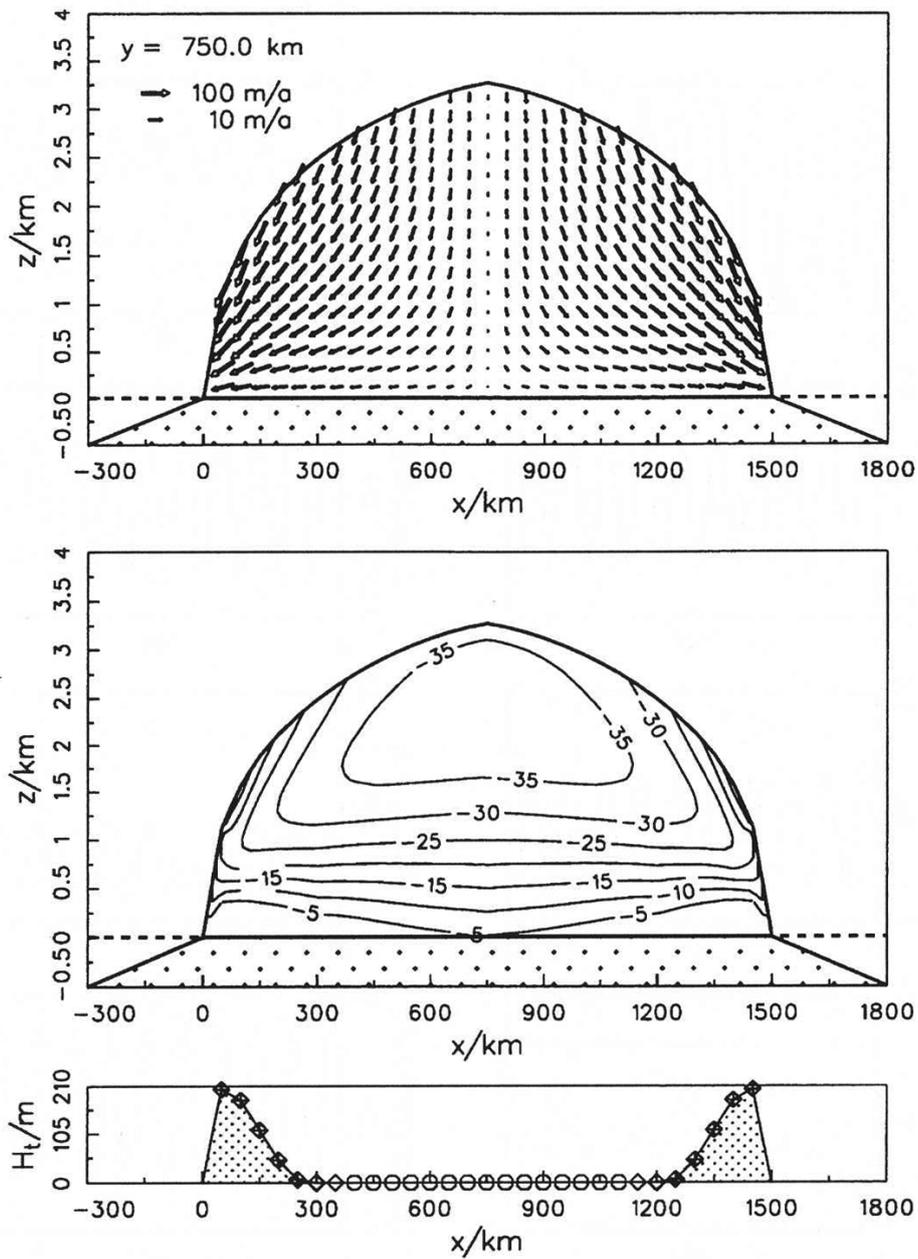


Abbildung 7.16: Endzustand von Lauf t4fml1: Querschnitt bei $y = 750$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

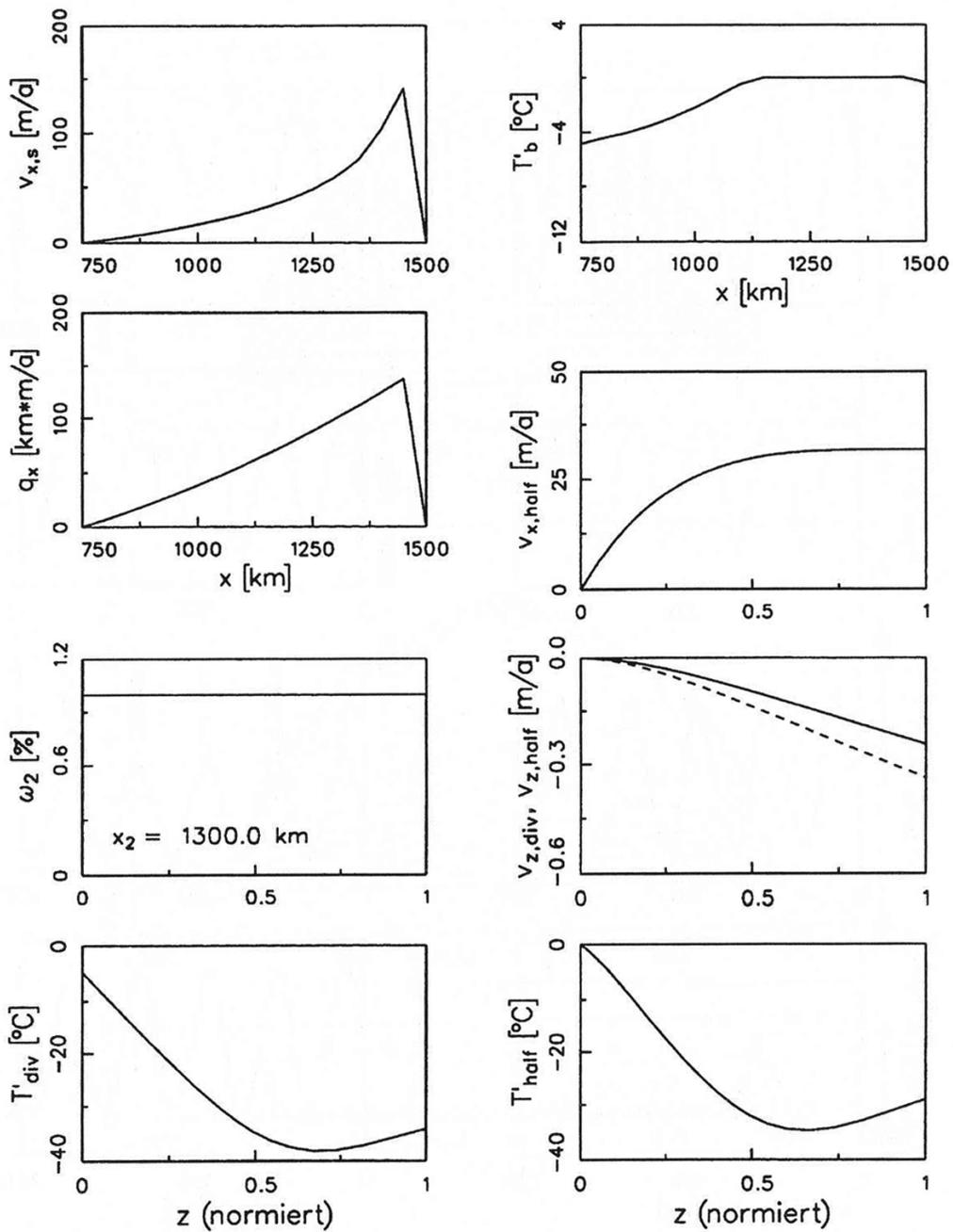


Abbildung 7.17: Endzustand von Lauf t4fml1: Querschnitt bei $y = 750$ km. $v_{x,s}$, T'_b , q_x als Funktion von x ; $v_{x, half}$, ω_2 (mit Angabe der zugehörigen Position x_2), $v_{z, div}$, $v_{z, half}$ (gestrichelt), T'_{div} , T'_{half} als Funktion von z (für ω_2 auf H_t , für die anderen Plots auf H normiert). Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

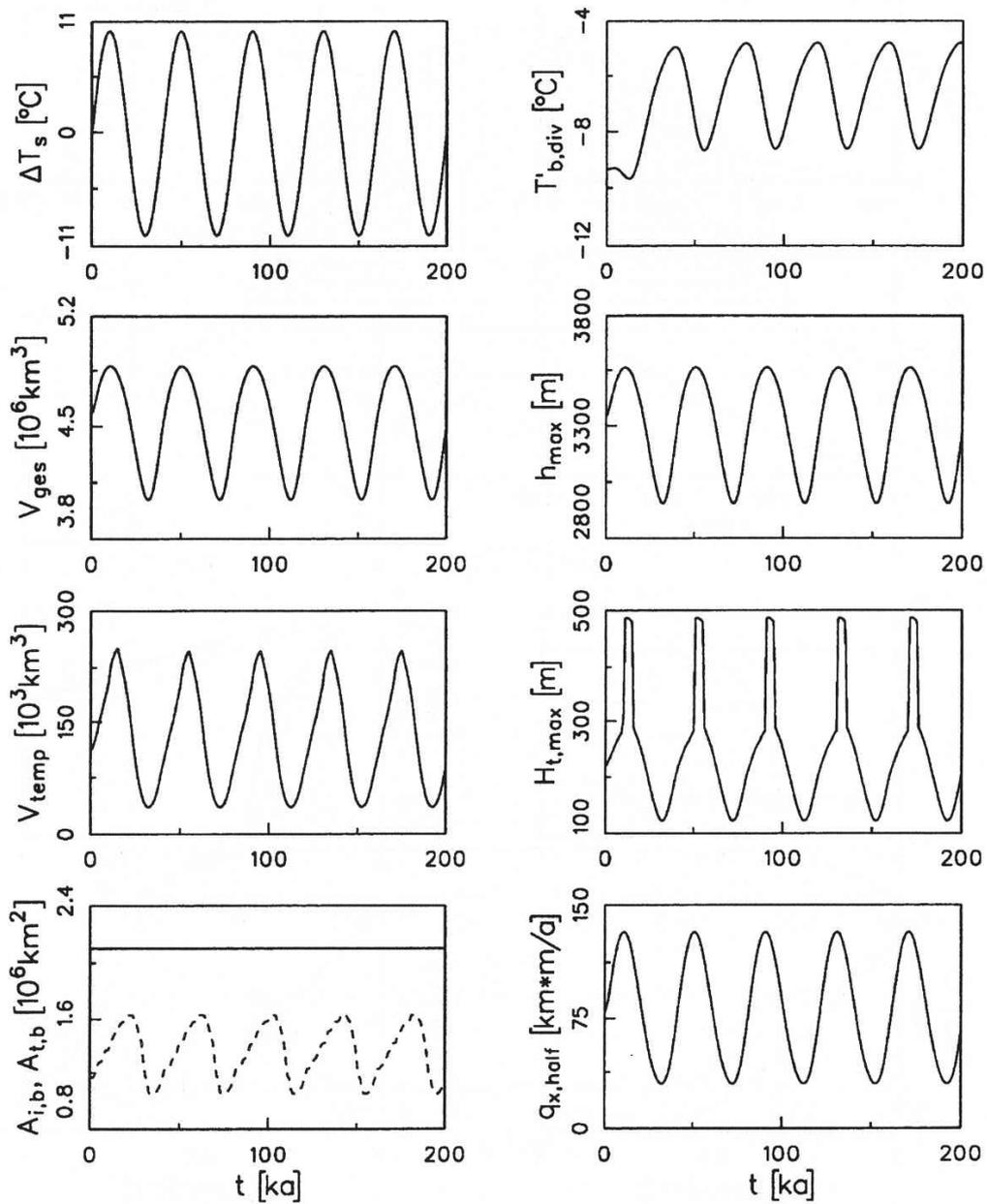


Abbildung 7.18: Lauf t4fml1: Zeitliche Entwicklung von ΔT_s , $T'_{b,div}$, V_{ges} , h_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$, $A_{t,b}$ (gestrichelt), $q_{x,half}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

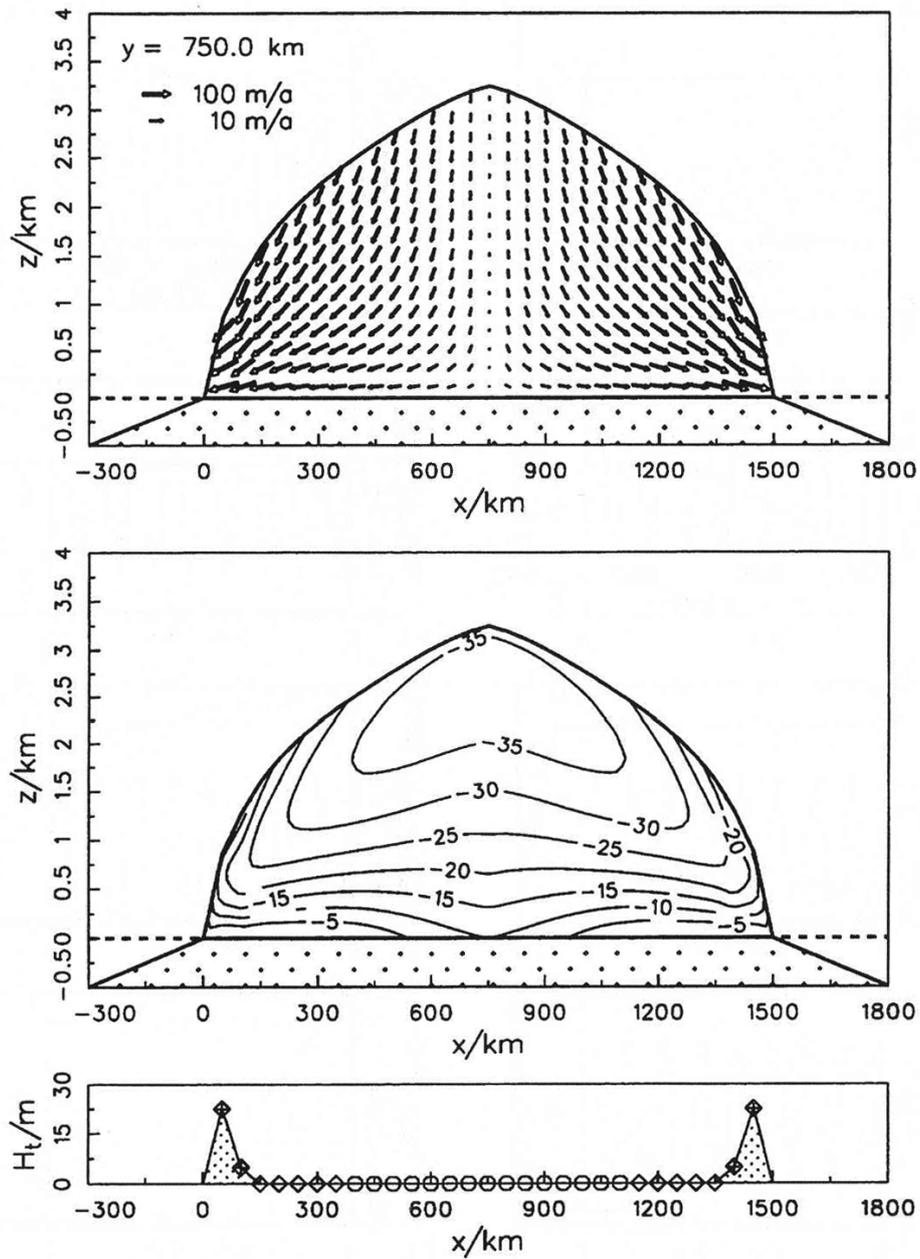


Abbildung 7.19: Endzustand von Lauf t2fml2: Querschnitt bei $y = 750$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

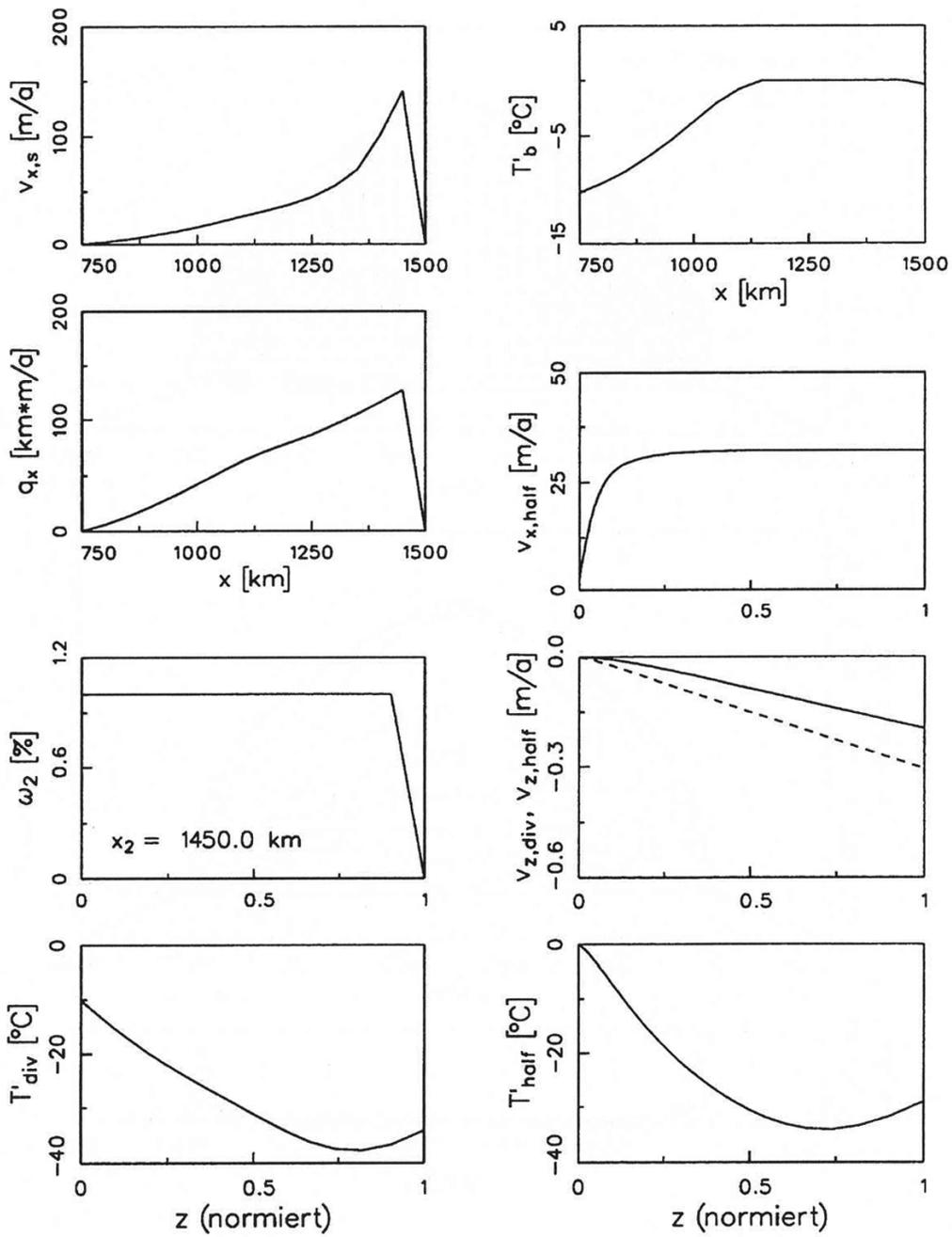


Abbildung 7.20: Endzustand von Lauf t2fml2: Querschnitt bei $y = 750$ km. $v_{x,s}$, T'_b , q_x als Funktion von x ; $v_{x,half}$, ω_2 (mit Angabe der zugehörigen Position x_2), $v_{z,div}$, $v_{z,half}$ (gestrichelt), T'_{div} , T'_{half} als Funktion von z (für ω_2 auf H_t , für die anderen Plots auf H normiert). Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

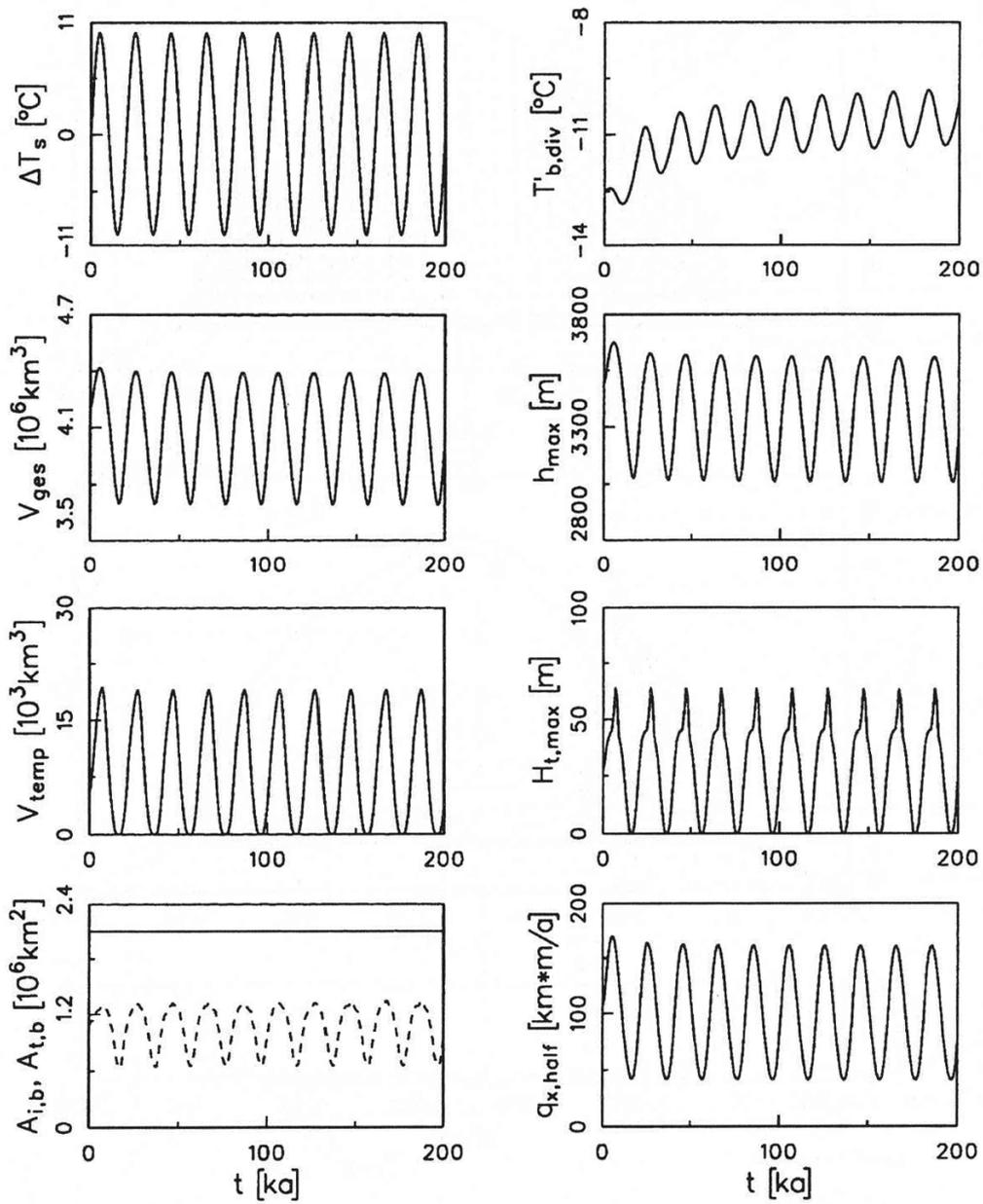


Abbildung 7.21: Lauf t2fml2: Zeitliche Entwicklung von ΔT_s , $T'_{b,div}$, V_{ges} , h_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$, $A_{t,b}$ (gestrichelt), $q_{x,half}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

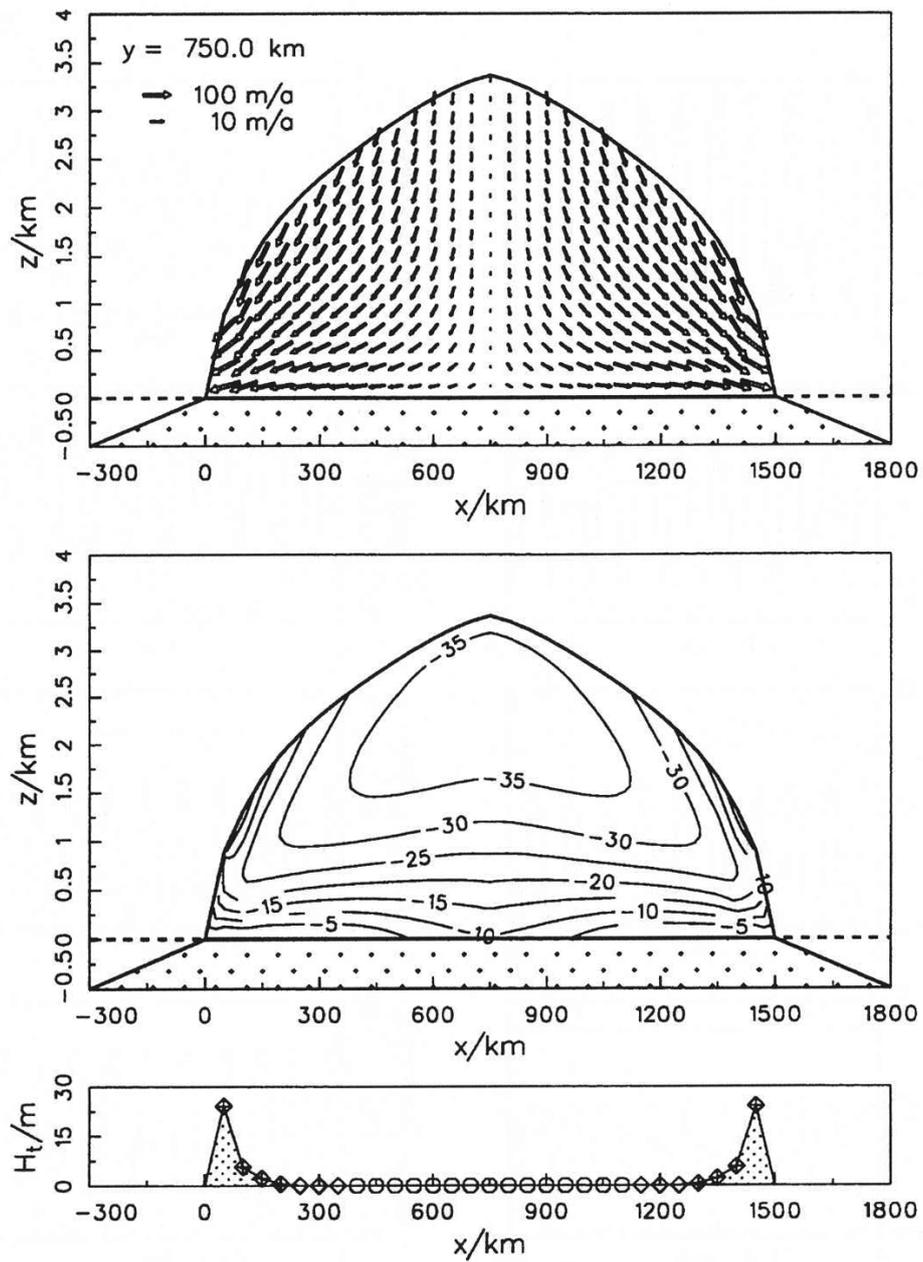


Abbildung 7.22: Endzustand von Lauf t4fml2: Querschnitt bei $y = 750$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

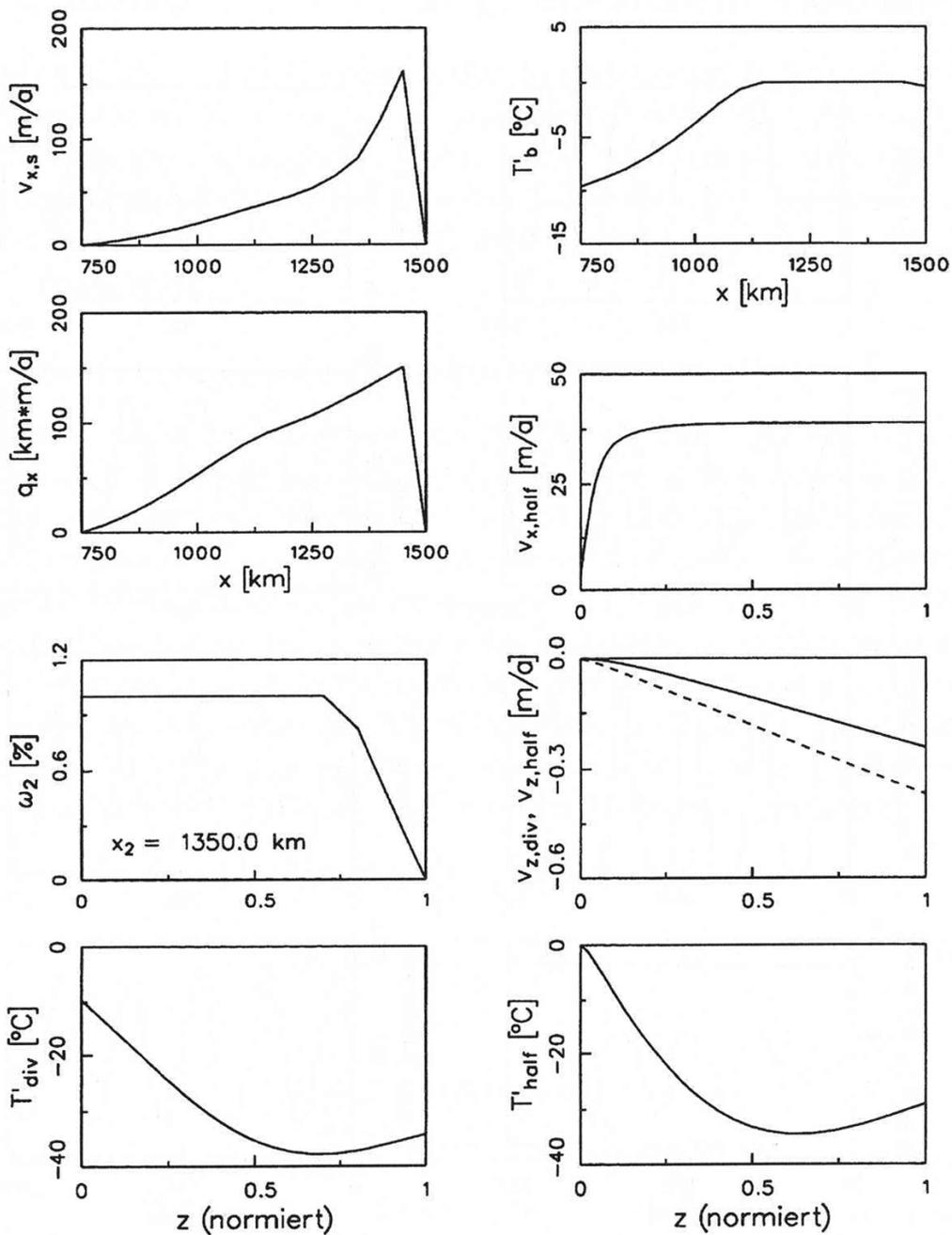


Abbildung 7.23: Endzustand von Lauf t4fml2: Querschnitt bei $y = 750$ km. $v_{x,s}$, T'_b , q_x als Funktion von x ; $v_{x, half}$, ω_2 (mit Angabe der zugehörigen Position x_2), $v_{z, div}$, $v_{z, half}$ (gestrichelt), T'_{div} , T'_{half} als Funktion von z (für ω_2 auf H_t , für die anderen Plots auf H normiert). Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

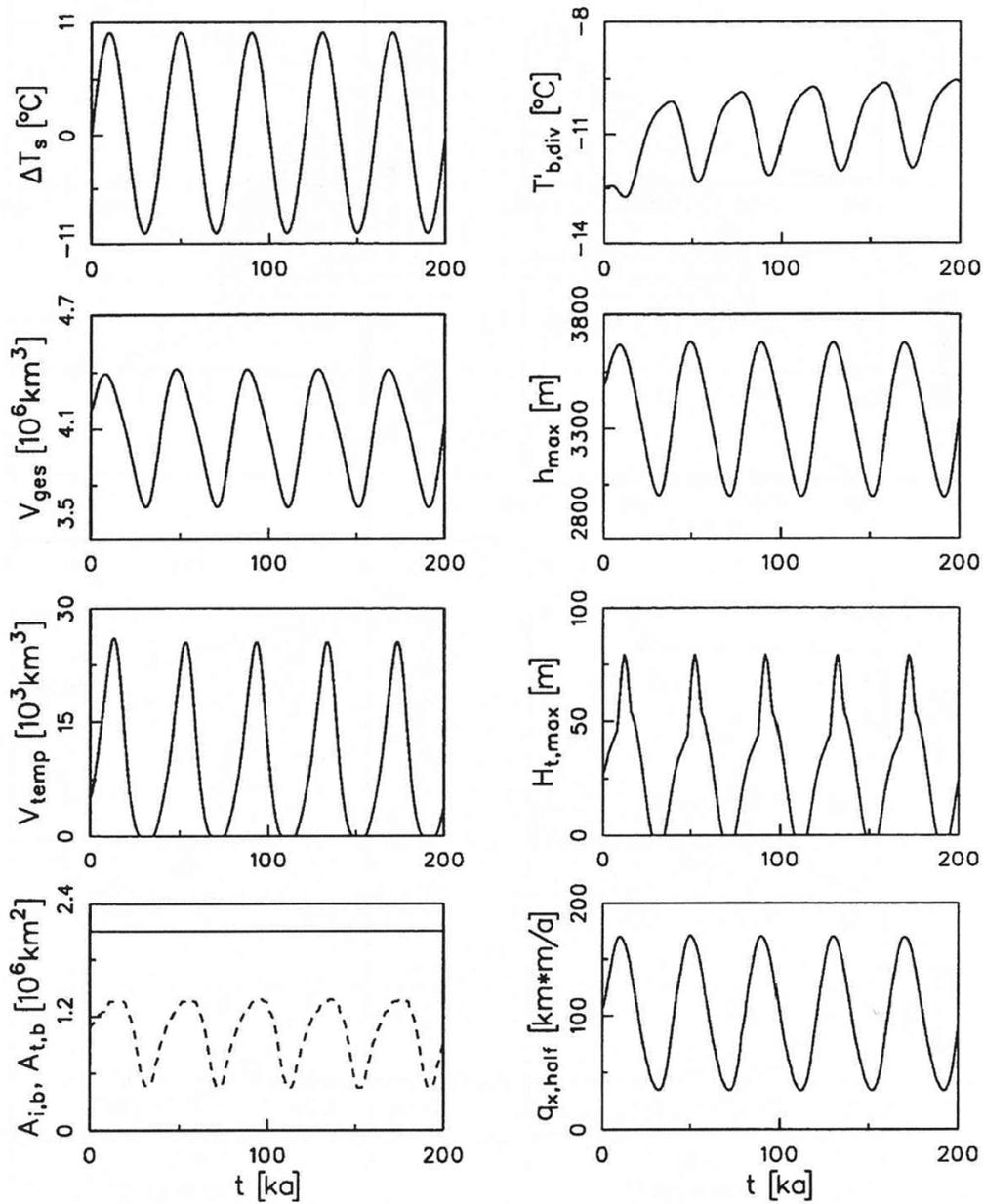


Abbildung 7.24: Lauf t4fml2: Zeitliche Entwicklung von ΔT_s , $T'_{b,div}$, V_{ges} , h_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$, $A_{t,b}$ (gestrichelt), $q_{x,half}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

8 Simulationen für das grönländische Eisschild

Nachdem SICOPOLIS in §7 auf ein einfaches, akademisches Problem angewendet wurde, soll hier die Anwendung auf ein wirkliches Problem erfolgen. Dazu wird das grönländische Eisschild ausgewählt, weil es sowohl heute noch existiert als auch im Gegensatz zur Antarktis (dem zweiten großen, heutigen Eisschild) keine nennenswerten Schelfeise beinhaltet, welche von SICOPOLIS in der gegenwärtigen Version nicht erfaßt werden können.

