

Zwischenbericht zur Dissertation

Thermomechanisches Verhalten polythermer  
Eisschilde

von

Dipl.-Phys. Ralf Greve

aus Siegburg

12.1.1994



# Zusammenfassung in Stichworten

## Bisher geleistete Arbeiten:

- Erarbeitung, Verbesserung und Ausformulierung der theoretischen Grundlagen.
- Analytische Lösungen für ein einfaches Problem (planparallele, geneigte Eisplatte).
- Erstellung eines Programmpakets zur 2-d-Simulation von Eisschild-Querschnitten.
- Hiermit Modellrechnungen für ein Ost-West-Profil des grönländischen Inlandeises (das sogenannte EGIG-Profil).

## Zukünftige Arbeiten:

- Implementierung einer realistischeren Wasserdrainage für das temperierte Eis.
- Genauere numerische Bestimmung der Phasengrenzfläche zwischen kaltem und temperiertem Eis.
- Erstellung eines Programmpakets für voll dreidimensionale Simulationen von Eisschilden.
- Anwendung auf Grönland und/oder Antarktis, Modellläufe für verschiedene Klimaszenarien (Abschmelzen durch verstärkten Treibhauseffekt?)
- Vergleich der Ergebnisse mit denen von anderen Eisschildmodellen.
- Eventuell im Rahmen eines Forschungsaufenthaltes in den USA Versuch der Simulation der sogenannten Heinrich Events des eiszeitlichen nordamerikanischen Eisschildes (siehe hierzu beigefügten Antrag auf eine Sonderbeihilfe).

## Sonstige Aktivitäten

- Teilnahme am “First EISMINT Workshop on Model Intercomparison” vom 16.6.–18.6.1993 in Brüssel, Vortrag “Preliminary polythermal ice sheet calculations”.
- Teilnahme am DFG-Kolloquium “Glaziologie im süd- und nordpolaren Raum” vom 18.10.–20.10.1993 in Bremerhaven, Vortrag “Modellierung polythermer Eisschilde”.
- Vortrag “Modellierung polythermer Eisschilde – Theorie, Numerik, Ergebnisse” im Kolloquium des Instituts für angewandte Mathematik der Uni Bonn am 16.11.1993.
- Teilnahme am “Forth Workshop on Mass Balance of the Greenland Ice Sheet and Related Topics” vom 22.11.–24.11.1993 in Amsterdam, Vortrag “EGIG line simulations with a 2-d polythermal ice sheet model”.
- Teilnahme am “EISMINT-Workshop on Mechanical Properties of Polar Ice and Ice Sheet Modelling” vom 5.1.–7.1.1994 in Aussois (Frankreich).
- Verfassen des Papers “Classical mixture model for polythermal ice” zusammen mit Prof. Kolumban Hutter und Dr. Bob Svendsen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Allgemeine Bilanzaussagen . . . . .	7
2.2	Massenbilanz . . . . .	8
2.3	Impulsbilanz . . . . .	8
2.4	Drehimpulsbilanz . . . . .	9
2.5	Energiebilanz . . . . .	9
2.6	Entropiebilanz . . . . .	9
2.7	Materialgesetze für viskose Fluide . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Das polytherme Eismodell</b>	<b>12</b>
3.1	Feldgleichungen . . . . .	12
3.1.1	Kalter Bereich . . . . .	12
3.1.2	Temperierter Bereich . . . . .	13
3.1.3	Lithosphäre . . . . .	16
3.2	Rand- und Übergangsbedingungen . . . . .	17
3.2.1	Randbedingungen an der freien Oberfläche . . . . .	17
3.2.2	Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis . . . . .	19
3.2.3	Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis . . . . .	20
3.2.4	Randbedingungen an der Felsgrundunterseite . . . . .	23
3.2.5	Übergangsbedingungen an der CTS . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Planparallele, geneigte Eisplatte</b>	<b>28</b>
4.1	Anwendung des Modells . . . . .	28
4.2	Integration der Slab-Gleichungen . . . . .	31
4.3	Ergebnisse . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Skalierung und Flacheisannahme</b>	<b>39</b>
5.1	Einführung der Skalierung . . . . .	39
5.2	Skalierung und SIA für die Modellgleichungen . . . . .	41
5.2.1	Kalter Bereich . . . . .	42
5.2.2	Temperierter Bereich . . . . .	44
5.2.3	Lithosphäre . . . . .	45
5.2.4	Randbedingungen an der freien Oberfläche . . . . .	45
5.2.5	Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis . . . . .	47
5.2.6	Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis . . . . .	49
5.2.7	Randbedingungen an der Felsgrundunterseite . . . . .	50
5.2.8	Übergangsbedingungen an der CTS . . . . .	51
5.3	Teilintegration der polythermen SIA-Gleichungen . . . . .	52

5.3.1	Berechnung der Spannungen . . . . .	53
5.3.2	Berechnung der Geschwindigkeit . . . . .	53
5.3.3	Evolution der freien Oberfläche . . . . .	55
5.3.4	Evolution der CTS . . . . .	55
5.3.5	Evolution der Eisbasis bzw. Felsgrund-Oberseite . . . . .	56
5.3.6	Temperatur und Wassergehalt . . . . .	56
5.4	Zusammenstellung in dimensionsbehafteter Form . . . . .	58
5.5	Spezifizierung physikalischer Größen . . . . .	61
<b>6</b>	<b>2-d-Eisschildsimulationen</b>	<b>64</b>
6.1	Transformation des Modells auf $\sigma$ -Koordinaten . . . . .	64
6.2	Numerisches Lösungsverfahren . . . . .	66
6.3	Modellrechnungen für das EGIG-Profil des grönländischen Inlandeises	70
6.3.1	Daten für die Oberflächentemperatur . . . . .	70
6.3.2	Daten für die Akkumulations-Ablations-Funktion . . . . .	70
6.3.3	Modellläufe . . . . .	73
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>

# 1 Einleitung

In der Natur vorkommendes Eis in Gletschern und Eisschilden existiert (bei Vernachlässigung zusätzlicher Beimischungen von Salz und Sediment) in zwei grundsätzlich verschiedenen Zuständen. *Kaltes Eis* ist durch eine Temperatur unterhalb dem druckkorrigierten Schmelzpunkt gekennzeichnet und kann als inkompressibles, viskoses und wärmeleitendes Ein-Komponenten-Fluid beschrieben werden; es macht in den großen Eisschilden der Erde (Grönland, Antarktis) den weitaus größten Anteil aus. Bei *temperiertem Eis* dagegen befindet sich die Temperatur exakt auf dem druckkorrigierten Schmelzpunkt, was dazu führt, daß dieses zusätzlich Wasser in geringer Menge enthalten kann. Demzufolge muß es im Gegensatz zu kaltem Eis als Zwei-Komponenten-Fluid aufgefaßt werden. Bereiche aus temperiertem Eis können in Eisschilden in dünnen, bodennahen Schichten existieren, die das Fließverhalten entscheidend verändern. Gletscher und Eisschilde, die sowohl kalte als auch temperierte Zonen enthalten, nennt man *polytherm*. Die typische Geometrie eines polythermen Eisschildes ist in Abbildung 1.1 dargestellt.

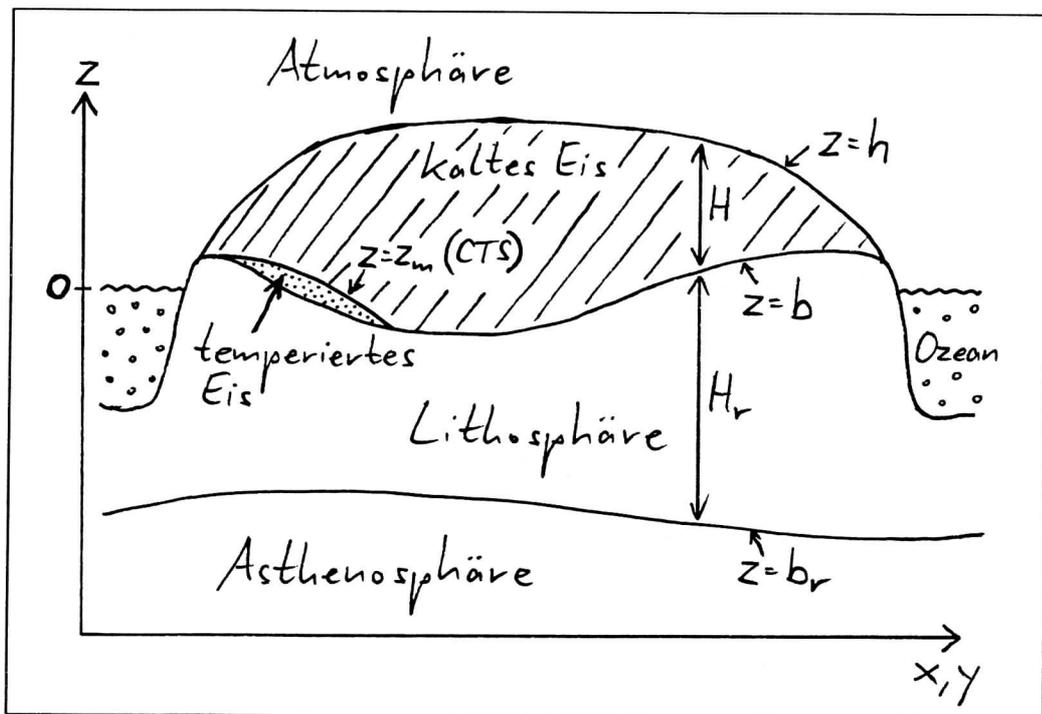


Abb. 1.1: Skizze eines polythermen Eisschildes.

Bisherige großskalige Inlandeismodelle vernachlässigen das Auftreten von temperiertem Eis weitgehend. Modellrechnungen zur Bestimmung des Geschwindigkeits-

und Temperaturfeldes von Eisschilden sowie der Evolution von Dicke und Ausdehnung bei gegebenem klimatischen Input werden mit den Prozeßgleichungen für kaltes Eis durchgeführt (Herterich [9], Huybrechts [17], Abe-Ouchi [1], Calov [5]). Erhält man hierbei Temperaturen oberhalb dem Schmelzpunkt, so wird für die betreffenden numerischen Gitterpunkte die Temperatur künstlich auf diesen herabgesetzt. Diese Vorgehensweise stellt jedoch lediglich eine sehr grobe Berücksichtigung der temperierten Bereiche dar, denn es wird nicht der Tatsache Rechnung getragen, daß mit den kalten und temperierten Bereichen zwei verschiedene Phasen im Eisschild vorhanden sind, die durch eine Phasengrenzfläche voneinander getrennt sind, an welcher bestimmte Sprungbedingungen für die verschiedenen physikalischen Größen erfüllt sein müssen (Müller [21], Hutter [13]). Ferner ist es nicht möglich, so den die Eisviskosität maßgeblich mitbestimmenden Wassergehalt in den temperierten Bereichen zu berechnen.

Die besondere klimatologische Relevanz dieses Problems besteht darin, daß aufgrund der zu erwartenden, durch den verstärkten Treibhauseffekt hervorgerufenen Erwärmung der Erdatmosphäre langfristig die große Gefahr des verstärkten Abschmelzens der großen irdischen Eisschilde besteht, was einen Anstieg des Meeresspiegels um bis zu 70 m zur Folge hätte. Für diesen Abschmelzprozeß sind basale temperierte Bereiche von vielleicht entscheidender Bedeutung. Während nämlich kaltes Eis die Eigenschaft besitzt, an dem Felsgrund des Eisschildes zu haften, gehorcht temperiertes Eis dort aufgrund des Wassergehaltes einem viskosen Gleitgesetz; aus diesem Grunde können temperierte Bereiche das Abfließen der Eismassen (und somit deren Abbau) in die umgebenden Ozeane stark beschleunigen. Aus bisherigen Modellrechnungen mit Kalteismodellen und aus Radarmessungen läßt sich vermuten, daß große Bereiche der Antarktis basale temperierte Bereiche aufweisen (Huybrechts [17]); in Grönland existieren solche wahrscheinlich in der Nähe des Eisrandes (Calov [5]). Diese Betrachtungen zeigen, daß es für realistische Simulationen des Verhaltens großer Eisschilde sehr wichtig ist, die temperierten Bereiche adäquat und physikalisch korrekt zu behandeln.

Ein weiterer Aspekt ist die Interpretation von Eisbohrkernen aus Grönland und der Antarktis. Hierbei geht man davon aus, daß das untersuchte Eis zu allen Zeiten kalt war, sich also nie Wasser bilden konnte, das durch das Eis diffundieren und so die Isotopenkonzentrationen und damit auch die Klimarekonstruktion verfälschen konnte. Das Wissen um temperierte Bereiche und das Verhalten des Wassers darin könnte also eine geänderte Interpretation notwendig machen.

Theoretische Beschreibungen zu polythermem Eis wurden bereits formuliert (Fowler & Larson [7], Hutter [11], Hutter [12], Blatter [3], Hutter [15]). Es werden zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen verwendet: Diffusionsmodelle beschreiben temperiertes Eis mit zwei Massenbilanzen (eine für die Mischung Eis plus Wasser, eine für das Wasser selbst, dessen Anteil als gering angenommen wird), jedoch nur je einer Impuls- und Energiebilanz für die Mischung; der Transport des Wassers in

der Eisumgebung wird dabei mit Hilfe eines Fickschen Diffusionsgesetzes dargestellt. Zwei-Phasenmodelle hingegen verwenden für jede der beiden Komponenten sowohl eine Massen- als auch eine Impulsbilanz, ergänzt durch eine Wechselwirkungskraft zwischen den beiden Komponenten (Darcy-Transport). Ergänzt werden diese Modelle durch die hinlänglich bekannten und gut verstandenen Modellgleichungen für kaltes Eis (Hutter [13]) sowie Randbedingungen an der Oberfläche und der Basis und Übergangsbedingungen an der internen Phasengrenzfläche; diese können aus einer allgemeinen Sprungbedingung für singuläre Flächen hergeleitet werden.

Für große Inlandeisschilde kann davon ausgegangen werden, daß ein Diffusionsmodell zur adäquaten Beschreibung hinreichend ist, da sich die temperierten Bereiche auf relativ kleine bodennahe Zonen beschränken und der zu erwartende Wassergehalt gering ist (Hutter [15]). Temperierte Alpengletscher hingegen, in denen im Sommer durch oberflächliches Abschmelzen große Mengen Wasser in das Eis gelangen, verlangen nach einem Zwei-Phasenmodell, da der Wassertransport dann nicht mehr diffusiv beschrieben werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit, die sich mit großen Eisschilden befaßt, wird daher zunächst ein verbessertes Diffusionsmodell ausführlich hergeleitet. Das Modell wird zwecks systematischer Vereinfachungen einer Skalierung unterworfen, wobei von der Flacheisannahme ("Shallow ice approximation", im folgenden als "SIA" bezeichnet) Gebrauch gemacht wird, d. h., es wird ausgenutzt, daß in typischen Eisschilden die typischen Höhen wesentlich kleiner als die typischen Längen sind, also ein kleines Aspektverhältnis vorliegt.