8.1 Stereographische Projektion

Wenn man einigen der moderneren Theorien über das Leben, das Universum und den ganzen Rest Glauben schenken darf (und das wird in dieser Arbeit getan), hat die Erde im wesentlichen Kugelgestalt⁶. Da das hier entwickelte Eisschildmodell jedoch ebene Koordinaten verwendet, muß der Bereich Grönlands zuerst auf eine Ebene abgebildet werden. Hierzu wird die stereographische Projektion verwendet. Die Bildebene (xy -Ebene) sei die Ebene, die durch den Breitenkreis $\phi_0 = 71^\circ\text{N}$ gebildet wird; die Urbildpunkte (ϕ, λ) auf der Erdoberfläche werden mit dem Südpol durch Geraden verbunden, deren Schnitte mit der Bildebene die jeweiligen Bildpunkte (x, y) ergeben (Abb. 8.1). Die Orientierung der x - und y -Koordinatenachsen in der Bildebene wird durch den Parameter λ_0 festgelegt. Dies ergibt die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned}x &= 2R_e K \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \sin(\lambda - \lambda_0), \\y &= -2R_e K \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \cos(\lambda - \lambda_0),\end{aligned}\tag{8.1}$$

mit

$$\begin{aligned}R_e &= 6371.225 \text{ km} \quad (\text{Erdradius}), \\K &= \frac{\cos \phi_0}{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_0}{2}\right)} \approx 0.9728 \quad (\text{Streckfaktor}), \\ \phi_0 &= 71^\circ, \\ \lambda_0 &= -44^\circ.\end{aligned}$$

Die inverse Darstellung wird ebenfalls benötigt:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2R_e K}\right),$$

⁶Eine weiterführende, von pandimensionalen hyperintelligenten Lebewesen einer fremden Welt aufgestellte Theorie behauptet ferner, die Antwort auf all diese Dinge sei 42 (Adams [2]). Dies führt uns hier allerdings nicht weiter und wird somit nicht eingehender verfolgt.

$$\lambda = \lambda_0 - \arctan \frac{x}{y}. \quad (8.2)$$

Diese Transformation ist für polnahe Regionen gut geeignet, da die auftretenden Verzerrungen relativ gering sind.

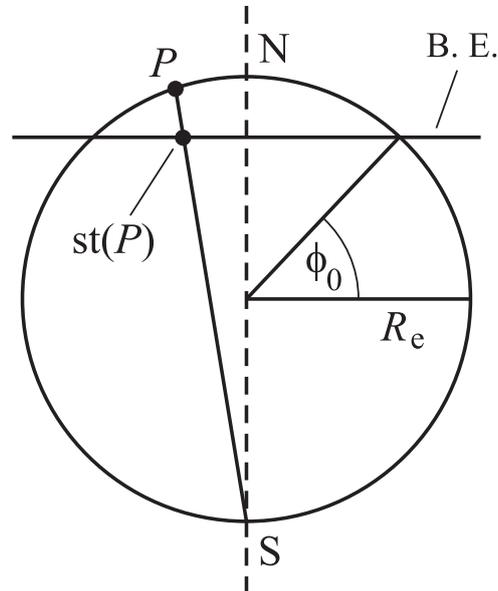


Abbildung 8.1: Stereographische Projektion: Der Urbildpunkt P auf der Erdoberfläche wird auf den Bildpunkt $st(P)$ in der Bildebene (B. E.), welche vom 71. Breitenkreis ($\phi_0 = 71^\circ\text{N}$) aufgespannt wird, abgebildet.

8.2 Die heutige Topographie Grönlands

Alle hier durchgeführten Simulationen erfordern die Kenntnis der stationären Position der Lithosphärenoberseite ohne Eislast b_0 ; zum Teil wird auch deren heutige Position b^{heute} sowie die der Eisoberfläche h^{heute} als Anfangsbedingung benötigt. Für b^{heute} und h^{heute} werden die Daten von Letréguilly, Reeh & Huybrechts [48] zugrunde gelegt, die aus flugzeuggestützten Radarmessungen gewonnen wurden und in einer Auflösung von 20 km zur Verfügung stehen. b^{heute} wird unverändert übernommen, h^{heute} durch einen Modellauf über 100 a (mit heutigen Klimabedingungen) leicht geglättet, da sonst ein räumlich oszillierendes Geschwindigkeitsfeld resultieren würde (Calov [12]). Die tatsächliche, ungeglättete Oberflächentopographie h^{heute} ist in Abb. 8.3 dargestellt. b_0 kann natürlich nicht direkt gemessen werden, läßt sich jedoch unter der Annahme, daß sich b^{heute} näherungsweise im Gleichgewicht mit der heutigen Eislast $H^{\text{heute}} = h^{\text{heute}} - b^{\text{heute}}$ befindet, abschätzen,

$$b_0 = b^{\text{heute}} + \frac{\rho}{\rho_a} H^{\text{heute}}. \quad (8.3)$$

Der durch die Gleichgewichtsannahme gemachte Fehler ist gering, da sich die Eisdicken Grönlands seit dem LGM (Last Glacial Maximum) in der Würm-Kaltzeit vor 18 ka wahrscheinlich um nicht mehr als 200 m verändert haben (vgl. die im folgenden besprochenen Simulationen). Selbst unter der extremen Annahme, daß sich b^{heute} noch im Gleichgewicht mit dem LGM-Zustand befindet, ergibt sich mit (8.3) ein maximaler Fehler von ca. 60 m in b_0 , was im Rahmen der Unsicherheit der Meßwerte für b^{heute} selbst liegt. Die so berechnete Felsgrund-Topographie b_0 ist in Abb. 8.4 dargestellt.

8.3 Standard-Randbedingungen für heutiges Klima

In diesem Abschnitt wird ein Satz von Randbedingungen definiert, der das heutige, interglaziale Klima über dem grönländischen Eisschild (sowie den geothermen Wärmefluß als untere Randbedingung) beschreibt. Andere Klimabedingungen können davon ausgehend durch Modifikationen der Oberflächentemperatur und des Schneefalls modelliert werden.

Für das Jahresmittel der Lufttemperatur über dem Eis T_{ma} wird eine von Reeh [64] angegebene Parameterisierung verwendet, die sich auf Meßwerte von Ohmura [60] stützt, und T_{ma} als Funktion der geographischen Breite ϕ und Höhe z über dem Meeresspiegel angibt:

$$T_{\text{ma}}(\phi, z) = \theta_{\text{ma}} + \gamma_{\text{ma}}(\phi, z)(z - h_0) + c_{\text{ma}}\phi, \quad (8.4)$$

wobei der vertikale atmosphärische Temperaturgradient γ_{ma} gegeben ist durch

$$\gamma_{\text{ma}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \phi > 75^\circ\text{N und } z < h_0, \\ \gamma_{0,\text{ma}} \times \frac{75^\circ\text{N} - \phi}{5^\circ\text{N}} & \text{falls } 70^\circ\text{N} < \phi < 75^\circ\text{N und } z < h_0, \\ \gamma_{0,\text{ma}} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (8.5)$$

Die Parameter haben die Werte $\theta_{\text{ma}} = 46.00^\circ\text{C}$, $h_0 = 300 \text{ m}$, $\gamma_{0,\text{ma}} = -0.007924^\circ\text{C m}^{-1}$ und $c_{\text{ma}} = -0.7512^\circ\text{C} \times (\text{N})^{-1}$. Obige Darstellung von γ_{ma} beschreibt eine beobachtete Temperaturinversion in hohen Breiten für die unteren 300 m Meereshöhe, ansonsten ist der vertikale atmosphärische Temperaturgradient konstant. Die resultierende Temperaturverteilung ist in Abb. 8.5 dargestellt.

Die Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^\perp besteht aus zwei Teilen, nämlich der Schneefallrate S und der Schmelzrate M , aus welchen sie sich gemäß $a_s^\perp = S - M$ errechnet. Für den Schneefall S existieren Meßwerte von Ohmura & Reeh [61], die von Calov [12] auf ein 40 km-Gitter interpoliert wurden. Diese Interpolation wird hier verwendet, sie ist in Abb. 8.6 gezeigt.

Die Ablationsrate M (oberflächliches Schmelzen) wird mit Hilfe eines Degree-Day-Modells (Braithwaite & Olesen [9], Reeh [64]) parameterisiert. Hierbei wird die

Lufttemperatur dargestellt als Überlagerung ihres jährlichen Mittels T_{ma} und eines sinusförmigen Jahresganges ($t_a = 1$ a) mit der Amplitude \hat{T}_{air} ,

$$T_{\text{air}} = T_{\text{ma}} + \hat{T}_{\text{air}} \sin \frac{2\pi t}{t_a}, \quad (8.6)$$

wobei \hat{T}_{air} linear zwischen 10°C in Südgrönland (bei $\phi = 60^\circ\text{N}$) und 21°C in Nordgrönland (bei $\phi = 80^\circ\text{N}$) variiert (Calov [12]).

Gemäß dem Degree-Day-Modell wird die Schmelzrate M vom jährlich gemittelten Temperaturexzeß E_T , definiert als

$$E_T := \frac{1}{t_a} \int_t^{t+t_a} \max(T_{\text{air}}; 0) dt', \quad (8.7)$$

bestimmt. Mit obiger Darstellung für T_{air} rechnet man (Calov [12])

$$E_T = \left\{ \begin{array}{ll} T_{\text{ma}} & T_{\text{ma}} \geq \hat{T}_{\text{air}}, \\ 0 & T_{\text{ma}} \leq -\hat{T}_{\text{air}}, \\ \frac{1}{\pi} \left\{ T_{\text{ma}} \arccos \left(\frac{-T_{\text{ma}}}{\hat{T}_{\text{air}}} \right) + \sqrt{\hat{T}_{\text{air}}^2 - T_{\text{ma}}^2} \right\} & \text{sonst.} \end{array} \right\} \quad (8.8)$$

Im ersten Schritt wird der vorhandene Temperaturexzeß dazu verwendet, Schnee über die Zwischenstufe Wasser zu Überlagerungseis (d.h., Eis über Firn) zu transformieren. Dies geschieht mit der Rate M^* , trägt aber nicht zur Akkumulations-Ablationsfunktion a_s^\perp bei, und ist begrenzt durch den Sättigungsgrad von Wasser in Schnee P_{max} mit dem Wert $P_{\text{max}} = 0.6$. Falls der Temperaturexzeß größer ist als hierzu erforderlich, wird im zweiten Schritt Eis (zuerst das gebildete Überlagerungseis, dann das echte Gletschereis) mit der Schmelzrate M (die eigentliche Ablation) zu Wasser geschmolzen, von welchem angenommen wird, daß es dem System instantan entzogen wird:

$$\beta_1 E_T \leq P_{\text{max}} S:$$

$$M^* = \beta_1 E_T, \quad M = 0, \quad (8.9)$$

$$\beta_1 E_T > P_{\text{max}} S:$$

$$M^* = P_{\text{max}} S, \quad M = \beta_2 \left(E_T - \frac{M^*}{\beta_1} \right). \quad (8.10)$$

Die Schmelzkoeffizienten $\beta_{1,2}$ haben die Werte $\beta_1 = 1.2041 \text{ m (a }^\circ\text{C)}^{-1}$ und $\beta_2 = 2.8096 \text{ m (a }^\circ\text{C)}^{-1}$.

Die Eisoberflächentemperatur T_s (10 m-Firn-Temperatur, verwendet als eigentliche Randbedingung für das Eisschildmodell) wird als gleich dem Jahresmittel der Lufttemperatur T_{ma} angenommen, es sei denn die Bildungsrate für Überlagerungseis M^* übersteigt die Schmelzrate von Eis M (mit anderen Worten bedeutet das, daß nach dem Ende einer sommerlichen Schmelzsaison noch Überlagerungseis vorhanden ist).

In diesem Fall wird eine empirische Firnerwärmungskorrektur verwendet (Reeh [64]), die dem Freisetzen von latenter Wärme durch das ausgefrierende Überlagerungseis Rechnung trägt:

$$T_s = T_{\text{ma}} + \max \{ \mu_{\text{fwc}}(M^* - M); 0 \}, \quad (8.11)$$

mit $\mu_{\text{fwc}} = 24.206 \text{ }^\circ\text{C m}^{-1} \text{ a}$. Des weiteren darf T_s natürlich nicht den Schmelzpunkt von Eis übersteigen; in diesem Fall wird T_s auf den leicht negativen Wert $-0.001 \text{ }^\circ\text{C}$ gesetzt. Dies geschieht, um das Auftreten einer temperierten freien Oberfläche zu vermeiden, denn für eine solche würde man eine obere Randbedingung für den Wassergehalt brauchen, was sehr problematisch wäre.

Die verbleibende Randbedingung betrifft die untere Grenze des Modellbereiches, die Basis der Lithosphäre. Hier muß der geotherme Wärmefluß Q_{geoth}^\perp vorgegeben werden; es sei der Standardwert $Q_{\text{geoth}}^\perp = 42 \text{ mWm}^{-2}$ (Lee [46]) verwendet.

8.4 Standard-Randbedingungen für andere Klimaszenarien

Um das grönländische Eisschild auch unter anderen als den heutigen Klimabedingungen modellieren zu können, müssen hierfür ebenfalls Vorgaben getroffen werden. Für das Jahresmittel der Lufttemperatur über dem Eis T_{ma} sei angenommen, daß die heutige räumliche Verteilung gemäß (8.4) erhalten bleibe und nur durch einen rein zeitabhängigen Term verändert werde,

$$T_{\text{ma}}(\phi, z, t) = T_{\text{ma}}^{\text{heute}}(\phi, z) + \Delta T_{\text{ma}}(t). \quad (8.12)$$

Um auch eine Darstellung des Schneefalls S zu erhalten, wird von der allgemein akzeptierten Feststellung ausgegangen, daß dieser unter eiszeitlichen Klimabedingungen deutlich geringer ist als unter warmzeitlichen, wobei das genaue Ausmaß dieses Unterschiedes allerdings nicht bekannt ist. Es wird daher für die hier durchgeführten Simulationen postuliert, daß sich bei $\Delta T_{\text{ma}} = -10 \text{ }^\circ\text{C}$ der Schneefall auf die Hälfte der heutigen Werte reduziert hat und weiterhin ein linearer Zusammenhang zwischen S und ΔT_{ma} existiert, was die Beziehung

$$S(\phi, \lambda, t) = S^{\text{heute}}(\phi, \lambda) \left(1 + \frac{\Delta T_{\text{ma}}(t)}{20 \text{ }^\circ\text{C}} \right) \quad (8.13)$$

ergibt. Alles weitere wird unverändert aus §8.3 übernommen und sei daher nicht noch einmal aufgeführt. Mit diesen Vorgaben ist ein beliebiges Klimaszenario vollständig durch die Angabe von $\Delta T_{\text{ma}}(t)$ definiert.

8.5 Diskussion der Simulationen

Die Grönland-Simulationen dieser Arbeit, welche nun diskutiert werden sollen, wurden mit einer Horizontalaufösung von $\Delta x = \Delta y = 40$ km ausgeführt. Die geographische Lage Grönlands ergibt mit der stereographischen Projektion (8.1) das Rechenggebiet $x \in [-720 \text{ km}, 920 \text{ km}]$, $y \in [-3400 \text{ km}, -600 \text{ km}]$, woraus 42×71 Gitterpunkte in der Horizontalebene resultieren. Die Vertikalaufösung beträgt wie bei den EISMINT-Simulationen standardmäßig 51 Gitterpunkte im Kalteisbereich, 11 Gitterpunkte im temperierten Eisbereich und 11 Gitterpunkte in der Lithosphäre. Die verwendeten Zeitschrittweiten betragen bei den Steady-State-Läufen $\Delta t = 10$ a, $\widetilde{\Delta t} = 100$ a, bei den transienten Läufen mit Milankovi-Sinus- und GRIP-Daten-Antrieb (siehe §8.5.2, §8.5.3) $\Delta t = 5$ a, $\widetilde{\Delta t} = 100$ a, und bei den transienten Läufen zur Auswirkung eines anthropogen verstärkten Treibhauseffektes $\Delta t = 5$ a, $\widetilde{\Delta t} = 50$ a. Weiterhin wird bei allen Steady-State-Läufen die Temperaturberechnung in der Lithosphäre abgeschaltet, um ein schnelleres Erreichen des stationären Zustandes zu erreichen.

8.5.1 Steady-State-Simulationen

Der Standard-Steady-State-Lauf

Als erste Anwendung von SICOPOLIS auf das grönländische Eisschild wird **Lauf gss01** vorgestellt. Hierbei handelt es sich um einen Steady-State-Lauf unter heutigen Klimabedingungen; die Modellzeit umfaßt $t = 0 \dots 100$ ka, was für das Erreichen des Gleichgewichtszustandes ausreichend ist. Als Anfangsbedingungen für die Topographie werden die heutigen Werte b^{heute} und h^{heute} verwendet, die initiale Temperatur des Eises wird uniform auf -10°C gesetzt, und für das initiale Eisalter wird der Wert 15 ka verwendet.

Bei der Wahl des Enhancement-Faktors E im Fließgesetz wird berücksichtigt, daß eiszeitliches Eis weniger viskos ist als warmzeitliches, wobei die genaue Ursache dieses Unterschiedes nicht geklärt ist (womöglich spielen Unterschiede im Staubgehalt und/oder induzierte Anisotropien eine Rolle; vgl. Paterson [62], Paterson [63], Svendsen & Hutter [68a, 68b]). Daher wird der Enhancement-Faktor an das Eisalter A gekoppelt; der Übergang zwischen Würm-Kaltzeit und Neo-Warmzeit wird auf 11 ka vor heute gesetzt:

$$\begin{aligned} E &= 1 && \text{falls } A < 11 \text{ ka,} \\ E &= 3 && \text{falls } A \geq 11 \text{ ka.} \end{aligned} \tag{8.14}$$

Mögliche Einflüsse von Eis aus der Eem-Warmzeit oder gar der davor liegenden Riß-Kaltzeit bleiben unberücksichtigt, da solches Eis nur in sehr dünnen Schichten nahe der Eisbasis existieren kann, wo eine zuverlässige Berechnung des Eisalters wegen der

an der Eisbasis notwendigen künstlichen Randbedingung $\partial A/\partial z = 0$ nicht möglich ist.

Die Ergebnisse der Simulation gss01 sind in den Abb. 8.7 – 8.13 dargestellt. Zunächst zeigt sich beim Vergleich der gemessenen heutigen Eisoberfläche (Abb. 8.3) mit dem Resultat von gss01 (Abb. 8.7) eine generell gute Übereinstimmung sowohl bei der Oberflächentopographie selbst als auch bei der Vereisungsgrenze; die wesentlichen Merkmale werden von der Simulation reproduziert. Der nördliche Scheitelpunkt (“Nord-Dom”) liegt um 124 m zu hoch (3371 m statt 3247 m), der südliche (“Süd-Dom”) um 51 m zu hoch (2960 m statt 2909 m), und die Positionen dieser beiden Dome sind im Vergleich zur Realität leicht verschoben. Weiterhin ist die Vereisungsgrenze tendenziell etwas zu weit vorgerückt; insbesondere nahe der Nord- und Ostküste produziert gss01 einige Eiseinbrüche in tatsächlich eisfreies Vorland. Daher ist die simulierte vereiste Fläche $A_{i,b}$ mit $1.725 \cdot 10^6 \text{ km}^2$ auch ein wenig größer als der wahre Wert $1.682 \cdot 10^6 \text{ km}^2$.

Die Abb. 8.8 und 8.9 stellen den Massenfluß \mathbf{q} bzw. die Oberflächengeschwindigkeit \mathbf{v}_s dar. Man erkennt, daß der Eisfluß in Übereinstimmung mit der Theorie der Richtung des steilsten Gefälles folgt. Des weiteren zeigt sich, daß der Fluß vom Nord-Dom weg in ausgeprägten Drainage-Gebieten erfolgt, die durch Gebiete wesentlich geringeren Flusses voneinander abgegrenzt sind. Der Süd-Dom wird im Gegensatz dazu gleichmäßiger drainiert. Der Grund hierfür liegt in der Verteilung der basalen temperierten Bereiche (Abb. 8.10), auf welchen das Eis gleiten kann. Diese umgeben den Süd-Dom als fast geschlossenes Band, während nördlich des Polarkreises im wesentlichen vier voneinander abgegrenzte temperierte Flecken existieren, die den Drainage-Gebieten entsprechen. Dieses Verhalten zeigt eindrucksvoll die große Bedeutung des temperierten Eises für die Dynamik eines Eisschildes.

Eine Auffälligkeit ist ferner, daß von allen Gitterpunkten mit temperierter Eisschicht nur ein einziger eine CTS mit Gefrierbedingungen hat (Abb. 8.10). Das hängt damit zusammen, daß die Dicke der temperierten Schicht vom Innern des Eisschildes aus gesehen stromabwärts (zum Eisrand hin) typischerweise allmählich zunimmt, um erst in unmittelbarer Randnähe steil abzufallen. Dieses Verhalten ist gut für Westgrönland in den Abb. 8.11, 8.12 zu erkennen, welche West-Ost-Querschnitte durch das Eisschild bei $y = -2280 \text{ km}$ bzw. $y = -1840 \text{ km}$ zeigen. Durch diesen steilen Abfall können die nahe des Eisrandes zu erwartenden Gefrierbedingungen im allgemeinen nicht mehr aufgelöst werden. Die Diagnostizierung einer relativ dicken temperierten Eisschicht und sehr großer Eisgeschwindigkeiten in Westgrönland im Querschnitt $y = -2280 \text{ km}$ (Abb. 8.11) koinzidiert im übrigen mit dem Vorhandensein eines sehr schnellen Eisstroms in diesem Gebiet (“Jacobshavns Isbræ”), für welchen Funk, Echel-

meyer & Iken [18] mit Hilfe eines polythermen 2-d-Stromlinienmodells ebenfalls das Vorhandensein temperierten Eises erhalten.

Abb. 8.13 zeigt schließlich den zeitlichen Verlauf des Temperaturantriebs ΔT_{ma} , der maximalen Eishöhe über Meeresniveau h_{max} (diese wird am Nord-Dom angenommen), des gesamten Eisvolumens V_{ges} , der maximalen Eisdicke H_{max} , des temperierten Eisvolumens V_{temp} , der maximalen Dicke der temperierten Eisschicht $H_{t,\text{max}}$, der eisbedeckten Fläche $A_{i,b}$ sowie der von temperiertem Eis bedeckten Fläche $A_{t,b}$. Hier fallen besonders die starken Peaks bei den mit dem temperierten Eis zusammenhängenden Größen V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$, $A_{t,b}$ in den ersten 10000 Modelljahren auf, zusammenfallend mit negativen Peaks der Topographiegrößen h_{max} , V_{ges} , H_{max} . Dieses Zeitverhalten ist offenbar eine Folge der willkürlich gewählten Anfangsbedingungen (heutige Topographie, isothermes Temperaturfeld), es hat daher kein Pendant in der tatsächlichen Geschichte des grönländischen Eisschildes.

Kalteis-Simulation

Um festzustellen, inwiefern die polytherme Rechnung einen Einfluß auf das simulierte Eisschild hat, wurde in **Lauf gss02** der polytherme Mode im Programm SICOPOLIS abgeschaltet und die Simulation als reine Kalteis-Rechnung durchgeführt. Ansonsten entspricht gss02 dem soeben besprochenen Standard-Steady-State-Lauf gss01.

	gss02	gss01
h_{max} [km]	3.357	3.371
V_{ges} [10^6 km^3]	3.067	3.091
H_{max} [km]	3.299	3.329
V_{temp} [10^3 km^3]	37.814	2.513
$H_{t,\text{max}}$ [m]	217.86	55.740
$A_{i,b}$ [10^6 km^2]	1.728	1.725
$A_{t,b}$ [10^6 km^2]	0.634	0.650

Tabelle 8.1: Resultat der Kalteis-Simulation gss02 im Vergleich zum Standard-Lauf gss01.

Abb. 8.14 zeigt für gss02 die zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$ im Vergleich zu gss01, Tabelle 8.1 die entsprechenden Werte für den resultierenden Endzustand. Man erkennt, daß das temperierte Eisvolumen V_{temp} und die Maximaldicke der temperierten Schicht $H_{t,\text{max}}$ bei der Kalteisrechnung viel größer ausfallen als bei der polythermen Rechnung, die von temperiertem Eis bedeckte Fläche $A_{t,b}$ dagegen fast unbeeinflusst bleibt. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, daß bei der Kalteis-Rechnung durch die implizite Temperaturberechnung in den Eissäulen eventuell auftretende, den Druckschmelzpunkt übersteigende

Temperaturen in Bodennähe das Temperaturprofil der ganzen Eissäule zu zu großen Werten hin verschieben. Da das Zurücksetzen von positiven homologen Temperaturen auf Null erst nach dem Lösen des Gleichungssystems für die betreffende Säule möglich ist, können diese zu großen Werte nicht mehr korrigiert werden. Dieser Effekt spielt sich jedoch nur in Vertikalrichtung ab und hat somit keine direkte Auswirkung auf die Größe von $A_{t,b}$. Weiterhin stellt man fest, daß der Verlauf von $H_{t,\max}$ unstetig erscheint, was daher kommt, daß bei der Kalteis-Simulation die CTS auf die diskreten Gitterpunkte des numerischen Kalteisbereichs gelegt wird; eine separate Abbildung des temperierten Eisbereichs auf ein eigenes Rechengelände findet im Gegensatz zur polythermen Rechnung nicht statt.

Trotz dieser krassen Unterschiede ist der Einfluß auf das Eisschild als ganzes klein, weil der absolute Anteil temperierten Eises im Eisschild in beiden Fällen gering ist. Dennoch ist ein Trend festzustellen: h_{\max} , V_{ges} und H_{\max} sind bei gss02 etwa 1% kleiner als bei gss01, $A_{i,b}$ ist etwa 0.2% größer. Offenbar verhält sich das Eisschild in gss02 etwas weniger viskos als in gss01, was aus den höheren Temperaturen im Eis resultiert, welche den bei gss01 berücksichtigten Einfluß des Wassergehaltes auf die Viskosität im temperierten Eis überkompensieren.

Variation der initialen Topographie

In **Lauf gss03** wurde eine andere Anfangstopographie als in gss01 gewählt. Anstatt mit der heutigen Topographie und einem isothermen Temperaturfeld wurde gss03 unter der Annahme eines eisfreien Anfangszustandes mit entspannter Lithosphäre ($b = b_0$) ausgeführt. Die zeitliche Entwicklung des Eisschildes für diese Simulation ist in Abb. 8.15, der resultierende Endzustand in Tabelle 8.2 dargestellt, wiederum im Vergleich mit Simulation gss01. Man erkennt, daß sich die beiden Endzustände nach 100 ka in allen gezeigten Größen nur sehr gering voneinander unterscheiden. Dieses Ergebnis ist auch insofern interessant, als es zeigt, daß das grönländische Eisschild nicht nur ein Relikt aus der letzten Kaltzeit ist, sondern sich auch unter heutigen Klimabedingungen (zumindest in Form der hier verwendeten Parameterisierung) vollständig aufbauen würde.

Eine Auffälligkeit sind die anfänglichen Oszillationen der Maximalhöhe der temperierten Eisschicht $H_{t,\max}$. Das temperierte Eisvolumen V_{temp} ist zu dieser Zeit jedoch noch annähernd gleich Null; es handelt sich nur um eine isolierte Eissäule, in welcher sich diese Oszillationen abspielen. Zeitgleich mit dem Aufkommen eines nennenswerten temperierten Eisvolumens verschwinden diese Oszillationen fast vollständig.

	gss03	gss01
h_{\max} [km]	3.373	3.371
V_{ges} [10^6 km^3]	3.104	3.091
H_{\max} [km]	3.330	3.329
V_{temp} [10^3 km^3]	2.556	2.513
$H_{t,\max}$ [m]	55.857	55.740
$A_{i,b}$ [10^6 km^2]	1.722	1.725
$A_{t,b}$ [10^6 km^2]	0.630	0.650

Tabelle 8.2: Resultat der Simulation gss03 mit eisfreiem Anfangszustand im Vergleich zum Standard-Lauf gss01.

Simulation mit konstantem Enhancement-Faktor

Bei **Lauf gss04** wurde die Enhancement-Faktor-Eisalter-Kopplung gemäß (8.14) durch den räumlich und zeitlich konstanten Enhancement-Faktor $E = 3$ ersetzt, welcher eiszeitlichem, leichter deformierbarem Eis entspricht. Tabelle 8.3 zeigt das Ergebnis im Vergleich zum Standard-Lauf gss01.

	gss04	gss01
h_{\max} [km]	3.366	3.371
V_{ges} [10^6 km^3]	3.059	3.091
H_{\max} [km]	3.314	3.329
V_{temp} [10^3 km^3]	2.762	2.513
$H_{t,\max}$ [m]	57.799	55.740
$A_{i,b}$ [10^6 km^2]	1.726	1.725
$A_{t,b}$ [10^6 km^2]	0.643	0.650

Tabelle 8.3: Resultat der Simulation gss04 mit konstantem Enhancement-Faktor E im Vergleich zum Standard-Lauf gss01.

Die Unterschiede zwischen gss04 und gss01 sind sehr gering, obwohl bei gss01 dem größeren Teil des Eisvolumens der warmzeitliche Wert $E = 1$ zugewiesen wird. Jedoch wird das Fließverhalten im wesentlichen vom bodennahen Eis bestimmt, weil dieses den großen Scherkräften unterliegt, was sich durch die Nichtlinearität des Fließgesetzes überproportional auf die Scherraten auswirkt. Da dieses bodennahe Eis eiszeitliches Eis ist, unterliegt es auch bei gss01 dem eiszeitlichen Wert $E = 3$, was die große Ähnlichkeit der Resultate der beiden Simulationen erklärt. Bemerkenswerte Unterschiede in der Größenordnung einiger Prozent erkennt man lediglich beim temperierten Eisvolumen V_{temp} und der Maximaldicke der temperierten Schicht $H_{t,\max}$,

wo die Werte für gss04 höher liegen. Der Grund dafür liegt darin, daß bei gss04 aufgrund des dreimal größeren Enhancement-Faktors im oberen, warmzeitlichen Eis und der daraus resultierenden größeren Dissipationsleistung (Wärmeproduktion) das Eisschild als Ganzes etwas wärmer ist, worauf die absolut sehr dünne temperierte Eisschicht am sensitivsten reagiert. Dies korreliert auch mit dem um ca. 1% kleineren gesamten Eisvolumen V_{ges} bei gss04.

Variation des Schwellwertes für den Wassergehalt

Für die **Läufe gss05** und **gss06** wurde der Schwellwert ω_{max} im Wasserdrainage-Gesetz (5.173) variiert; gss05: $\omega_{\text{max}} = 0.5\%$, gss06: $\omega_{\text{max}} = 2\%$. Tabelle 8.4 zeigt das Ergebnis zusammen mit dem des Standardlaufs gss01 ($\omega_{\text{max}} = 1\%$).

	gss05	gss01	gss06
h_{max} [km]	3.374	3.371	3.371
V_{ges} [10^6 km^3]	3.095	3.091	3.087
H_{max} [km]	3.328	3.329	3.326
V_{temp} [10^3 km^3]	3.145	2.513	1.840
$H_{t,\text{max}}$ [m]	67.054	55.740	42.741
$A_{i,b}$ [10^6 km^2]	1.726	1.725	1.720
$A_{t,b}$ [10^6 km^2]	0.652	0.650	0.642

Tabelle 8.4: Variation des Schwellwertes für den Wassergehalt ω_{max} : Resultate für die Simulationen gss05, gss01 (Standard-Lauf) und gss06. ω_{max} nimmt in dieser Reihenfolge zu.

Auch hier bleibt das Eisschild als ganzes praktisch unbeeinflusst, wobei ein geringer Trend zu einem kleiner werdenden Eisschild mit steigendem ω_{max} zu verzeichnen ist; die Unterschiede liegen im Promille-Bereich. Der Einfluß auf die temperierte Eisschicht (V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$) ist jedoch ausgeprägt: je größer ω_{max} , desto weniger temperiertes Eis ist vorhanden. Die Ursache liegt wahrscheinlich darin, daß wegen der starken Zunahme des Rate-Faktors $A_t(\omega)$ mit dem Wassergehalt (Gl. (5.169)) bei größerem ω_{max} größere Eisgeschwindigkeiten in und in der Umgebung temperierter Eisbereiche auftreten, was zu verstärkter Advektion von kaltem Eis nach unten führt; dadurch wird die temperierte Eisschicht zurückgedrängt. Diese größeren Eisgeschwindigkeiten erklären auch den Trend zur Eisvolumenverringerung, wobei allerdings die Abnahme des temperierten Eisvolumens gegenläufig wirkt.

Variation des Enhancement-Faktors für eiszeitliches Eis

Die **Läufe gss07** und **gss08** wurden mit variiertem Enhancement-Faktor E für eiszeitliches Eis (Eisalter $A \geq 11$ ka, Gl. (8.14)) ausgeführt; gss07: $E = 2$, gss08: $E = 4$. Der Wert $E = 1$ für warmzeitliches Eis mit $A < 11$ ka wurde hingegen beibehalten. In Tabelle 8.5 ist das Ergebnis zusammen mit gss01 ($E = 3$ für eiszeitliches Eis) dargestellt.

	gss07	gss01	gss08
h_{\max} [km]	3.487	3.371	3.293
V_{ges} [10^6 km ³]	3.219	3.091	3.001
H_{\max} [km]	3.486	3.329	3.219
V_{temp} [10^3 km ³]	1.662	2.513	3.046
$H_{t,\max}$ [m]	46.621	55.740	59.713
$A_{i,b}$ [10^6 km ²]	1.725	1.725	1.723
$A_{t,b}$ [10^6 km ²]	0.662	0.650	0.642

Tabelle 8.5: Variation des Enhancement-Faktors E für eiszeitliches Eis: Resultate für die Simulationen gss07, gss01 (Standard-Lauf) und gss08. E nimmt in dieser Reihenfolge zu.

Man erkennt erstmals bei den bisher besprochenen Simulationen eine deutliche Auswirkung auf das gesamte Eisschild. Da mit steigendem E das Eis immer leichter deformierbar wird, nehmen V_{ges} , h_{\max} und H_{\max} ab, wobei die Änderung des Eisvolumens V_{ges} eine Spanne von 7% des Wertes des Standardlaufes umfaßt. Gleichzeitig nimmt die temperierte Eisschicht an Mächtigkeit zu, was ähnlich wie bei Lauf gss04 an der größeren Dissipationsleistung bei größerem Enhancement-Faktor liegt. Interessant ist in diesem Zusammenhang, daß gleichzeitig die von temperiertem Eis bedeckte Fläche $A_{t,b}$ leicht abnimmt; womöglich spielt hier der gegenläufige Effekt verstärkter Advektion von kaltem Eis in die Tiefe durch die größeren Eisgeschwindigkeiten eine Rolle.

Variation des Gleitkoeffizienten

In den **Läufen gss09** und **gss10** wurde eine Variation des Gleitkoeffizienten C_{sl} im Gleitgesetz (5.172) vorgenommen; gss09: $C_{\text{sl}} = 5 \cdot 10^4 \text{ a}^{-1}$, gss10: $C_{\text{sl}} = 7 \cdot 10^4 \text{ a}^{-1}$, Standardwert von gss01: $C_{\text{sl}} = 6 \cdot 10^4 \text{ a}^{-1}$. In Tabelle 8.6 sind die Resultate angegeben.

Wie bei der Variation des Enhancement-Faktors (gss07, gss08) zeigt sich mit wachsendem Gleitkoeffizienten eine Abnahme des Eisvolumens, wobei die Spannweite mit ca. 1% des Standardwertes jedoch erstaunlich gering ist. Offenbar wird der volumenverringende Einfluß verstärkten basalen Gleitens durch die aus der zunehmenden

	gss09	gss01	gss10
h_{\max} [km]	3.370	3.371	3.369
V_{ges} [10^6 km^3]	3.111	3.091	3.075
H_{\max} [km]	3.329	3.329	3.322
V_{temp} [10^3 km^3]	3.219	2.513	1.911
$H_{t,\max}$ [m]	61.521	55.740	49.172
$A_{i,b}$ [10^6 km^2]	1.728	1.725	1.722
$A_{t,b}$ [10^6 km^2]	0.670	0.650	0.640

Tabelle 8.6: Variation des Gleitkoeffizienten C_{sl} : Resultate für die Simulationen gss09, gss01 (Standard-Lauf) und gss10. C_{sl} nimmt in dieser Reihenfolge zu.

Advektion von kaltem Eis nach unten resultierenden niedrigeren Eistemperaturen praktisch kompensiert. Hierbei spielt mit Sicherheit auch der deutliche Rückgang der von temperiertem Eis bedeckten Fläche $A_{t,b}$ eine Rolle, denn basales Gleiten ist an das Vorhandensein einer temperierten Eisbasis gekoppelt. Der Einfluß der verstärkten Advektion ist ferner für den Rückgang der temperierten Schicht (V_{temp} , $H_{t,\max}$) verantwortlich.

Variation des geothermen Wärmeflusses

Bei den **Läufen gss11** und **gss12** wurde der geotherme Wärmefluß um $\pm 30\%$ des Standardwertes $Q_{\text{geoth}}^{\perp} = 42 \text{ mWm}^{-2}$ variiert; gss11: $Q_{\text{geoth}}^{\perp} = 29.4 \text{ mWm}^{-2}$, gss12: $Q_{\text{geoth}}^{\perp} = 54.6 \text{ mWm}^{-2}$. Dies entspricht ungefähr der Unsicherheit in der experimentellen Bestimmung dieser Größe. Tabelle 8.7 zeigt die Ergebnisse der Simulationen.

	gss11	gss01	gss12
h_{\max} [km]	3.476	3.371	3.269
V_{ges} [10^6 km^3]	3.201	3.091	3.001
H_{\max} [km]	3.482	3.329	3.191
V_{temp} [10^3 km^3]	2.252	2.513	2.590
$H_{t,\max}$ [m]	54.294	55.740	56.321
$A_{i,b}$ [10^6 km^2]	1.728	1.725	1.730
$A_{t,b}$ [10^6 km^2]	0.552	0.650	0.827

Tabelle 8.7: Variation des geothermen Wärmeflusses Q_{geoth}^{\perp} : Resultate für die Simulationen gss11, gss01 (Standard-Lauf) und gss12. Q_{geoth}^{\perp} nimmt in dieser Reihenfolge zu.

Man erkennt als augenfälligste und unmittelbar einleuchtende Auswirkung eines steigenden Wärmeeintrags in das Eis von unten (größeres Q_{geoth}^{\perp}) eine starke Zunah-

me der von temperiertem Eis bedeckten Fläche $A_{t,b}$; die Spannweite beträgt über 40% des Wertes von gss01. Im Zusammenhang damit nimmt auch die Mächtigkeit der temperierten Eisschicht zu. Als Folge hauptsächlich des Ansteigens von $A_{t,b}$ und damit verbunden der Zunahme von Bereichen mit basalem Gleiten ist auch das Eisschild als ganzes betroffen; ein größerer geothermer Wärmefluß bedingt ein deutliches Zurückgehen des Eisvolumens, wobei die Auswirkung etwa der der Variation des Enhancement-Faktors in den Läufen gss07 und gss08 entspricht.

Simulation mit verdoppelter Vertikalauflösung

Für **Lauf gss13** wurde die Vertikalauflösung des numerischen Gitters verdoppelt; es wurden also 101 Gitterpunkte im Kalteisbereich, 21 Gitterpunkte im temperierten Eisbereich und 21 Gitterpunkte in der Lithosphäre verwendet. Tabelle 8.8 stellt das Ergebnis dem des Standardlaufes gss01 gegenüber.

	gss13	gss01
h_{\max} [km]	3.362	3.371
V_{ges} [10^6 km ³]	3.078	3.091
H_{\max} [km]	3.314	3.329
V_{temp} [10^3 km ³]	2.570	2.513
$H_{t,\max}$ [m]	55.890	55.740
$A_{i,b}$ [10^6 km ²]	1.725	1.725
$A_{t,b}$ [10^6 km ²]	0.666	0.650

Tabelle 8.8: Resultat der Simulation gss13 mit verdoppelter Vertikalauflösung im Vergleich zum Standard-Lauf gss01.

Es zeigt sich, daß die verdoppelte Vertikalauflösung nur eine minimale Auswirkung auf das Ergebnis hat. Die größten Abweichungen treten bei $A_{t,b}$ und V_{temp} mit ca. 2% auf, alle übrigen Diskrepanzen betragen weniger als 0.5%. Somit ist die standardmäßig verwendete Vertikalauflösung ausreichend für zuverlässige Resultate.

Simulation mit eiszeitlichen Klimabedingungen

Abschließend zu den Steady-State-Simulationen sei **Lauf gss14** präsentiert, welcher mit eiszeitlichen Klimabedingungen durchgeführt wurde. Diese werden parameterisiert durch $\Delta T_{\text{ma}} = -10^\circ\text{C}$ und somit gemäß Beziehung (8.13) $S = S^{\text{heute}}/2$. Der Enhancement-Faktor ist räumlich und zeitlich uniform auf den eiszeitlichen Wert $E = 3$ gesetzt. Die Ergebnisse dieser Simulation sind in den Abb. 8.16 – 8.22 dargestellt, Tabelle 8.9 zeigt den Endzustand im Vergleich mit der Standard-Simulation

gss01 unter heutigen Klimabedingungen.

	gss14	gss01
h_{\max} [km]	3.359	3.371
V_{ges} [10^6 km ³]	3.446	3.091
H_{\max} [km]	3.332	3.329
V_{temp} [10^3 km ³]	0.476	2.513
$H_{t,\max}$ [m]	32.890	55.740
$A_{i,b}$ [10^6 km ²]	2.078	1.725
$A_{t,b}$ [10^6 km ²]	0.334	0.650

Tabelle 8.9: Resultat der Simulation gss14 mit eiszeitlichen Klimabedingungen im Vergleich zum Standard-Lauf gss01.

Beim Vergleich der Abb. 8.16, 8.20 und 8.21 mit den entsprechenden Abb. 8.7, 8.11 und 8.12 des Standardlaufes zeigt sich, daß die Oberflächentopographie im Eisschildinnern im wesentlichen unverändert ist, wie auch die ähnlichen Werte für h_{\max} und H_{\max} (Abb. 8.22, Tabelle 8.9) beweisen. Der Grund hierfür liegt in den gegenläufigen Effekten von niedrigeren Temperaturen und kleinerer Schneefallrate beim eiszeitlichen Eisschild, welche sich offenbar weitgehend aufheben. Jedoch bewirken die niedrigeren Oberflächentemperaturen, daß oberflächliches Schmelzen beim eiszeitlichen Eisschild kaum eine Rolle spielt, wodurch es sich im Gegensatz zum heutigen Eisschild von gss01 überall bis zur Küstenlinie ausdehnt.

Der mit den niedrigeren Temperaturen verbundene Rückgang der temperierten Bereiche (Abb. 8.19, 8.20, 8.21) hat zur Folge, daß bei gss14 generell niedrigere Eischwindigkeiten auftreten als bei gss01. Die Lokalisierung der Hauptdrainagegebiete hat sich zwar nicht verändert (Abb. 8.17), jedoch sind die auftretenden Massenflüsse und Oberflächengeschwindigkeiten (Abb. 8.18) deutlich kleiner, was sich, wie oben bereits festgestellt, in der Auswirkung auf die resultierende Oberflächentopographie mit der Folge des um die Hälfte reduzierten Schneefalls kompensiert.

Es ist auffällig, daß Lauf gss14 der einzige aller betrachteten Steady-State-Simulationen ist, bei dem eine nennenswerte Veränderung der eisbedeckten Fläche $A_{i,b}$ im Vergleich zum Standardlauf gss01 eingetreten ist. Offenbar ist für die Position der Vereisungsgrenze hauptsächlich die Vorgabe der Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^\perp entscheidend, denn diese wurde ausschließlich bei gss14 variiert. Dieses Verhalten ist auch einleuchtend, denn die Entscheidung, ob ein bestimmter Landpunkt vereist oder nicht, hängt zunächst nur von der Bilanz aus Schneefall und Schmelzen ab; Effekte der Eisdynamik spielen erst eine Rolle, nachdem das Eis eine gewisse Dicke erreicht hat, da bei geringer Dicke wegen des nichtlinearen Fließgesetzes kaum Eis-

fließen auftritt. Das eröffnet die Möglichkeit, im Zuge einer inversen Modellierung, weitgehend unabhängig von ungenau bekannten Parametern wie z. B. dem geothermen Wärmefluß Q_{geoth}^{\perp} , dem Enhancement-Faktor E oder dem Gleitkoeffizienten C_{sl} , Rückschlüsse von geologisch rekonstruierten Vereisungsgrenzen der Vergangenheit auf zugehörige paläoklimatische Schneefall-Schmelz-Bilanzen zu gewinnen.

8.5.2 Transiente Simulationen mit Milanković-Sinus-Antrieb

Die **Läufe gtr01, gtr02 und gtr03** wurden mit einem jeweils sinusförmigen Verlauf der Lufttemperatur $\Delta T_{\text{ma}}(t)$, oszillierend zwischen dem warmzeitlichen Wert $\Delta T_{\text{ma}} = 0^{\circ}\text{C}$ und dem eiszeitlichen Wert $\Delta T_{\text{ma}} = -10^{\circ}\text{C}$, angetrieben. Die Perioden t_{Mil} entsprechen hierbei den Werten 20 ka (gtr01), 40 ka (gtr02) bzw. 100 ka (gtr03), dies sind (näherungsweise) die drei Milanković-Zyklen (Schönwiese [66]). Formelmäßig ergibt das den Antrieb

$$\Delta T_{\text{ma}}(t) = 5^{\circ}\text{C} \times \left(\cos\left(\frac{2\pi t}{t_{\text{Mil}}}\right) - 1 \right). \quad (8.15)$$

Für den Enhancement-Faktor wird der konstante, eiszeitliche Wert $E = 3$ verwendet, da es bei der akademischen Klimavorgabe (8.15) wenig sinnvoll erscheint, eine realistische Enhancement-Faktor-Eisalter-Kopplung einzuführen. Als Anfangsbedingung wird der von Lauf gss04 ermittelte stationäre Zustand für $E = 3$ verwendet. Die Iterationen decken die Modellzeit $t = 0 \dots 200$ ka ab, so daß mindestens zwei volle Perioden simuliert werden.

Die zeitliche Entwicklung der simulierten Eisschilde ist für gtr01 in Abb. 8.23, für gtr02 in Abb. 8.24 und für gtr03 in Abb. 8.25 gezeigt. Wie bereits bei den entsprechenden Simulationen für das EISMINT-Eisschild findet sich die jeweilige Anregungsperiode in allen gezeigten Größen wieder, jedoch treten speziell bei V_{ges} , V_{temp} und $H_{t,\text{max}}$ ausgeprägte Oberschwingungen auf. Im Fall des Laufes gtr01 dominiert bei der Zeitentwicklung von $H_{t,\text{max}}$ die erste Oberschwingung (mit halber Anregungsperiode) sogar über die Grundschwingung.

Das Zeitsignal für das gesamte Eisvolumen V_{ges} zeigt für alle drei Modellläufe einen charakteristischen sattelförmigen Verlauf: ausgehend von einem Maximum der Anregungstemperatur ΔT_{ma} nimmt V_{ges} mit fallendem ΔT_{ma} zunächst zu, erreicht jedoch bald ein Zwischenmaximum, fällt dann leicht ab, und beginnt erst etwa zeitgleich mit dem Erreichen des ΔT_{ma} -Minimums wieder anzusteigen. Das Hauptmaximum eines Zyklus wird ungefähr in der Mitte der ansteigenden ΔT_{ma} -Flanke erreicht; daran schließt sich ein schneller Abfall bis zum Erreichen des nächsten Maximums von ΔT_{ma} an. Dieses Verhalten hängt zusammen mit demjenigen der Vereisungsfläche $A_{i,b}$: die Eisvolumenzunahme bei einsetzender Abnahme von ΔT_{ma} resultiert nicht aus einem

dicker werdenden Eisschild (H_{\max} nimmt in dieser Phase sogar ab), sondern aus einer Vergrößerung der Vereisungsfläche. Das setzt sich so lange fort, bis diese nicht mehr weiter wachsen kann, weil die gesamte zur Verfügung stehende Landfläche vereist ist, was sich in den betreffenden $A_{i,b}$ -Plots durch das Erreichen der abgeschnitten wirkenden Maxima äußert. Dieser Zeitpunkt fällt mit dem Zwischenmaximum von V_{ges} zusammen; danach kann sich das Eisschild nicht weiter ausdehnen, und V_{ges} geht leicht zurück. Erst nach Durchlaufen des ΔT_{ma} -Minimums nimmt V_{ges} bei immer noch vollständig vereister Festlandsfläche wegen der gleichzeitig ansteigenden Schneefallrate wieder zu. Das Eisvolumen-Hauptmaximum eines Zyklus wird durchschritten, wenn aufgrund der ebenfalls zunehmenden Schmelzrate die Vereisungsfläche wieder zurückgeht; daran schließt sich ein schneller Eisvolumen-Abfall an, der etwa zeitgleich mit dem ΔT_{ma} -Maximum im V_{ges} -Hauptminimum eines Zyklus mündet.

Weiterhin fällt auf, daß die Signale bei den das temperierte Eis beschreibenden Größen V_{temp} , $H_{t,\max}$ und $A_{t,b}$ in allen drei Simulationen leicht verrauscht erscheinen, wobei die Rausch-Amplitude mit steigender Anregungsperiode (von gtr01 zu gtr03) größer wird. Um diese Erscheinung näher zu untersuchen, wird in Abb. 8.26 für gtr03 ein 4 ka-Zeitfenster um das Lufttemperatur-Minimum bei $t = 150$ ka herum betrachtet, wo das Rauschen am stärksten ausgeprägt ist. Offenbar handelt es sich um eine Überlagerung von leichtem numerischen Rauschen von Zeitschritt zu Zeitschritt ($\widetilde{\Delta t} = 100$ a) mit einer realen Eigenschwingung des Systems, deren Periode bei etwas mehr als 1 ka liegt. Diese Periodizität zeigt sich ebenfalls im Verhalten von V_{ges} und $A_{i,b}$ und beeinflusst somit auch das globale Verhalten des Eisschildes in geringem Maße. Im Vergleich dazu tritt bei Betrachtung eines 4 ka-Zeitfensters am Ende des Standard-Steady-State-Laufes gss01 (nicht explizit abgebildet) nur das irreguläre numerische Rauschen auf, eine überlagerte Periodizität ist dort nicht sichtbar.

8.5.3 Transiente Simulationen mit GRIP-Daten-Antrieb

In diesem Abschnitt werden mit den **Läufen gtr04** und **gtr05** zwei paläoklimatische Simulationen vorgestellt, welche über einen Zeitraum von 250000 Jahren vor heute ($t = -250$ ka) bis heute ($t = 0$) reichen und somit die zwei letzten Warmzeit-Kaltzeit-Zyklen (in chronologischer Reihenfolge Holstein-Warmzeit, Riß-Kaltzeit, Eem-Warmzeit, Würm-Kaltzeit, Neo-Warmzeit) abdecken. Der Lufttemperatur-Antrieb für diese Simulationen wurde aus den $\delta^{18}\text{O}$ -Meßdaten des GRIP-Eisbohrkerns bei Summit, dem Nord-Dom Grönlands, gewonnen, welcher die am weitesten in die Vergangenheit reichenden Klimainformationen für Grönland enthält (Johnsen [pers. Komm.], Johnsen et. al. [44]). Aus Gründen der numerischen Stabilität wurden die ursprünglichen Daten einer 2 ka-Mittelung unterworfen, da ansonsten an abrupten positiven

Peaks des Temperaturantriebs “Modellabstürze” auftreten. Dieses Problem scheint von der polythermen Rechnung herzurühren; bei abgeschaltetem polythermen Modus wurden diese Instabilitäten nicht beobachtet. Die Filterung sollte das Ergebnis jedoch nur minimal beeinflussen, da hochfrequente Temperaturschwankungen an der Eisoberfläche eine geringe Eindringtiefe besitzen. Abb. 8.2 zeigt den ursprünglichen und den gefilterten Lufttemperatur-Verlauf aus den GRIP-Daten, zusammen mit den angenommenen zeitlichen Begrenzungen der Kalt- und Warmzeiten (siehe unten).

Die Läufe gtr04 und gtr05 unterscheiden sich in der Wahl des Enhancement-Faktors. Bei gtr04 wurde der konstante eiszeitliche Wert $E = 3$ zugrundegelegt, in gtr05 ist eine Enhancement-Faktor-Eisalter-Kopplung berücksichtigt. Die Entscheidung, ob ein bestimmtes Eispartikel eiszeitliches oder warmzeitliches Eis darstellt, hängt dabei von dessen Akkumulations-Zeitpunkt t_{acc} , d. h., dem Zeitpunkt, an dem sich das Partikel auf der Eisoberfläche niedergeschlagen hat, ab. Dieser Akkumulations-Zeitpunkt berechnet sich aus dem Eisalter A und der aktuellen Zeit t gemäß $A = t - t_{\text{acc}}$. Älteres Eis als dasjenige aus der Eem-Warmzeit wird als eiszeitlich angenommen; die Eem-Warmzeit selbst wird auf $-132 \text{ ka} \leq t < -114.5 \text{ ka}$ datiert, wobei Durchgänge der GRIP-Temperaturkurve durch $\Delta T_{\text{ma}} = 0^\circ\text{C}$ zugrundegelegt wurden (Abb. 8.2). Der Übergang zwischen Würm-Kaltzeit und Neo-Warmzeit wird wie bei den Steady-State-Läufen auf 11 ka vor heute, also $t = -11 \text{ ka}$ gesetzt. Das ergibt folgende Zuordnung für die Enhancement-Faktoren:

$$\begin{aligned}
 E &= 3 && \text{falls } t_{\text{acc}} < -132 \text{ ka}, \\
 E &= 1 && \text{falls } -132 \text{ ka} \leq t_{\text{acc}} < -114.5 \text{ ka}, \\
 E &= 3 && \text{falls } -114.5 \text{ ka} \leq t_{\text{acc}} < -11 \text{ ka}, \\
 E &= 1 && \text{falls } t_{\text{acc}} \geq -11 \text{ ka}.
 \end{aligned}
 \tag{8.16}$$

Zur Gewinnung eines geeigneten Anfangszustandes wurde in beiden Fällen ein 100 ka-Steady-State-Lauf vorgeschaltet. Dieser verwendet den festen Enhancement-Faktor $E = 3$; die zeitlich konstante Lufttemperatur wurde auf den Startwert der GRIP-Daten $\Delta T_{\text{ma}}(-250 \text{ ka})$ gesetzt, um einen möglichst glatten Übergang in das transiente Szenario zu gewährleisten.

Abb. 8.27 zeigt die zeitliche Entwicklung des jeweiligen simulierten Eisschildes für die Läufe gtr04 und gtr05. Zunächst erkennt man, daß während der Würm-Kaltzeit deutliche Unterschiede vorhanden sind; Lauf gtr05 produziert in diesem Zeitraum ein wesentlich dickeres und volumenreicheres Eisschild. Der Grund dafür liegt darin, daß dem während der Eem-Warmzeit abgelagerten Eis bei gtr05 der kleine Wert $E = 1$ zugewiesen wird. Solange sich dieses schwerer deformierbare Eis nahe der Oberfläche befindet, hat es keinen großen Einfluß auf das Fließverhalten des gesamten Eisschildes; im Laufe der Zeit wird es jedoch advektiv nach unten transportiert, wo es

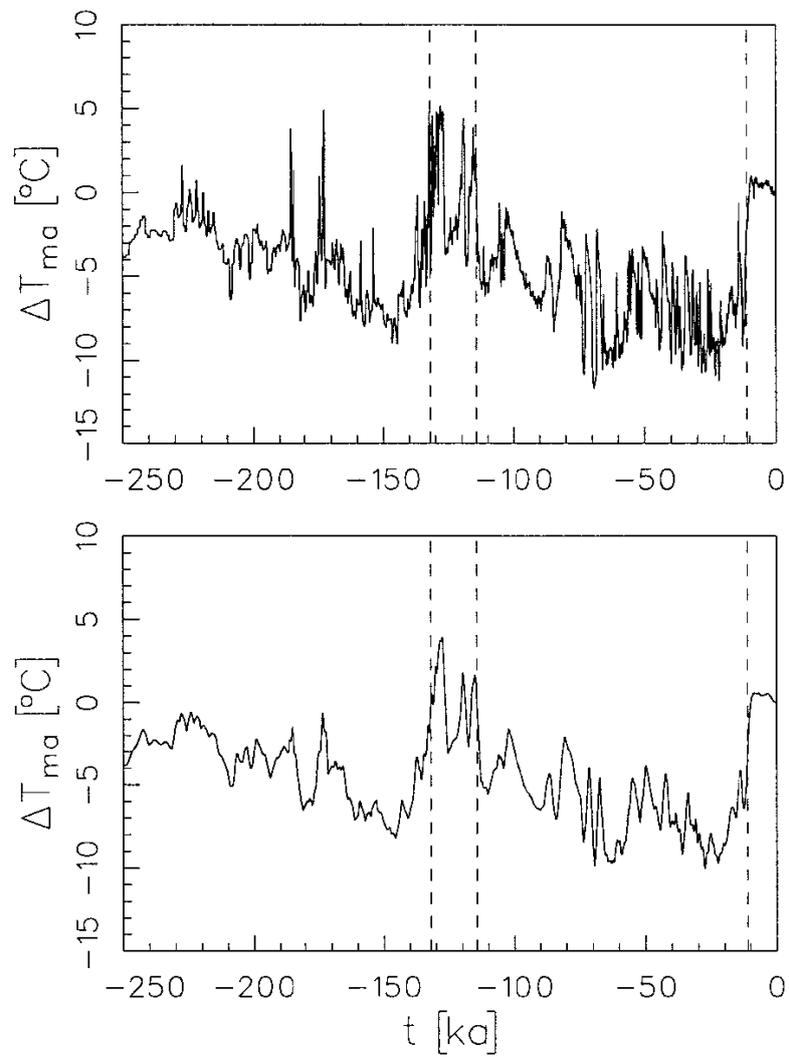


Abbildung 8.2: Aus den GRIP-Daten ermitteltes Lufttemperatur-Szenario für die letzten 250 ka. Oben: ungefilterte Daten. Unten: gefilterte Daten (2 ka-Mittelwerte). Die angenommenen zeitlichen Grenzen für die Eem-Warmzeit ($-132 \text{ ka} \dots -114.5 \text{ ka}$) und die Neo-Warmzeit ($-11 \text{ ka} \dots 0 \text{ ka}$) sind in beiden Plots markiert.

durch seine Zähigkeit den Eisfluß behindert. Dann ist auch der Massenverlust durch Kalbung kleiner als bei gtr04, wodurch sich das größere Eisvolumen während der Würm-Kaltzeit erklärt. Weiterhin erkennt man in dieser Zeit Unterschiede im Verlauf von V_{temp} und $H_{t,\text{max}}$. So sind im Zeitraum von ca. -115 ka bis -92 ka beide Werte bei gtr04 wesentlich größer als bei gtr05; daran anschließend zeigt sich von etwa -92 ka bis -80 ka bei gtr05 ein ausgeprägter Peak in $H_{t,\text{max}}$, der sich jedoch praktisch nicht in V_{temp} widerspiegelt und daher nur ein lokales Phänomen darstellt.

Gegen Ende der Würm-Kaltzeit wird das bodennahe Eem-Eis aus dem Eisschild großenteils verdrängt und durch Würm-Eis ersetzt, was sich darin äußert, daß die Ergebnisse der beiden Simulationen wieder zusammenlaufen. Für den Zeitraum vom Last Glacial Maximum (LGM, $t = -18$ ka) bis heute ist praktisch kein Unterschied mehr vorhanden; insbesondere ist es für den simulierten heutigen Zustand des Eisschildes unerheblich, welches Szenario zugrundegelegt wird.

Die Entwicklung der Vereisungsfläche $A_{i,b}$ verläuft für beide Simulationen identisch. Dieses Verhalten untermauert die bei der Besprechung von Lauf gss14 aufgestellte Behauptung, daß die Vereisungsfläche hauptsächlich von der Vorgabe der Akkumulations-Ablations-Funktion a_s^{\perp} bestimmt wird, und der internen Dynamik für das Verhalten von $A_{i,b}$ nur eine untergeordnete Bedeutung zukommt.

Die auffälligste Erscheinung in Abb. 8.27 ist der bei beiden Simulationen gleichermaßen vorhandene starke Rückgang des Eisvolumens während der Eem-Warmzeit bei $t = -127$ ka auf $V_{\text{ges}} = 2.681 \cdot 10^6 \text{ km}^3$ bzw. 82.9% des simulierten heutigen Wertes. Dieser starke negative Peak ist begleitet von ebensolchen Peaks bei V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$, findet sich jedoch nicht in den Signalen von h_{max} und H_{max} wieder. Beide Werte sind zum Zeitpunkt dieses Eem-Eisvolumen-Minimums sogar größer als beim LGM, welches sich durch ein lokales Maximum der Vereisungsfläche und ein großes Eisvolumen auszeichnet. Offenbar reagiert das Eisinnere nahe dem Scheitelpunkt primär auf Änderungen der Schneefallrate, was dazu führt, daß höhere Lufttemperaturen über größere Schneefallraten größere Werte für h_{max} und H_{max} bedingen (wohingegen das Eisvolumen einen gegenläufigen Trend aufweist). Das wird auch in der Ähnlichkeit der Form der Zeitsignale dieser beiden Größen mit dem antreibenden ΔT_{ma} -Signal evident.

Die Abb. 8.28 – 8.39 zeigen für gtr05 die Eisoberflächentopographie, Eisbasistemperatur mit temperierten Bereichen und zwei West-Ost-Querschnitte durch das Eisschild als Zeitschnitte für das simulierte Eem-Eisvolumen-Minimum ($t = -127$ ka), das simulierte und auch geologisch verifizierte LGM ($t = -18$ ka) und den heutigen Zustand ($t = 0$ ka). Weiterhin stellt Tabelle 8.10 den heutigen Zustand von gtr05 demjenigen des Standard-Steady-State-Laufes gss01 und, sofern vorhanden, den Meß-

	gtr05	gss01	Daten
h_{\max} [km]	3.477	3.371	3.247
V_{ges} [10^6 km ³]	3.235	3.091	2.827
H_{\max} [km]	3.482	3.329	3.200
V_{temp} [10^3 km ³]	2.089	2.513	–
$H_{t,\max}$ [m]	55.032	55.740	–
$A_{i,b}$ [10^6 km ²]	1.754	1.725	1.682
$A_{t,b}$ [10^6 km ²]	0.549	0.650	–

Tabelle 8.10: Resultat der Simulation gtr05 (GRIP-Daten-Antrieb) für den heutigen Zustand im Vergleich zum Standard-Steady-State-Lauf gss01 und den Meßdaten.

daten gegenüber.

Für das Eem-Eisvolumen-Minimum erkennt man (Abb. 8.28), daß das Eisschild im Südwesten eine starke Einschnürung aufweist, aber auch im Nordosten weit hinter der heutigen Vereisungsgrenze zurückbleibt. Bei Betrachtung der temperierten Bereiche (Abb. 8.29) fällt auf, daß relativ viele Gitterpunkte eine CTS mit Gefrierbedingungen haben, im Gegensatz zu den beiden anderen Zeitpunkten (Abb. 8.33, 8.37), wo ausschließlich Schmelzbedingungen gefunden werden. Weiterhin liegen eine Reihe dieser Gitterpunkte mit Gefrierbedingungen nicht nahe der Vereisungsgrenze, wo Gefrierbedingungen durch die Strömungsgeometrie hauptsächlich zu erwarten sind, sondern weiter landeinwärts. Das liegt daran, daß das temperierte Eisvolumen in der Zeit unmittelbar vor dem Eem-Eisvolumen-Minimum sehr stark zurückgegangen ist (Abb. 8.27), die CTS sich also nach unten bewegt hat, was das Auftreten von Gefrierbedingungen begünstigt. Die beiden Querschnittsplots (Abb. 8.30, 8.31) zeigen deutliche Temperaturinversionen in der oberen Hälfte des Eisschildes als Folge der im Eisinneren gespeicherten Temperaturinformation aus der Riß-Kaltzeit; in den allerersten Eisschichten erscheinen die Temperatur-Isolinien jedoch aufgebogen (besonders gut in Abb. 8.31 zu erkennen), da die Lufttemperatur sich während einiger Jahrtausende unmittelbar vor Erreichen des Eem-Eisvolumen-Minimums um mehrere Grad verringert hat.

Das LGM ist durch ein Eisschild gekennzeichnet, welches in der Simulation die gesamte zur Verfügung stehende Festlandsfläche Grönlands bedeckt (Abb. 8.32). Hierbei ist jedoch nicht berücksichtigt, daß zu dieser Zeit der Meeresspiegel um etwa 135 m niedriger lag als heute, wodurch sich eine Verbindung zwischen dem nordwestlichen grönländischen Eisschild und dem benachbarten laurentischen (nordamerikanischen) Eisschild entwickeln konnte (Schönwiese [66]). Aufgrund der zu diesem Zeitpunkt bereits sehr lange andauernden Kaltzeit ist die Temperaturinformation bis zur Eisbasis

durchgedrungen, was sich in den niedrigsten Basistemperaturen der drei betrachteten Zeitschnitte äußert (Abb. 8.33); weiterhin ist die Ausdehnung der temperierten Bereiche relativ gering. Die in den Querschnitten (Abb. 8.34, 8.35) sichtbare Temperaturinversion beruht hauptsächlich auf dem stets wirksamen advektiven Transport von kaltem Oberflächeneis aus Zentralgrönland nach unten und außen; einen Beitrag leistet jedoch auch der bereits einsetzende Lufttemperaturanstieg, was sehr gut anhand der geschlossenen -40°C -Isolinie unmittelbar unterhalb des Scheitelpunktes in Abb. 8.35 deutlich wird.

Bei Betrachtung des simulierten heutigen Zustandes zeigt sich, daß sich das Eis seit dem LGM teilweise wieder von der Küste zurückgezogen hat (Abb. 8.36). Weiterhin ist die Eisbasistemperatur generell gestiegen, und damit einhergehend auch die Ausdehnung der temperierten Bereiche (Abb. 8.37). Temperaturinversionen in den Querschnitten (Abb. 8.38, 8.39) sind nur schwach ausgeprägt und beschränken sich auf die randnahen Regionen, wo sie von dem oben beschriebenen Advektionseffekt hervorgerufen werden; die eiszeitliche Klimainformation ist nur noch in großer Tiefe zu finden, da bereits etwa 10000 Jahre relativ konstanten warmzeitlichen Klimas vergangen sind.