Dieses Modell wird anschließend einer numerischen Behandlung zugänglich gemacht. Ausgehend von Erfahrungen mit Modellrechnungen für kaltes Eis (Herterich [9], Huybrechts [17], Abe-Ouchi [1], Calov [5]) wird hierfür ein Finite-Differenzen-Verfahren unter Verwendung von  $\sigma$ -Koordinaten in der Vertikalen (d. h., jede vertikale Säule des Rechengebietes wird auf ein  $[0,1]$ -Intervall abgebildet) mit sich verdichtenden Gitterpunkten in Bodennähe und Upstream-Diskretisierung in den advectierten Termen verwendet. Die Besonderheit der polythermen Rechnung besteht jedoch in der numerischen Positionierung der Phasengrenzfläche zwischen den kalten und temperierten Bereichen, an welcher Unstetigkeiten des Temperaturgradienten und des Wassergehaltes auftreten können und Übergangsbedingungen erfüllt sein müssen, sowie der Berechnung des Wassergehaltes in den temperierten Bereichen. Dies wurde in der Vergangenheit für einfache Geometrien (planparallele Eisplatte, zweidimensionaler stationärer Gletscher) durchgeführt (Hutter, Blatter & Funk [16], Blatter [3], Blatter & Hutter [4], Funk, Echelmeyer & Iken [8]) und soll hier für zeitabhängige Probleme zwei- und dreidimensionaler Eisschildgeometrien zur Anwendung kommen. Ziel ist hierbei im einzelnen die Berechnung des Geschwindigkeits-, Temperatur- und Wassergehaltsfeldes sowie der Eisdicke, der Ausdehnung des Eisschildes auf dem zugrundeliegenden Kontinentalschelf und der Position der internen Phasengrenzfläche zwischen kaltem und temperiertem Eis ("cold-temperate transition surface", im folgenden kurz als "CTS" bezeichnet) als Funktion der Zeit bei gegebener Oberflächen-

temperatur und oberflächlicher Massenbilanz (Schneefall, Schmelzen) sowie gegebenem geothermen Wärmefluß von unten.

Für den vereinfachten Fall einer zweidimensionalen Eisschildgeometrie, dem sogenannten EGIG-Profil des grönländischen Eisschildes, werden drei Modellläufe vorgestellt und diskutiert. Ein Lauf simuliert das Gleichgewicht des EGIG-Profils unter heutigen Klimabedingungen, ein weiterer selbiges unter eiszeitlichen Klimabedingungen; der dritte Lauf besteht schließlich in einer transienten (zeitabhängigen) Simulation über zwei idealisierte Eiszeit-/Warmzeit-Zyklen hinweg, was eine grobe Approximation der Klimageschichte der letzten 200000 Jahre darstellt.

## 2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

### 2.1 Allgemeine Bilanzaussagen

Das Modell, welches im nächsten Kapitel entwickelt werden soll, basiert im wesentlichen auf den Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie; ergänzt durch einige Materialgesetze kann hieraus ein geschlossenes Gleichungssystem erhalten werden. Diese Bilanzgleichungen können als Spezialfälle einer allgemeinen Bilanzgleichung aufgefaßt werden, welche in Eulerscher Darstellung die zeitliche Änderung einer beliebigen physikalischen Größe  $j(\omega, t)$  innerhalb eines materiellen Volumens  $\omega$  bilanziert mit dem konduktiven Fluß  $\phi$  von  $j$  durch den Rand  $\partial\omega$  sowie der volumemäßigen Produktion  $p^1$  und Zufuhr  $z$  im materiellen Volumen  $\omega$  (vgl. Müller [21], Hutter [13]):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} j(\omega, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\omega} g(\mathbf{x}(t), t) dv \\ &= - \oint_{\partial\omega} \phi(\mathbf{x}(t), t) \cdot \mathbf{n} da + \int_{\omega} (p(\mathbf{x}(t), t) + z(\mathbf{x}(t), t)) dv; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$g$  ist hierbei die Dichte von  $j$ , und  $\mathbf{n}$  bedeutet den äußeren Normalenvektor des Volumens  $\omega$ . Mit Hilfe des Reynoldsschen Transporttheorems (Becker & Bürger [2])

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} g(\mathbf{x}(t), t) dv = \int_{\omega} \frac{\partial g}{\partial t} dv + \oint_{\partial\omega} g \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da, \quad (2.2)$$

welches besagt, daß sich die zeitliche Änderung von  $j$  in  $\omega$  (linke Seite) zusammensetzt aus einem lokalen Anteil (erster Term rechts) und dem konvektiven Fluß durch den begrenzenden Rand (zweiter Term rechts,  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$  ist die Partikelgeschwindigkeit), und des Gaußschen Integralsatzes erhält man aus (2.1) durch Lokalisierung die *allgemeine Bilanzgleichung in lokaler Form*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\operatorname{div}(\phi + g\mathbf{v}) + p + z, \quad (2.3)$$

wobei stetige Differenzierbarkeit der auftretenden Felder innerhalb des Volumens  $\omega$  vorausgesetzt ist. Enthält dieses eine singuläre Fläche  $\sigma$ , auf welcher Unstetigkeiten auftreten können, so ist auf dieser (2.3) nicht mehr gültig; statt dessen kann über die Betrachtung eines Volumenelements um die singuläre Fläche herum eine *allgemeine Sprungbedingung* abgeleitet werden (Müller [21], Hutter [13]):

$$[(\phi + g(\mathbf{v} - \mathbf{w})) \cdot \mathbf{n}] = \mathcal{P}. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>Für Erhaltungsgrößen verschwindet die Produktion  $p$ .

$\mathbf{w}$  bedeutet hierbei die Geschwindigkeit der singulären Fläche selbst, und  $\mathcal{P}$  ist ein Oberflächenproduktions- bzw. Oberflächenzufuhrterm, welcher in den meisten Fällen verschwindet. Die eckigen Klammern bezeichnen den Sprung des innestehenden Ausdrucks an der singulären Fläche  $\sigma$ :  $[[f]] := f^+ - f^-$ ;  $f^\pm$  ist der Wert von  $f$  auf der positiven bzw. negativen Seite von  $\sigma$ , wobei die positive Seite dadurch ausgezeichnet ist, daß der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  in sie hineinzeigt. Die allgemeine Sprungbedingung besagt somit, daß der Sprung der Normalkomponente des gesamten Flusses (Summe aus konduktivem Fluß und konvektivem Fluß relativ zur Bewegung von  $\sigma$ ) gleich ist einer Oberflächenproduktion  $\mathcal{P}$ , welche im allgemeinen verschwindet.

Im folgenden geht es darum, die Gleichungen (2.3) und (2.4) auf die einzelnen Fälle zu spezialisieren. Dies geschieht durch Einsetzen der entsprechenden Werte für  $g$ ,  $\phi$ ,  $p$ ,  $z$  und  $\mathcal{P}$ .

## 2.2 Massenbilanz

In diesem Fall ist  $g = \rho$  ( $\rho$ : Massendichte),  $\phi = \mathbf{0}$ ,  $p = 0$ ,  $z = 0$ ,  $\mathcal{P} = 0^2$ . Dies ergibt für die lokale Massenbilanz

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\rho} + \rho(\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0; \quad (2.5)$$

( $\dot{\phantom{x}}$ ) bedeutet die materielle, der Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  folgende Zeitableitung. Ein wichtiger Spezialfall ist der eines *dichtebeständigen Fluides* ( $\dot{\rho} = 0$ ):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.6)$$

Die Sprungbedingung an singulären Flächen lautet

$$[[\rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}]] = 0. \quad (2.7)$$

## 2.3 Impulsbilanz

Hier gilt  $g = \rho \mathbf{v}$ ,  $\phi = -\mathbf{T}$  ( $\mathbf{T}$ : Cauchyscher Spannungstensor),  $p = \mathbf{0}$ ,  $z = \rho \mathbf{f}$  ( $\mathbf{f}$ : spezifische Kraft, i. allg. gleich der Schwerebeschleunigung  $\mathbf{g}$ ) und  $\mathcal{P} = \mathbf{0}$ . Hiermit erhält man nach einiger Umformung die lokale Impulsbilanz

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}; \quad (2.8)$$

dies entspricht dem Newtonschen Gesetz "Kraft gleich Masse mal Beschleunigung".

Die Impulssprungbedingung ergibt sich zu

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]] - [[\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}]] = \mathbf{0}. \quad (2.9)$$

---

<sup>2</sup>In Mischungen kann für die einzelnen Konstituenten aufgrund von Phasenübergängen oder chemischen Reaktionen auch  $p \neq 0$  und  $\mathcal{P} \neq 0$  gelten.

## 2.4 Drehimpulsbilanz

Auf diese soll hier nicht näher eingegangen werden; es sei lediglich gesagt, daß die lokale Drehimpulsbilanz die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors nach sich zieht:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^t. \quad (2.10)$$

Für eine eingehendere Betrachtung siehe Becker & Bürger [2].

## 2.5 Energiebilanz

Für den Fall der Energiebilanz ist  $g = \rho\epsilon + \rho v^2/2$  ( $\epsilon$ : spezifische innere Energie),  $\phi = \mathbf{q}_{\text{ges}} - \mathbf{T}\mathbf{v}$  ( $\mathbf{q}_{\text{ges}}$ : Summe aus fühlbarem und latentem Wärmefluß),  $p = 0$ ,  $z = \rho\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho r$  ( $r$ : spezifische Strahlungsleistung) und  $\mathcal{P} = 0$ . Somit lautet die lokale Energiebilanz mit einigen Umformungen

$$\rho\dot{\epsilon} = -\text{div } \mathbf{q}_{\text{ges}} + \rho r + \text{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}); \quad (2.11)$$

$\mathbf{D} = \text{sym grad } \mathbf{v}$  ist der Verzerrungsgeschwindigkeits-Tensor.

Die zugehörige Sprungbedingung lautet

$$\llbracket \mathbf{q}_{\text{ges}} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n} \rrbracket + \llbracket \rho(\epsilon + v^2/2)(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0. \quad (2.12)$$

## 2.6 Entropiebilanz

Dieser Fall läßt sich nur auf einem relativ allgemeinen Niveau ausarbeiten, da die Entropiegrößen von Problem zu Problem sehr verschieden sein können. Mit  $g = \rho\eta$  ( $\eta$ : spezifische Entropie),  $\phi = \phi^\eta$  ( $\phi^\eta$ : konduktiver Entropiefluß),  $p = \rho\gamma$  ( $\gamma$ : spezifische Entropieproduktion),  $z = \rho s$  ( $s$ : spezifische Entropiezufuhr) und  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\eta$  ( $\mathcal{P}^\eta$ : Entropie-Oberflächenproduktion) ergibt sich für die lokale Bilanzgleichung

$$\rho\dot{\eta} = -\text{div } \phi^\eta + \rho s + \rho\gamma \quad (2.13)$$

und für die Sprungbedingung an singulären Flächen

$$\llbracket \phi^\eta \cdot \mathbf{n} \rrbracket + \llbracket \rho\eta(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \rrbracket = \mathcal{P}^\eta. \quad (2.14)$$

Es ist anzumerken, daß die Entropie im Gegensatz zu den vorher behandelten Größen keine Erhaltungsgröße darstellt, mithin also die Produktionsterme nicht verschwinden müssen. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik impliziert jedoch die Einschränkung, daß sie nicht negativ werden können; es muß also  $\gamma \geq 0$  und  $\mathcal{P}^\eta \geq 0$  erfüllt sein.

## 2.7 Materialgesetze für viskose Fluide

Das *allgemeine Materialgesetz für viskose Fluide* ("Reiner-Rivlin-Fluide") verknüpft den Spannungstensor  $\mathbf{T}$  mit dem Verzerrungsgeschwindigkeits-Tensor  $\mathbf{D}$  und lautet

$$\mathbf{T} = (-p + \nu_0) \mathbf{1} + \nu_1 \mathbf{D} + \nu_2 \mathbf{D}^2 \quad (2.15)$$

mit

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T), \\ \nu_{1,2} &= \nu_{1,2}(\rho, T, I_D, II_D, III_D), \\ \nu_0(\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{0}) &= 0; \end{aligned} \quad (2.16)$$

hierbei ist  $p$  der Druck,  $\rho$  die Massendichte,  $T$  die Temperatur, die  $\nu_i$  sind Viskositätskoeffizienten, und  $I_D, II_D, III_D$  bedeuten die drei Invarianten des Verzerrungsgeschwindigkeits-Tensors  $\mathbf{D}$  (vgl. z. B. Hutter [14]).

Im Falle eines *dichtebeständigen Fluids*, wovon in der Eisdynamik ausgegangen wird, gilt gemäß (2.6)  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$ . Der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  wird in diesem Fall aufgespalten in einen isotropen Drucktensor und einen deviatorischen Tensor der Reibungsspannungen,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}^R \quad \text{mit} \quad \operatorname{tr} \mathbf{T}^R = 0, \quad (2.17)$$

wobei der Druck jetzt ein freies Feld ist, und ein Materialgesetz nur noch für  $\mathbf{T}^R$  zu formulieren ist. Dieses lautet also für ein dichtebeständiges Reiner-Rivlin-Fluid gemäß (2.15) zunächst

$$\mathbf{T}^R = \nu_0 \mathbf{1} + \nu_1 \mathbf{D} + \nu_2 \mathbf{D}^2. \quad (2.18)$$

Durch Spurbildung erhält man

$$\nu_0 = -\frac{2}{3} \nu_2 II_D, \quad (2.19)$$

wobei  $2 II_D = \operatorname{tr} (\mathbf{D}^2)$  verwendet wurde. (2.19) in (2.18) eingesetzt ergibt

$$\mathbf{T}^R = \nu_1 \mathbf{D} + \nu_2 \left( \mathbf{D}^2 - \frac{2}{3} II_D \mathbf{1} \right) \quad (2.20)$$

mit

$$\nu_{1,2} = \nu_{1,2}(T, II_D, III_D) \quad (2.21)$$

als allgemeines Materialgesetz des dichtebeständigen Reiner-Rivlin-Fluids.

In der Eisdynamik wird üblicherweise die Vereinfachung getroffen, daß der nichtlineare Term proportional zu  $\mathbf{D}^2$  entfällt,  $\nu_2$  also vernachlässigbar ist. Weiterhin wird

der verbleibende Rest von (2.20) invertiert dargestellt. Da wegen Gl. (2.20), welche ja  $\mathbf{T}^R$  mit  $\mathbf{D}$  verknüpft, die Invarianten von  $\mathbf{D}$  durch die Invarianten von  $\mathbf{T}^R$  ausgedrückt werden können, folgt

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\nu_1(T, II_D, III_D)} \mathbf{T}^R =: \mu_1(T, II_{T^R}, (III_{T^R})) \mathbf{T}^R. \quad (2.22)$$

Als weitere Vereinfachung wird, wie in (2.22) durch die Klammern bereits angedeutet, auch die Abhängigkeit von der dritten Invarianten  $III_{T^R}$  des Reibungsspannungstensors vernachlässigt. Das verbleibende Materialgesetz ist jedoch im allgemeinen immer noch nichtlinear.