Tabelle 8.10 zeigt, daß Simulation gtr05 im Vergleich zum Standard-Steady-State-Lauf gss01 ein volumenreicheres, ausgedehnteres und kälteres Eisschild hervorbringt (letzteres äußert sich in der kleineren Ausdehnung der temperierten Bereiche). Das ist eine unmittelbare Folge des Einflusses der Würm-Eiszeit auf den heutigen Zustand, was zeigt, daß Steady-State-Rechnungen für die realistische Simulation heutiger großer Eisschilde (Grönland, Antarktis) unzulänglich sind. Des weiteren fällt auf, daß, scheinbar im Gegensatz zu dieser Behauptung, die Übereinstimmung zwischen gtr05 und den Meßdaten schlechter ist als zwischen gss01 und den Meßdaten. Der Grund dafür liegt insbesondere in der Unsicherheit bei der hier verwendeten Parameterisierung der oberflächlichen Schmelzrate M . Diese wurde von Calov [12] an ein möglichst gutes Ergebnis für Steady-State-Simulationen angepaßt, so daß die schlechtere Übereinstimmung bei der transienten Simulation gtr05 verständlich wird.

Abschließend sei zu den GRIP-Daten-Simulationen angemerkt, daß eine ähnliche Rechnung mit einem Kalteis-Modell von Fabré, Letréguilly, Ritz & Mangeney [15] beschrieben wird. Die gezeigten Resultate stimmen qualitativ mit den hier erhaltenen überein, jedoch ist der Eisvolumenrückgang in der Eem-Warmzeit in dieser Arbeit deutlich geringer. Die Haupt-Ursache hierfür liegt in der abweichenden Kopplung von Lufttemperatur und Schneefallrate, welche bei den genannten Autoren eine größere Schneefallrate in der Eem-Warmzeit zur Folge hat, welche dem Eisabbau stärker als bei der hier verwendeten linearen Kopplung (8.13) entgegenwirkt.

8.5.4 Transiente Simulationen zur Auswirkung eines anthropogen verstärkten Treibhauseffektes

Durch die vom Menschen verursachte Anreicherung verschiedener Spurengase in der Atmosphäre (Wasserdampf, Kohlendioxid, Methan, FCKW) wird sich wahrscheinlich, bedingt durch den damit verbundenen verstärkten Treibhauseffekt, die Temperatur der Erdatmosphäre in näherer Zukunft im Gradbereich erhöhen. Dies birgt die Gefahr des teilweisen Abschmelzens der heutigen großen Eisschilde auf Zeitskalen von 10^2 - 10^4 Jahren, einhergehend mit einem Anstieg des Meeresspiegels, zu dem bei völligem Abschmelzen die Antarktis mit ca. 65 m und Grönland mit ca. 7 m beitragen würden (Schönwiese [66]). Um diese Problematik zu erhellen, werden abschließend die **Läufe gtr12, gtr13 und gtr14** besprochen, welche einen sprunghaften Anstieg der Lufttemperatur um $\Delta T_{\text{ma}} = 2^\circ\text{C}$ (gtr12), 4°C (gtr13) bzw. 6°C (gtr14) annehmen und die resultierende Dynamik des grönländischen Eisschildes von heute ($t = 0$) bis 5000 Jahre in die Zukunft ($t = 5 \text{ ka}$) simulieren.

Als Anfangsbedingung wird der stationäre Zustand des Standard-Laufes gss01 zugrundegelegt. Die Enhancement-Faktor-Eisalter-Kopplung entspricht (8.16), wobei jedoch kein älteres Eis als dasjenige aus der Würm-Kaltzeit auftritt, so daß lediglich der Übergang zwischen Würm-Eis und neo-warmzeitlichem Eis bei $t_{\text{acc}} = -11 \text{ ka}$ relevant ist. Insbesondere besagt (8.16), daß dem während der Modellzeit akkumulierten Eis $E = 1$ zugewiesen wird.

Abb. 8.40 zeigt die zeitliche Entwicklung des Eisschildes für die drei verschiedenen Szenarien. Es zeigt sich, daß bei gtr12 die Auswirkung der Lufttemperatur-Erhöpfung innerhalb der Modellzeit vergleichsweise gering ist; insbesondere geht das Eisvolumen V_{ges} nur um 4.9% zurück, was einem Meeresspiegelanstieg von 34 cm entspricht. Bei gtr13 und gtr14 ist dagegen ein starker Rückgang zu verzeichnen: das nach 5 ka abgeschmolzene Eisvolumen beträgt für gtr13 37.6%, für gtr14 sogar 87.2% der ursprünglich vorhandenen Menge; dies entspricht einem Meeresspiegelanstieg von 2.6 m bzw. 6.1 m. Man erkennt ferner, daß sich der Abbau des Eisvolumens innerhalb des ersten Jahrtausends in allen drei Fällen in guter Näherung linear vollzieht; die zugehörigen Meeresspiegeländerungen betragen in diesem Zeitraum im Mittel 1.47 cm/Jahrhundert (gtr12), 6.44 cm/Jahrhundert (gtr13) bzw. 15.7 cm/Jahrhundert (gtr14). Diese Angaben basieren auf den oben erwähnten 7 m Meeresspiegeläquivalent für das gesamte Eisvolumen und der Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Eisvolumenabbau und Meeresspiegelerhöhung.

Das tendenzielle Verhalten des temperierten Eisvolumens V_{temp} ist in allen drei Fällen gleich. Es steigt stets zunächst an, um schließlich unter den ursprünglichen Wert abzufallen. Die Ursache für den anfänglichen Anstieg ist die erhöhte Ober-

flächentemperatur, welche das Eisschild als ganzes etwas wärmer macht, wodurch sich die CTS nach oben bewegt. Daß sich dieser Trend nicht fortsetzt, liegt daran, daß mit abnehmendem Eisvolumen zum einen die interne Wärmeproduktion durch Dissipationsleistung reduziert wird und zum anderen die Eisbasis durch die Entlastung aufsteigt, was beides zurückgehende Temperaturen von bodennahem Eis nach sich zieht. In diesem Zusammenhang erkennt man ferner einen etwas rauhen Verlauf der für das temperierte Eis relevanten Größen V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$ und $A_{t,b}$. Das erklärt sich dadurch, daß sich hier große Veränderungen in relativ kurzer Zeit abspielen, was für das sehr sensibel reagierende temperierte Eis numerisch problematisch ist.

Die Abb. 8.41 und 8.42 zeigen für Lauf gtr14 die Topographie bzw. Eisbasistemperatur für den am Ende der Simulation verbleibenden Rest des Eisschildes. Man erkennt, daß sich die Hauptmasse in einem Streifen zwischen 72° und 76° nördlicher Breite befindet; der Scheitelpunkt ist auf die Ostküste zu gewandert. Es ist auffällig, daß in der Nachbarschaft des neuen Scheitelpunktes die Höhe der Eisoberfläche kaum abgenommen hat. Dies kommt daher, daß dort die Eisbasis sehr hoch gelegen ist (vgl. Abb. 8.4), was zu den in Abb. 8.42 evidenten niedrigen Eisbasis-Temperaturen führt, welche sich wegen dem damit verbundenen Haften des Eises stabilisierend auswirken.

Ein großer Unsicherheitsfaktor bei diesen Prognosen ist die zukünftige Entwicklung der Schneefallrate, welche hier via Gl. (8.13) linear an die Lufttemperatur gekoppelt wurde. In der Literatur (Huybrechts, Letréguilly & Reeh [39], Letréguilly, Huybrechts & Reeh [47], Fabré, Letréguilly, Ritz & Mangeney [15]) finden sich bei ähnlichen Rechnungen mit Kalteis-Modellen zwei abweichende Ansätze, nämlich zum einen eine konstante, zum anderen eine exponentiell mit ΔT_{ma} ansteigende Schneefallrate; (8.13) liegt zwischen diesen beiden Extremen. In der letztgenannten Arbeit wird aufgezeigt, daß eine Steady-State-Rechnung für $\Delta T_{\text{ma}} = 5^\circ\text{C}$ mit konstanter (heutiger) Schneefallrate ein fast verschwundenes Eisschild ergibt, während dieselbe Rechnung bei exponentiell erhöhter Schneefallrate eine nur geringfügige Veränderung gegenüber dem heutigen Steady-State produziert. Dies zeigt, daß verlässliche Prognosen mit einfachen Parameterisierungen der Schneefallrate letztlich nicht möglich sind. Abhilfe kann nur aus dem Bereich der detaillierten Modellierung der Schneefallrate im Rahmen von GCM- (General Circulation Model-) Simulationen kommen, welche die Schneefallrate prinzipiell aus der Dynamik von Atmosphäre und Ozean ableiten können.

8.6 Abbildungen zu den Simulationen für das grönländische Eisschild

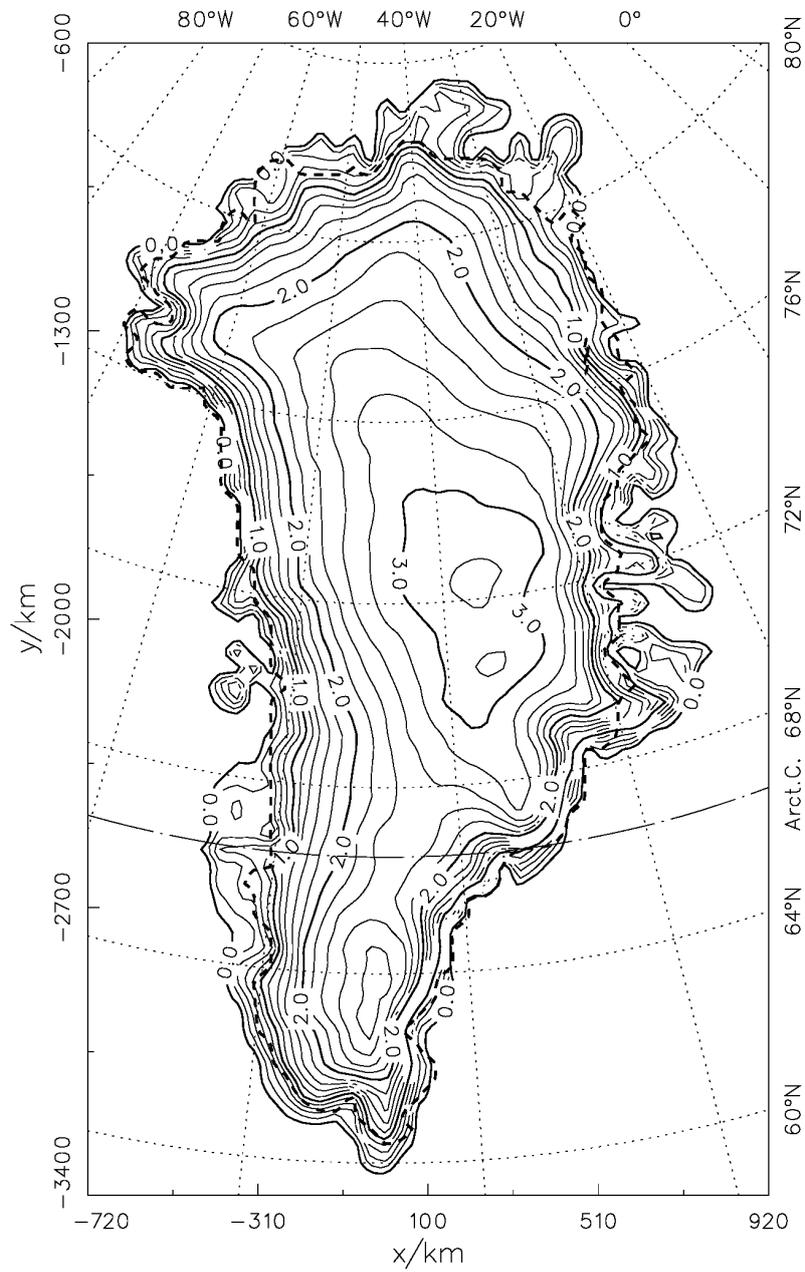


Abbildung 8.3: Gemessene Topographie h der heutigen grönländischen Eisoberfläche nach Letréguilly, Reeh & Huybrechts [48] (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

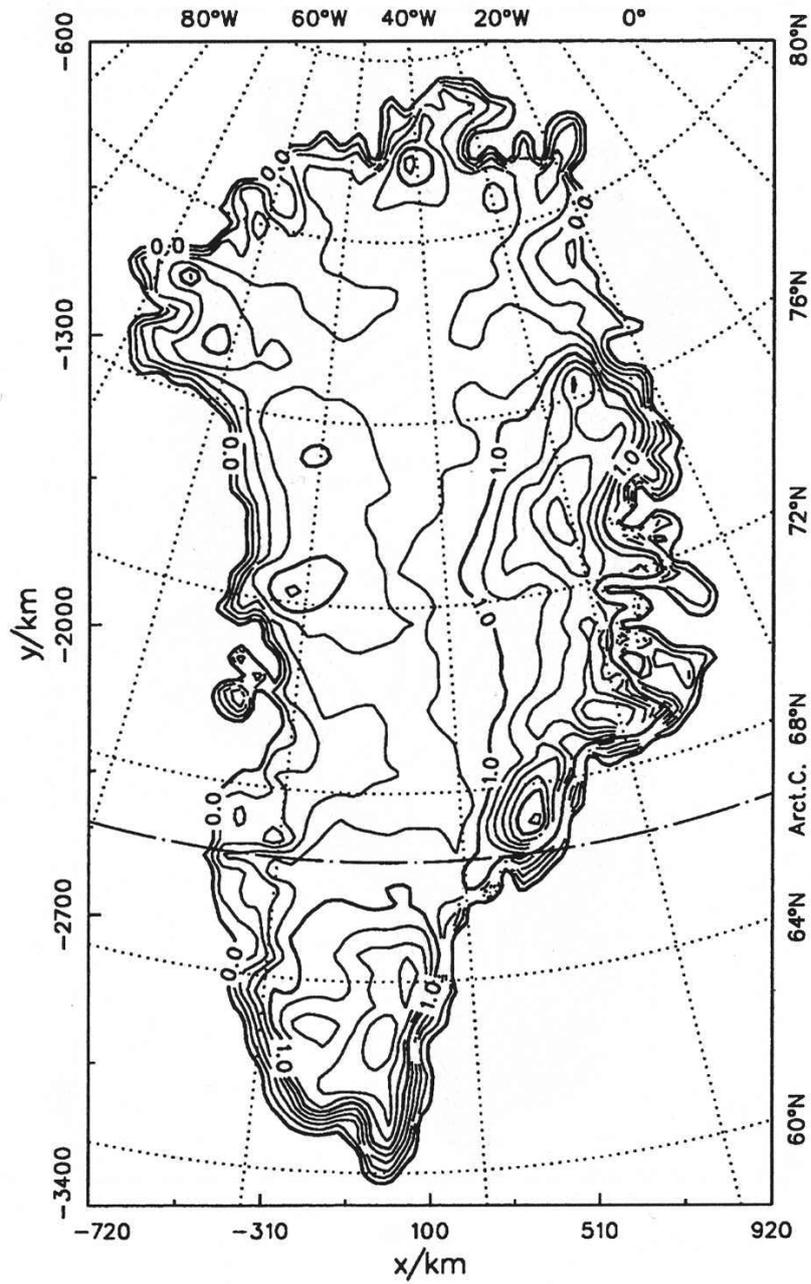


Abbildung 8.4: Felsgrund-Topographie b_0 Grönlands im isostatischen Gleichgewicht ohne Eislast (nach (8.3), in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m.

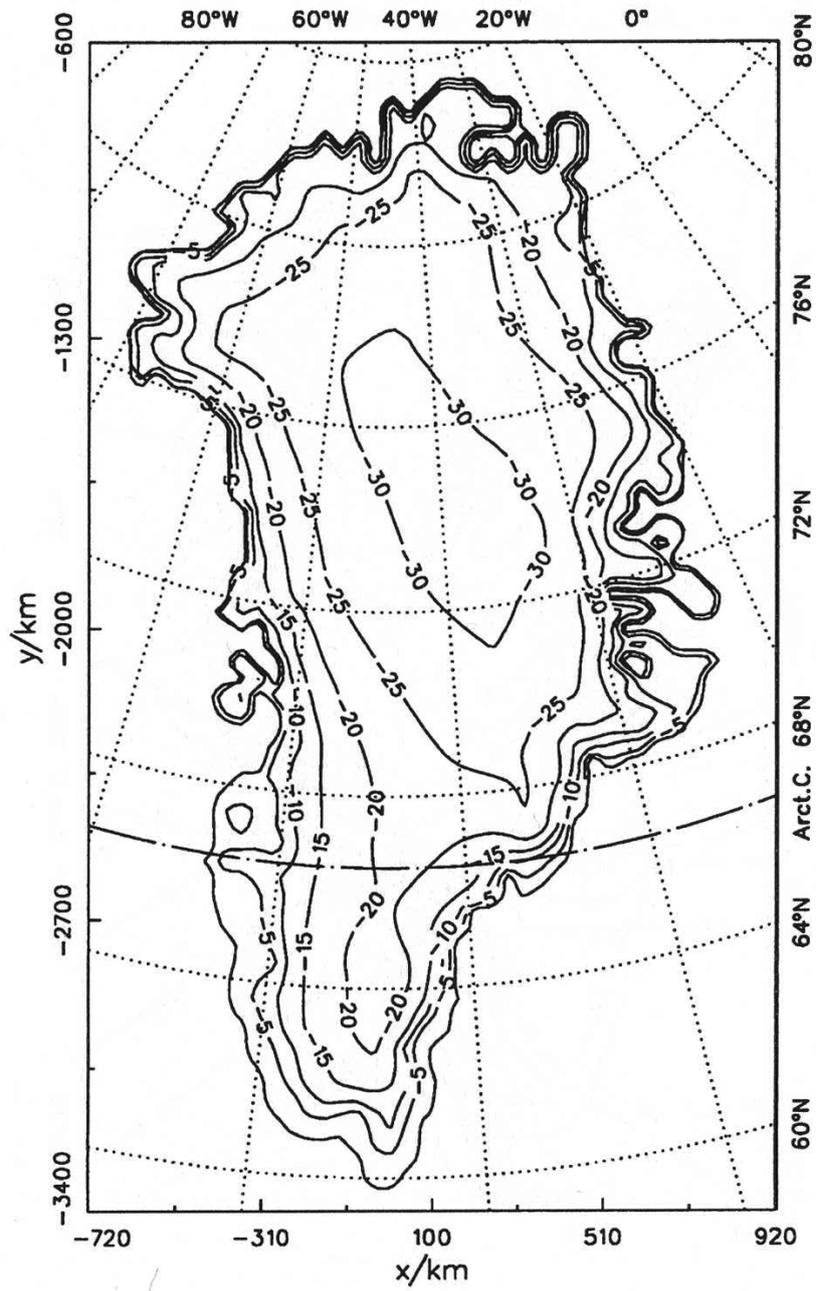


Abbildung 8.5: Jahresmittel der heutigen Lufttemperatur T_{ma} über dem grönländischen Eisschild nach der Parameterisierung von Reeh [64] (in °C).

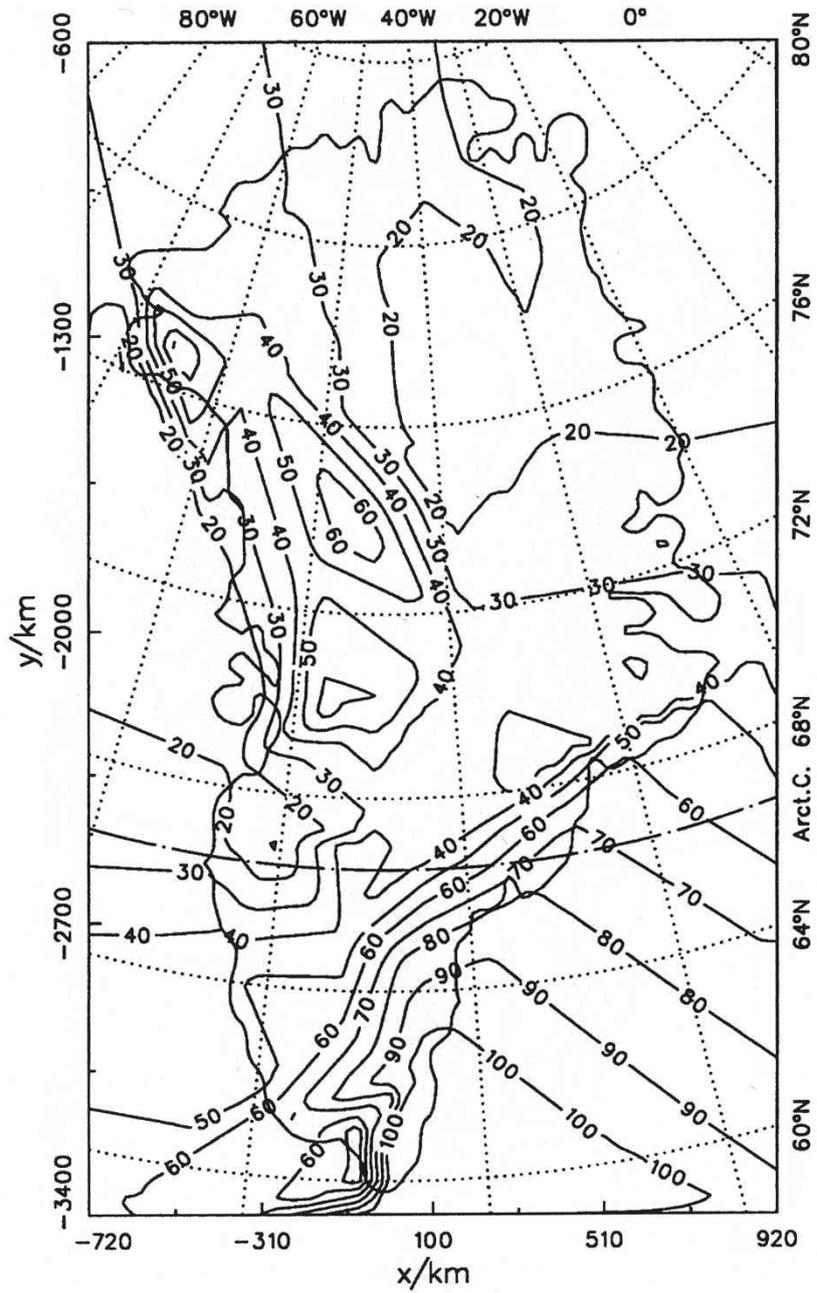


Abbildung 8.6: Heutige Schneefallrate S im Rechengebiet für das grönländische Eisschild nach der Parameterisierung von Calov [12] (in cm/a Eisäquivalent).

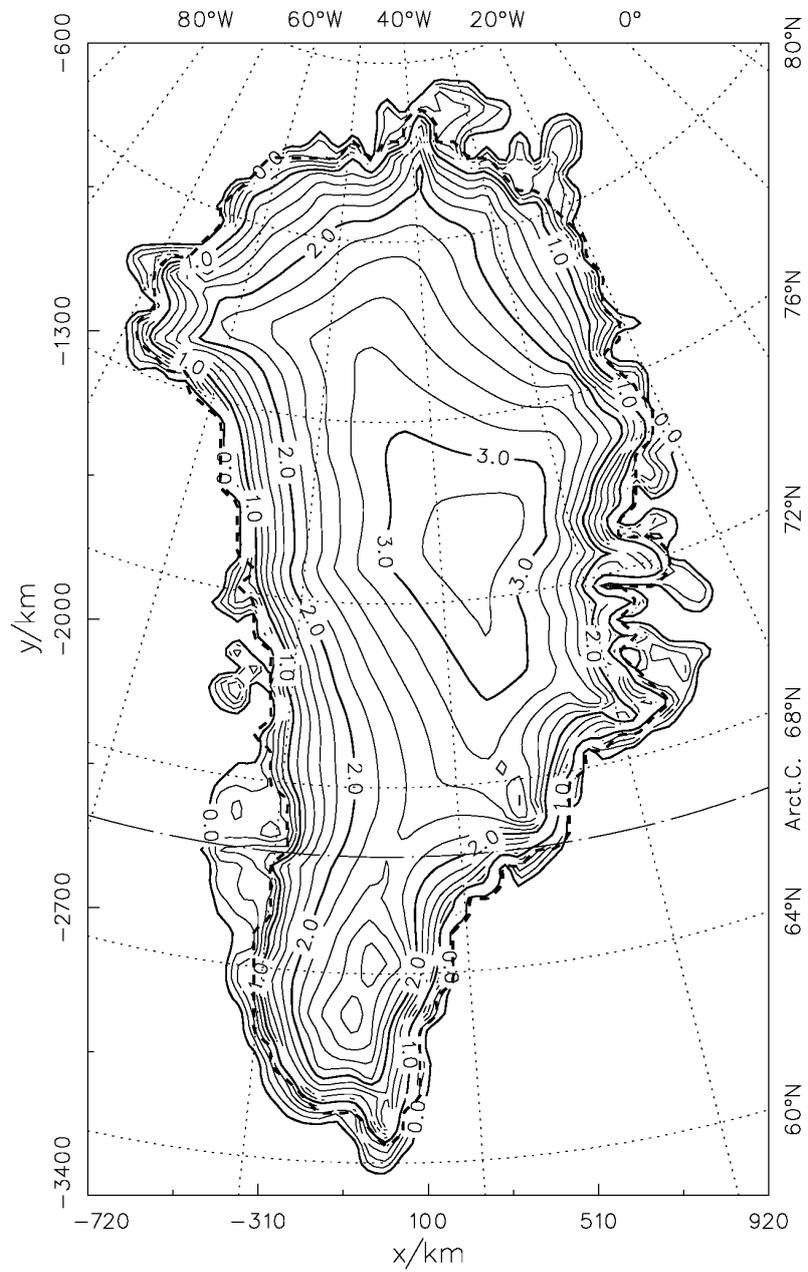


Abbildung 8.7: Endzustand von Lauf gss01: Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

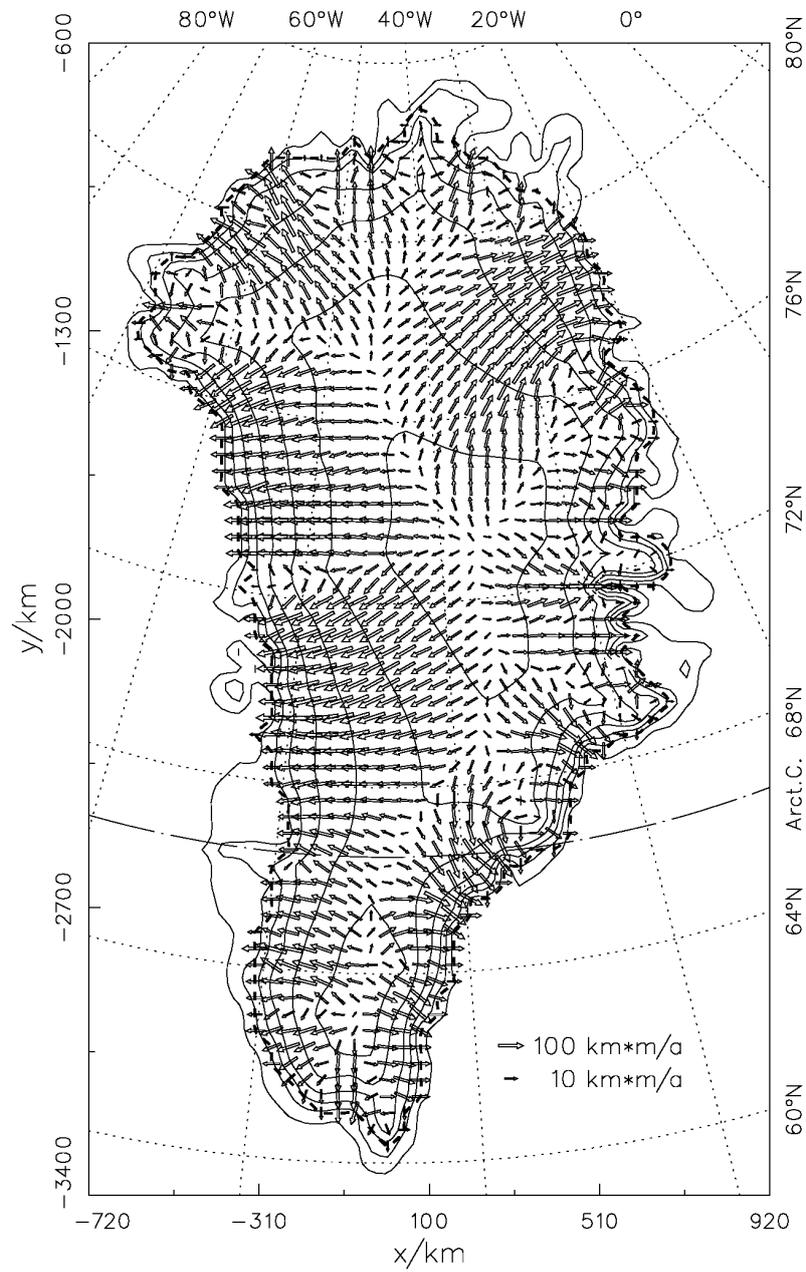


Abbildung 8.8: Endzustand von Lauf gss01: Horizontaler Massenfluß. Doppelte Pfeillänge entspricht zehnfachem Massenfluß. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze, die Isolinien die Oberflächentopographie in 500 m-Intervallen.

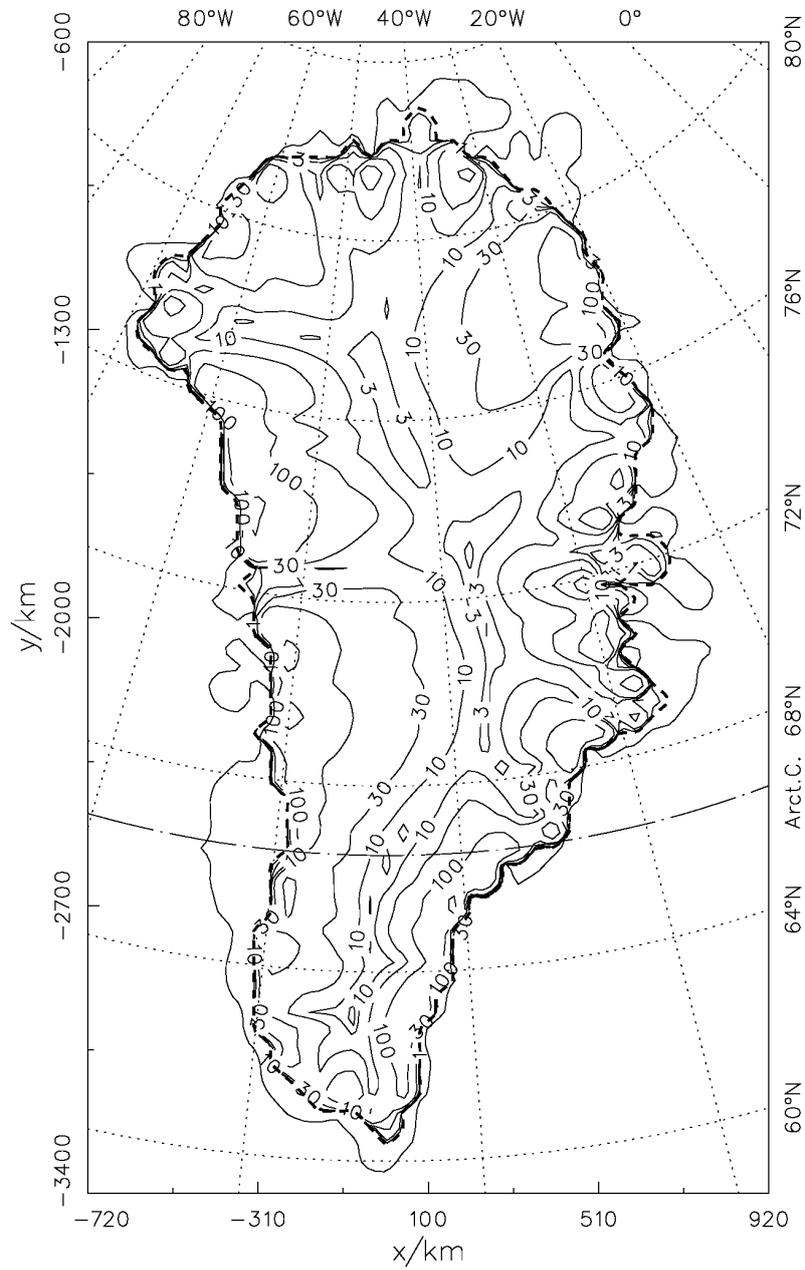


Abbildung 8.9: Endzustand von Lauf gss01: Eisoberflächengeschwindigkeit (in km/a). Die Isolinien entsprechen den Werten 1, 3, 10, 30 ... km/a. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

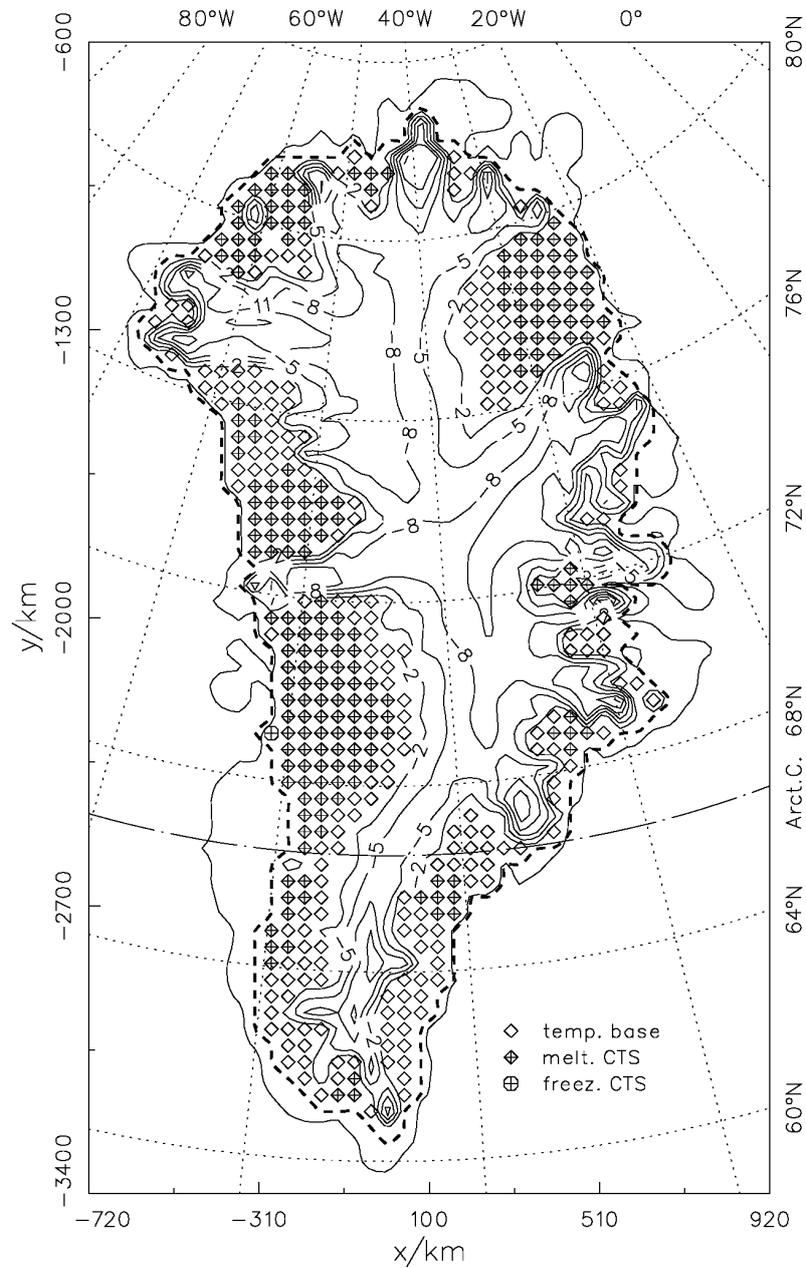


Abbildung 8.10: Endzustand von Lauf gss01: Homologe Temperatur an der Eisbasis (in °C). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C. Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

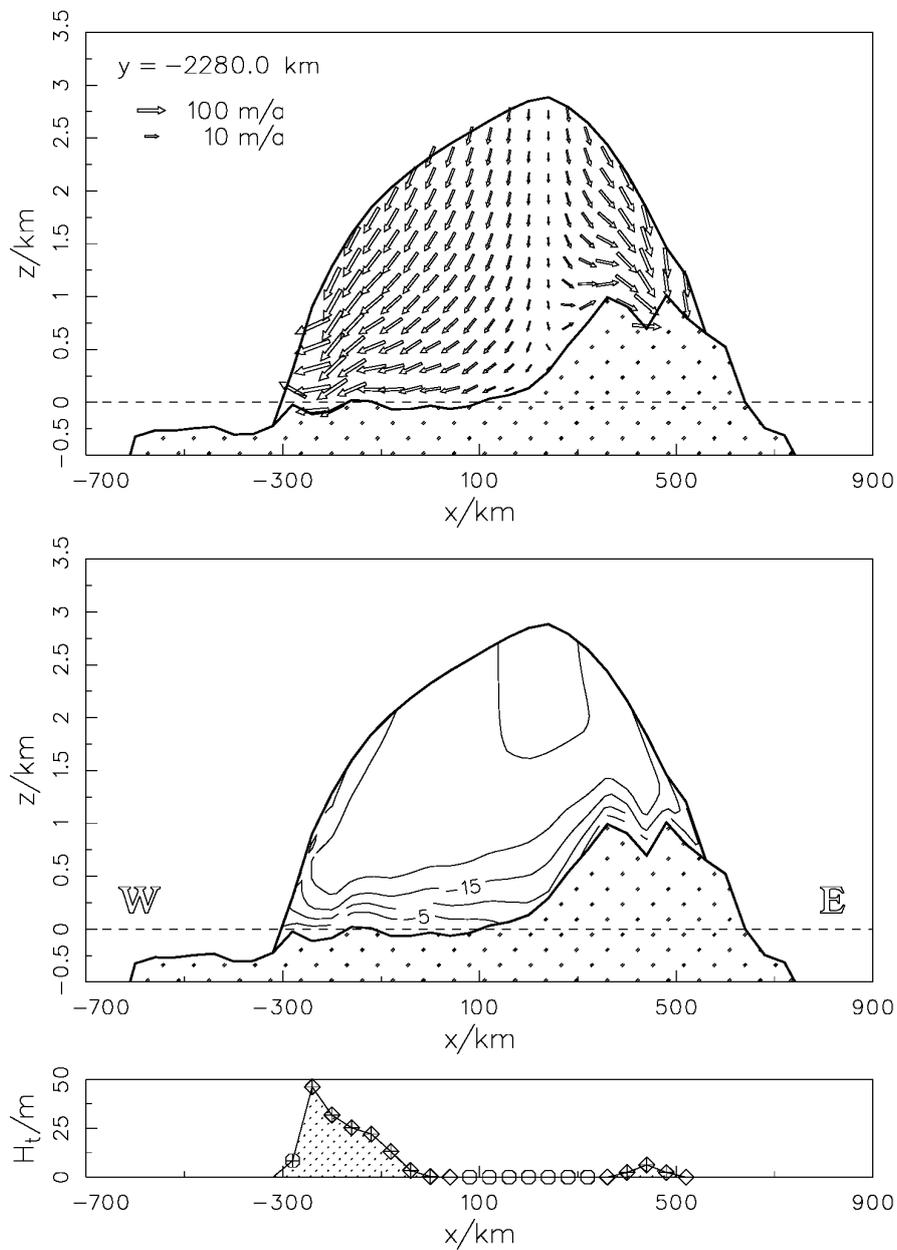


Abbildung 8.11: Endzustand von Lauf gss01: Querschnitt bei $y = -2280$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

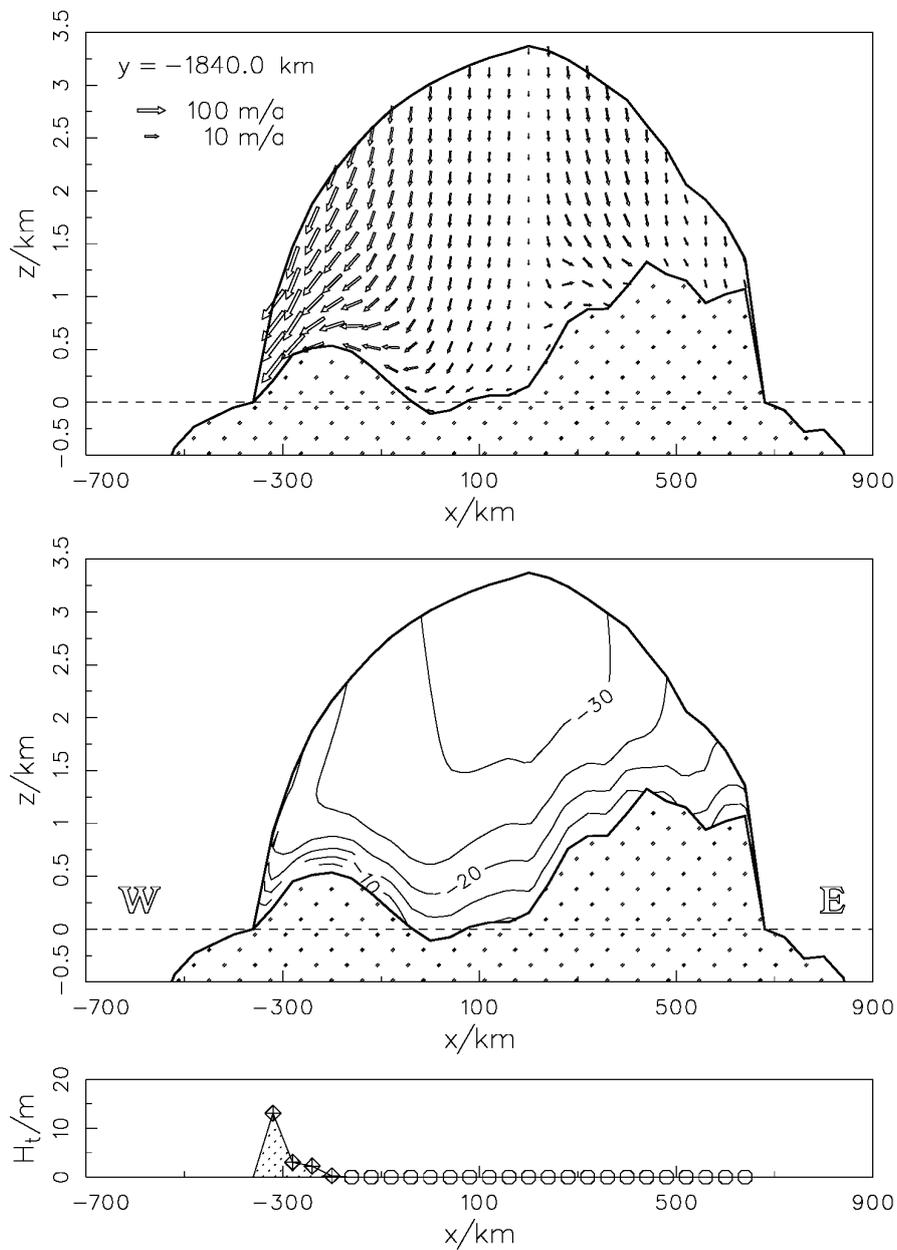


Abbildung 8.12: Endzustand von Lauf gss01: Querschnitt bei $y = -1840$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

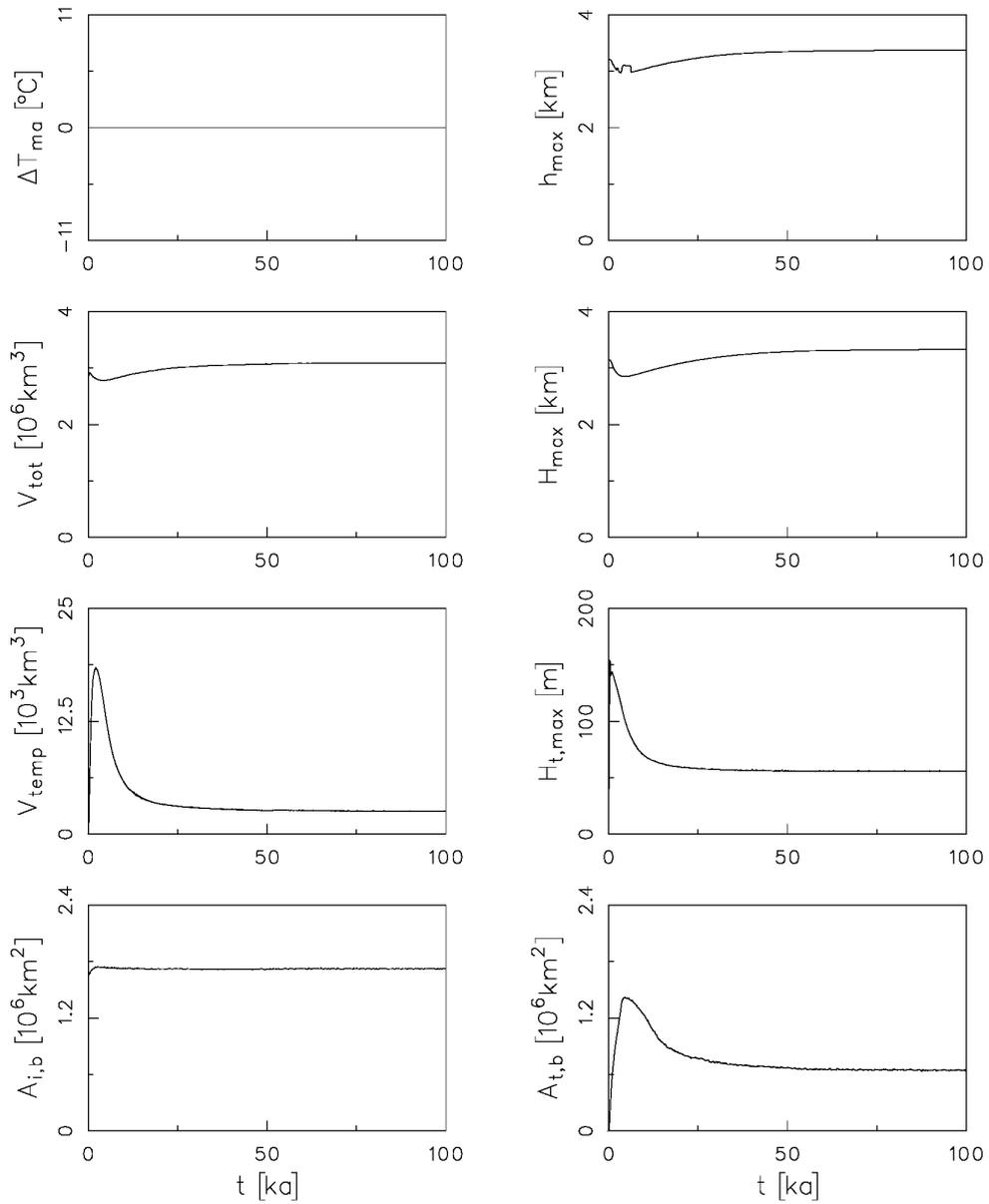


Abbildung 8.13: Lauf gss01: Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

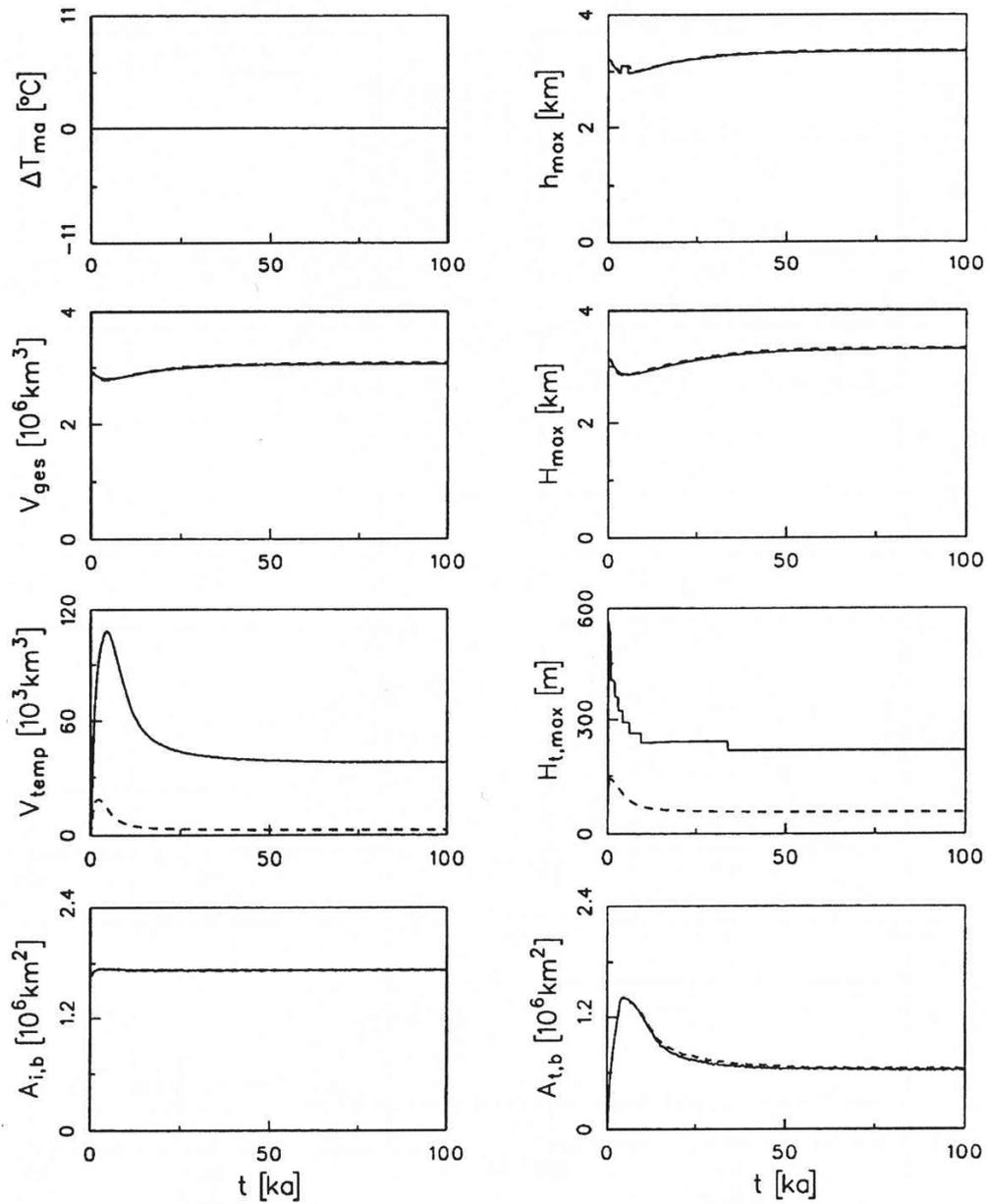


Abbildung 8.14: Lauf gss02 (zum Vergleich Lauf gss01, gestrichelt): Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

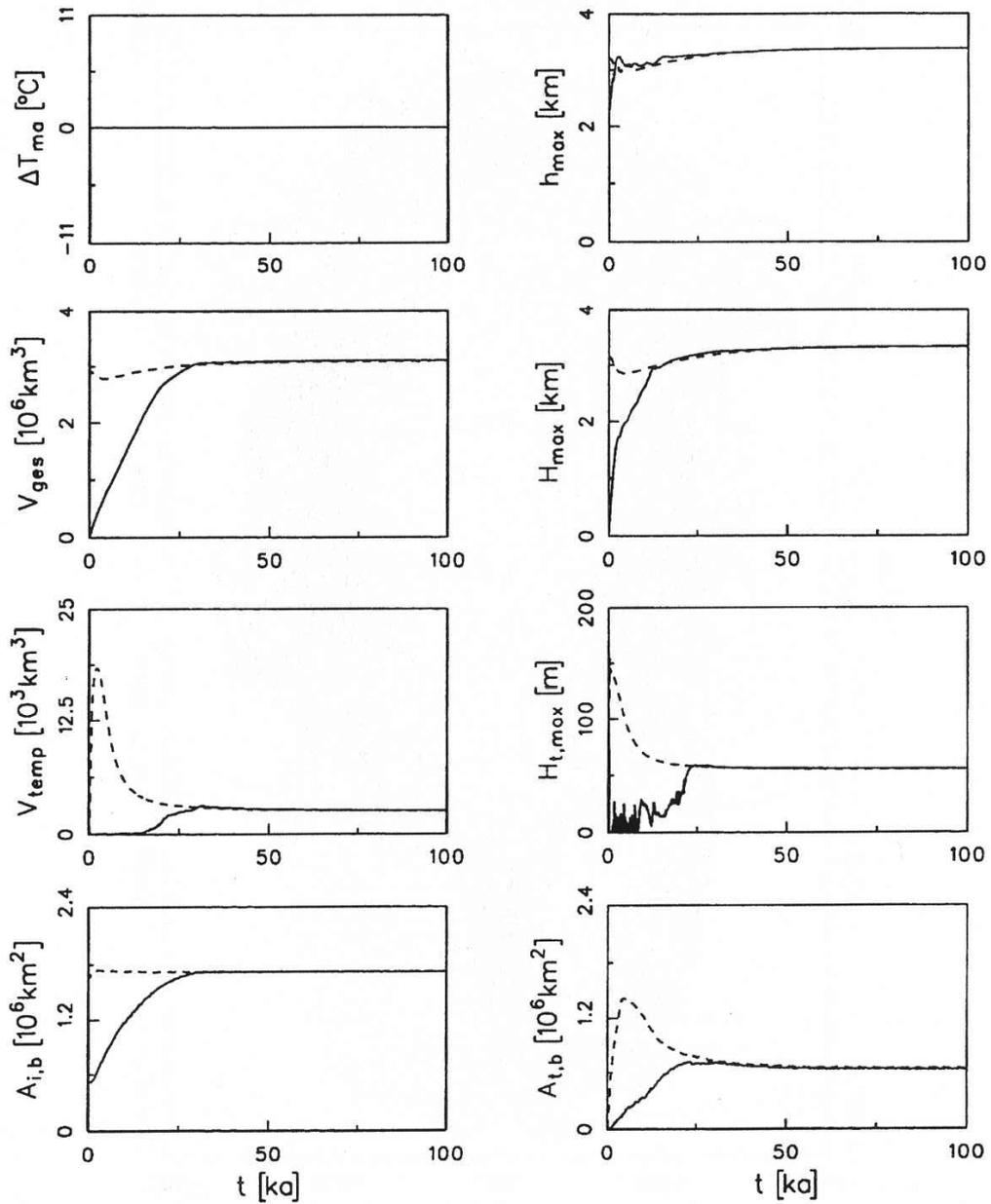


Abbildung 8.15: Lauf gss03 (zum Vergleich Lauf gss01, gestrichelt): Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

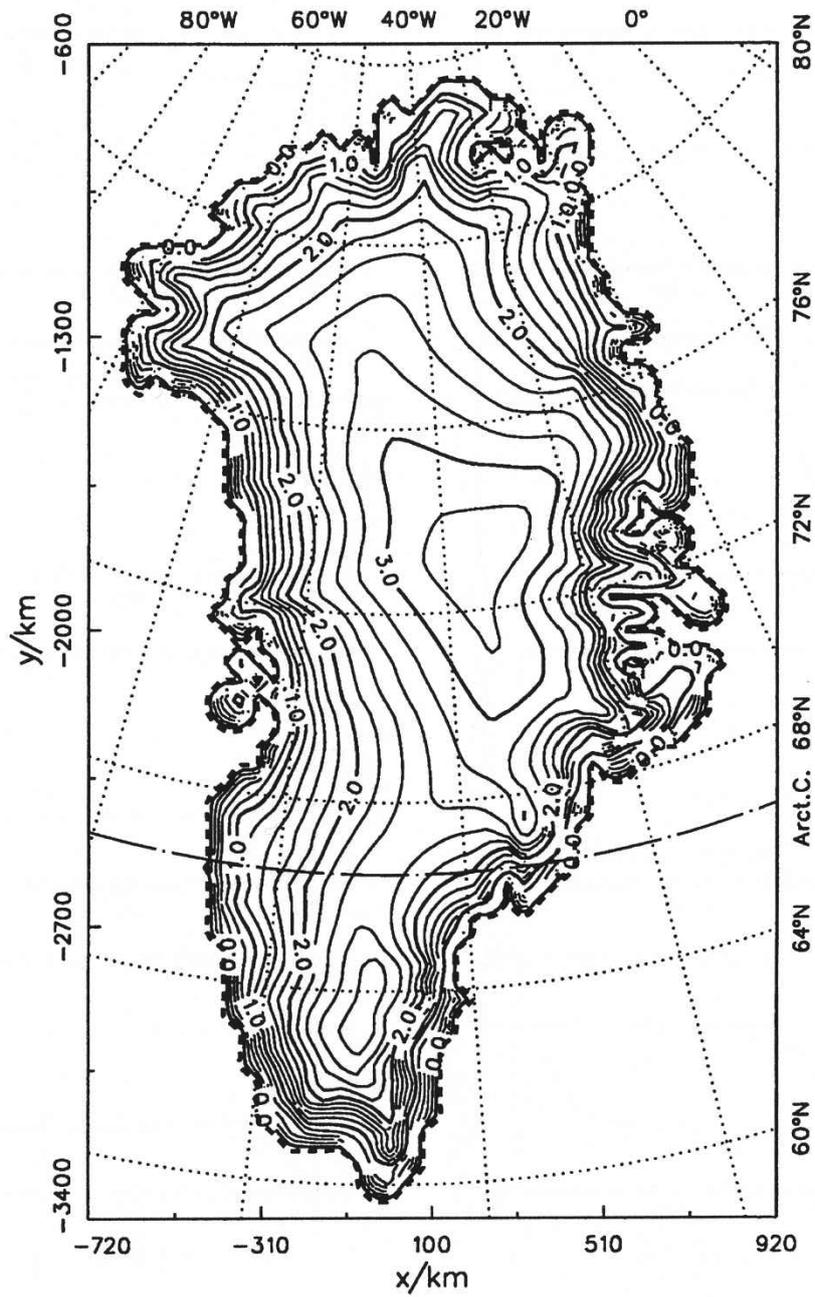


Abbildung 8.16: Endzustand von Lauf gss14: Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

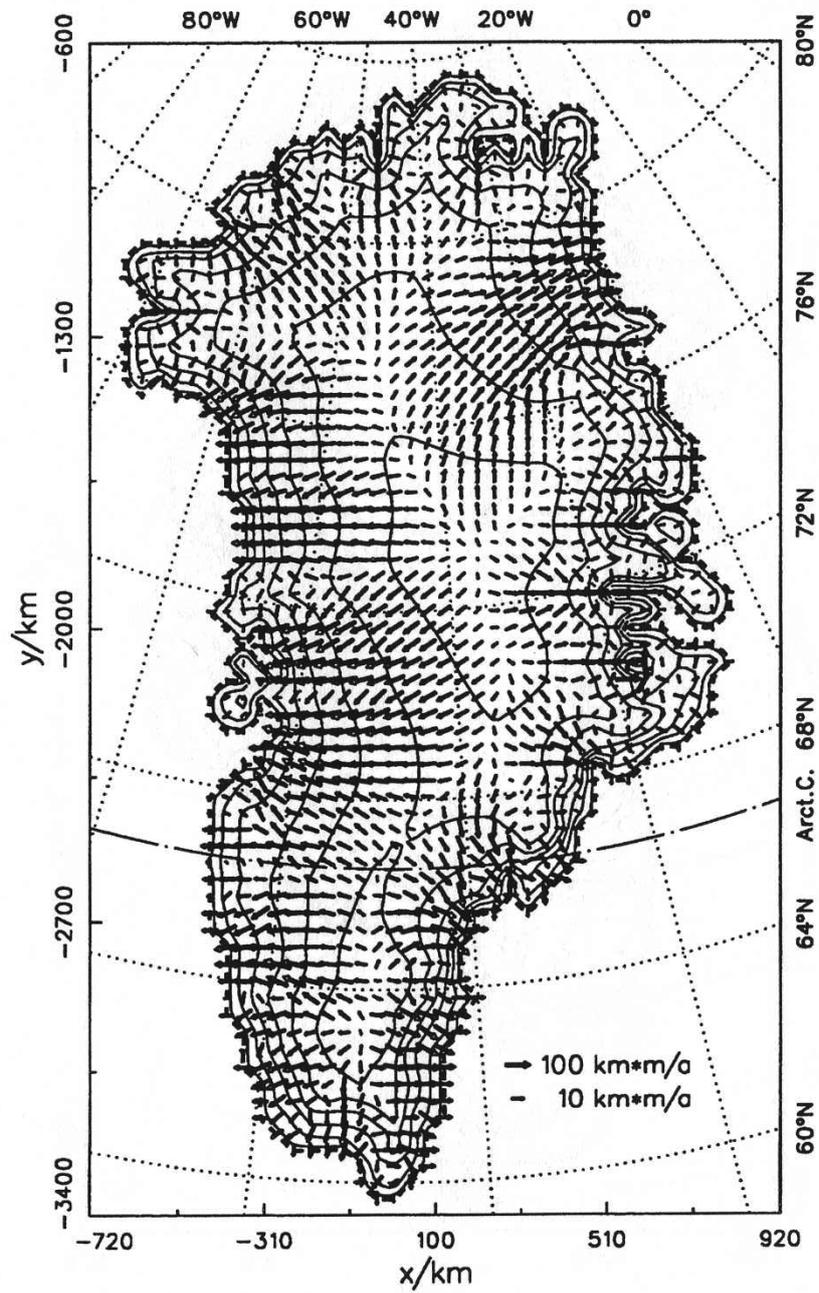


Abbildung 8.17: Endzustand von Lauf gss14: Horizontaler Massenfluß. Doppelte Pfeillänge entspricht zehnfachem Massenfluß. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze, die Isolinien die Oberflächentopographie in 500 m-Intervallen.

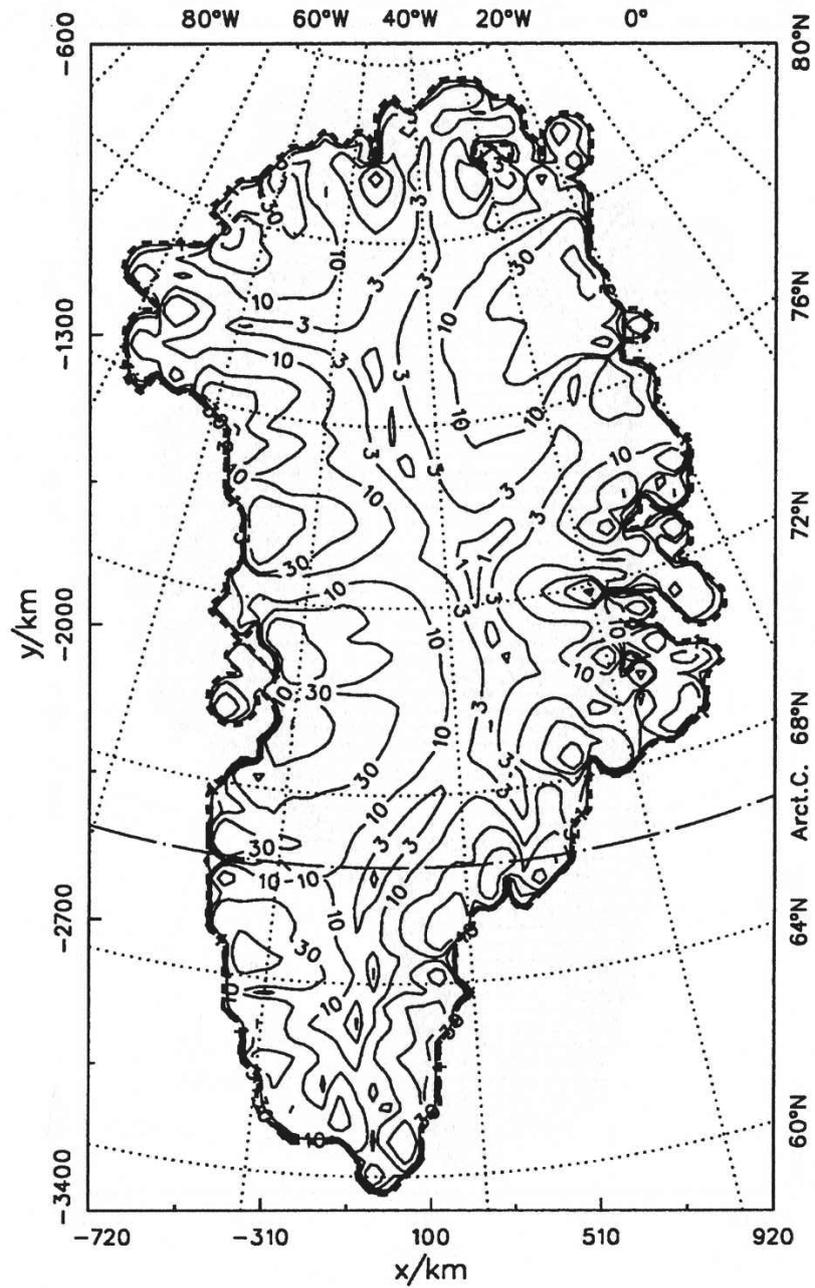


Abbildung 8.18: Endzustand von Lauf gss14: Eisoberflächengeschwindigkeit (in km/a). Die Isolinien entsprechen den Werten 1, 3, 10, 30 ... km/a. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

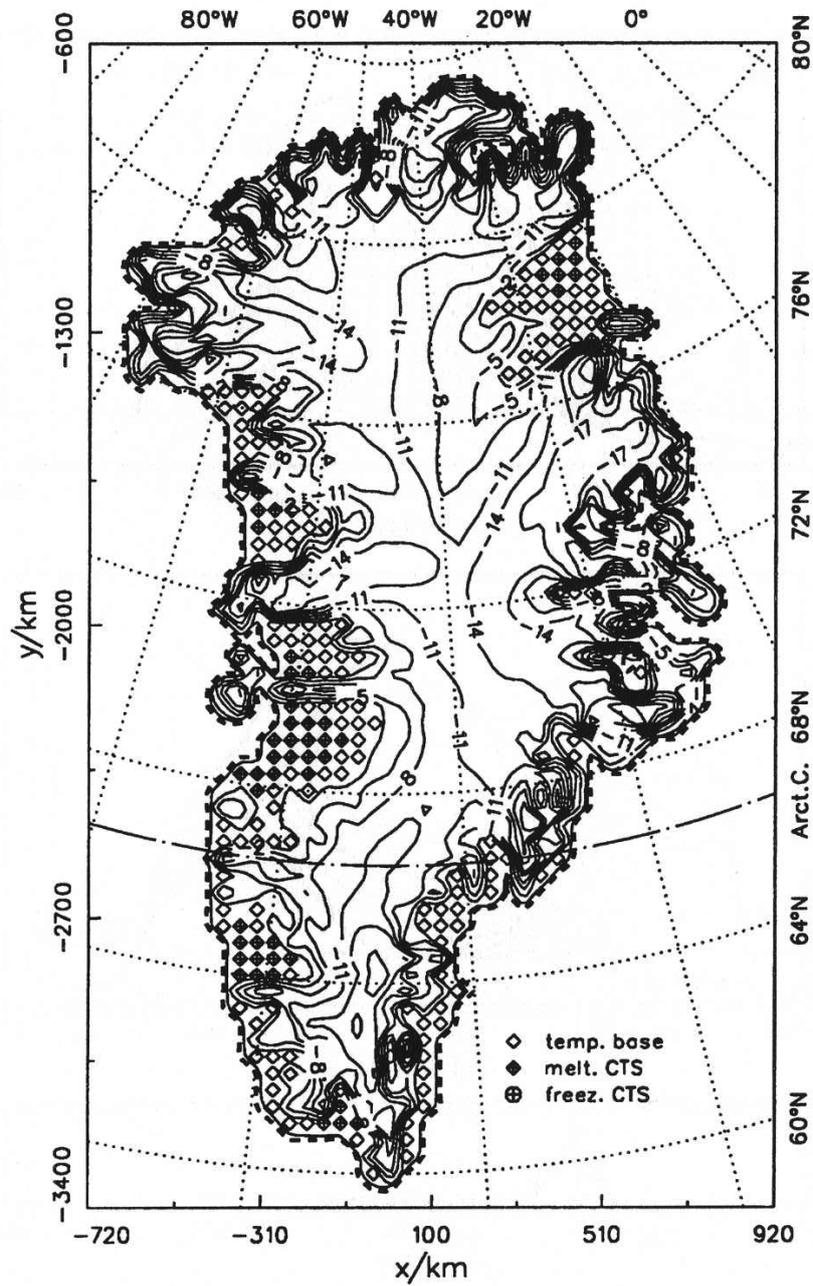


Abbildung 8.19: Endzustand von Lauf gss14: Homologe Temperatur an der Eisbasis (in °C). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C. Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