## 3 Das polytherme Eismodell

### 3.1 Feldgleichungen

#### 3.1.1 Kalter Bereich

Kaltes Eis bedeutet Eis mit einer Temperatur unterhalb dem druckkorrigierten Schmelzpunkt. Bei Vernachlässigung zusätzlicher Beimischungen von Salz, Staub und Geröll kann es als viskoses wärmeleitendes dichtebeständiges Einkomponenten-Fluid betrachtet werden. Die *Massenbilanz* lautet somit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.1)$$

Aufgrund der Annahme der Dichtebeständigkeit muß der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  in einen isotropen Drucktensor und einen deviatorischen Reibungsanteil aufgespalten werden,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}^R, \quad (3.2)$$

der Druck  $p$  ist hierbei eine freie Feldgröße, wohingegen für den Spannungsdeviator  $\mathbf{T}^R$  eine Konstitutivgleichung anzugeben ist. Mit dieser Aufspaltung lautet die *Impulsbilanz*

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{T}^R + \rho \mathbf{g} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.3)$$

Die noch durchzuführende Skalierung wird ergeben, daß der Beschleunigungsterm  $\rho \dot{\mathbf{v}}$  vernachlässigt werden kann, also rein Stokessches Fließen vorliegt.

Es werden drei Konstitutivgleichungen benötigt: eine Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation, ein Konstitutivgesetz für die innere Energie  $\epsilon$  und eines für den Wärmefluß  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{D} = EA(T')f(\sigma)\mathbf{T}^R \quad \text{mit} \quad \sigma := \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{T}^R)^2}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\epsilon} = c(T)\dot{T}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa(T)\operatorname{grad} T, \quad (3.6)$$

mit im allgemeinen temperaturabhängiger spezifischer Wärme  $c$  und thermischer Leitfähigkeit  $\kappa$ . Die erste Gleichung besagt, daß die Fluidität des Eises in eine Funktion  $A(T')$  ("Rate-Faktor") der homologen Temperatur  $T'$  und eine Funktion  $f(\sigma)$  ("Kriechfunktion") der effektiven Schubspannung  $\sigma$  (Wurzel der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $II_{TR} = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{T}^R)^2$ ) faktorisiert (vgl. (2.22) und Hutter [13]); die homologe Temperatur ist definiert als  $T' = T - T_M$ , wobei  $T_M$  die (druckabhängige) Schmelztemperatur des Eises bedeutet. Der Rate-Faktor und die Kriechfunktion sollen an dieser Stelle nicht näher spezifiziert werden; der zusätzliche Faktor  $E$  ("Enhancement-Faktor") kann auf einen Wert größer als Eins gesetzt werden, um

z. B. die leichtere Deformierbarkeit von staubhaltigem Eis gegenüber normalem Eis (Paterson [25]) zu berücksichtigen. Die zweite Gleichung verknüpft Änderungen der inneren Energie über die spezifische Wärme ausschließlich mit Änderungen der Temperatur, und die letzte Gleichung ist schließlich das Fouriersche Wärmeleitgesetz.

Bei Vernachlässigung der Strahlungsleistung  $r$  lautet die *Energiebilanz*:

$$\rho \dot{\epsilon} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{tr}(\mathbf{T}^R \cdot \mathbf{D}). \quad (3.7)$$

Setzt man die obigen drei Konstitutivgleichungen hier ein, so folgt hieraus eine Gleichung für das Temperaturfeld:

$$\rho c \dot{T} = \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) + 2EA(T')f(\sigma)\sigma^2. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung bilanziert lokale Temperaturänderungen mit Advektion (implizit in der materiellen Zeitableitung enthalten), Wärmeleitung und dissipativer Wärmeproduktion.

### 3.1.2 Temperierter Bereich

Unter temperiertem Eis versteht man Eis, dessen Temperatur sich exakt auf dem druckkorrigierten Schmelzpunkt befindet, so daß dessen Temperatur nicht gesondert berechnet werden muß, sondern unmittelbar aus dem Druckfeld folgt:

$$T = T_M = T_0 - \beta^* p = T_0 - \beta \frac{p}{\rho g}, \quad (3.9)$$

mit  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  sowie der Clausius-Clapeyron-Konstanten  $\beta^*$  (Paterson [25]) bzw. dem Clausius-Clapeyron-Gradienten  $\beta := \rho g \beta^*$ , welcher, wie sich noch zeigen wird, dem Temperaturgradienten in temperiertem Eis entspricht. Jedoch kann temperiertes Eis einen bestimmten Anteil an flüssigem Wasser enthalten; der Wassergehalt (genauer die Wasserkonzentration  $\omega$ ) übernimmt als thermodynamische Größe die Rolle der Temperatur im kalten Eis. Daher muß temperiertes Eis im Gegensatz zu kaltem Eis als Mischung aus zwei verschiedenen Komponenten, nämlich Eis und Wasser, angesehen werden. Es ist somit notwendig, einige Konzepte der Mischungstheorie (vgl. hierzu Müller [21]) zur Anwendung zu bringen. Da allgemein angenommen wird, daß der Wassergehalt in temperierten Zonen polythermer Eisschilde mit maximal ca. 5% relativ gering ist (Hutter [15]), soll temperiertes Eis durch zwei Massenbilanzen (eine für die Mischung als Ganzes, eine für Wasser), jedoch nur eine Impuls- und Energiebilanz für die Mischung beschrieben werden. Das Wasser wird somit als Spurenkomponente behandelt, dessen Bewegung relativ zum Baryzentrum der Mischung durch Ficksche Diffusion beschrieben wird. Alternative Konzepte, die sich besser für polytherme Gletscher mit zum Teil sehr hohem Wassergehalt eignen, wie sie in den Alpen vorkommen, verwenden statt dessen zwei Impulsbilanzen mit einer Wechselwirkungskraft

vom Darcy-Typ, welche Relativbewegungen zwischen den beiden Konstituenten Eis und Wasser ermöglicht (Fowler [6], Hutter [15], Morland [20]).

Bevor die Feldgleichungen für temperiertes Eis formuliert werden können, müssen einige Mischungstheoretische Größen eingeführt werden. Die *baryzentrische Geschwindigkeit*  $\mathbf{v}$  ist definiert als

$$\mathbf{v} := \frac{1}{\rho}(\rho_i \mathbf{v}_i + \rho_w \mathbf{v}_w). \quad (3.10)$$

Die Indices  $i$  bzw.  $w$  beziehen sich auf die Komponenten Eis und Wasser,  $\rho_{i/w}$  bezeichnet die zugehörige *Partialdichte*. Der *Wassergehalt* wird als Massenkonzentration  $\omega$  eingeführt:

$$\omega := \frac{\rho_w}{\rho}. \quad (3.11)$$

Schließlich wird eine *diffusive Wasserstromdichte*  $\mathbf{j}$  definiert, welche den Wasserstrom relativ zur Bewegung des Baryzentrums beschreibt:

$$\mathbf{j} := \rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}) = \rho\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{v}). \quad (3.12)$$

Wie im Falle des kalten Eises soll auch für temperiertes Eis Dichtebeständigkeit, d. h., Konstanz der Mischungsdichte  $\rho$ , angenommen werden. Dies ist insofern problematisch, als sich die Dichten von Eis und Wasser deutlich unterscheiden (nach Paterson [25] variiert die Dichte von Gletschereis im Bereich von  $830 - 910 \text{ kg/m}^3$ , demgegenüber steht der Wert  $1000 \text{ kg/m}^3$  für Wasser bei Normaldruck); jedoch bewegen sich aufgrund des als gering angenommenen Wassergehaltes von weniger als 5% die durch Änderungen des Wassergehaltes der Mischung Eis plus Wasser bedingten relativen Dichteschwankungen im Bereich von maximal 1% und können somit vernachlässigt werden. Somit haben die *Massenbilanz der Mischung* und die *Impulsbilanz der Mischung* die gleiche Form wie für kaltes Eis; sie lauten

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.13)$$

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{T}^R + \rho \mathbf{g} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (3.14)$$

wobei der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  wiederum gemäß  $\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}^R$  aufgespalten wurde.

Bei der Formulierung der *Massenbilanz für den Wassergehalt* ist zu bedenken, daß die Partialdichte des Wassers  $\rho_w$  nicht konstant ist, sondern vom Wassergehalt abhängt, so daß die Bilanz in der allgemeinen Form (2.5) aufgestellt werden muß. Ferner ist der Wassergehalt aufgrund der Möglichkeit von Schmelz- und Gefrierprozessen keine Erhaltungsgröße; es ist daher erforderlich, einen Produktionsterm  $M$  zuzulassen:

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{v}_w) = M. \quad (3.15)$$

In äquivalenter Form kann dies als

$$\rho\dot{\omega} = -\operatorname{div} \mathbf{j} + M \quad (3.16)$$

geschrieben werden.

Wie im Falle des kalten Eises werden Konstitutivgleichungen benötigt (vgl. auch Hutter [15]):

$$\mathbf{D} = EA_t(\omega)f_t(\sigma)\mathbf{T}^R, \quad (3.17)$$

$$\dot{\epsilon} = L\dot{\omega} + c(T)\dot{T}_M, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{j} = -\nu \operatorname{grad} \omega, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{q} = -\kappa(T) \operatorname{grad} T_M. \quad (3.20)$$

Die erste Gleichung, die Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation, ist analog zu (3.4) für kaltes Eis, jedoch ist die Temperaturabhängigkeit des Rate-Faktors durch eine Abhängigkeit vom Wassergehalt (Funktion  $A_t(\omega)$ ) ersetzt. Die zweite Gleichung besagt, daß Änderungen der inneren Energie  $\epsilon$  via die latente Wärme  $L$  mit Änderungen des Wassergehaltes  $\omega$  und via die spezifische Wärme  $c$  mit Änderungen der aktuellen Schmelztemperatur zusammenhängen (thermodynamisch nur approximativ, vgl. Svendsen, Greve & Hutter [27]). Die dritte Gleichung ist das bereits erwähnte Ficksche Diffusionsgesetz für die diffusive Wasserstromdichte  $\mathbf{j}$ , wobei  $\nu$  die Diffusivität des Wassers im temperierten Eis bedeutet, und die letzte Gleichung ist schließlich das bereits bei kaltem Eis eingeführte Fouriersche Wärmeleitgesetz.  $L$  und  $\nu$  werden als konstant angenommen.

Im folgenden soll die *Energiebilanz der Mischung* formuliert werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß aufgrund von (3.18) die innere Energie  $\epsilon$  vom Wassergehalt  $\omega$  abhängt, so daß ein nichtverschwindender diffusiver Wasserstrom  $\mathbf{j}$  einen Fluß innerer Energie (latente Wärme) nach sich zieht. Somit folgt für den gesamten Wärmefluß  $\mathbf{q}_{\text{ges}}$  (vgl. Gleichung (2.11)):

$$\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q} + L\mathbf{j}. \quad (3.21)$$

Mit dieser modifizierten Form des Energieflusses folgt die Energiebilanz der Mischung zu

$$\rho\dot{\epsilon} = -\operatorname{div} (\mathbf{q} + L\mathbf{j}) + \operatorname{tr} (\mathbf{T}^R \cdot \mathbf{D}). \quad (3.22)$$

Setzt man die Konstitutivgleichungen (3.17) – (3.20) in die Massenbilanz für den Wassergehalt (3.16) und in die Energiebilanz (3.22) ein, so ergibt sich aus ersterer

$$\rho\dot{\omega} = \nu\nabla^2\omega + M \quad (3.23)$$

und aus letzterer

$$\rho L\dot{\omega} + \rho c\dot{T}_M = L\nu\nabla^2\omega + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} T_M) + 2EA_t(\omega)f_t(\sigma)\sigma^2. \quad (3.24)$$

Konsistenz dieser beiden Gleichungen liegt vor, wenn für die Wasserproduktion

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{L} \left( \text{tr}(\mathbf{T}^R \cdot \mathbf{D}) + \text{div}(\kappa \text{grad } T_M) - \rho c \dot{T}_M \right) \\ &= \frac{1}{L} \left( 2EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2 + \text{div}(\kappa \text{grad } T_M) - \rho c \dot{T}_M \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

erfüllt ist. Dieses Resultat ist physikalisch sinnvoll, denn es besagt, daß die Wärmedissipation  $\text{tr}(\mathbf{T}^R \cdot \mathbf{D})$  im wesentlichen zum Schmelzen von Eis zu Wasser aufgebraucht, also in latente Wärme umgesetzt wird; anderes ist aufgrund der (näherungsweise) konstanten Temperatur auch gar nicht möglich. Abweichungen entstehen lediglich durch die kleinen Temperaturvariationen aufgrund des Clausius-Clapeyron-Gradienten. In früheren Arbeiten, die den latenten Energiefluß (3.21) nicht in Betracht zogen (Fowler & Larson [7], Hutter [11]), mußte eine solche Gleichung als Konstitutivgesetz postuliert werden, und die Energiebilanz wurde ignoriert. Hutter [15] formuliert die Energiebilanz ohne (3.21) und zeigt, daß sie nur mit dem Modell konsistent ist, wenn  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{j}$  vernachlässigt werden. Mit dem erweiterten Energiefluß (3.21) werden diese Schwierigkeiten aufgelöst.

### 3.1.3 Lithosphäre

Da das Augenmerk dieser Arbeit auf der Modellierung von Eisschilden liegt, soll für den darunter befindlichen festen Felsgrund (Lithosphäre) nur ein ganz einfaches Modell verwendet werden, welches lediglich die für das Eisschild relevanten Vorgänge in der Lithosphäre erfaßt. Hierzu wird die Wärmeleitung und das Einsinken der Lithosphäre in die darunter befindliche viskose Asthenosphäre aufgrund des isostatischen Gleichgewichtes zwischen Eislast und Auftrieb herangezogen.

Die Temperaturgleichung erhält man ganz analog zum Vorgehen bei kaltem Eis aus der *Energiebilanz*; sie lautet (vgl. Gl. (3.8)):

$$\rho_r c_r \dot{T} = \kappa_r \nabla^2 T. \quad (3.26)$$

Der Index  $(\cdot)_r$  bezieht sich jeweils auf den Felsgrund, so daß  $\rho_r$ ,  $c_r$  und  $\kappa_r$  dessen Dichte, spezifische Wärme bzw. Wärmeleitfähigkeit bedeuten. Die beiden letzteren werden im Gegensatz zu den entsprechenden Werten für Eis als konstant angenommen. Weiterhin ist die Dissipationsleistung aufgrund möglicher Verzerrungen der Lithosphäre vernachlässigt; nur reine Wärmeleitungsprozesse sind berücksichtigt.