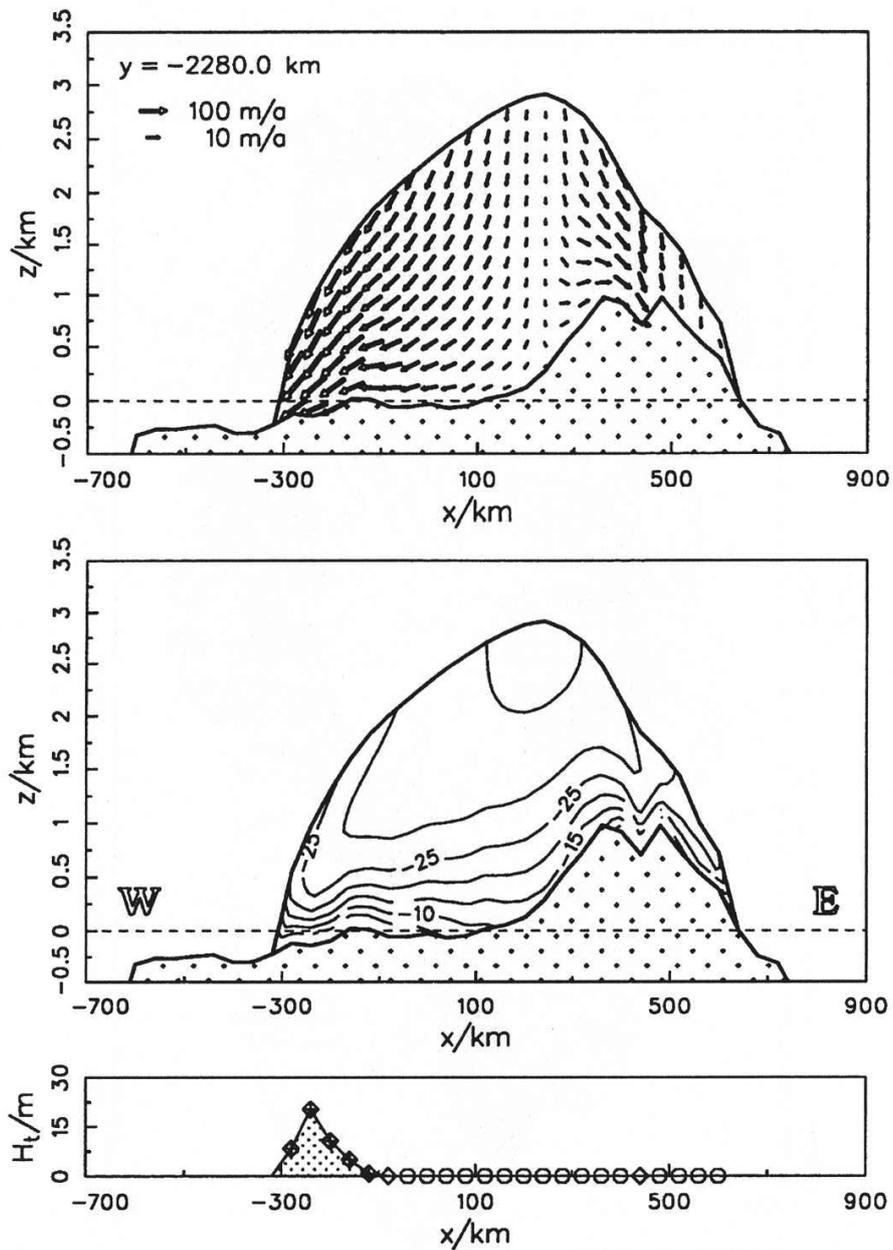


Abbildung 8.20: Endzustand von Lauf gss14: Querschnitt bei $y = -2280$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

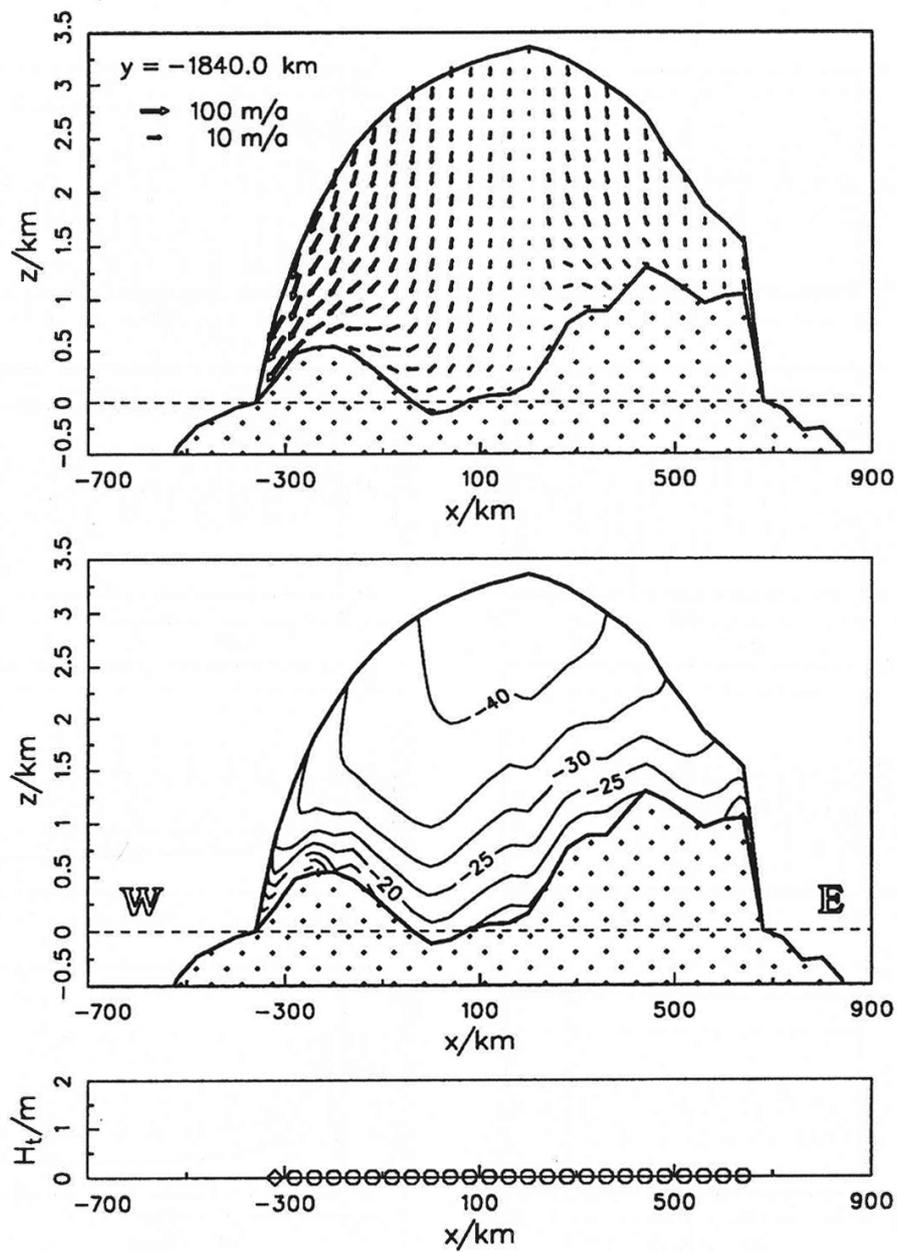


Abbildung 8.21: Endzustand von Lauf gss14: Querschnitt bei $y = -1840 \text{ km}$. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

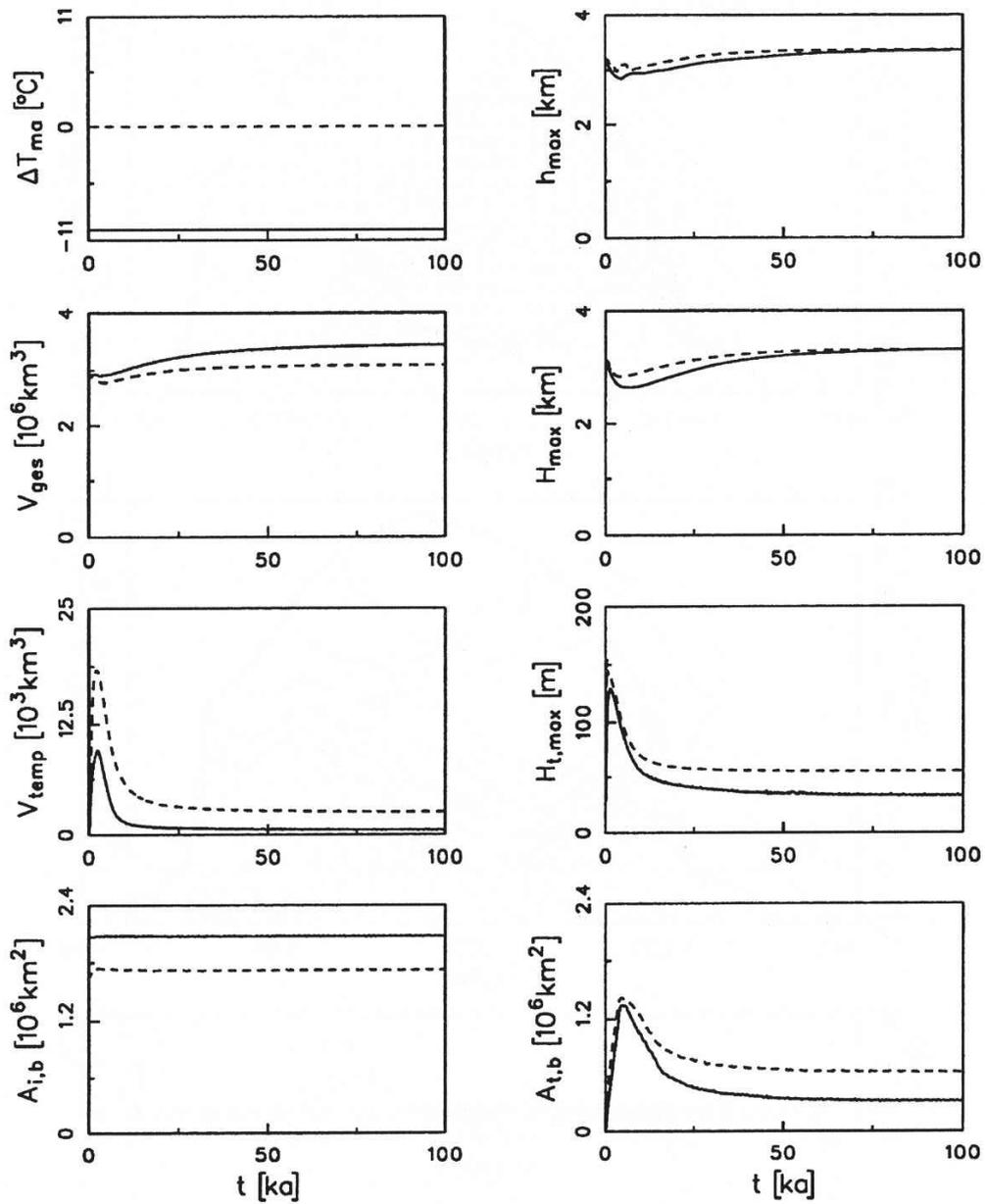


Abbildung 8.22: Lauf gss14 (zum Vergleich Lauf gss01, gestrichelt): Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

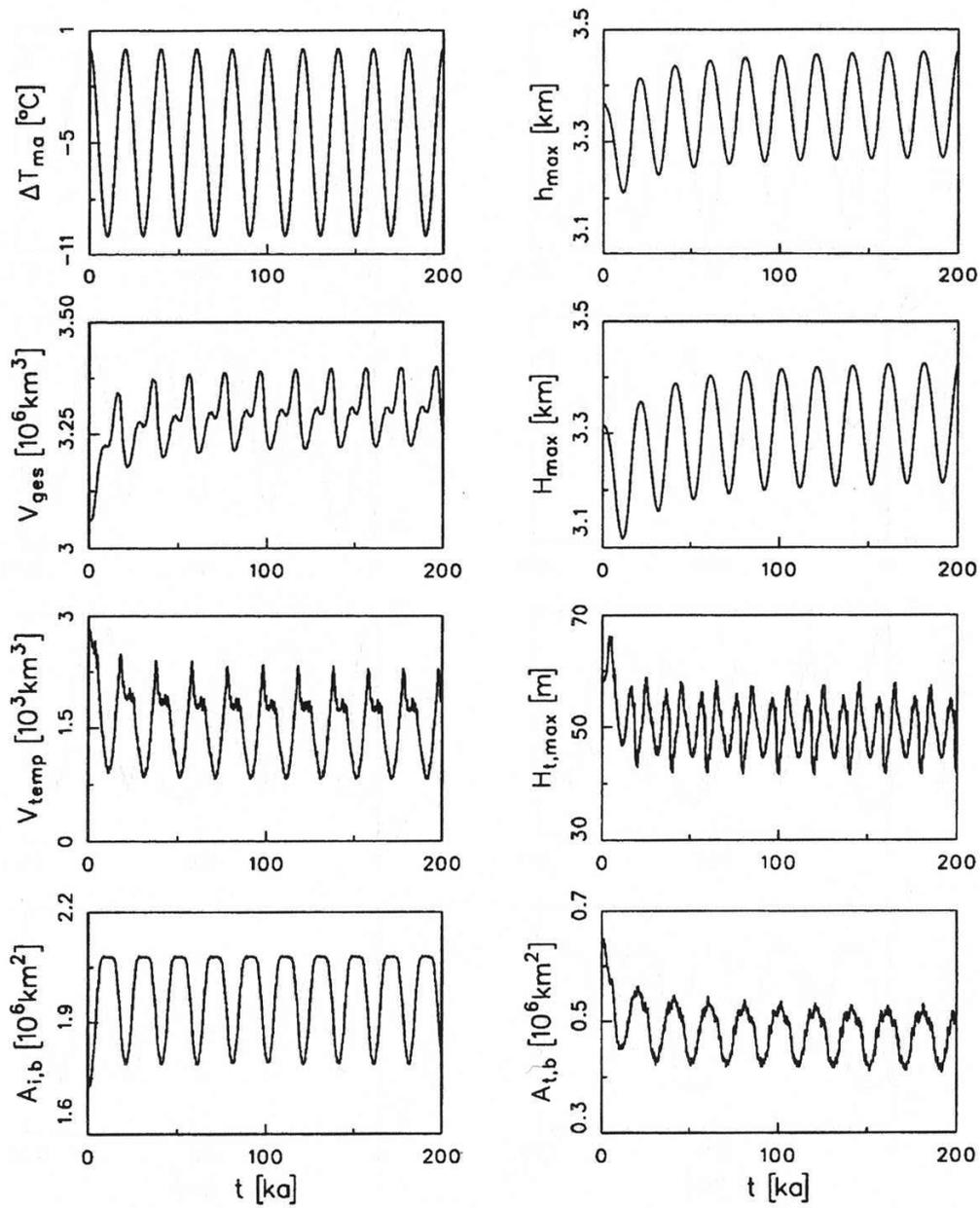


Abbildung 8.23: Lauf gtr01: Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

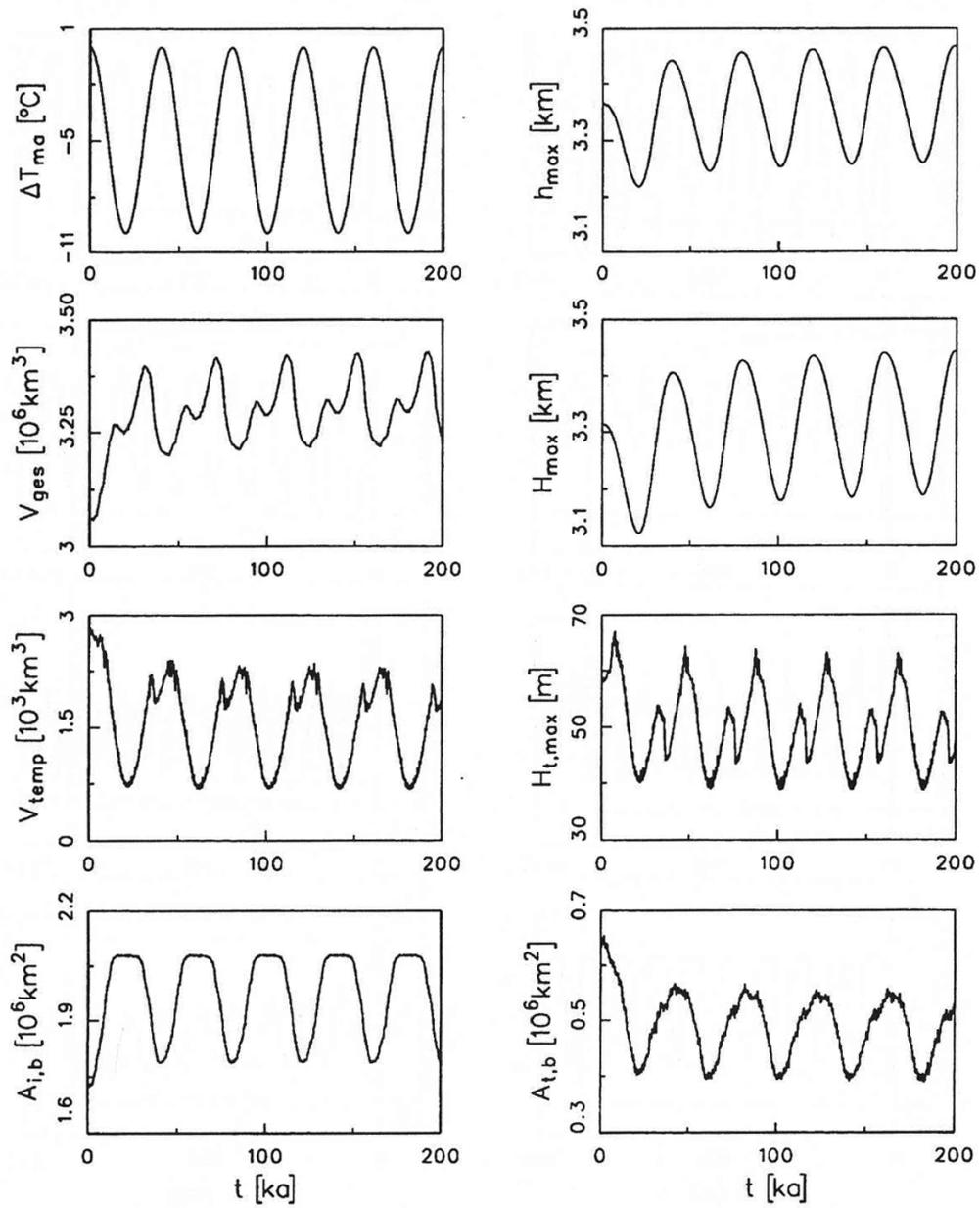


Abbildung 8.24: Lauf gtr02: Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

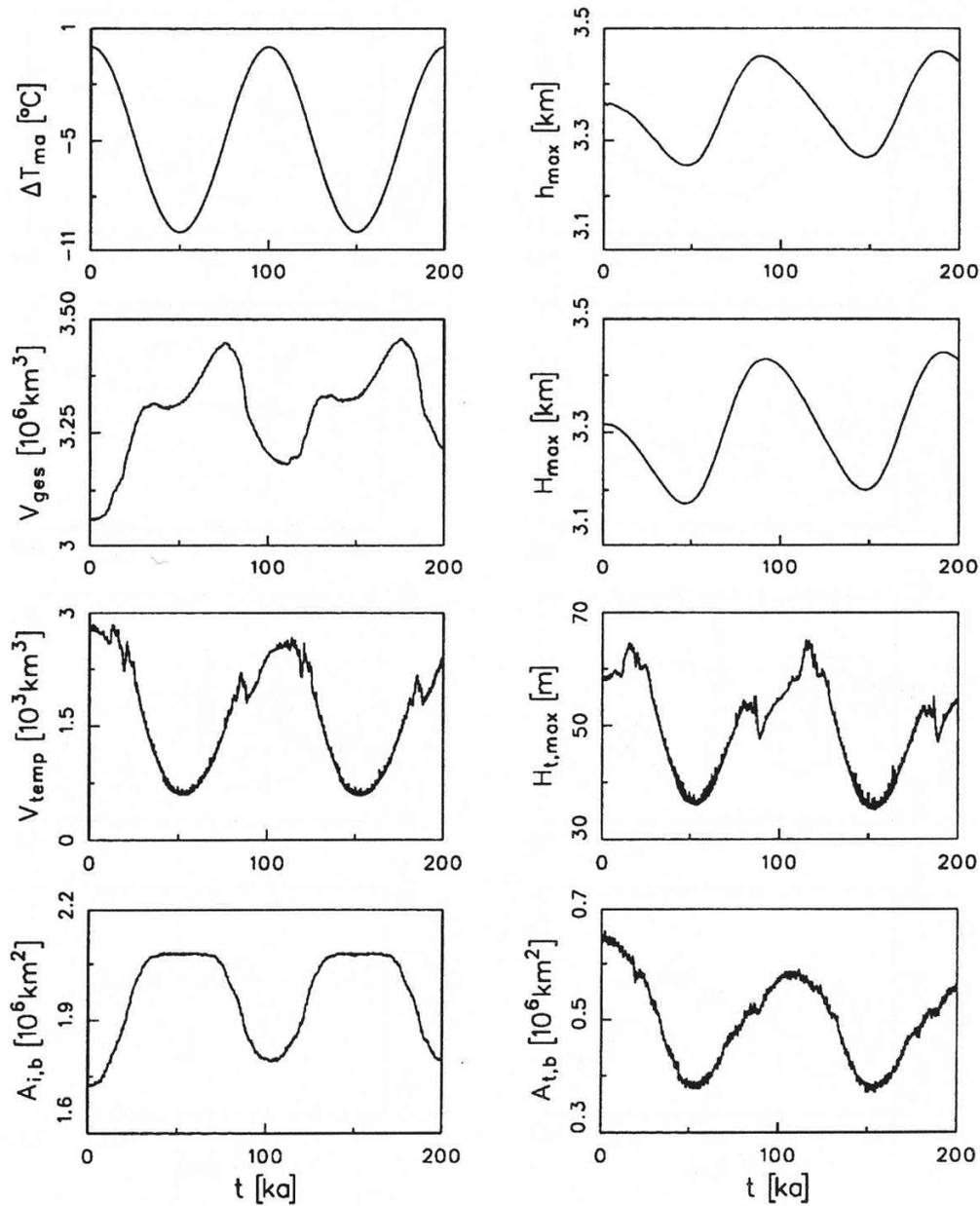


Abbildung 8.25: Lauf gtr03: Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

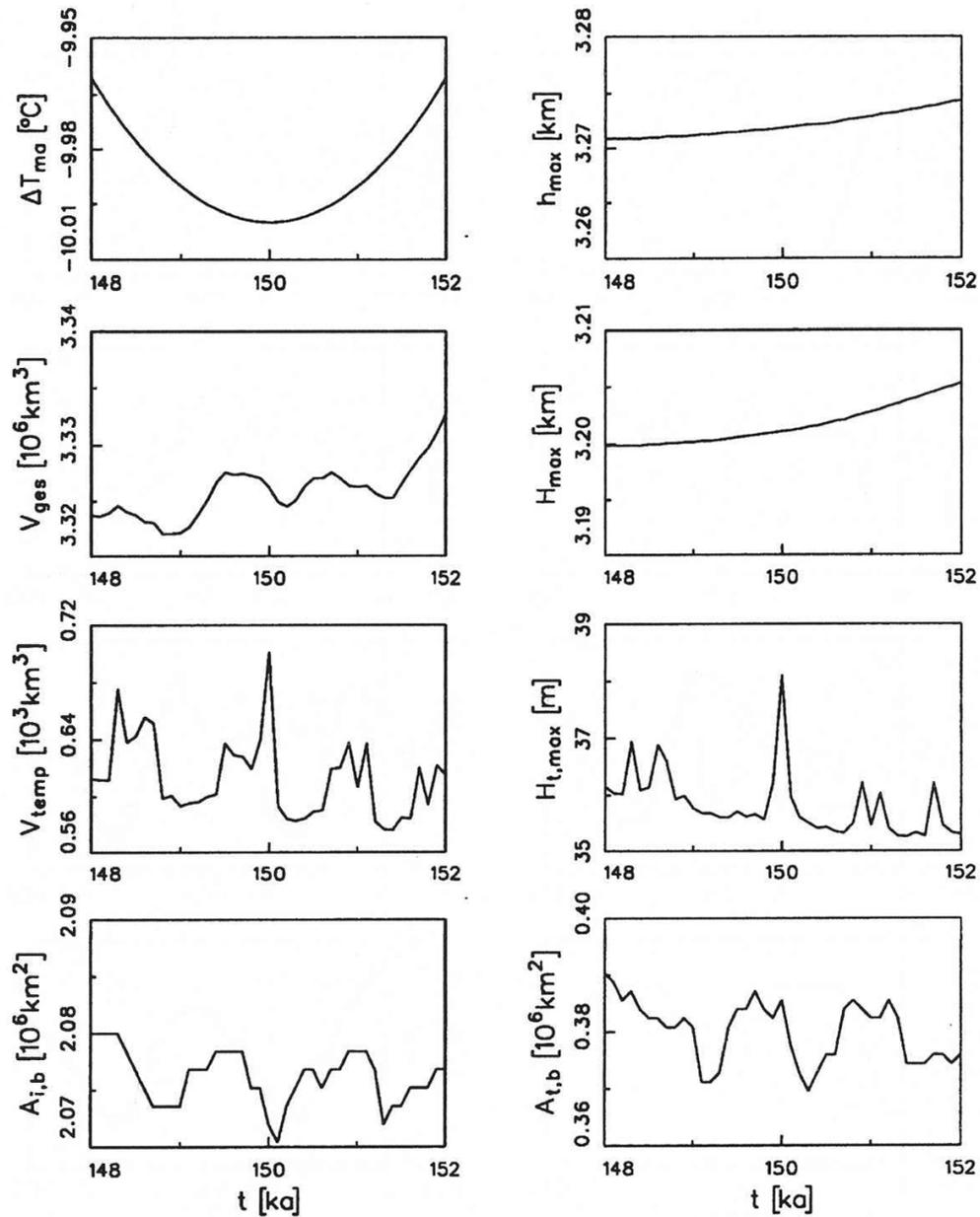


Abbildung 8.26: Lauf gtr03: Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$ für ein 4 ka-Zeitfenster bei $t = 150$ ka. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

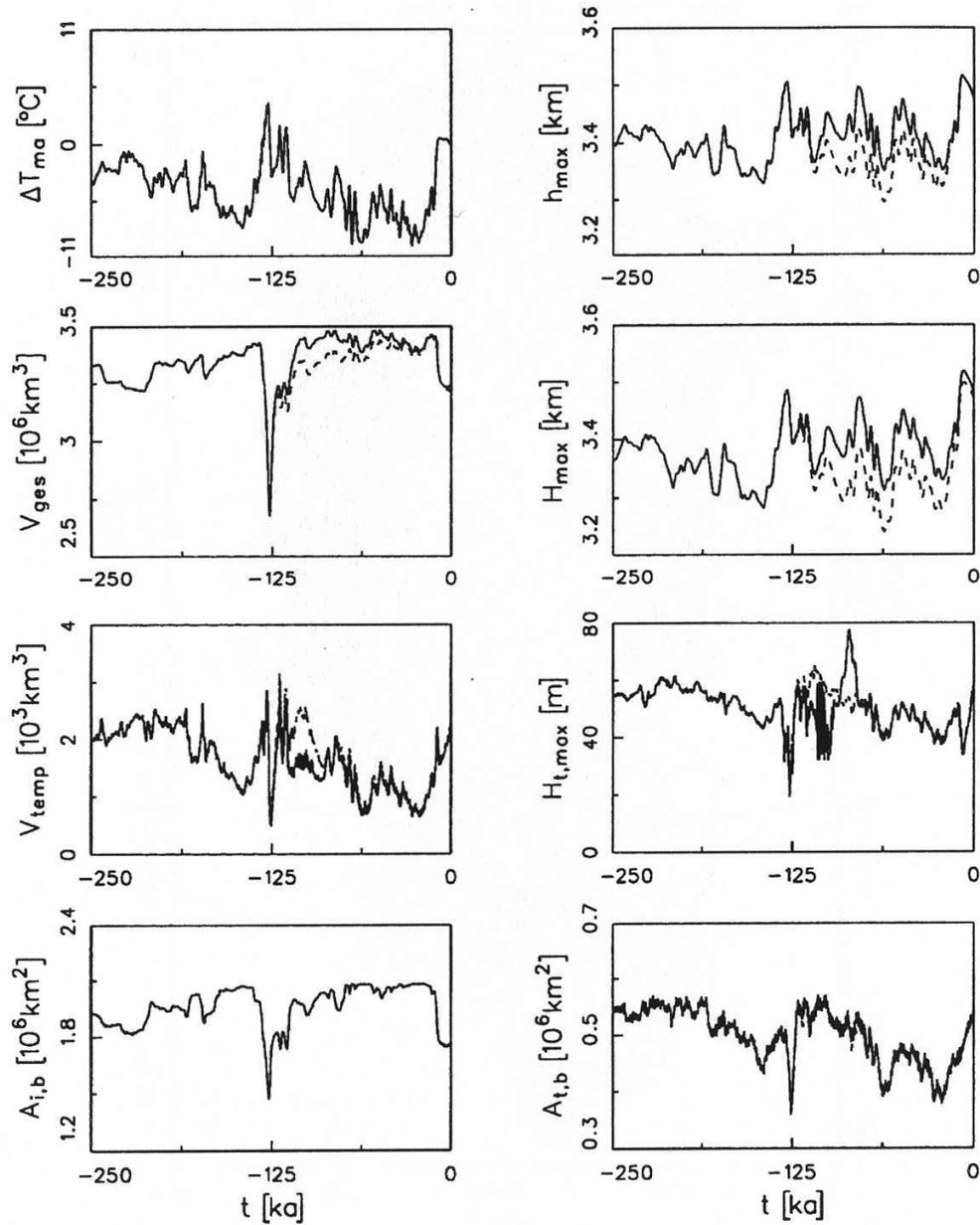


Abbildung 8.27: Läufe gtr04 (gestrichelt), gtr05 (durchgezogen): Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,max}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

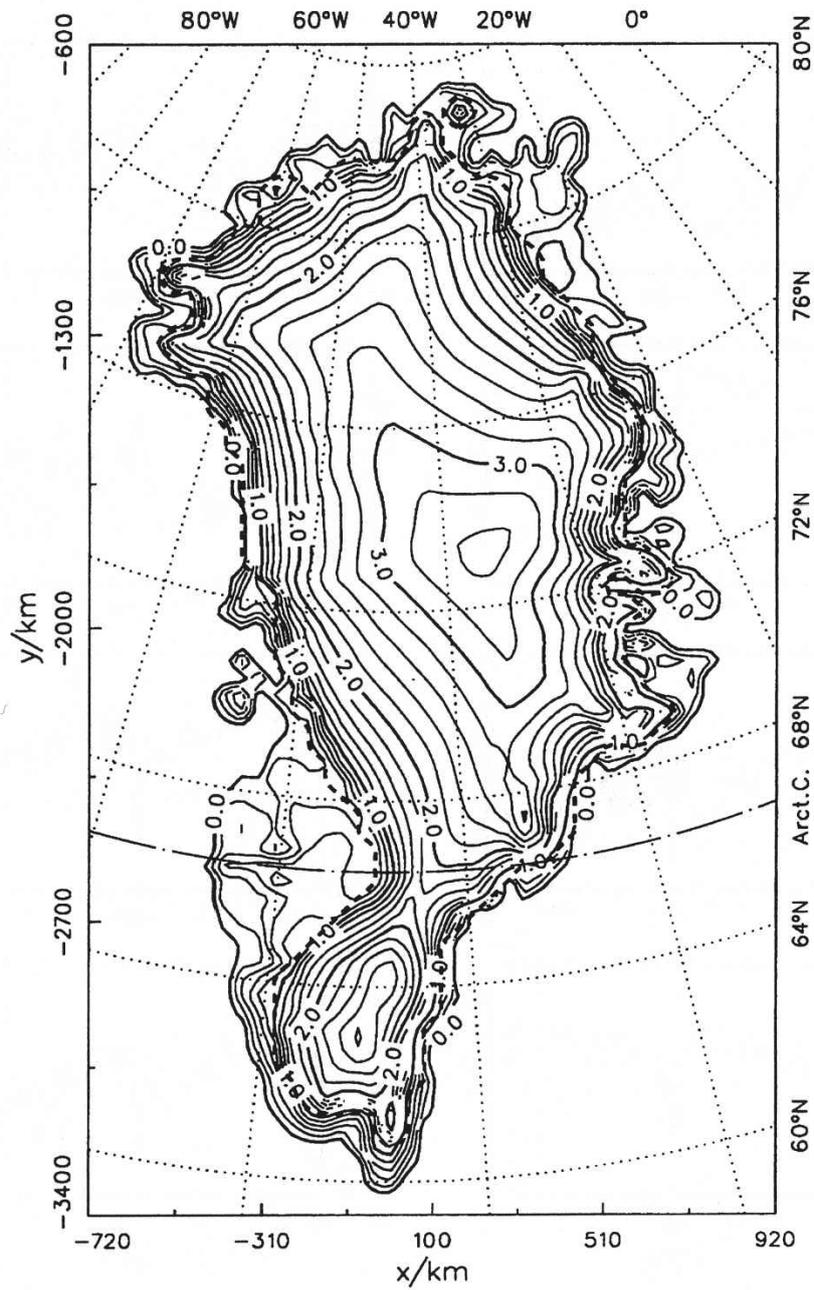


Abbildung 8.28: Lauf gtr05, $t = -127$ ka (Eem-Eisvolumen-Minimum): Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