Für die Einsinktiefe  $\Delta b(x, y, t)$  der Lithosphäre in die darunter befindliche Asthenosphäre aufgrund der Eislast wird zunächst eine lokale Kräftebilanz zwischen Auftrieb und Eislast für eine vertikale Säule der Querschnittsfläche  $dA$  mit zugehöriger Eishöhe  $H = h - b$  aufgestellt (aufgrund dieser Vorstellung von in der Vertikalen gegeneinander frei beweglichen Säulen habe das lithosphärische Geschwindigkeitsfeld keine Horizontalkomponenten):

$$\rho_a g \Delta b dA = \rho g H dA, \quad (3.27)$$

$\rho_a$  ist die Dichte der Asthenosphäre. Ist  $z = b_0(x, y, t)$  die Gleichgewichtsposition der Felsgrund-Oberseite ohne Eislast, ergibt sich für selbige mit Eislast,  $b_{\text{Ggw}}$

$$b_{\text{Ggw}} = b_0 - \Delta b = b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H. \quad (3.28)$$

Aufgrund der Viskosität der Asthenosphäre stellt sich dieses Gleichgewicht nicht instantan, sondern mit einer bestimmten Verzögerungszeit  $\tau_V$  ein. Für die zeitliche Evolution der Felsgrund-Oberseite  $z = b(x, y, t)$  wird daher

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V}(b - b_{\text{Ggw}}) = -\frac{1}{\tau_V}[b - (b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H)] \quad (3.29)$$

angesetzt (Herterich [9]). Bei fester Eishöhe  $H$  entspricht dies einer exponentiellen Annäherung von  $b$  an den Gleichgewichtszustand.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß jede vertikale Säule der Lithosphäre starr ist (diese sich aber gegeneinander frei verschieben können) folgt, daß für das Geschwindigkeitsfeld in der Lithosphäre

$$\mathbf{v} = \frac{\partial b}{\partial t}(x, y, t) \mathbf{e}_z \quad (3.30)$$

( $\mathbf{e}_z$ : Einheitsvektor in  $z$ -Richtung) erfüllt ist.

## 3.2 Rand- und Übergangsbedingungen

### 3.2.1 Randbedingungen an der freien Oberfläche

Wie für jede singuläre Fläche läßt sich auch für die freie Oberfläche des Eisschildes (Grenze zwischen Eis und Atmosphäre) eine *kinematische Randbedingung* formulieren. Hierzu sei angenommen, daß die freie Oberfläche durch die implizite Darstellung  $F_s(\mathbf{x}, t) = 0$  gegeben sei (Abbildung 3.1); die positive Seite soll mit der Atmosphäre, die negative mit dem Eis identifiziert werden, so daß der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n} = \text{grad } F_s / \|\text{grad } F_s\|$  in die Atmosphäre hinein zeigt. Somit muß die der Bewegung der freien Oberfläche folgende zeitliche Ableitung von  $F_s$  verschwinden:

$$\frac{dF_s}{dt} = \frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \text{grad } F_s = 0, \quad (3.31)$$

$\mathbf{w}$  bedeutet die Geschwindigkeit der freien Oberfläche. Die Gleichung läßt sich mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n}$  und dem Volumenfluß durch die freie Oberfläche hindurch  $\mathbf{a}_s^\perp := (\mathbf{w} - \mathbf{v}^-) \cdot \mathbf{n}$  umschreiben zu

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \mathbf{v}^- \cdot \text{grad } F_s = -\|\text{grad } F_s\| \cdot \mathbf{a}_s^\perp. \quad (3.32)$$

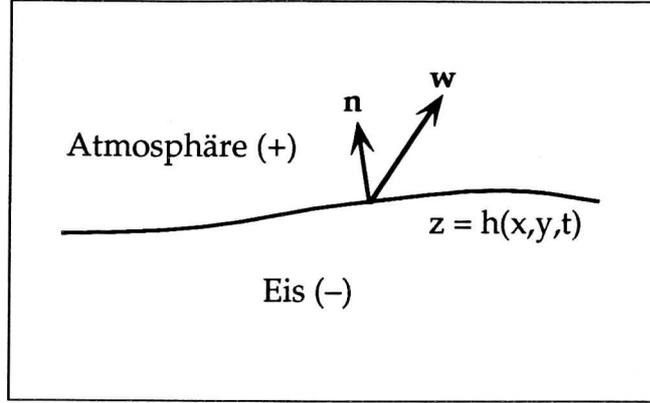


Abb. 3.1: Geometrie der freien Oberfläche.

Sei die freie Oberfläche in kartesischen Koordinaten durch  $z = h(x, y, t)$  gegeben, so ist  $F_s(\mathbf{x}, t) = z - h(x, y, t)$ , und es folgt

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x^- \frac{\partial h}{\partial x} + v_y^- \frac{\partial h}{\partial y} - v_z^- = \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_s^\perp. \quad (3.33)$$

Der Volumenfluß durch die freie Oberfläche  $a_s^\perp$  stellt die Akkumulations-Ablations-Funktion dar (positiv für Akkumulation); sie ist eine klimatische Input-Größe und setzt sich zusammen aus dem Schneefall auf das Eisschild minus dem von der Oberfläche wegschmelzenden Eis.

Aus der *Impulssprungbedingung* (2.9) folgt, abgesehen von dem extrem kleinen konvektiven Impulsfluß durch die freie Oberfläche, die Kontinuität des Spannungsvektors  $\mathbf{T}\mathbf{n}$ . Bei Vernachlässigung der aus dem atmosphärischen Druck  $p_{\text{atm}}$  und dem Windschub  $\boldsymbol{\sigma}_{\text{wind}}$  zusammengesetzten Spannung auf der Luftseite, welche klein gegenüber den im Eis auftretenden Spannungen ist, ergibt sich folglich

$$\mathbf{T}^- \mathbf{n} = \mathbf{T}^+ \mathbf{n} = -p_{\text{atm}} \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{wind}} \approx 0. \quad (3.34)$$

Schließlich wird eine Aussage über die thermodynamischen Größen an der freien Oberfläche benötigt. Für eine kalte freie Oberfläche (der Normalfall), bietet es sich an, hierzu die *Oberflächentemperatur* vorzuschreiben:

$$T^-(\mathbf{x}, t) = T_s(\mathbf{x}, t); \quad (3.35)$$

$T_s$  stellt also eine klimatische Input-Größe dar. Genau genommen verwendet man hierfür die Temperatur in 10 m Tiefe, wo die jahreszeitlichen Temperaturschwankungen, welche auf den für die Eisschilddynamik relevanten Zeitskalen irrelevant sind,

abgeklungen sind. Im Falle einer temperierten freien Oberfläche, welche eventuell in kleinen Bereichen nahe dem Rand des Eisschildes auftreten kann, muß statt dessen der Wassergehalt  $\omega$  oder alternativ dessen Normalableitung vorgeschrieben werden.

### 3.2.2 Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis

Aufgrund der unterschiedlichen Eigenschaften von kaltem und temperiertem Eis ist es für die Formulierung der Übergangsbedingungen zwischen Eisbasis und Felsgrund (Lithosphäre) notwendig, eine Fallunterscheidung zu machen, je nachdem ob an der Basis Schmelztemperatur erreicht wird (temperierte Basis) oder nicht (kalte Basis). Hier wird zunächst der Fall der kalten Basis betrachtet.

Der Felsgrund des Eisschildes sei als undurchlässige Basis angenommen, d. h., ein etwaiger Massenaustausch zwischen kaltem Eis und Fels an der Eisbasis wird nicht in Betracht gezogen. Er befinde sich bei  $z = b(x, y, t)$  (Abbildung 3.2); die positive Seite sei mit dem Felsgrund, die negative mit dem Eis identifiziert. Mit  $F_b(\mathbf{x}, t) = b(x, y, t) - z$  folgt die implizite Darstellung  $F_b(\mathbf{x}, t) = 0$ ; der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n} = \text{grad } F_b / \|\text{grad } F_b\|$  zeigt somit in den Felsgrund hinein, wie es der Wahl von positiver und negativer Seite entspricht. Diese Festlegungen sollen sowohl für eine kalte als auch für eine temperierte Basis gelten.

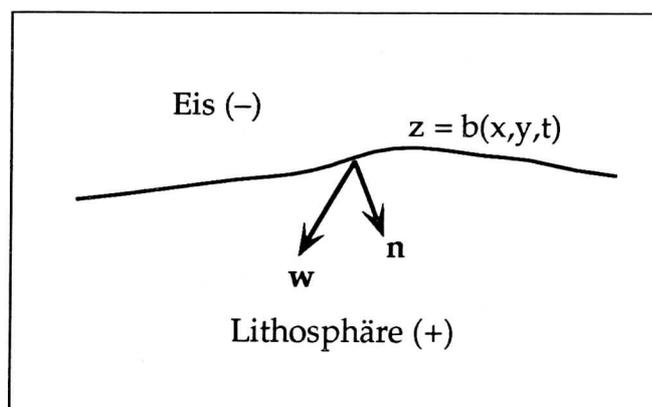


Abb. 3.2: Geometrie der Eisbasis.

Aufgrund der angenommenen Undurchlässigkeit gilt zunächst

$$(\mathbf{v}^+ - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{v}^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.36)$$

was die Massensprungbedingung automatisch erfüllt. Die *kinematische Bedingung* (vgl. Gleichung (3.32) für die freie Oberfläche) lautet somit

$$\frac{\partial F_b}{\partial t} + \mathbf{v}^- \cdot \text{grad } F_b = 0 \quad (3.37)$$

bzw.

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x^- \frac{\partial b}{\partial x} + v_y^- \frac{\partial b}{\partial y} - v_z^- = 0. \quad (3.38)$$

Weiterhin wird ein *Gleitgesetz* formuliert, welches die Gleitgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{sl}} := \mathbf{v}_{\parallel}^- - \mathbf{v}_{\parallel}^+$  (wobei  $\mathbf{v}_{\parallel}^{\pm} = \mathbf{v}^{\pm} - (\mathbf{v}^{\pm} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ ) des Eises parallel zur Felsgrundoberfläche in Beziehung setzt zur tangentialen basalen Spannung  $\mathbf{t}_{\parallel}^-$ :

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = -C(t_{\perp}^-, \dots) \mathbf{t}_{\parallel}^-, \quad (3.39)$$

mit  $t_{\perp}^- = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}$  und  $\mathbf{t}_{\parallel}^- = \mathbf{T}^- \mathbf{n} - t_{\perp}^- \mathbf{n}$ . Der Gleitkoeffizient  $C$  ist eine Funktion der normalen basalen Spannung  $t_{\perp}^-$  und eventuell weiterer Variablen wie z. B.  $\|\mathbf{t}_{\parallel}^-\|$  oder  $T$ . Häufig wird in Inlandeis- oder Gletschermodellen im Falle der kalten Basis  $C = 0$ , mit anderen Worten also Haften an der Basis angenommen.

Aus der *Impulssprungbedingung* (2.9) ergibt sich wegen der Undurchlässigkeit (3.36)

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]] = 0, \quad (3.40)$$

also die Kontinuität des Spannungsvektors.

Schließlich wird die *Energiesprungbedingung* benötigt. Aus (2.12) folgt unter Berücksichtigung der Undurchlässigkeit (3.36) und der Spannungsvektor-Kontinuität (3.40)

$$\kappa (\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) - \kappa_r (\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n}) = [[\mathbf{v}]] \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n} = -\mathbf{v}_{\text{sl}} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}. \quad (3.41)$$

Der Term auf der rechten Seite stellt die basale Reibungswärme dar, welche im Falle einer angenommenen Haftbedingung verschwindet. Die Temperatur selbst soll als stetig angenommen werden:

$$[[T]] = 0. \quad (3.42)$$

### 3.2.3 Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis

An dieser Stelle wird die temperierte Eisbasis betrachtet, d. h., die Temperatur erreicht am Übergang zwischen Eis und Felsgrund die Schmelztemperatur des Eises. Das Vorhandensein einer temperierten Basis bedeutet jedoch nicht notwendigerweise, daß an dieser Stelle auch eine Schicht nichtverschwindender Dicke aus temperiertem Eis vorhanden ist. Vielmehr besteht die Möglichkeit, daß das Temperaturgefälle in normaler Richtung in das Eis hinein dazu führt, daß bereits unmittelbar über der Eisbasis kaltes Eis vorhanden ist, auch wenn die Basis selbst temperiert ist. Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Beziehungen gelten sowohl für das Auftreten einer Schicht temperierten Eises über der temperierten Basis als auch für den Fall einer temperierten Basis ohne temperierte Eisschicht darüber.

Wie bereits erwähnt sollen die bei der Geometrie der kalten Eisbasis verwendeten Bezeichnungen für den hier betrachteten Fall der temperierten Basis übernommen

werden. Die Annahme der Undurchlässigkeit muß jedoch teilweise aufgegeben werden, da die Möglichkeit besteht, daß Wasser vom Boden aufgenommen wird.

Aus der *Massensprungbedingung für die Komponente Wasser* folgt

$$[[\rho\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}]] = \mathcal{P}_b^w, \quad (3.43)$$

wobei eine Wasser-Oberflächenproduktion  $\mathcal{P}_b^w$  eingeführt wurde, um das basale Schmelzen von Eis aufgrund des geothermen Wärmeflusses und der Reibungswärme durch Gleiten zu erfassen. Es soll nun  $\mathcal{P}_b^w = (\rho\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n})^+$  angenommen werden, d. h., die Oberflächenproduktion an Wasser soll vollständig vom Boden aufgenommen werden. Mit dieser Annahme folgt aus obiger Massensprungbedingung

$$(\mathbf{v}_w^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.44)$$

Die *Massensprungbedingung für die Komponente Eis* ergibt analog

$$[[\rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}]] = -\mathcal{P}_b^w. \quad (3.45)$$

Da der Felsgrund für Eis nach wie vor undurchlässig sein soll und somit in diesem kein Eis enthalten ist ( $\rho_i^+ = 0$ ), folgt weiter

$$(\mathbf{v}_i^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\mathcal{P}_b^w}{\rho_i^-} = \frac{\mathcal{P}_b^w}{\rho(1 - \omega^-)} \approx 0; \quad (3.46)$$

letzteres ist zu rechtfertigen, da eine Abschätzung von Werten für  $\mathcal{P}_b^w$  gemäß der bei der Betrachtung der Energiesprungbedingung unten hergeleiteten Formel lediglich eine Normalgeschwindigkeit  $(\mathbf{v}_i^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}$  von einigen Millimetern pro Jahr ergibt, was vernachlässigt werden kann (eine allgemeinere Betrachtung findet sich in Hutter [15]).