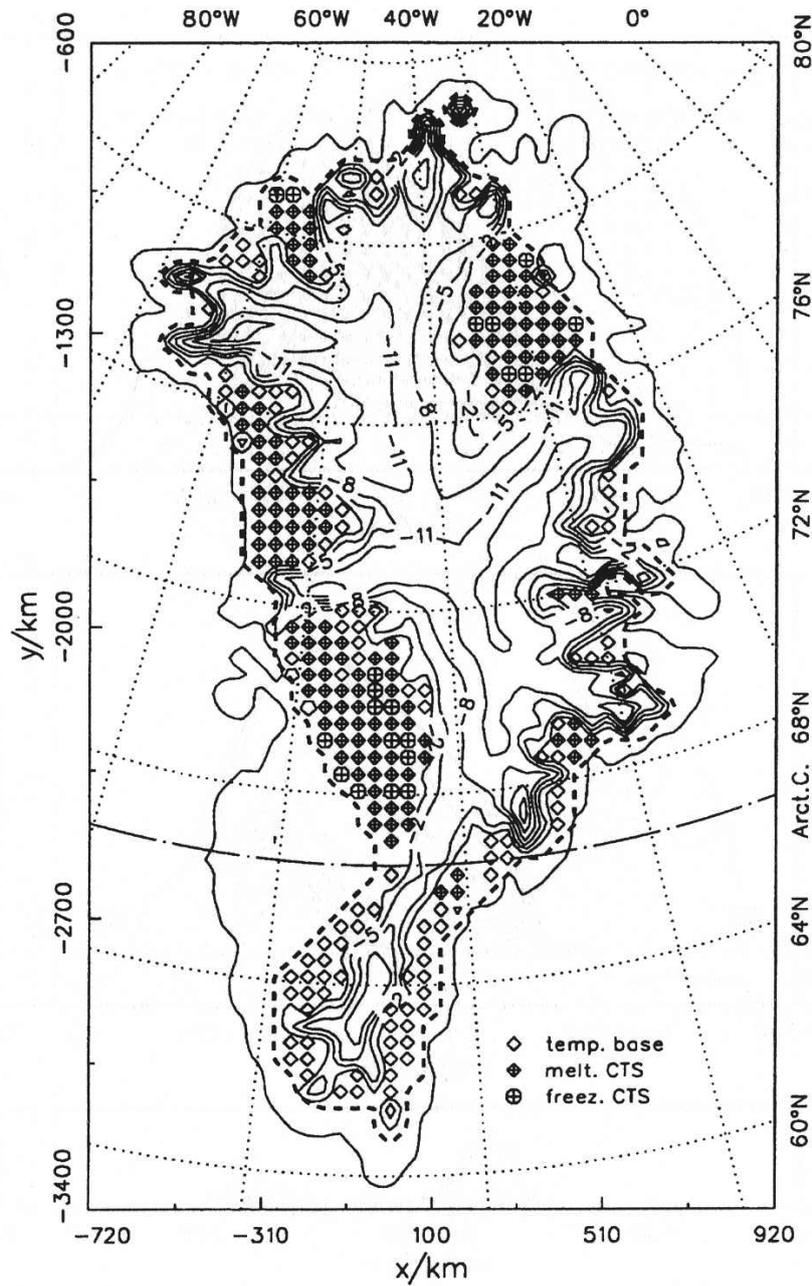


Abbildung 8.29: Lauf gtr05, $t = -127$ ka (Eem-Eisvolumen-Minimum): Homologe Temperatur an der Eisbasis (in $^{\circ}\text{C}$). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C . Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

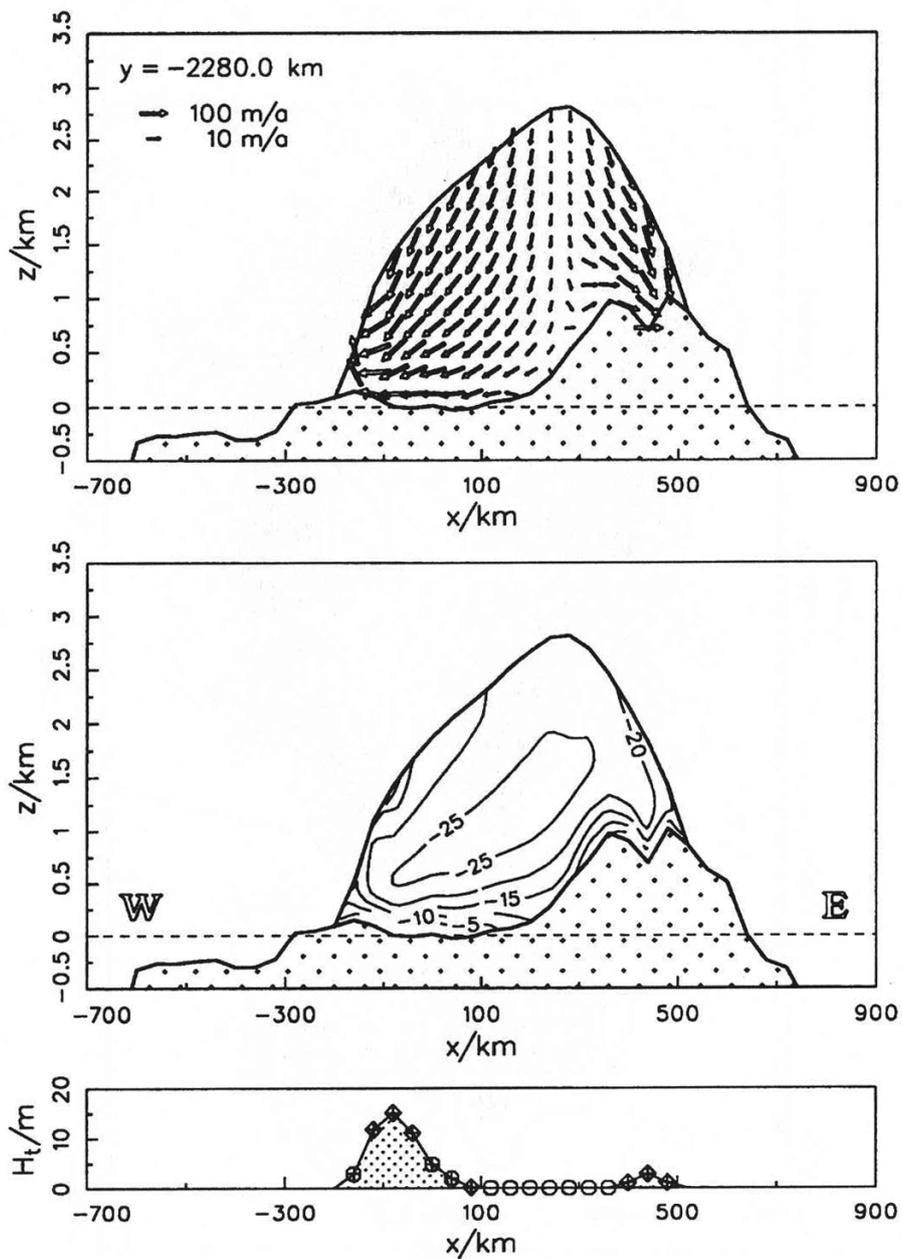


Abbildung 8.30: Lauf gtr05, $t = -127$ ka (Eem-Eisvolumen-Minimum): Querschnitt bei $y = -2280$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

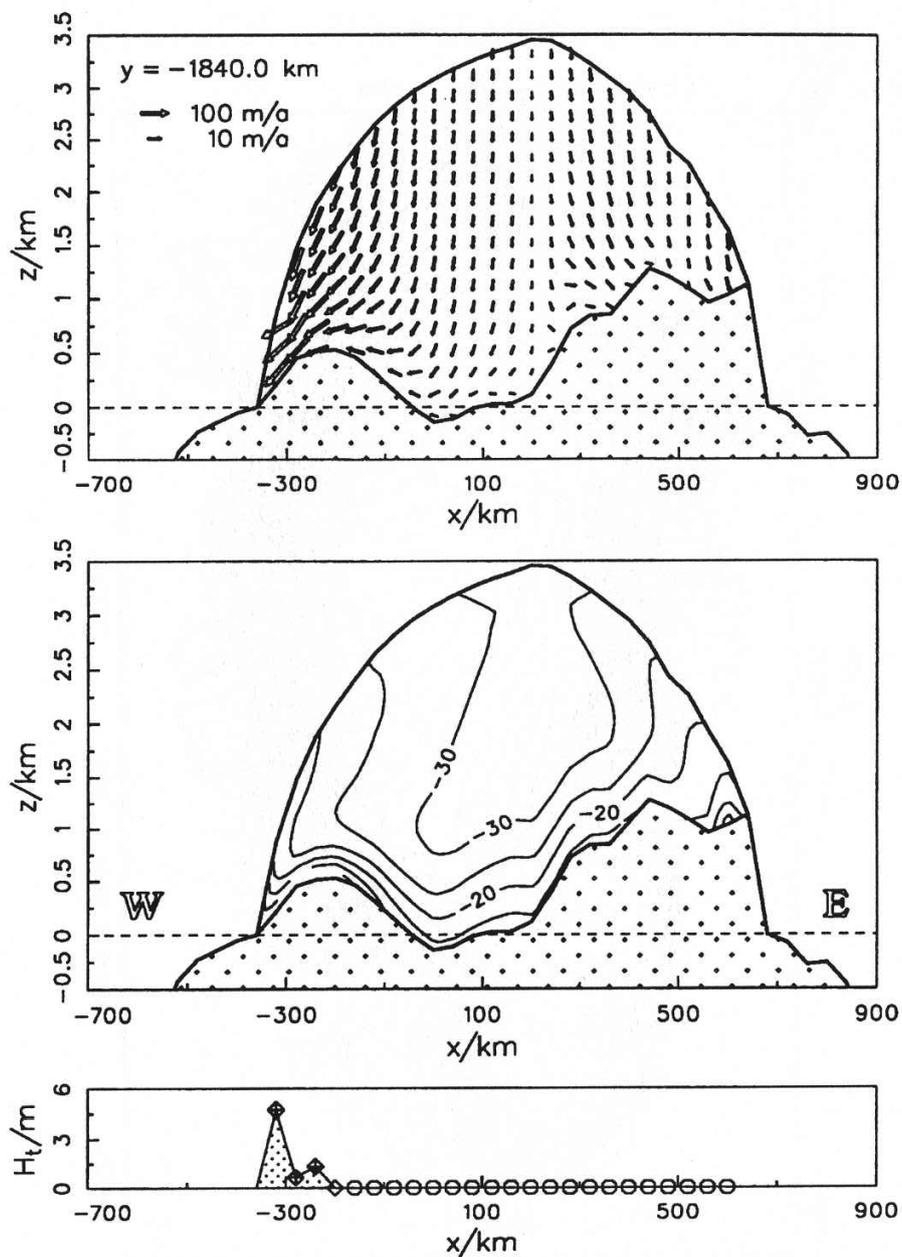


Abbildung 8.31: Lauf gtr05, $t = -127$ ka (Eem-Eisvolumen-Minimum): Querschnitt bei $y = -1840$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

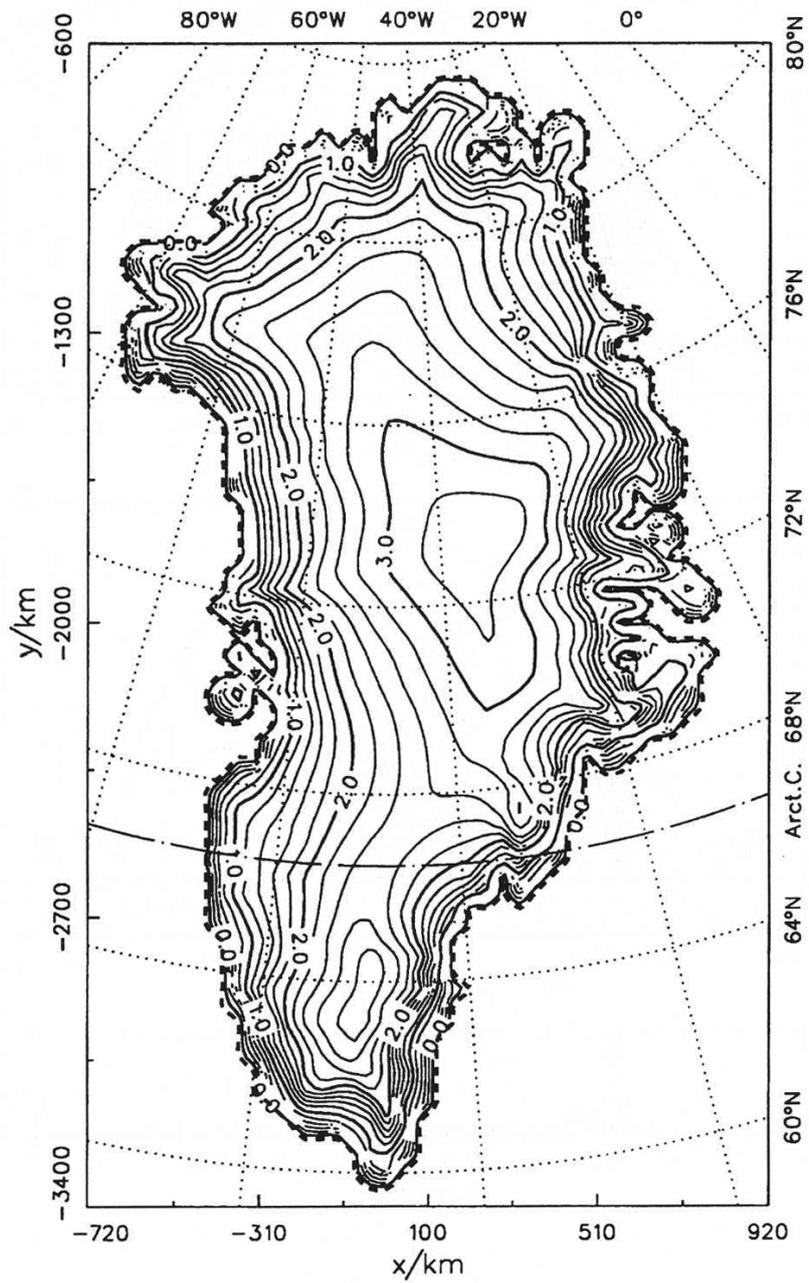


Abbildung 8.32: Lauf gtr05, $t = -18$ ka (Last Glacial Maximum): Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

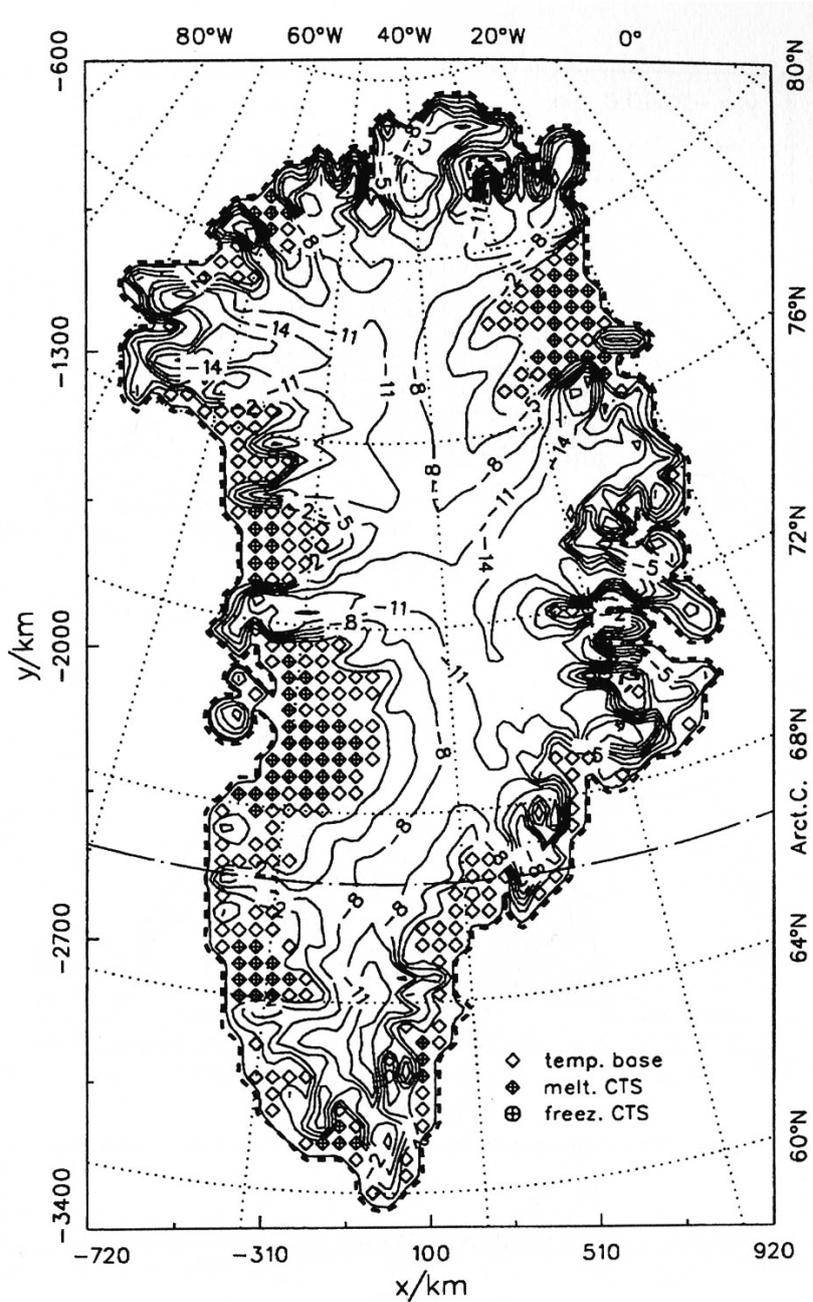


Abbildung 8.33: Lauf gtr05, $t = -18$ ka (Last Glacial Maximum): Homologe Temperatur an der Eisbasis (in $^{\circ}\text{C}$). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C . Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

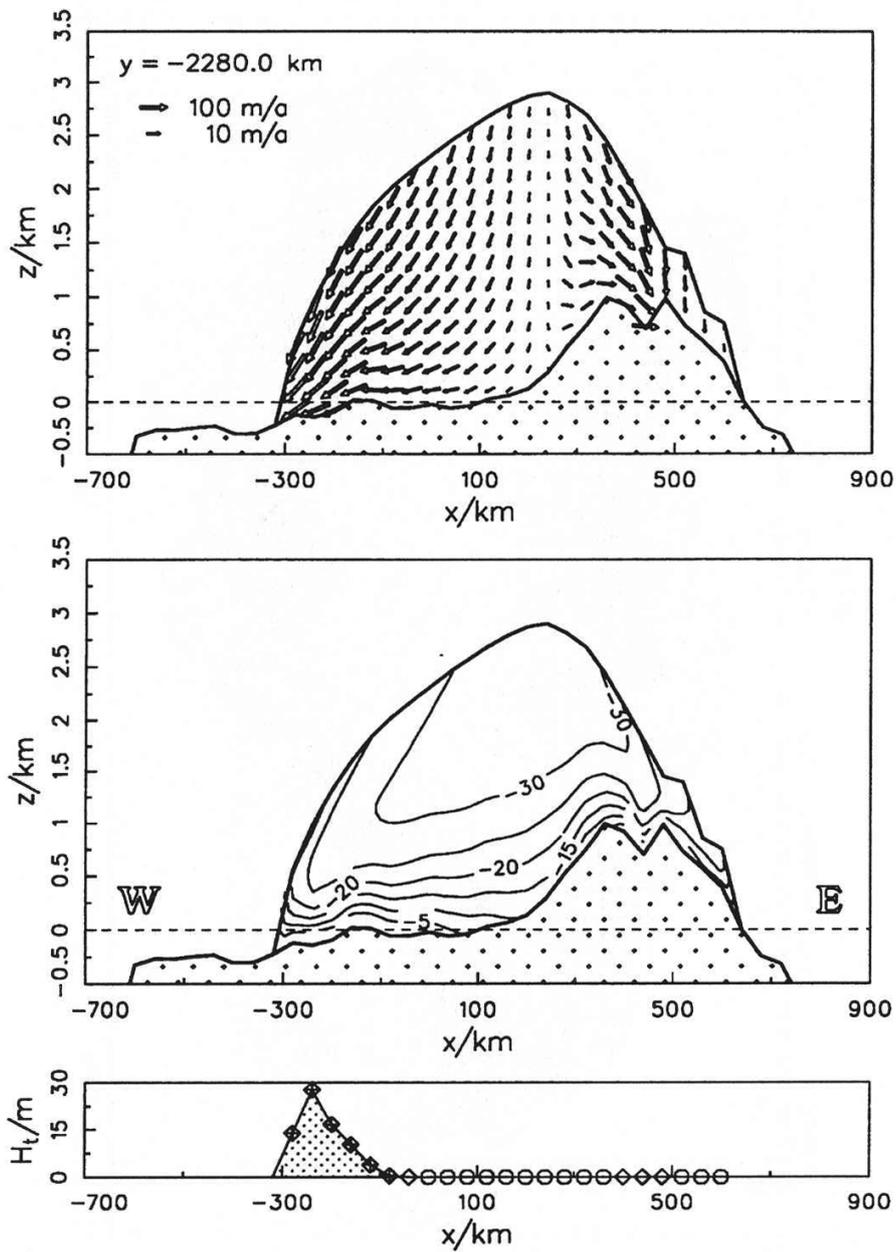


Abbildung 8.34: Lauf gtr05, $t = -18$ ka (Last Glacial Maximum): Querschnitt bei $y = -2280$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

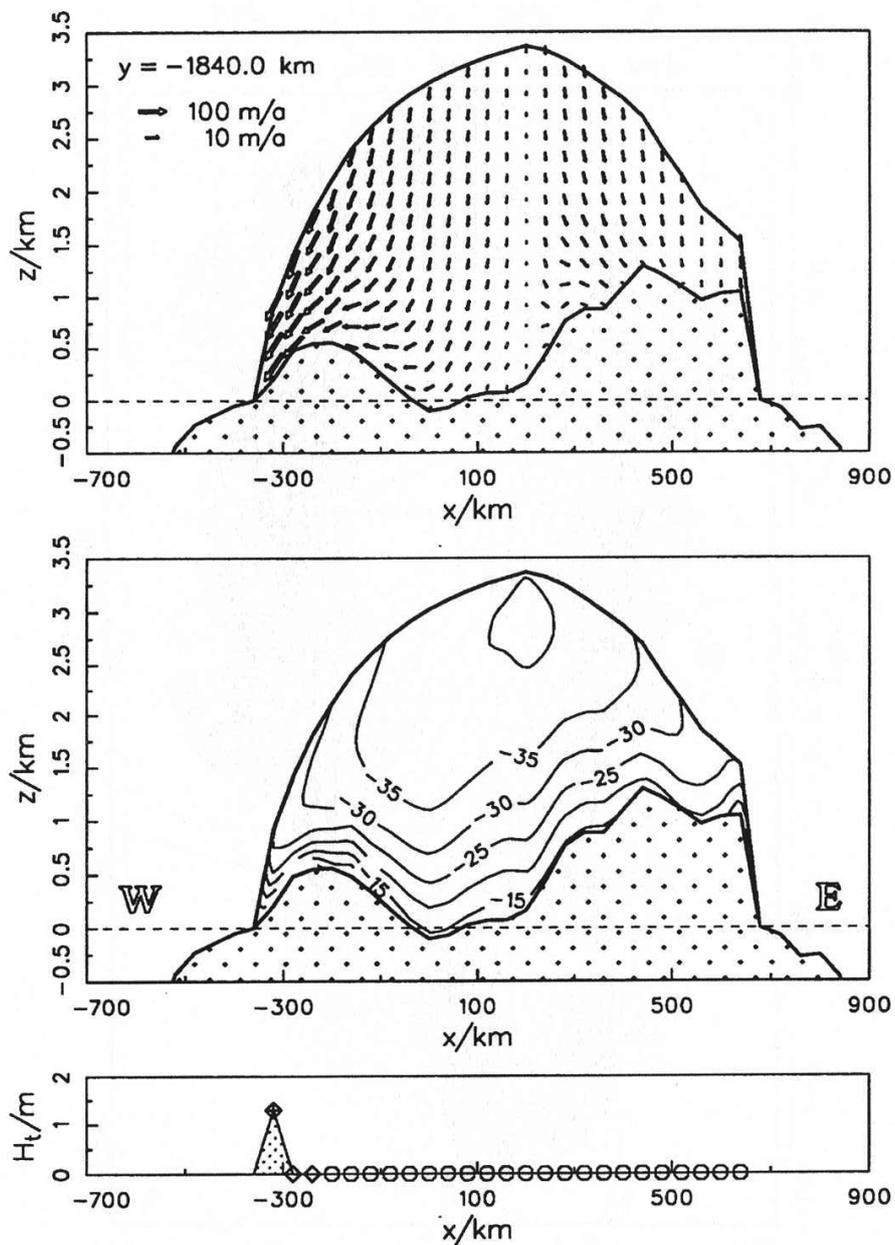


Abbildung 8.35: Lauf gtr05, $t = -18$ ka (Last Glacial Maximum): Querschnitt bei $y = -1840$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

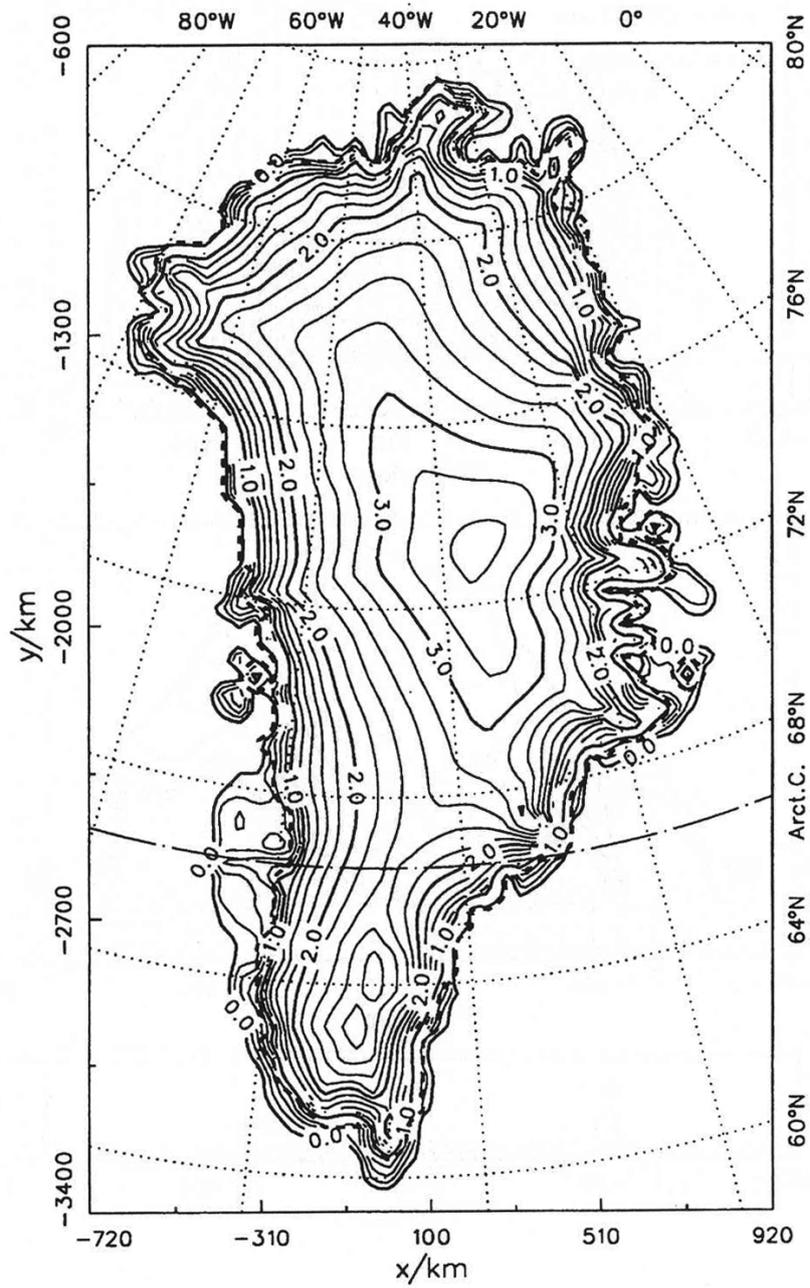


Abbildung 8.36: Lauf gtr05, $t = 0$ ka (heute): Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

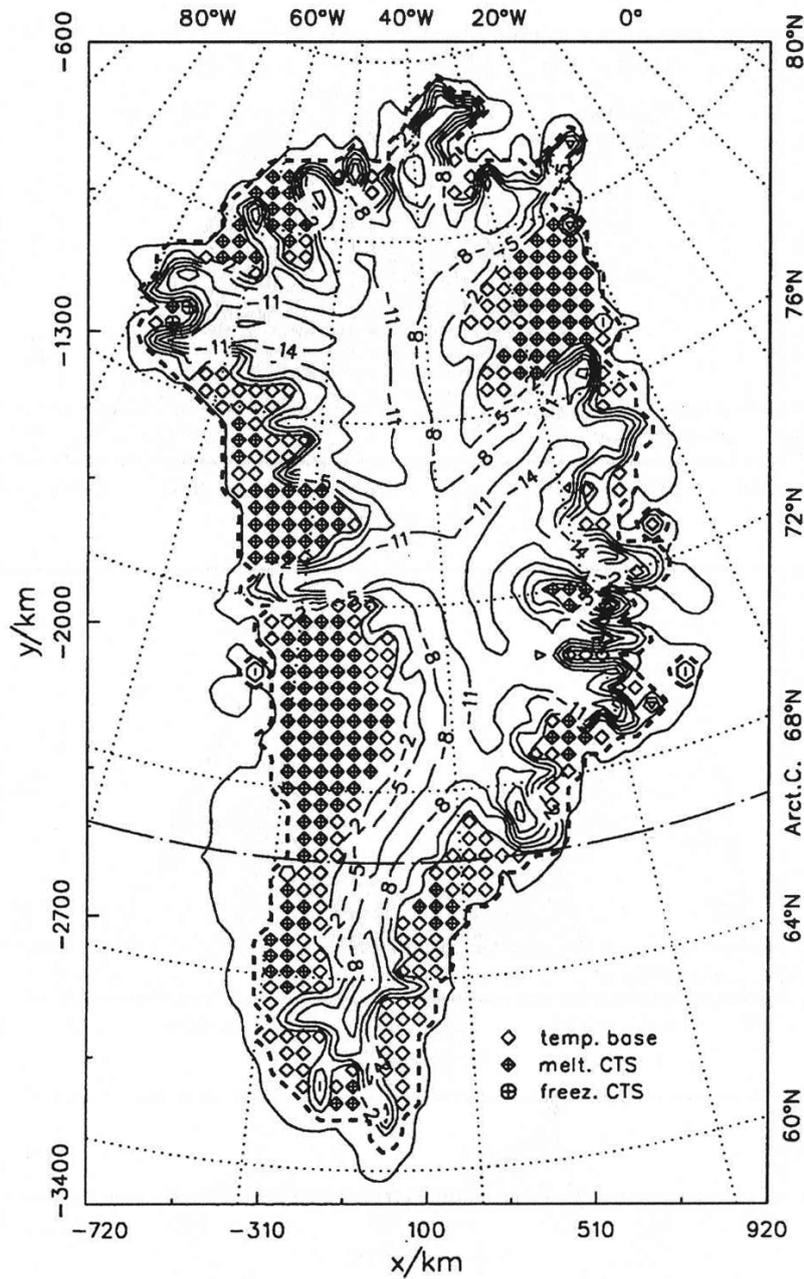


Abbildung 8.37: Lauf gtr05, $t = 0$ ka (heute): Homologe Temperatur an der Eisbasis (in $^{\circ}\text{C}$). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C . Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

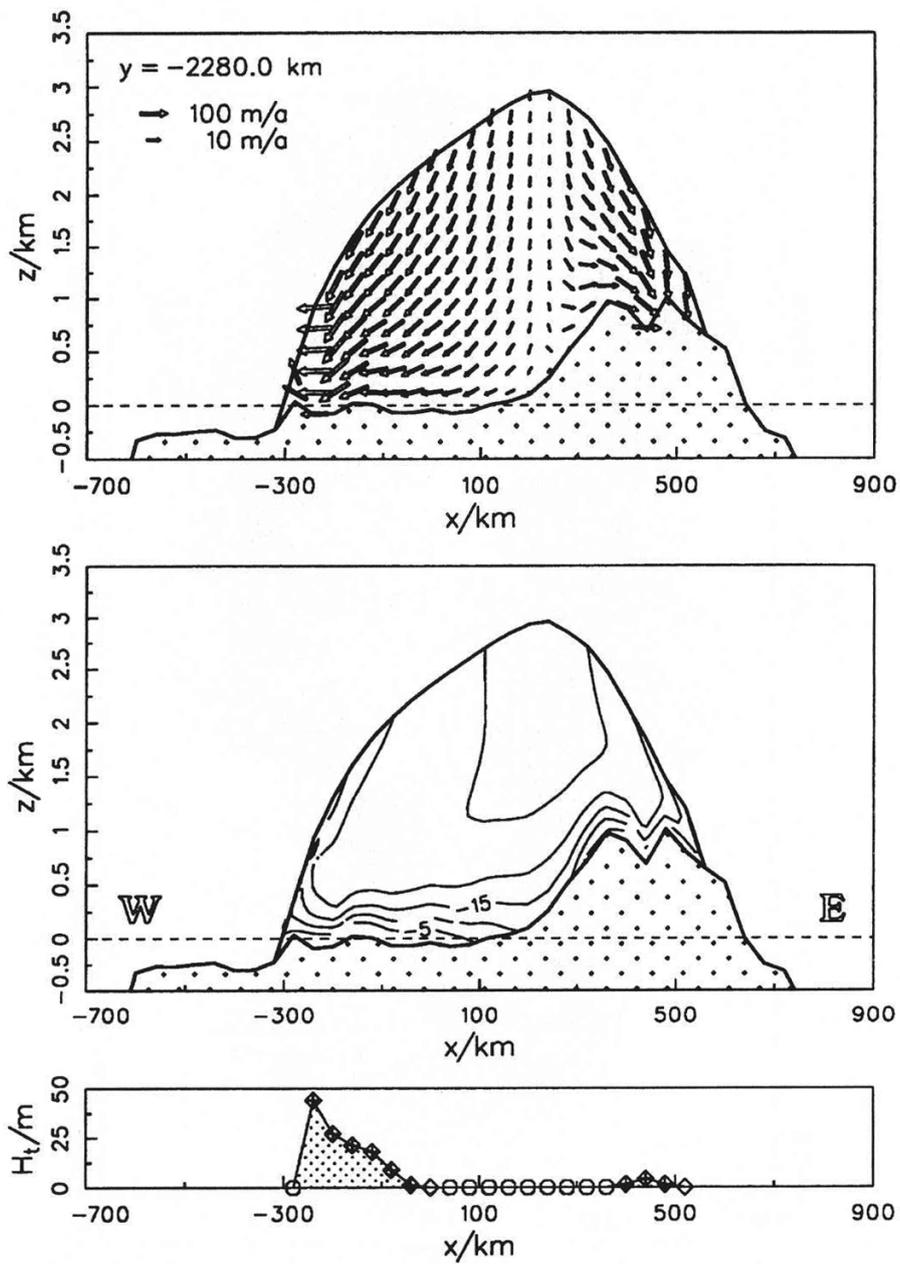


Abbildung 8.38: Lauf gtr05, $t = 0$ ka (heute): Querschnitt bei $y = -2280$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in $^{\circ}\text{C}$). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

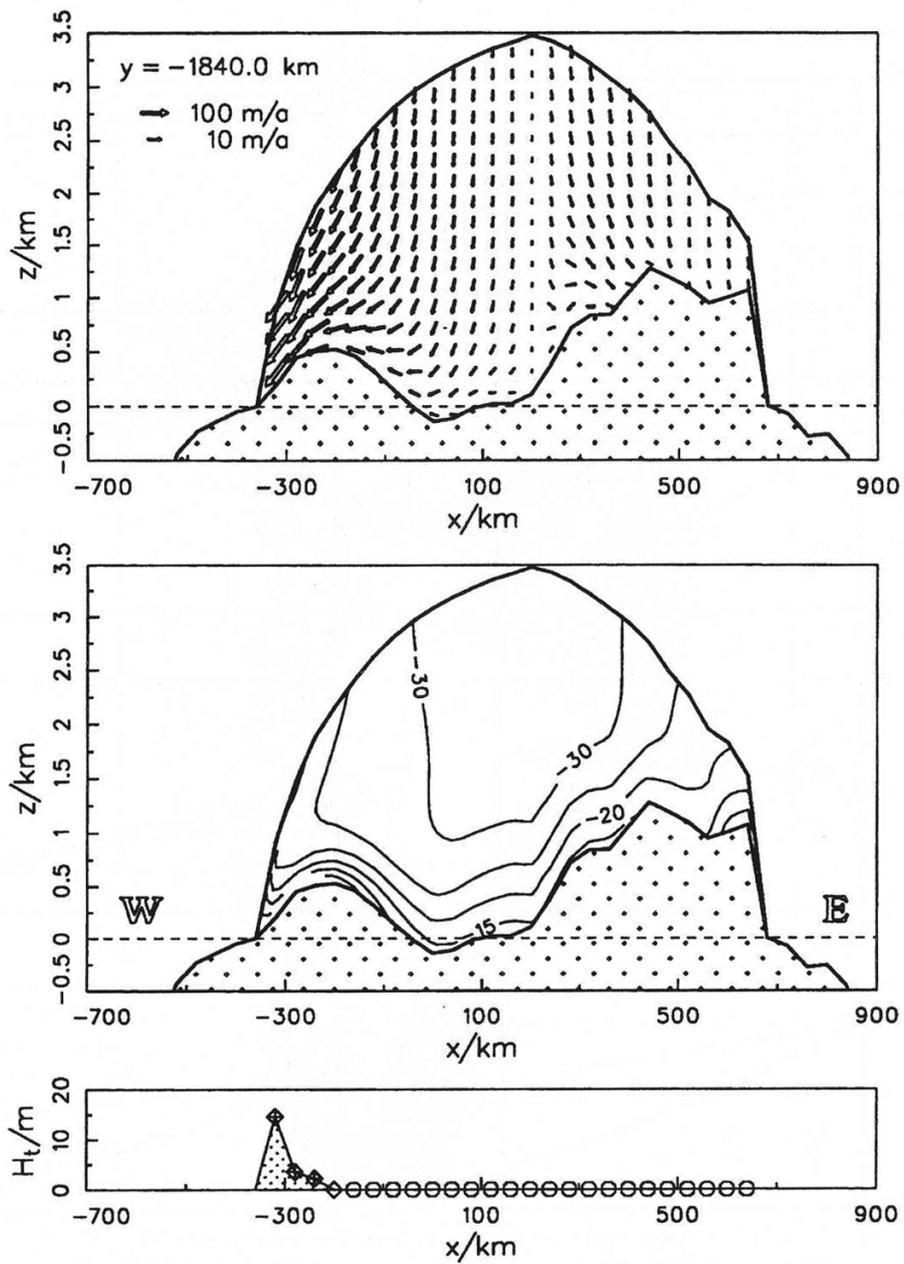


Abbildung 8.39: Lauf gtr05, $t = 0$ ka (heute): Querschnitt bei $y = -1840$ km. Oben: Eisgeschwindigkeit. Mitte: homologe Eistemperatur (in °C). Unten: Dicke der basalen temperierten Eisschicht (leere Kreise: kalte Eisbasis; leere Diamantsymbole: temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht; ausgefüllte Diamantsymbole: temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS; ausgefüllte Kreise: temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS.)