Die Gleichungen (3.44) und (3.46) sagen aus, daß die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten der beiden Konstituenten Eis und Wasser relativ zur Bewegung der Eisbasis, als singuläre Fläche aufgefaßt, verschwinden. Mithin gilt dies auch für die baryzentrische Geschwindigkeit:

$$(\mathbf{v}^- - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.47)$$

Dies besagt, daß (näherungsweise) kein Massenaustausch zwischen temperiertem Eis und Felsgrund stattfindet, mit anderen Worten also der oben angesetzte Wasserstrom  $\mathcal{P}_b^w = (\rho\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n})^+$  in den Felsgrund hinein nur eine vernachlässigbar kleine Rolle spielt. Somit gilt die *kinematische Bedingung* in der gleichen Form wie bei einer kalten Eisbasis (vgl. Gl. (3.38)):

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x^- \frac{\partial b}{\partial x} + v_y^- \frac{\partial b}{\partial y} - v_z^- = 0. \quad (3.48)$$

Weiterhin erhält man mit (3.44) und (3.47)

$$\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{grad } \omega^- \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.49)$$

also das Verschwinden des diffusiven Wasserflusses an der temperierten Basis.

Wie im Falle der kalten Basis wird ein *Gleitgesetz* angenommen:

$$\mathbf{v}_{\text{sl}} = -C_t(t_{\perp}^-, \dots) \mathbf{t}_{\parallel}^-, \quad (3.50)$$

mit  $\mathbf{v}_{\text{sl}} := \mathbf{v}_{\parallel}^- - \mathbf{v}_{\parallel}^+$  und  $t_{\perp}^- = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}$  und  $\mathbf{t}_{\parallel}^- = \mathbf{T}^- \mathbf{n} - t_{\perp}^- \mathbf{n}$  wie zuvor. Aufgrund der Möglichkeit, daß sich das im temperierten Eis befindliche Wasser als Schmierfilm zwischen Eis und Fels verhält, ist zu erwarten, daß  $C_t$  deutlich größere Werte als  $C$  (für kalte Basis) annimmt.

Aufgrund von (3.47) ist auch in diesem Fall der Spannungsvektor stetig (*Impulsprungbedingung*):

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]] = 0. \quad (3.51)$$

Unter Vernachlässigung der kinetischen Energie  $v^2/2$  folgt aus der *Energiesprungbedingung für die Mischung* (2.11)

$$[[\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}]] + L [[\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}]] - [[\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\mathbf{n}]] + [(\rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}) L\omega] = 0, \quad (3.52)$$

was wegen (3.49) vereinfacht werden kann zu

$$\kappa (\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) - \kappa_r (\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{v}_{\text{sl}} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n} + [\rho L\omega(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (3.53)$$

Aufgrund obiger Massensprungbedingung für den Wassergehalt (3.43) ist die verbleibende Sprungklammer gleich  $L\mathcal{P}_b^w$ , so daß folgt:

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{1}{L} (\kappa_r (\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n}) - \kappa (\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{v}_{\text{sl}} \cdot \mathbf{T}^- \mathbf{n}). \quad (3.54)$$

Dieses Ergebnis ist anschaulich klar; es besagt, daß die Wasserproduktion an der temperierten Basis resultiert aus den zuströmenden Wärmeflüssen vom Felsgrund und vom Eis sowie der durch basales Gleiten produzierten Reibungswärme. Wie bei der kalten Eisbasis soll die Temperatur selbst als stetig angenommen werden:

$$[[T]] = 0 \quad \Rightarrow \quad T^+ = T^- = T_M. \quad (3.55)$$

Dies führt also im Gegensatz zur kalten Eisbasis dazu, daß die Temperatur (bei als bekannt vorausgesetztem Druckfeld) festgelegt ist, so daß eine thermische Entkopplung zwischen Eis und Lithosphäre stattfindet.

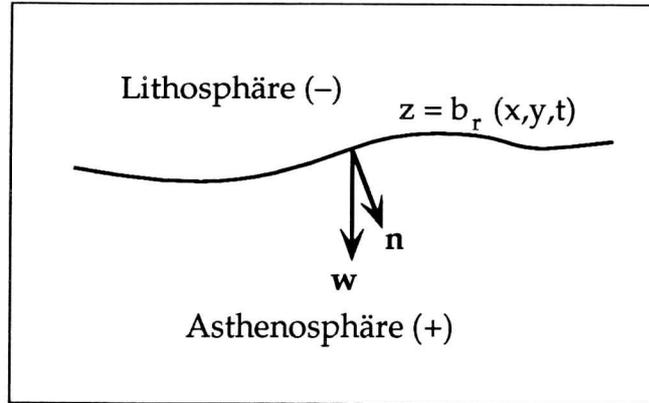


Abb. 3.3: Geometrie der Felsbasis.

### 3.2.4 Randbedingungen an der Felsgrundunterseite

Die Unterseite der modellierten Lithosphäre befindet sich in expliziter Darstellung bei  $z = b_r(x, y, t)$ ; implizit kann dies wie zuvor in die Form  $F_r(\mathbf{x}, t) := b_r(x, y, t) - z = 0$  gebracht werden. Die positive Seite sei die Asthenosphäre, die negative die Lithosphäre; der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n} = \text{grad } F_r / \|\text{grad } F_r\|$  zeigt somit in die Asthenosphäre hinein (vgl. Abbildung 3.3).

Im Rahmen des hier beschriebenen einfachen Lithosphärenmodells ist es lediglich vonnöten, an der Unterseite der Lithosphäre eine Randbedingung für die Temperatur vorzugeben. Hierzu wird der geotherme Wärmefluß  $Q_{\text{geoth}}^\perp := -\mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n}$  als Inputgröße herangezogen. Mit Hilfe des Fourierschen Wärmeleitgesetzes erhält man hieraus

$$\kappa_r (\text{grad } T^- \cdot \mathbf{n}) = Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (3.56)$$

Dies stellt eine Neumannsche Bedingung für die Temperatur dar.

### 3.2.5 Übergangsbedingungen an der CTS

Die CTS (cold-temperate transition surface) stellt die Phasengrenzfläche zwischen den kalten und temperierten Regionen eines Eisschildes dar und ist somit ebenso wie die obere und untere Begrenzungsfläche eine singuläre Fläche, an der Sprünge und Unstetigkeiten auftreten können. Ihre Geometrie ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Sie sei explizit durch  $z = z_m(x, y, t)$  und somit implizit durch  $F_m(\mathbf{x}, t) = 0$  ( $F_m(\mathbf{x}, t) := z - z_m(x, y, t)$ ) beschrieben; die positive Seite sei der kalte (obere), die negative der temperierte (untere) Bereich, so daß der Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{n} = \text{grad } F_m / \|\text{grad } F_m\|$  in das kalte Eis hinein zeigt.

Zunächst kann wie zuvor eine *kinematische Bedingung* formuliert werden. Es

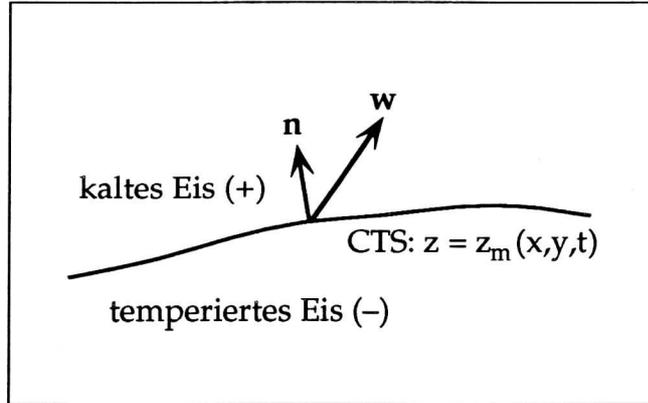


Abb. 3.4: Geometrie der CTS.

ergibt sich in Analogie zu (3.32) für die freie Oberfläche

$$\frac{\partial F_m}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } F_m = -\|\text{grad } F_m\| \cdot a_m^\perp, \quad (3.57)$$

woraus mit obiger Festlegung für  $F_m$

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_m}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_z = \left( 1 + \left( \frac{\partial z_m}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_m}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_m^\perp \quad (3.58)$$

folgt. In dieser Gleichung wurde der Volumenfluß durch die CTS  $a_m^\perp := (\mathbf{w} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$  eingeführt. Diese Vorzeichenwahl bewirkt, daß  $a_m^\perp$  für Schmelzbedingungen (Strömungsrichtung vom kalten in den temperierten Bereich) positiv und für Gefrierbedingungen (Strömungsrichtung vom temperierten in den kalten Bereich) negativ gezählt wird. Aufgrund der unten abgeleiteten Kontinuität von  $\mathbf{v}$  ist es nicht nötig, zwischen  $\mathbf{v}^+$  und  $\mathbf{v}^-$  zu unterscheiden. Im Gegensatz zu der Akkumulations-Ablations-Funktion  $a_s^\perp$  bei der freien Oberfläche ist  $a_m^\perp$  keine Input-Größe, da sie im Innern des Eisschildes wirkt.  $a_m^\perp$  muß folglich vom Modell berechnet werden.

*Generelle Eigenschaften von Phasengrenzflächen* in der Kontinuumsmechanik (vgl. Hutter [13]) sind die Kontinuität von Temperatur und Tangentialgeschwindigkeit:

$$[[T]] = 0, \quad [[\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}]] = \mathbf{0}. \quad (3.59)$$

Bei der Herleitung der Massenbilanz für temperiertes Eis wurde demonstriert, daß sich die Dichten von kaltem und temperiertem Eis um maximal 1% unterscheiden. Vernachlässigt man diesen geringen Unterschied, so besagt die *Massensprungbedingung* die Kontinuität auch der Normalgeschwindigkeit an der CTS,

$$[[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]] = 0, \quad (3.60)$$

so daß der gesamte Geschwindigkeitsvektor kontinuierlich ist:

$$[[\mathbf{v}]] = \mathbf{0}. \quad (3.61)$$

Hieraus und aus der *Impulssprungbedingung* (2.9) ergibt sich die Kontinuität des Cauchy'schen Spannungsvektors:

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]] = \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

Nun soll die *Massensprungbedingung für den Wassergehalt* betrachtet werden. Es ist hierbei zu berücksichtigen, daß an der CTS Schmelz- und Gefrierprozesse auftreten können, so daß ein Oberflächenproduktionsterm  $\mathcal{P}_m^w$  für die Komponente Wasser eingeführt werden muß (unten wird gezeigt, daß  $\mathcal{P}_m^w$  nur negativ oder Null sein kann, d. h., nur flächenhaftes Gefrieren, jedoch kein Schmelzen ist physikalisch möglich). Gl. (2.7) erweitert sich somit zu

$$[[\rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}]] = \mathcal{P}_m^w \quad (3.63)$$

oder äquivalent dazu mit der diffusiven Wasserstromdichte  $\mathbf{j}$  gemäß (3.12) (unter Berücksichtigung der Tatsache, daß auf der positiven (kalten) Seite der CTS kein Wasser vorhanden ist, so daß die Größen  $\omega^+$  und  $\mathbf{j}^+$  gleich Null sind):

$$-\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} + \rho a_m^\perp \omega^- = \mathcal{P}_m^w. \quad (3.64)$$

Dies läßt sich in eine anschaulichere Form bringen, indem statt der diffusiven Wasserstromdichte  $\mathbf{j}$  eine totale Wasserstromdichte  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  relativ zur CTS-Bewegung  $\mathbf{w}$  definiert wird,  $\mathbf{j}_{\text{tot}} := \rho_w(\mathbf{v}_w - \mathbf{w})$ ; hiermit schreibt sich obige Sprungbedingung als

$$-\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n} = \mathcal{P}_m^w \quad (3.65)$$

und besagt, daß die Normalkomponente der totalen Wasserstromdichte auf der temperierten Seite relativ zur CTS gleich der Oberflächenproduktion von Wasser ist, was unmittelbar einleuchtet.

Zur Formulierung der *Energiesprungbedingung* gemäß (2.12) muß wie für die Ableitung von (3.22) von dem erweiterten Energiefluß in der Form (3.21) für temperiertes Eis Gebrauch gemacht werden, so daß im kalten (positiven) Bereich  $\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q}$  und im temperierten (negativen) Bereich  $\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q} + L\mathbf{j}$  angesetzt wird. Unter Berücksichtigung von (3.18), (3.61) und (3.62) erhält man

$$\mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n} - L\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} = L\omega^- \rho(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} = -L\omega^- \rho a_m^\perp \quad (3.66)$$

bzw. mit dem Fourierschen Wärmeleitgesetz und der Definition von  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$

$$\kappa(\text{grad } T^+ - \text{grad } T_M^-) \cdot \mathbf{n} + L\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (3.67)$$

Da die homologe Temperatur  $T' = T - T_M$  auf der kalten Seite in normaler Richtung von der CTS weg nicht ansteigen kann (sonst müßte die Temperatur die Schmelztemperatur übersteigen), muß gelten:

$$\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} \leq \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n}. \quad (3.68)$$

Wegen (3.67) ist damit  $\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n} \geq 0$ , so daß in der Tat für die Wasser-Oberflächenproduktion  $\mathcal{P}_m^w$

$$\mathcal{P}_m^w \quad (= -\mathbf{j}_{\text{tot}}^- \cdot \mathbf{n}) \leq 0 \quad (3.69)$$

gilt; sie kann also nicht positiv sein.

Aufgrund dieser Nebenbedingung ist für jeden Punkt der CTS zwischen zwei Fällen zu unterscheiden, und zwar je nach dem Vorzeichen der Größe  $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_w^-) \cdot \mathbf{n} = a_m^\perp - \mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n} / (\rho\omega^-)$ :

i)  $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_w^-) \cdot \mathbf{n} > 0$  ("Schmelzbedingung"):

Aufgrund obiger Definition von  $\mathbf{j}_{\text{tot}}$  und  $\rho_w = \rho\omega$  kann (3.69) nur erfüllt sein, wenn

$$\omega^- = 0 \quad (3.70)$$

gilt; in (3.69) gilt dann das Gleichheitszeichen. Einsetzen in (3.67) zeigt, daß auch

$$\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} = \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n} \quad (3.71)$$

sein muß. Dies bedeutet, daß beim Auftreten von Schmelzbedingungen der Wassergehalt und die Normalableitung der Temperatur an der CTS stetig sind ( $\omega^+$  ist sowieso gleich Null, da auf der Kalteisseite der CTS nach der Definition von kaltem Eis kein Wasser vorhanden ist).

ii)  $(\mathbf{w} - \mathbf{v}_w^-) \cdot \mathbf{n} < 0$  ("Gefrierbedingung"):

In diesem Fall ist (3.69) mit

$$\omega^- \geq 0 \quad (3.72)$$

vereinbar, und somit kann auch (3.68) in seiner allgemeinen Form

$$\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} \leq \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n} \quad (3.73)$$

gelten. Beim Vorliegen von Gefrierbedingungen können folglich der Wassergehalt und die Normalableitung der Temperatur an der CTS unstetig sein; die Unstetigkeiten dieser beiden Größen sind über Gl. (3.67) verknüpft.

Anschaulich kann dies wie folgt verstanden werden: Erreicht ein nichtverschwindender totaler Wasserstrom  $\mathbf{j}_{\text{tot}}^-$  von der temperierten Seite her die CTS (Gefrierbedingung), so kann dieser auf der CTS ausgefrieren (negative Oberflächenproduktion von Wasser). Die hierbei freigesetzte latente Wärme kann dadurch abgeführt werden, daß die Normalableitung der Temperatur auf der Kalteisseite negativer als die

auf der temperierten Eisseite der CTS ist. Hiermit einher geht also ein Sprung der Normalableitung der Temperatur und (weil sich im kalten Eis kein Wasser befindet) auch des Wassergehaltes.

Die umgekehrte Situation kann jedoch nicht auftreten; es ist unmöglich, daß kaltes Eis auf die CTS zu fließt, zum Teil auf der CTS schmilzt (positive Oberflächenproduktion von Wasser) und so schon direkt an der CTS einen nichtverschwindenden Wasserstrom in den temperierten Bereich hinein produziert. Der Grund dafür liegt darin, daß die hierzu notwendige Schmelzwärme nicht zur CTS hin transportiert werden kann, denn dazu müßte die Normalableitung der Temperatur auf der Kalteisseite positiver als die auf der temperierten Eisseite sein, was aber nicht möglich ist, da dann die Temperatur auf der Kalteisseite den Schmelzpunkt von Eis übersteigen würde. Ein Eisfluß vom kalten in den temperierten Bereich (Schmelzbedingung) ist nur möglich ohne Oberflächenschmelzen beim Durchgang durch die CTS, so daß in diesem Fall  $\omega^- = 0$  und  $\text{grad } T^+ \cdot \mathbf{n} = \text{grad } T_M^- \cdot \mathbf{n}$  gilt; in anderen Worten sind dann Wassergehalt und Temperaturgradient stetig.

Es sei noch erwähnt, daß im Falle eines vernachlässigbaren diffusiven Wasserstromes  $\mathbf{j}$  im temperierten Eis, mit anderen Worten also einer sehr kleinen Wasserdiffusivität  $\nu$ , die Unterscheidung zwischen Schmelz- und Gefrierbedingungen einfach anhand des Vorzeichens des Eisstromes durch die CTS hindurch ( $a_m^\perp$ ) getroffen werden kann, da in diesem Fall  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_w$  gilt.  $a_m^\perp > 0$  (Eisstrom vom kalten in das temperierte Eis gerichtet) entspricht dann der Schmelzbedingung,  $a_m^\perp < 0$  (Eisstrom vom temperierten in das kalte Eis gerichtet) der Gefrierbedingung, was auch unmittelbar einleuchtet.

Abschließend soll die *Entropie-Sprungbedingung* kurz untersucht werden (für eine ausführliche Behandlung siehe Svendsen, Greve & Hutter [27]). Der Entropiefluß wird üblicherweise als  $\phi^\eta = \mathbf{q}/T$  angesetzt, jedoch kann dies nur für kaltes Eis Gültigkeit besitzen; bei temperiertem Eis muß im Hinblick auf die latente Wärmestromdichte  $L\mathbf{j}$  (Gl. (3.21)) für den Entropiefluß  $\phi^\eta = \mathbf{q} + L\mathbf{j}/T$  gelten. Aus (2.14) ergibt sich hiermit

$$\frac{\mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{n}}{T} - \frac{\mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n}}{T} - L \frac{\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n}}{T} - \rho a_m^\perp [\eta] = 0. \quad (3.74)$$

Mit der Beziehung  $T[\eta] = L[\omega]$  für die spezifische Entropie  $\eta$  folgt

$$\frac{1}{T}(\mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{n} - \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n} - L\mathbf{j}^- \cdot \mathbf{n}) = -\frac{L}{T}\omega^- \rho a_m^\perp; \quad (3.75)$$

dies ist bis auf den konstanten Faktor  $1/T$  identisch mit der Energiesprungbedingung (3.66).

## 4 Planparallele, geneigte Eisplatte

### 4.1 Anwendung des Modells

In diesem Kapitel soll eine erste Anwendung des im vorigen Kapitel vorgestellten polythermen Eismodells gegeben werden. Wir betrachten hierzu eine zweidimensionale, in  $x$ -Richtung unendlich ausgedehnte und geneigte polytherme Eisplatte mit parallelen Seiten ("Slab"), dessen Eis hangabwärts fließe, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Numerische Lösungen für eine solche Geometrie wurden bereits von Hutter, Blatter & Funk [16] und Blatter [3] konstruiert, jedoch wird hier ein etwas anderer Weg beschritten, der sogar weitgehend analytische Lösungen ermöglicht.

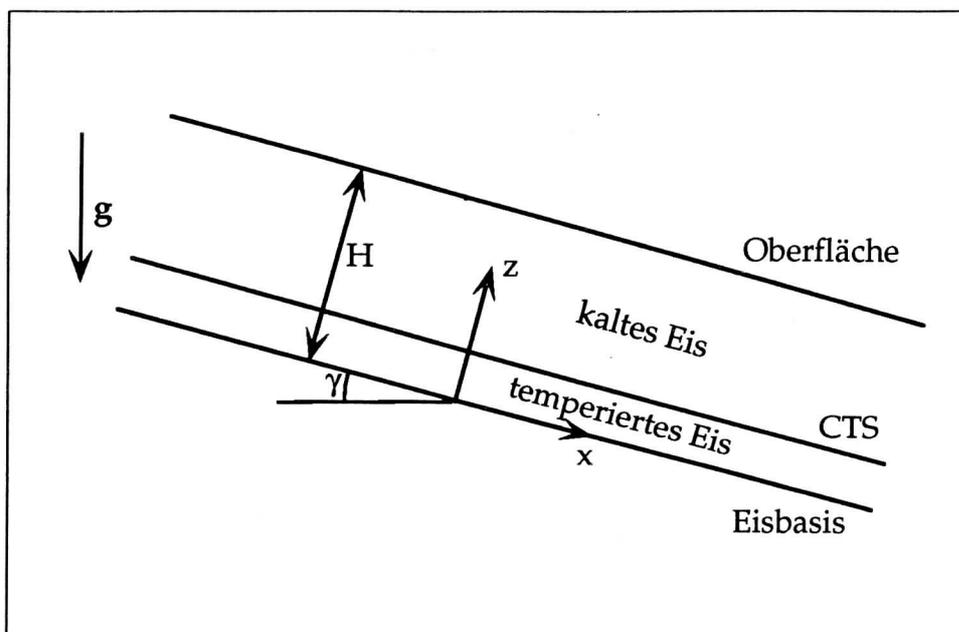


Abb. 4.1: Skizze einer planparallelen, geneigten, polythermen Eisplatte.

Folgende Annahmen sollen getroffen werden:

- Konstanter Neigungswinkel  $\gamma$  und Uniformität der Prozesse in  $x$ -Richtung:  $(\partial/\partial x)(\cdot) = 0$ .
- Stationarität der Prozesse:  $(\partial/\partial t)(\cdot) = 0$ .
- Glensches Fließgesetz (vgl. Paterson [25]):  $f(\sigma) = f_t(\sigma) = \sigma^{n-1}$  (mit  $n = 3$ ).

- Eisfluidität unabhängig von Temperatur und Wassergehalt:  
 $EA(T') = EA_t(\omega) \equiv A = 5.3 \cdot 10^{-24} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}$   
(Wert für  $T' = 0^\circ\text{C}$  und  $E = 1$ , siehe Paterson [25]).  
 $\rho = 910 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\kappa = 2.1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $c = 2009 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ,  $L = 335 \text{ kJ kg}^{-1}$ ,  
~~Temperaturunabhängige spezifische Wärme  $c$  und Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$ .~~  
 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  (vgl. auch § 5.5)
- Vernachlässigung der Druckabhängigkeit des Schmelzpunktes von Eis:  
 $T_M = 0^\circ\text{C}$ .
- Vernachlässigung der Wasserdiffusion:  $\nu = 0 \Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{0}$ .
- Vernachlässigung von lithosphärischen Einflüssen: kein Einsinken in die Asthenosphäre, keine Berechnung der Temperatur.

Mit diesen Annahmen lauten die Modellgleichungen wie folgt:

*Massenbilanz kalter und temperierter Bereich* (aus Gln. (3.1), (3.13)):

$$\frac{dv_z}{dz} = 0. \quad (4.1)$$

*Impulsbilanz kalter und temperierter Bereich* (aus Gln. (3.3), (3.14) mit vernachlässigter Beschleunigung):

$$\frac{d\sigma_{xz}}{dz} + \rho g \sin \gamma = 0, \quad (4.2)$$

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{d\sigma_z^R}{dz} - \rho g \cos \gamma = 0. \quad (4.3)$$

*Energiebilanz kalter Bereich* (aus Gl. (3.8)):

$$\rho c v_z \frac{dT}{dz} = \kappa \frac{d^2 T}{dz^2} + 2A \sigma^4. \quad (4.4)$$

*Energiebilanz temperierter Bereich bzw. Massenbilanz für den Wassergehalt* (aus Gln. (3.23), (3.24)):

$$\rho v_z \frac{d\omega}{dz} = 2 \frac{A}{L} \sigma^4. \quad (4.5)$$

*Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation kalter und temperierter Bereich* (aus Gln. (3.4), (3.17)):

$$\sigma_x^R = 0, \quad (4.6)$$

$$\sigma_z^R = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{dv_x}{dz} = 2A \sigma^2 \sigma_{xz}; \quad (4.8)$$

hieraus ergibt sich mit der Definition der effektiven Schubspannung  $\sigma := \sqrt{\text{tr}(\mathbf{T}^R)^2/2}$  diese zu  $\sigma = \sigma_{xz}$ .

*Randbedingungen auf der kalten freien Oberfläche* (aus Gln. (3.33), (3.34), (3.35)):

$$v_z = -a_s^\perp, \quad (4.9)$$

$$\sigma = \sigma_{xz} = 0, \quad (4.10)$$

$$-p + \sigma_z^R = -p = 0, \quad (4.11)$$

$$T = T_s. \quad (4.12)$$

*Randbedingungen auf der temperierten Basis:*

Aufgrund der Gleichungen (4.1) und (4.9) ist die Vertikalgeschwindigkeit  $v_z$  auf der gesamten Höhe des Slabs gleich der negativen Akkumulations-Ablations-Funktion  $a_s^\perp$ . Insbesondere nimmt  $v_z$  also auch an der Basis diesen Wert an, was im allgemeinen im Widerspruch zu der kinematischen Bedingung (3.48) steht, die für das Slab-Problem das Verschwinden des basalen  $v_z$  fordert. Diese Randbedingung ist also für  $a_s^\perp \neq 0$  nicht erfüllbar<sup>3</sup>. Der Grund dafür liegt darin, daß die einfache Slab-Geometrie es nicht zuläßt, daß eine Massenzufuhr bzw. -abfuhr an der Oberfläche durch Advektion an der Begrenzung des Eisschildes bilanziert wird, denn der Slab hat ja im Gegensatz zu einem realen Eisschild gar keine seitliche Begrenzung. Mithin kann beim Slab-Problem die oberflächliche Massenzufuhr bzw. -abfuhr nur an der Basis bilanziert werden; Gleichung (3.48) kann somit nicht aufrecht erhalten werden. Stellt man sich den Slab nicht als unabhängige, auf dem Boden aufliegende Eisplatte, sondern als schmalen Ausschnitt aus einem größeren polythermen Eisschild in der unmittelbaren Umgebung der CTS vor, so ist die Verletzung von (3.48) tolerierbar.

Randbedingung (3.49), welche das Verschwinden der Normalkomponente der diffusiven Wasserstromdichte zum Ausdruck bringt, ist für unser Slab-Problem nicht erforderlich, da die Wasserdiffusion sowieso vernachlässigt wird. Somit verbleibt das Gleitgesetz (3.50), um eine Randbedingung für die basale Tangentialgeschwindigkeit  $v_{x,b}$  zu erhalten. Der Einfachheit halber soll jedoch auf die explizite Angabe eines Gleitgesetzes verzichtet werden; statt dessen wird  $v_{x,b}$  selbst vorgeschrieben. Die einzige Auswirkung des Wertes von  $v_{x,b}$  auf die Resultate besteht ohnehin darin, daß sich  $v_x$  als Funktion der Höhe  $z$  um eine additive Konstante ändert; das Verhalten der Temperatur und des Wassergehaltes wird nicht beeinflusst.

*Übergangsbedingungen auf der CTS* (aus Gl. (3.59), (3.61), (3.62), (3.66), (3.68)):

$$T^+ = T^-, \quad (4.13)$$

$$v_x^+ = v_x^-, \quad v_z^+ = v_z^-, \quad (4.14)$$

---

<sup>3</sup>Der Fall  $a_s^\perp = 0$  würde zwar (3.48) erfüllen, läßt aber gar keinen stationären Zustand zu, da dann in (4.5) die linke Seite verschwindet, die rechte Seite aber wegen der unten hergeleiteten Beziehung (4.19) größer als Null ist.

$$p^+ = p^-, \quad \sigma_{(xz)}^+ = \sigma_{(xz)}^-, \quad (4.15)$$

$$\kappa \frac{dT^+}{dz} = L\omega^- \rho a_m^\perp \quad \text{mit} \quad \frac{dT^+}{dz} \leq 0. \quad (4.16)$$

Die Nebenbedingung in letzterer Gleichung bewirkt, daß zwei verschiedene Fälle unterschieden werden müssen (vgl. Diskussion in §3.2.5):

- $a_m^\perp > 0$  (“Schmelzbedingung”, Eisfluß vom kalten in den temperierten Bereich):  $dT^+/dz = 0$ ,  $\omega^- = 0$ .
- $a_m^\perp < 0$  (“Gefrierbedingung”, Eisfluß vom temperierten in den kalten Bereich): Gleichung (4.16) in ihrer nichttrivialen Form, d. h.,  $dT^+/dz$  kann strikt negativ und  $\omega^-$  strikt positiv sein; in diesem Fall ist eine zusätzliche Randbedingung für den basalen Wassergehalt vonnöten.

## 4.2 Integration der Slab-Gleichungen

Die oben hergeleiteten Gleichungen, welche aus der Anwendung des polythermen Eismodells aus Kapitel 3 auf das spezielle Slab-Problem hervorgegangen sind, können fast vollständig analytisch integriert werden. Lediglich für die Position  $z = z_m$  der CTS verbleibt eine nichtlineare algebraische Gleichung, welche aber leicht mit Hilfe des Newton-Verfahrens zur Nullstellenbestimmung gelöst werden kann. Dies soll im folgenden durchgeführt werden.