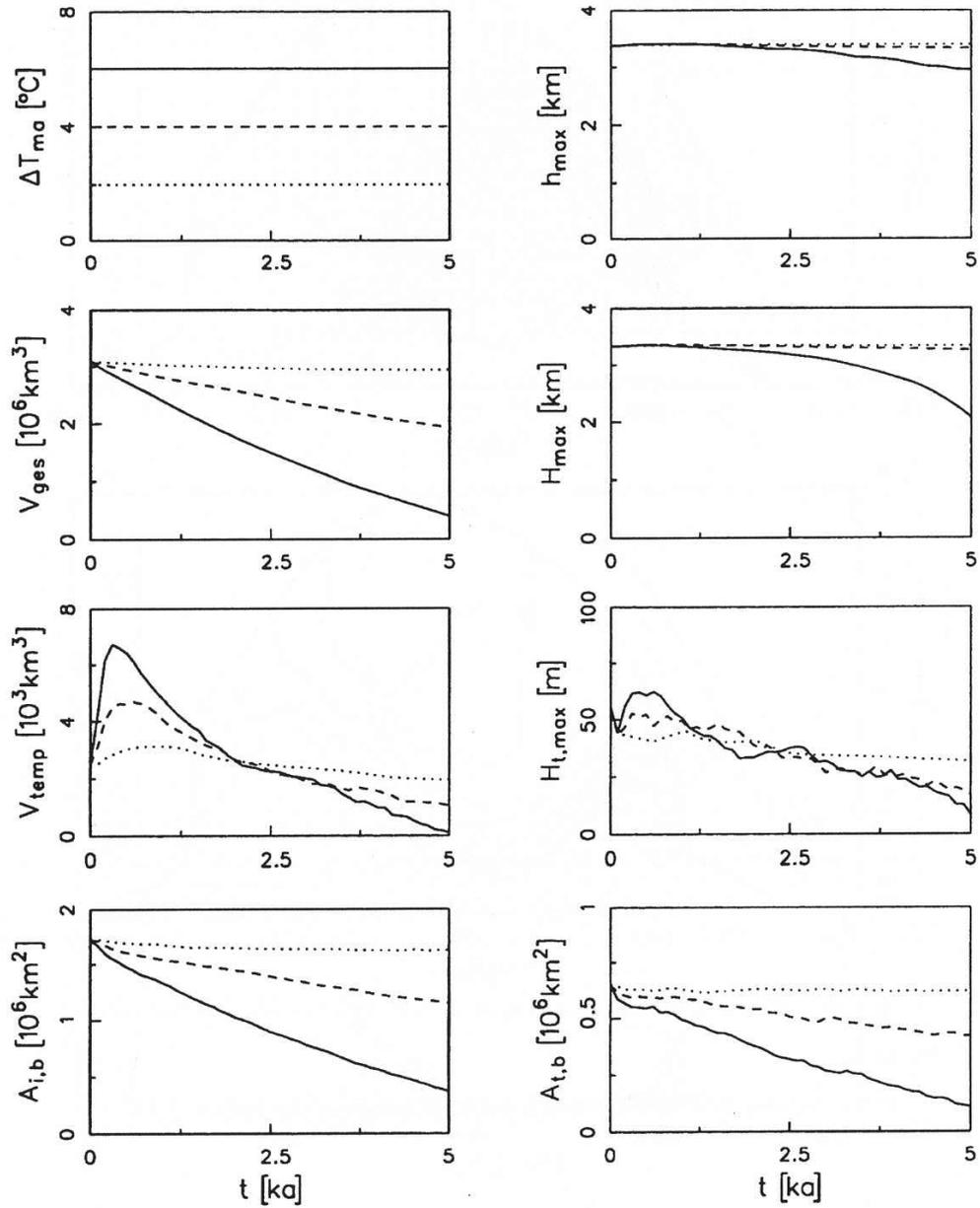


Abbildung 8.40: Läufe gtr12 (gepunktet), gtr13 (gestrichelt), gtr14 (durchgezogen): Zeitliche Entwicklung von ΔT_{ma} , h_{max} , V_{ges} , H_{max} , V_{temp} , $H_{t,\text{max}}$, $A_{i,b}$ und $A_{t,b}$. Die Bedeutung der einzelnen Größen ist im Haupttext erklärt.

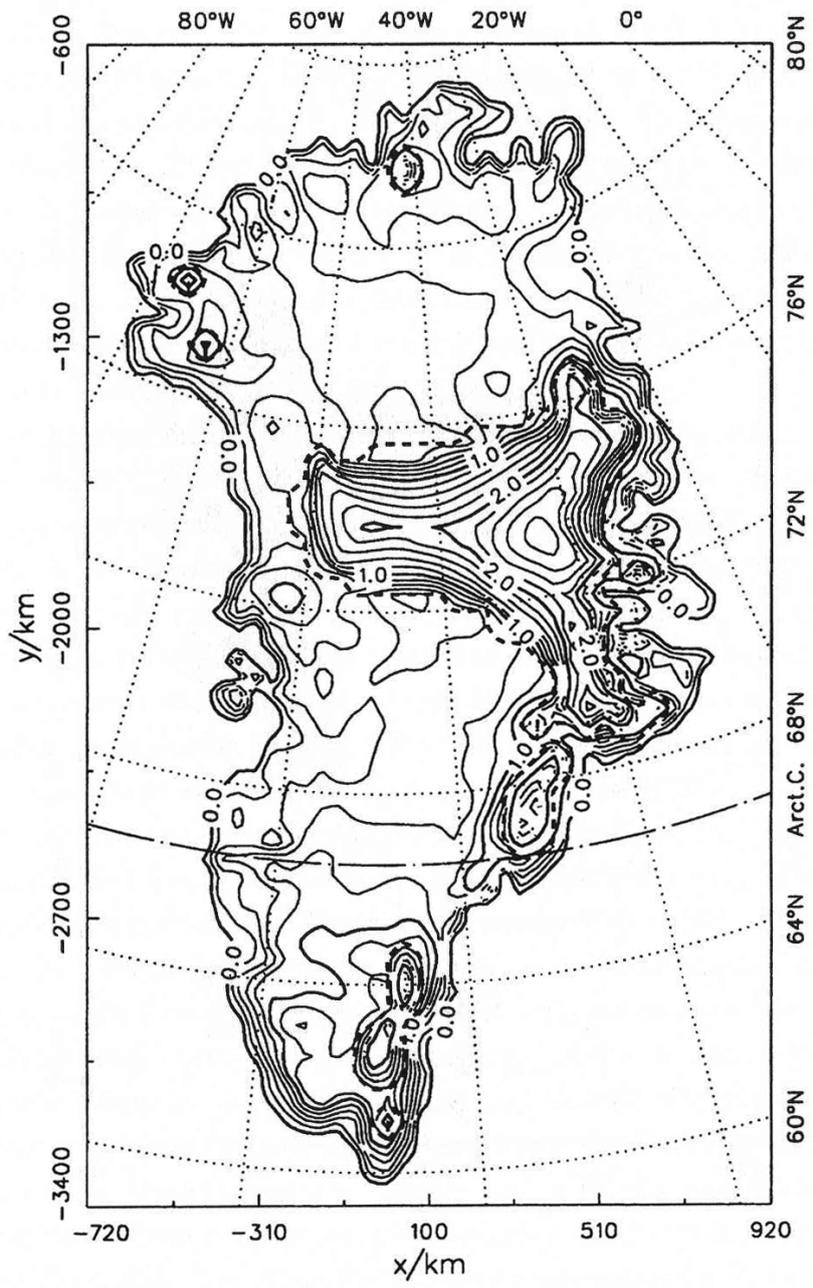


Abbildung 8.41: Lauf gtr14, $t = 5$ ka: Topographie der Eisoberfläche (in km über Meereshöhe). Die Höhendifferenz zwischen den Isolinien beträgt 200 m. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

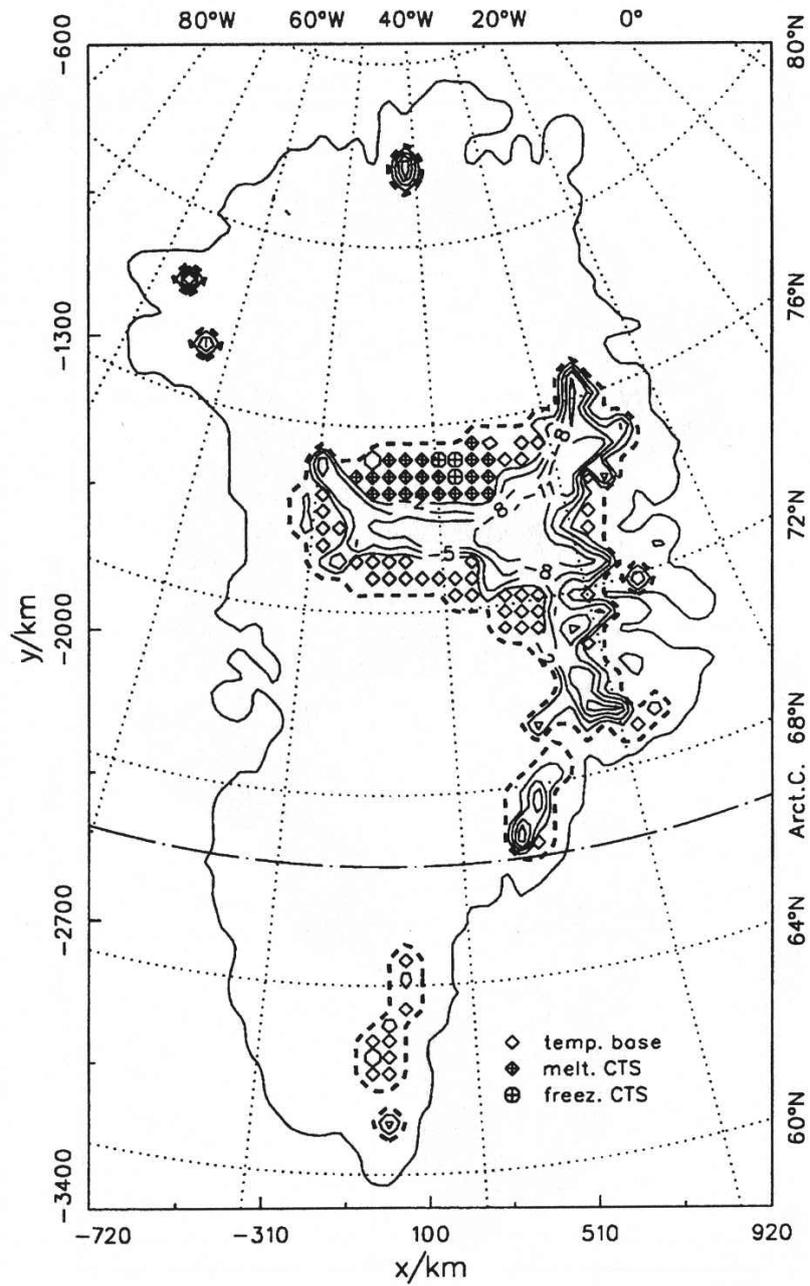


Abbildung 8.42: Lauf gtr14, $t = 5$ ka: Homologe Temperatur an der Eisbasis (in $^{\circ}\text{C}$). Die Temperaturdifferenz zwischen den Isolinien beträgt 3°C . Bei den mit Symbolen markierten Punkten befindet sich die Eisbasis auf dem Druckschmelzpunkt, wobei leere Diamantsymbole eine temperierte Eisbasis ohne überlagerte temperierte Schicht, ausgefüllte Diamantsymbole eine temperierte Schicht mit Schmelzbedingungen an der CTS, ausgefüllte Kreise eine temperierte Schicht mit Gefrierbedingungen an der CTS bedeuten. Die gestrichelte Linie zeigt die Vereisungsgrenze.

9 Ausblick

Im letzten Kapitel wurde die erfolgreiche Anwendung des im Rahmen dieser Dissertation entstandenen Programms SICOPOLIS zur Simulation der Dynamik polythermer Eisschilde auf das grönländische Eisschild dokumentiert. Es bietet sich unmittelbar die Anwendung auch auf andere, gegenwärtige oder vergangene Eisschilde an. Daher befaßt sich die laufende Dissertation von Hansen [20] am Institut für Mechanik der TH Darmstadt mit der Simulation des antarktischen Eisschildes unter Verwendung von SICOPOLIS. Jedoch spielen bei der Antarktis die Schelfeise eine nicht zu vernachlässigende Rolle in der Gesamt-Dynamik des Eises, so daß die Ankopplung eines Schelfeismodells erforderlich wird.

Den hier durchgeführten Simulationen liegen die der Flacheisannahme (SIA) unterworfenen Modellgleichungen zugrunde. Diese sollten für den größten Teil eines Eisschildes ausreichend sein, ihre Verwendbarkeit ist jedoch bei Eis-Domen und Vereisungsgrenzen problematisch. Blatter [7] stellt Testrechnungen vor, bei denen der Einfluß der in der SIA vernachlässigten Reibungsspannungen σ_x^R , σ_y^R , σ_z^R , τ_{xy} berücksichtigt ist, und konstatiert deutliche Unterschiede im Vergleich zu reinen SIA-Rechnungen. Es erscheint daher lohnend, bei der Modellierung über die SIA hinauszugehen, entweder durch direkte Lösung des vollen Stokes-Problems oder durch iterative Verbesserung der zunächst unter Annahme der SIA erhaltenen Resultate.

Bei der theoretischen Formulierung des temperierten Eises, und der darauf aufbauenden Analytik und Numerik, wird in dieser Arbeit ein Diffusionsmodell zugrundegelegt, das die Mischung Eis plus Wasser mit nur einer Impulsbilanz für die Mischung beschreibt; die relative Bewegung des Wassers im Eis wird durch ein Diffusionsgesetz berücksichtigt. Dieser Ansatz hat den Nachteil, daß so die schwerkraftbedingte Wasserdrainage nach unten nicht modelliert werden kann, so daß diese durch die ad hoc angesetzte Wasserdrainagefunktion $D(\omega)$ (vgl. (5.148)) eingeführt werden mußte. Eine Verbesserung dieser Vorgehensweise kann darin bestehen, daß im Rahmen eines vollen Zweiphasen-Modells separate Impulsbilanzen für Eis und Wasser aufgestellt werden; die Relativbewegung ist dann realistischer durch ein Konstitutivgesetz für die Wechselwirkungskraft zwischen den beiden Komponenten (z. B. verallgemeinertes Darcy-Gesetz) beschreibbar. Die zur Zeit laufende Arbeit von Bauer [3] beschäftigt sich mit dieser Problematik, ist jedoch noch im Stadium der theoretischen Modellbildung. Aufgrund der großen Komplexität eines solchen Modells sind numerische Simulationen realistischer Probleme auf dieser Ebene der theoretischen Fundierung noch nicht möglich.

Dem basalen Gleiten des Eises wird hier durch Verwendung eines konventionellen Gleitgesetzes vom Weertman-Typ (5.171) Rechnung getragen. Dabei bleibt die Rolle

einer eventuell auftretenden, leicht deformierbaren Schicht aus Eis und Sediment zwischen reinem Eis und Lithosphäre unberücksichtigt, wie sie z. B. bei der Auswertung des GRIP-Bohrkerns in Zentralgrönland gefunden wurde. Eine solche Schicht muß zumindest durch ein Zweiphasen-Modell (Eis und Sediment), eventuell sogar durch ein Dreiphasen-Modell (Eis, Wasser und Sediment) modelliert werden; der Aufwand ist ähnlich dem der Formulierung temperierten Eises durch ein Zweiphasen-Modell, wie oben angedeutet. Am Institut für Mechanik der TH Darmstadt sind hiermit die Arbeiten von Bauer [3] und Wu [70] befaßt.

Das in dieser Arbeit verwendete Glensche Fließgesetz (5.165) zusammen mit den Rate-Faktoren (5.166) und (5.169) beschreibt Eis als ein viskoses Fluid, d. h., es wird insbesondere makroskopisch isotropes Verhalten angenommen. Das setzt voraus, daß die das Eis aufbauenden hexagonalen Kristallite, welche per se anisotrop sind, in ihrer Ausrichtung statistisch uniform verteilt sind, also keine Vorzugsrichtung vorliegt. Jedoch hat die mikroskopische Untersuchung von aus Bohrkernen gewonnenen Eis-Dünnschnitten ergeben, daß die isotrope Verteilung nur in oberflächennahem Eis stets gegeben ist; mit zunehmender Tiefe können sich verschiedene Verteilungsmuster der Kristall-Symmetrieachsen herausbilden (Liboutry & Duval [50]). Die einfachste vorkommende Anisotropie besteht darin, daß sich die Gleitebenen in Richtung der vorherrschenden Schubspannung orientieren, was größere Scherungsraten nach sich zieht; hierfür wurde ein geometrisches Modell von Svendsen & Hutter [68a, 68b] umrissen. Wahrscheinlich beinhalten die Vorgänge bei der Ausbildung solchen Anisotropien jedoch außer rein geometrischen Effekten auch Umkristallisierungen zwischen den verschiedenen Kristalliten. Die realistische Einbindung solcher Phänomene in ein Eisschildmodell stellt die vielleicht größte absehbare Herausforderung innerhalb des Bemühens um die Simulation eisschilddynamischer Prozesse dar.

Literatur

- [1] Abe-Ouchi, A., 1993. *Ice sheet response to climatic changes: a modelling approach*. Zürcher Geographische Schriften, Geographisches Institut, ETH Zürich, Heft 54.
- [2] Adams, D., 1979. *The Hitch Hiker's Guide to the Galaxy*. Pan Books Ltd., London.
- [3] Bauer, G., 1995. Laufende Dissertation, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [4] Becker, E. & Bürger, W., 1975. *Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher Mechanik.
- [5] Berger, A. L., 1978. *Long-term variations of caloric insolation resulting from the earth's orbital elements*. Quaternary Research, **9**, 139-167.
- [6] Blatter, H., 1991. *Effect of climate on the cryosphere*. Zürcher Geographische Schriften, Geographisches Institut, ETH Zürich, Heft 41.
- [7] Blatter, H., 1995. *Velocity and stress fields in grounded glaciers: a simple algorithm for including deviatoric stress gradients*. Journal of Glaciology, im Druck.
- [8] Blatter, H. & Hutter, K., 1991. *Polythermal conditions in arctic glaciers*. Journal of Glaciology, Vol. 37, No. 126, 261-269.
- [9] Braithwaite, R. J. & Olesen, O. B., 1989. *Calculation of glacier ablation from air temperature, West Greenland*. In: J. Oerlemans (ed.): Glacier fluctuations and climatic change, Kluwer, 219-233.
- [10] Budd, W. F., Jenssen, D. & Smith, I. N., 1984. *A three-dimensional time-dependent model of the West Antarctic ice sheet*. Annals of Glaciology, **5**, 29-36.
- [11] Budd, W. F. & Smith, I. N., 1982. *Large-scale numerical modelling of the Antarctic ice sheet*. Annals of Glaciology, **3**, 42-49.
- [12] Calov, R., 1994. *Das thermomechanische Verhalten des grönländischen Eisschildes unter der Wirkung verschiedener Klimaszenarien – Antworten eines theoretisch-numerischen Modells*. Dissertation, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [13] Calov, R. & Hutter, K., 1995. *The thermomechanical response of the Greenland Ice Sheet to various climate scenarios. Part I: Analysis of the temperature regime*. Eingereicht bei: Climate Dynamics.

- [14] Calov, R. & Hutter, K., 1995. *The thermomechanical response of the Greenland Ice Sheet to various climate scenarios. Part II: Analysis of flow field and geometry*. Eingereicht bei: Climate Dynamics.
- [15] Fabré, A., Letréguilly, A., Ritz, C. & Mangeney, A., 1995. *Greenland under changing climates: sensitivity experiments with a new three-dimensional ice sheet model*. Annals of Glaciology, **21**, 1-7.
- [16] Fastook, J. L. & Chapman, J. E., 1989. *A map-plane finite-element model: three modeling experiments*. Journal of Glaciology, Vol. 35, No. 119, 48-52.
- [17] Fowler, A. C. & Larson, D. A., 1978. *On the flow of polythermal glaciers. I. Model and preliminary analysis*. Proceedings Royal Society London, Ser. A, 363, 217-242.
- [18] Funk, M., Echelmeyer, K. & Iken, A., 1994. *Mechanisms of fast flow in Jacobshavns Isbræ, West Greenland: Part II. Modeling of englacial temperatures*. Journal of Glaciology, Vol. 40, No. 136, 569-585.
- [19] Glen, J. W., 1955. *The creep of polycrystalline ice*. Proceedings of the Royal Society London, Ser. A, Vol. 228, No. 1175, 519-538.
- [20] Hansen, I., 1995. Laufende Dissertation, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [21] Hays, J. D., Imbrie, J. & Shackleton, N. J., 1976. *Variations in the Earth's orbit: pacemaker of the ice ages*. Science, Vol. 194, No. 4270, 1121-1132.
- [22] Heinrich, H., 1988. *Origin and consequences of cyclic ice rafting in the northeast Atlantic Ocean during the past 130000 years*. Quaternary Research, **29**, 142-152.
- [23] Herterich, K., 1988. *A three-dimensional model of the Antarctic ice sheet*. Annals of Glaciology, Vol. 11, 32-35.
- [24] Herterich, K., 1990. *Modellierung eiszeitlicher Klimaschwankungen*. Habilitationsschrift, Fachbereich Geowissenschaften, Universität Hamburg.
- [25] Hofmann, W., 1974. *Die Internationale Glaziologische Grönland-Expedition EGIG*. Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie, **5**, 217-224.
- [26] Hooke, R. L., 1981. *Flow law for polycrystalline ice in glaciers: comparison of theoretical predictions, laboratory data, and field measurements*. Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 19, No. 4, 664-672.

- [27] Hutter, K., 1982. *A mathematical model of polythermal glaciers and ice sheets*. Journal of Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 21, 201-224.
- [28] Hutter, K., 1982. *Dynamics of glaciers and large ice masses*. Ann. Rev. Fluid Mech., **14**, 87-130.
- [29] Hutter, K., 1983. *Theoretical glaciology; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- [30] Hutter, K., 1990. *Mechanik umweltrelevanter Systeme*. Vorlesungsskript, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [31] Hutter, K., 1993. *Thermo-mechanically coupled ice sheet response. Cold, polythermal, temperate*. Journal of Glaciology, Vol. 39, No. 131, 65-86.
- [32] Hutter, K., Blatter, H. & Funk, M., 1988. *A model computation of moisture content in polythermal glaciers*. Journal of Geophysical Research, Vol. 93, No. B10, 12205-12214.
- [33] Hutter, K., Yakowitz, S. & Szidarovszky, F., 1986. *A numerical study of plane ice sheet flow*. Journal of Glaciology, Vol. 32, No. 111, 139-164.
- [34] Huybrechts, P., 1990. *A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast*. Climate Dynamics, **5**, 79-92.
- [35] Huybrechts, P., 1990. *The Antarctic ice sheet during the last glacial-interglacial cycle: A three-dimensional experiment*. Annals of Glaciology, **14**, 115-119.
- [36] Huybrechts, P., 1992. *The Antarctic ice sheet and environmental change: a three-dimensional modelling study*. Berichte zur Polarforschung 99 (1992), Alfred-Wegener-Institut Bremerhaven.
- [37] Huybrechts, P., 1993. *Glaciological modelling of the Late Cenozoic East Antarctic ice sheet: stability or dynamism?* Geografiska Annaler, 75 A (4), 221-238.
- [38] Huybrechts, P., 1994. *The present evolution of the Greenland ice sheet: an assessment by modelling*. Global and Planetary Change 9 (1994), 39-51.
- [39] Huybrechts, P., Letréguilly, A. & Reeh, N., 1991. *The greenland ice sheet and greenhouse warming*. Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology (Global and Planetary Change Section), **89**, 399-412.

- [40] Huybrechts, P. & Oerlemans, J., 1988. *Evolution of the East Antarctic ice sheet: A numerical study of thermo-mechanically response patterns with changing climate*. Annals of Glaciology, **11**, 52-59.
- [41] Huybrechts, P. & Oerlemans, J., 1990. *Response of the Antarctic ice sheet to future greenhouse warming*. Climate Dynamics, **5**, 93-102.
- [42] Huybrechts, P. & Payne, T., 1994. *EISMINT – Description of the model intercomparison experiments*. Persönliche Korrespondenz für die Teilnehmer am EISMINT-Modellvergleichsprogramm.
- [43] Janssen, D., 1977. *A three-dimensional polar ice-sheet model*. Journal of Glaciology, Vol. 18, No. 80, 373-389.
- [44] Johnsen, S. J., Clausen, H. B., Dansgaard, W., Fuhrer, K., Gundestrup, N., Hammer, C. U., Iversen, P., Jouzel, J., Stauffer, B. & Steffensen, J. P., 1992. *Irregular glacial interstadials recorded in a new Greenland ice core*. Nature, Vol. 359, 311-313.
- [45] Kuhle, M., Herterich, K. & Calov, R., 1989. *On the ice age glaciation of the Tibetan Highlands and its transformation into a 3-D model*. GeoJournal 19(2), 201-206.
- [46] Lee, W. H. K. 1970. *On the global variations of terrestrial heat flow*. Physics of the Planet Earth and Planetary Interiors, **2** (5), 332-341.
- [47] Letréguilly, A., Huybrechts, P. & Reeh, N., 1991. *Steady-state characteristics of the Greenland ice sheet under different climates*. Journal of Glaciology, Vol. 37, No. 125, 149-157.
- [48] Letréguilly, A., Reeh, N. & Huybrechts, P., 1990. *Topographical data for Greenland*. Report, Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven.
- [49] Letréguilly, A., Reeh, N. & Huybrechts, P., 1991. *The Greenland ice sheet through the last glacial-interglacial cycle*. Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology (Global and Planetary Change Section), **90**, 385-394.
- [50] Lliboutry, L. & Duval, P., 1985. *Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies*. Annales Geophysicae, 1985, **3**, 2, 207-224.

- [51] MacAyeal, D. R., 1993. *Binge/purge oscillations of the Laurentide ice sheet as a cause of the North Atlantic's Heinrich Events*. *Paleoceanography*, **8**, 775-784.
- [52] MacAyeal, D. R., 1993. *A low-order model of the Heinrich Event cycle*. *Paleoceanography*, **8**, 767-773.
- [53] Mahaffy, M. W., 1976. *A three-dimensional numerical model of ice sheets: Test on the Barnes ice cap, Northwest Territories*. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 81, No. 6, 1059-1066.
- [54] Milanković, M., 1941. *Kanon der Erdbestrahlung*. Königliche Serbische Akademie, Belgrad, Spec. Publ. **132**.
- [55] Morland, L. W., 1984. *Thermo-mechanical balances of ice sheet flows*. *Journal of Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, Vol. 29, 237-266.
- [56] Müller, I., 1973. *Thermodynamik*. Bertelsmann Universitätsverlag.
- [57] Nye, J. F., 1957. *The distribution of stress and velocity in glaciers and ice-sheets*. *Proceedings Royal Society London, Ser. A*, 239, 113-133.
- [58] Oerlemans, J., 1982. *A model of the Antarctic ice sheet*. *Nature*, Vol. 297, 550-553.
- [59] Oerlemans, J., 1982. *Response of the Antarctic Ice Sheet to a climatic warming: a model study*. *Journal of Climatology*, **2**, 1-11.
- [60] Ohmura, A., 1987. *New temperature distribution maps for Greenland*. *Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie*, **23**, 1-45.
- [61] Ohmura, A. & Reeh, N., 1991. *New precipitation and accumulation maps for Greenland*. *Journal of Glaciology*, Vol. 37, 140-148.
- [62] Paterson, W. S. B., 1981. *The physics of glaciers*. Pergamon Press.
- [63] Paterson, W. S. B., 1991. *Why ice-age ice is sometimes "soft"*. *Cold Regions Science and Technology*, Vol. 20, 75-98.
- [64] Reeh, N., 1991. *Parameterization of melt rate and surface temperature on the Greenland ice sheet*. *Polarforschung* 59/3, 113-128.
- [65] Ritz, C., 1987. *Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets*. In: Waddington, E. D. & Walder, J. S., 1987: *The physical basis of ice sheet modelling*. IAHS Publication No. 170.

- [66] Schönwiese, C.-D., 1992. *Klima im Wandel. Tatsachen, Irrtümer, Risiken*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart.
- [67] Stauffer, B., 1993. *Ist ein über mehrere Jahrtausende stabiles Klima die Ausnahme?* Spektrum der Wissenschaft, November 1993, 16-18.
- [68a] Svendsen, B. & Hutter, K., 1995. *On the continuum modeling of induced anisotropy in polycrystals*. Quarterly of Applied Mathematics. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [68b] Svendsen, B. & Hutter, K., 1995. *A continuum approach to model induced anisotropy in glaciers and ice sheets*. Annals of Glaciology, **23**. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [69] Svendsen, B., Greve, R. & Hutter, K., 1995. *Classical mixture model for polythermal ice*. In Vorbereitung.
- [70] Wu, T., 1993. *Stationäre Schwerkraftströmung einer Binärmischung zweier stark viskoser Fluide*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [71] Wu, T., 1995. Laufende Dissertation, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [72] Zahn, R., 1994. *Core correlations*. Nature, Vol. 371, 289-290.

Lebenslauf

Name: Ralf Greve
Adresse: Reuterallee 61, D-64297 Darmstadt
Geburtsdatum: 26.08.1965
Geburtsort: Siegburg
Familienstand: ledig

August 1971 - Juni 1975	Wilhelm-Leuschner-Schule Darmstadt (Grundschule)
August 1975 - Juni 1984	Georg-Büchner-Schule Darmstadt (Gymnasium)
Juni 1984	Abitur
Oktober 1984 - Dezember 1985	Grundwehrdienst
Oktober 1985 - Dezember 1991	Studium der Physik an der TH Darmstadt
Dezember 1991	Diplom-Hauptprüfung in Physik
März 1992 - September 1992	Wissenschaftliche Hilfskraft im Fachbereich Mechanik, THD
Oktober 1992 - März 1993	Promotionsstipendiat im Fachbereich Mechanik, THD; Förderung vom Land Hessen gemäß dem Hessischen Gesetz zur Förderung von Nachwuchswissenschaftlern
seit April 1993	Promotionsstipendiat im Fachbereich Mechanik, THD; Förderung von der Studienstiftung des deutschen Volkes
August 1994 - Oktober 1994	Forschungsaufenthalt an der University of Chicago bei Prof. Douglas R. MacAyeal