Integration von (4.2) und (4.3) ergibt unter Berücksichtigung von (4.7), (4.10), (4.11) und (4.15)

$$p(z) = \rho g \cos \gamma (H - z), \quad (4.17)$$

$$\sigma_{xz}(z) = \rho g \sin \gamma (H - z) \quad (4.18)$$

und somit

$$\sigma = \sigma_{xz} = \rho g \sin \gamma (H - z). \quad (4.19)$$

Der Druck verhält sich offensichtlich rein hydrostatisch.

Das Geschwindigkeitsfeld ergibt sich mit Hilfe dieses Ergebnisses aus (4.1), (4.8), (4.9), (4.14) sowie vorgeschriebenem  $v_{x,b}$  zu

$$v_x(z) = \frac{A}{2} (\rho g \sin \gamma)^3 [H^4 - (H - z)^4] + v_{x,b}, \quad (4.20)$$

$$v_z(z) = \text{const} = -a_s^\perp = -a_m^\perp. \quad (4.21)$$

Die horizontale Geschwindigkeit  $v_x$  steigt monoton von ihrem minimalen Wert  $v_{x,b}$  an der Basis zu einem maximalen Wert an der freien Oberfläche an, wie man es von einer Scherströmung mit freier Oberfläche erwartet. Die vertikale Geschwindigkeit  $v_z$  ist, wie oben bereits bemerkt wurde, über die Höhe hinweg konstant. Sie bilanziert

an der freien Oberfläche die Akkumulations-Ablations-Funktion  $a_s^\perp$ , und an der CTS entspricht sie dem (negativen) Volumenfluß  $a_m^\perp$  durch die CTS hindurch.

Die Lösung der Gleichungen (4.4) und (4.5) für den Temperatur- und Wassergehalt im kalten bzw. temperierten Bereich sowie die damit verbundene Bestimmung der CTS-Position erfordert einen ziemlich großen Rechenaufwand. Zunächst wird Gleichung (4.19) für  $\sigma$  und (4.21) für  $v_z$  eingesetzt; dies ergibt

$$\kappa \frac{d^2 T}{dz^2} + \rho c a_s^\perp \frac{dT}{dz} = -2A (\rho g \sin \gamma)^4 (H - z)^4 \quad (4.22)$$

und

$$\rho a_s^\perp \frac{d\omega}{dz} = -2 \frac{A}{L} (\rho g \sin \gamma)^4 (H - z)^4. \quad (4.23)$$

Zwecks einfacherer Rechnung wird nun die vertikale Koordinate  $z$  mit der Transformation  $z = H\zeta$  auf das Intervall  $[0,1]$  abgebildet. Man erhält so

$$D \frac{d^2 T}{d\zeta^2} + M \frac{dT}{d\zeta} = -K(1 - \zeta)^4 \quad (4.24)$$

und

$$M \frac{d\omega}{d\zeta} = -K_t(1 - \zeta)^4 \quad (4.25)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} D &= \frac{\kappa}{\rho c}, \\ M &= H a_s^\perp, \\ K &= \frac{2A}{\rho c} H^6 (\rho g \sin \gamma)^4, \\ K_t &= \frac{2A}{\rho L} H^6 (\rho g \sin \gamma)^4. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Zuerst soll die Temperaturgleichung (4.24) betrachtet werden. Zunächst muß die homogene Gleichung gelöst werden; mit dem Ansatz  $T \sim \exp(\lambda\zeta)$  ergibt sich

$$D\lambda^2 + M\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{M}{D}. \quad (4.27)$$

Ein Partikularintegral der inhomogenen Gleichung muß in der Form

$$T_p = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5 \quad (4.28)$$

existieren; die Koeffizienten  $a_1$  bis  $a_5$  erhält man durch Einsetzen hiervon in die Temperaturgleichung (4.24) und nachfolgenden Koeffizientenvergleich der Terme von der Ordnung  $[\zeta^0]$  bis  $[\zeta^4]$ . Dies liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \zeta^0 : \quad & 2Da_2 + Ma_1 = -K, \\ \zeta^1 : \quad & 6Da_3 + 2Ma_2 = 4K, \\ \zeta^2 : \quad & 12Da_4 + 3Ma_3 = -6K, \\ \zeta^3 : \quad & 20Da_5 + 4Ma_4 = 4K, \\ \zeta^4 : \quad & 5Ma_5 = -K; \end{aligned} \quad (4.29)$$

es hat die Lösung

$$\begin{aligned}
a_5 &= -\frac{K}{5M}, \\
a_4 &= \frac{K}{M} + \frac{DK}{M^2}, \\
a_3 &= -2\frac{K}{M} - 4\frac{DK}{M^2} - 4\frac{D^2K}{M^3}, \\
a_2 &= 2\frac{K}{M} + 6\frac{DK}{M^2} + 12\frac{D^2K}{M^3} + 12\frac{D^3K}{M^4}, \\
a_1 &= -\frac{K}{M} - 4\frac{DK}{M^2} - 12\frac{D^2K}{M^3} - 24\frac{D^3K}{M^4} - 24\frac{D^4K}{M^5}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Mit den obigen Ergebnissen lautet die allgemeine Lösung der Temperaturgleichung (4.24)

$$T = c_1 e^{-(M/D)\zeta} + c_2 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5. \tag{4.31}$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  sind noch unbestimmt und müssen mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen ermittelt werden.

Zuvor soll jedoch die Wassergehaltsgleichung (4.25) betrachtet werden. Sie läßt sich direkt integrieren:

$$\omega = \frac{K_t}{5M}(1 - \zeta)^5 + c_3, \tag{4.32}$$

mit der ebenfalls zunächst unbestimmten Integrationskonstante  $c_3$ .

Der letzte Schritt zur vollständigen Lösung des Slab-Problems besteht in der Ermittlung der Integrationskonstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  sowie der noch unbekanntes CTS-Position  $\zeta_m$ . Dies muß für den Fall einer vorliegenden Schmelzbedingung ( $a_m^\perp > 0$ ) bzw. Gefrierbedingung ( $a_m^\perp < 0$ ) getrennt durchgeführt werden.

#### Slab mit Schmelzbedingung:

Die Schmelzbedingung liegt vor, wenn  $a_m^\perp > 0$  ist; nach (4.21) bedeutet dies eine negative Vertikalgeschwindigkeit, d. h., das Eis fließt von der freien Oberfläche zur Basis. In diesem Fall haben wir (siehe Gln. (4.12), (4.13) und (4.16) mit nachfolgender Diskussion)

$$T(1) = T_s, \tag{4.33}$$

$$T^+(\zeta_m) = 0, \tag{4.34}$$

$$(dT^+/d\zeta)_{\zeta_m} = 0, \tag{4.35}$$

$$\omega^-(\zeta_m) = 0. \tag{4.36}$$

Einsetzen der ersten drei dieser Gleichungen in die allgemeine Lösung der Temperaturgleichung (4.31) ergibt

$$T_s = c_1 e^{-(M/D)} + c_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \tag{4.37}$$

$$0 = c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} + c_2 + a_1\zeta_m + a_2\zeta_m^2 + a_3\zeta_m^3 + a_4\zeta_m^4 + a_5\zeta_m^5, \quad (4.38)$$

$$0 = -\frac{M}{D}c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} + a_1 + 2a_2\zeta_m + 3a_3\zeta_m^2 + 4a_4\zeta_m^3 + 5a_5\zeta_m^4; \quad (4.39)$$

dies sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $\zeta_m$ . Die Vorgehensweise ist nun die folgende: Durch Berechnen der Differenz [(4.37) minus (4.38)] wird  $c_2$  eliminiert. Dann wird (4.39) nach  $c_1$  aufgelöst und das Ergebnis in [(4.37) minus (4.38)] eingesetzt. Man erhält so eine nichtlineare algebraische Gleichung, die nur noch die CTS-Position  $\zeta_m$  enthält:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{M}(1 - e^{(M/D)(\zeta_m-1)})(a_1 + 2a_2\zeta_m + 3a_3\zeta_m^2 + 4a_4\zeta_m^3 + 5a_5\zeta_m^4) + T_s \\ &\quad + a_1(\zeta_m - 1) + a_2(\zeta_m^2 - 1) + a_3(\zeta_m^3 - 1) + a_4(\zeta_m^4 - 1) + a_5(\zeta_m^5 - 1) \\ &=: f(\zeta_m). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Trotz ihrer Komplexität kann diese Gleichung leicht mit dem Newton-Verfahren ( $\zeta_m^{(0)}$  als Startwert gegeben,  $\zeta_m^{(n+1)} = \zeta_m^{(n)} - f(\zeta_m^{(n)})/f'(\zeta_m^{(n)})$ ) gelöst werden; man erhält so das gesuchte  $\zeta_m$ . Wie bereits erwähnt ist dies der einzige Punkt in der Rechnung, der numerisch erledigt werden muß. Mit dem nun bekannten  $\zeta_m$  ergibt sich  $c_1$  aus Gl. (4.39) und anschließend  $c_2$  aus Gl. (4.37). Die Temperatur im kalten Bereich, welche sich gemäß (4.31) als

$$T = c_1 e^{-(M/D)\zeta} + c_2 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5 \quad (4.41)$$

darstellt, ist somit vollständig bestimmt.

Die noch nicht ausgenutzte vierte Randbedingung (4.36) ergibt durch Einsetzen in die allgemeine Lösung der Wassergehaltsgleichung (4.32) das noch fehlende  $c_3$ :

$$c_3 = -\frac{K_t}{5M}(1 - \zeta_m)^5, \quad (4.42)$$

so daß für den Wassergehalt schließlich gilt:

$$\omega = \frac{K_t}{5M}[(1 - \zeta)^5 - (1 - \zeta_m)^5]. \quad (4.43)$$

#### Slab mit Gefrierbedingung:

In diesem Fall gilt  $a_m^\perp < 0$ , also liegt nach (4.21) eine positive Vertikalgeschwindigkeit vor. Die Stromlinien des Eisflusses verlaufen folglich von der Basis weg in Richtung auf die freie Oberfläche. Es kommen andere Randbedingungen als bei vorliegender Schmelzbedingung zum Tragen (siehe Gln. (4.12), (4.13) und (4.16) mit nachfolgender Diskussion):

$$T(1) = T_s, \quad (4.44)$$

$$T^+(\zeta_m) = 0, \quad (4.45)$$

$$\frac{\kappa}{H} \frac{dT^+}{d\zeta} = L\omega^- \rho a_m^\perp, \quad (4.46)$$

$$\omega(0) = 0. \quad (4.47)$$

Es ist hier sinnvoll, sich zuerst der Bestimmung von  $c_3$  zuzuwenden. Einsetzen der letzten Bedingung in die allgemeine Wassergehaltslösung (4.32) ergibt

$$c_3 = -\frac{K_t}{5M}, \quad (4.48)$$

so daß gilt:

$$\omega = \frac{K_t}{5M} [(1 - \zeta)^5 - 1]. \quad (4.49)$$

Für die weitere Rechnung wird der Wassergehalt an der CTS benötigt; er kann direkt aus diesem Ergebnis erhalten werden:

$$\omega^- = \omega(\zeta_m) = \frac{K_t}{5M} [(1 - \zeta_m)^5 - 1]; \quad (4.50)$$

$\zeta_m$  ist jedoch noch unbestimmt. Hiermit ergibt Gl. (4.46)

$$\begin{aligned} \frac{dT^+}{d\zeta} &= \frac{H}{\kappa} L \rho a_m^\perp \frac{K_t}{5M} [(1 - \zeta_m)^5 - 1] \\ &= \frac{L \rho K_t}{5\kappa} [(1 - \zeta_m)^5 - 1], \quad \text{weil } M = H a_s^\perp = H a_m^\perp. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Einsetzen der Bedingungen (4.44), (4.45) und (4.51) in die allgemeine Lösung der Temperaturgleichung (4.31) ergibt wie im Fall der Schmelzbedingungen drei Gleichungen für die unbekanntes  $c_1$ ,  $c_2$  und  $\zeta_m$ :

$$T_s = c_1 e^{-(M/D)} + c_2 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5, \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} + c_2 \\ &\quad + a_1 \zeta_m + a_2 \zeta_m^2 + a_3 \zeta_m^3 + a_4 \zeta_m^4 + a_5 \zeta_m^5, \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \frac{L \rho K_t}{5\kappa} [(1 - \zeta_m)^5 - 1] &= -\frac{M}{D} c_1 e^{-(M/D)\zeta_m} \\ &\quad + a_1 + 2a_2 \zeta_m + 3a_3 \zeta_m^2 + 4a_4 \zeta_m^3 + 5a_5 \zeta_m^4. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ganz analog zur Vorgehensweise bei den Schmelzbedingungen wird zuerst durch Berechnung von [(4.52) minus (4.53)]  $c_2$  eliminiert. Dann wird (4.54) nach  $c_1$  aufgelöst und das Resultat in [(4.52) minus (4.53)] eingesetzt, was wiederum eine nichtlineare Gleichung zur Berechnung von  $\zeta_m$  ergibt:

$$0 = \frac{D}{M} (1 - e^{(M/D)(\zeta_m-1)}) (a_1 + 2a_2 \zeta_m + 3a_3 \zeta_m^2 + 4a_4 \zeta_m^3 + 5a_5 \zeta_m^4)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{L\rho K_t}{5\kappa}[(1 - \zeta_m)^5 - 1] + T_s \\
& + a_1(\zeta_m - 1) + a_2(\zeta_m^2 - 1) + a_3(\zeta_m^3 - 1) + a_4(\zeta_m^4 - 1) + a_5(\zeta_m^5 - 1) \\
=: & g(\zeta_m). \tag{4.55}
\end{aligned}$$

Nach dem Lösen dieser Gleichung mit dem Newton-Verfahren erhält man  $c_1$  aus (4.54) und anschließend  $c_2$  aus (4.52). Hiermit ist dann die Temperatur nach Gleichung (4.31) vollständig bestimmt:

$$T = c_1 e^{-(M/D)\zeta} + c_2 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + a_5\zeta^5. \tag{4.56}$$

### 4.3 Ergebnisse

Nachdem im letzten Abschnitt die weitgehend analytische Lösung des Slab-Problems sowohl für Schmelzbedingungen als auch für Gefrierbedingungen demonstriert wurde, sollen an dieser Stelle zwei solche Lösungen, eine mit Schmelzbedingung und eine mit Gefrierbedingung, explizit präsentiert werden. Die Rechnung mit Schmelzbedingung wurde durchgeführt mit einer Höhe  $H = 200$  m, einem Neigungswinkel  $\gamma = 4^\circ$ , einer Oberflächentemperatur  $T_s = -3^\circ\text{C}$ , einer Akkumulations-Ablations-Funktion  $a_s^\perp = 0.2 \text{ m a}^{-1}$  (d. h.,  $a_m^\perp = 0.2 \text{ m a}^{-1}$  und  $v_z \equiv -0.2 \text{ m a}^{-1}$ ) und einer basalen Horizontalgeschwindigkeit  $v_{x,b} = 5 \text{ m a}^{-1}$  (siehe Abbildung 4.2), und in der Rechnung mit Gefrierbedingung wurde  $H = 200$  m,  $\gamma = 4^\circ$ ,  $T_s = -10^\circ\text{C}$ ,  $a_s^\perp = -0.2 \text{ m a}^{-1}$  (d. h.,  $a_m^\perp = -0.2 \text{ m a}^{-1}$  und  $v_z \equiv 0.2 \text{ m a}^{-1}$ ) und  $v_{x,b} = 5 \text{ m a}^{-1}$  verwendet (siehe Abbildung 4.3). In den zugehörigen Bildern ist jeweils in Plot (a) die horizontale Geschwindigkeit  $v_x$  als Funktion der Höhe  $z$  und in Plot (b) die Temperatur  $T$  im kalten Bereich sowie der Wassergehalt  $\omega$  im temperierten Bereich als Funktion der Höhe  $z$  aufgetragen. Das Verhalten der Horizontalgeschwindigkeit ist in beiden Fällen identisch; diese steigt von ihrem minimalen Wert am Boden ausgehend monoton mit wachsender Höhe an, wie es typisch für eine solche Scherströmung ist. Dahingegen ist das Verhalten der Temperatur und des Wassergehaltes grundverschieden: Im Falle der Schmelzbedingung (Abbildung 4.2) sieht man, daß der Temperaturgradient  $dT^+/dz$  auf der kalten Seite der CTS und der Wassergehalt  $\omega^-$  auf der temperierten Seite der CTS verschwinden, wie es bereits in der Diskussion zu Gl. (4.16) dargelegt wurde. Da diese beiden Größen auf der jeweils anderen Seite der CTS (d. h.,  $dT^-/dz$  bzw.  $\omega^+$ ) sowieso gleich Null sind, bedeutet das, daß sie dort stetig sind, mithin also keinen Sprung erfahren. Andererseits sieht man im Falle der Gefrierbedingung (Abbildung 4.3), daß ein echt negativer Temperaturgradient  $dT^+/dz$  auf der kalten Seite sowie ein echt positiver Wassergehalt  $\omega^-$  auf der temperierten Seite der CTS vorliegt; es liegt hier in der Tat ein nichtverschwindender Sprung des Temperaturgradienten und damit einhergehend auch des Wassergehaltes vor.

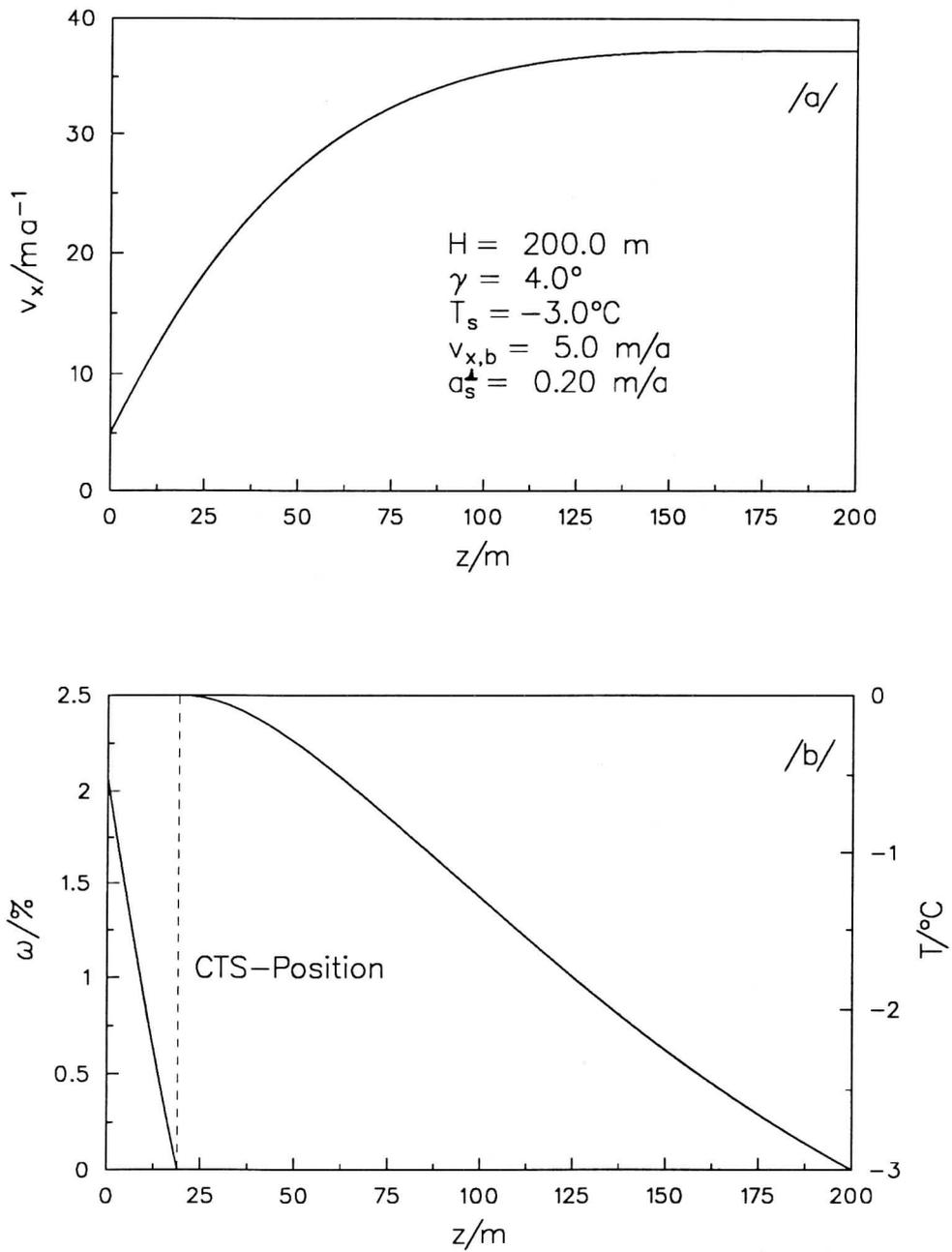


Abb. 4.2: Horizontalgeschwindigkeit  $v_x$  (Plot a) und Temperatur  $T$  bzw. Wassergehalt  $\omega$  (Plot b) für einen Slab mit Schmelzbedingung an der CTS.

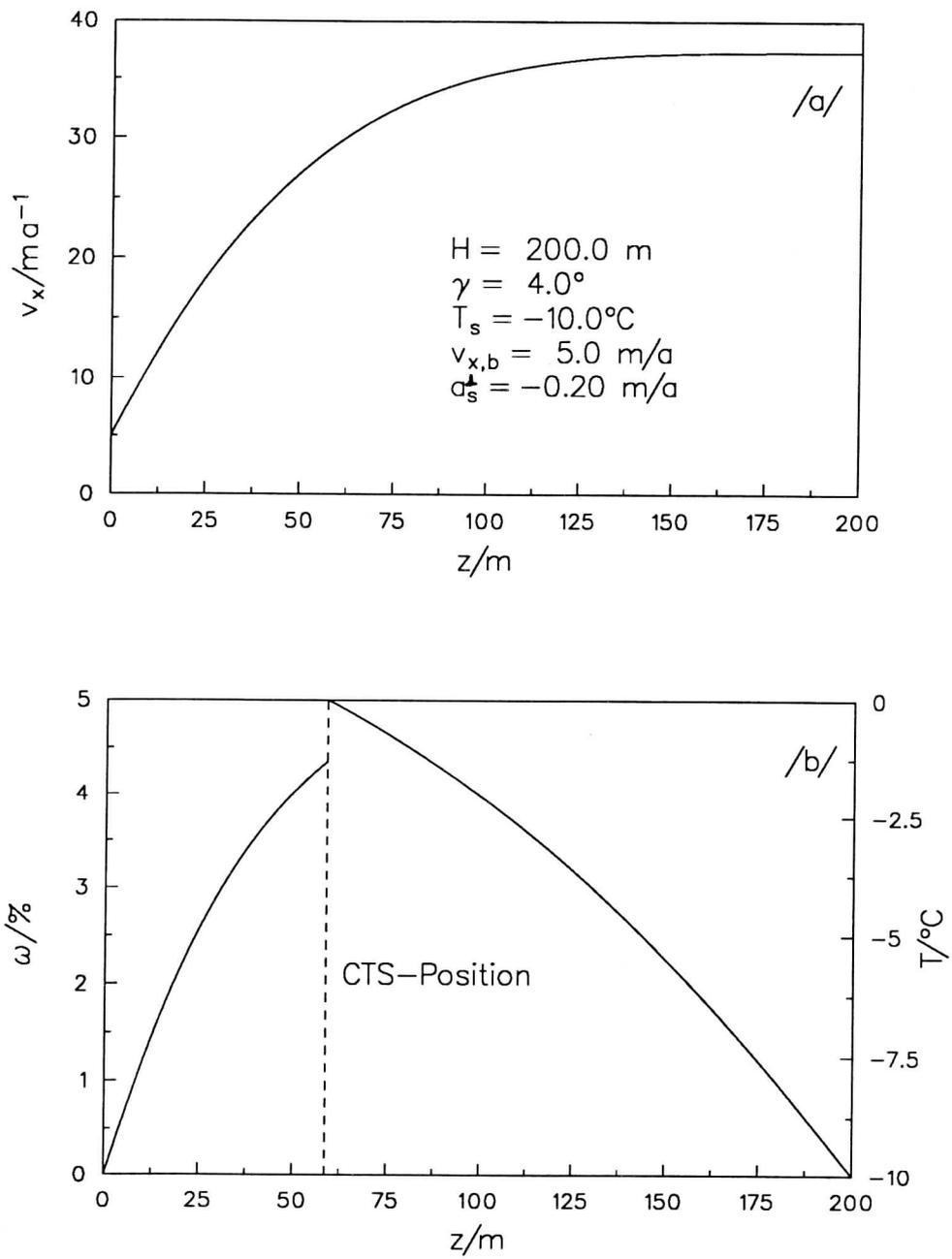


Abb. 4.3: Horizontalgeschwindigkeit  $v_x$  (Plot a) und Temperatur  $T$  bzw. Wassergehalt  $\omega$  (Plot b) für einen Slab mit Gefrierbedingung an der CTS.

## 5 Skalierung und Flacheisannahme

Das in Kapitel 3 vorgestellte polytherme Eismodell ist für einen numerischen oder gar analytischen Zugang im allgemeinen noch zu kompliziert. Lediglich sehr einfache Probleme mit hochgradiger Symmetrie (z. B. geneigte planparallele Eisplatte, siehe voriges Kapitel) können damit behandelt werden. Es ist also notwendig, die Gleichungen weiter zu vereinfachen. Hierzu werden sie zunächst einer Skalierung unterworfen, wobei die physikalischen Größen durch Wahl von zugehörigen typischen Werten entdimensioniert werden; dies ermöglicht in einem weiteren Schritt systematische Vernachlässigungen von Termen aufgrund der Größenordnung der entstehenden dimensionslosen Produkte. In unserem konkreten Fall beruhen die Vernachlässigungen im wesentlichen auf der Annahme, daß die im Eisschild auftretenden typischen Höhen wesentlich kleiner als die typischen Längendimensionen sind, in anderen Worten auf der Annahme eines hinreichend flachen Eisschildes ("Flacheisannahme" bzw. "Shallow-ice-approximation", im folgenden als "SIA" bezeichnet; vgl. Hutter [13], Morland [19], Blatter [3]).

### 5.1 Einführung der Skalierung

Die verschiedenen physikalischen Größen sollen wie folgt skaliert werden:

$$\begin{aligned}
 (x, y) &= [L] (\tilde{x}, \tilde{y}), \\
 z &= [H] \tilde{z}, \\
 (v_x, v_y) &= [V_L] (\tilde{v}_x, \tilde{v}_y), \\
 v_z &= [V_H] \tilde{v}_z \quad \text{mit} \quad \varepsilon := \frac{[H]}{[L]} = \frac{[V_H]}{[V_L]}, \\
 t &= \frac{[L]}{[V_L]} \tilde{t}, \\
 (T, T') &= [\Delta T] (\tilde{\theta}, \tilde{\theta}') \quad (T, T' \text{ in } ^\circ\text{C}), \\
 \omega &= [\omega] \tilde{\omega}, \\
 p &= \rho g [H] \tilde{p}, \\
 (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma) &= \varepsilon \rho g [H] (\tilde{\sigma}_{xz}, \tilde{\sigma}_{yz}, \tilde{\sigma}), \\
 (\sigma_x^R, \sigma_y^R, \sigma_z^R, \sigma_{xy}) &= \varepsilon^2 \rho g [H] (\tilde{\sigma}_x^R, \tilde{\sigma}_y^R, \tilde{\sigma}_z^R, \tilde{\sigma}_{xy}), \\
 (h, z_m, b, b_r) &= [H] (\tilde{h}, \tilde{z}_m, \tilde{b}, \tilde{b}_r), \\
 (a_s^\perp, a_m^\perp) &= [V_H] (\tilde{a}_s^\perp, \tilde{a}_m^\perp), \\
 (A(T'), A_t(\omega)) &= [A] (\tilde{A}(\tilde{\theta}'), \tilde{A}_t(\tilde{\omega})), \\
 (f(\sigma), f_t(\sigma)) &= [f] (\tilde{f}(\tilde{\sigma}), \tilde{f}_t(\tilde{\sigma})), \\
 Q_{\text{geoth}}^\perp &= [Q_{\text{geoth}}^\perp] \tilde{Q}_{\text{geoth}}^\perp,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(T) &= [\kappa] \tilde{\kappa}(\tilde{\theta}), \\
\kappa_r &= [\kappa_r] \tilde{\kappa}_r, \\
c(T) &= [c] \tilde{c}(\tilde{\theta}), \\
c_r &= [c_r] \tilde{c}_r, \\
C_{(t)}(t_{\perp}, \dots) &= [C_{(t)}] \tilde{C}_{(t)}(\tilde{t}_{\perp}, \dots), \\
\mathcal{P}_b^w &= \frac{[Q_{\text{geoth}}^{\perp}]}{L} \tilde{\mathcal{P}}_b^w, \\
\mathcal{P}_m^w &= \rho[\omega][V_H] \tilde{\mathcal{P}}_m^w.
\end{aligned}$$

Größen in eckigen Klammern bedeuten typische Werte für die jeweiligen Variablen, und mit einer Tilde versehene Variablen sind dimensionslos. Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, werden im folgenden nur noch dimensionslose Größen verwendet; daher werden die Tilden der Einfachheit halber wieder weggelassen.

Die Skalierung soll so gewählt sein, daß die dimensionslosen Größen allesamt von der Ordnung  $O(1)$  sind. Dies erscheint bei der zunächst etwas fragwürdigen Skalierung der verschiedenen Spannungen zweifelhaft, jedoch wird sich weiter unten zeigen, daß ausgehend von der sicherlich vernünftigen Skalierung des Druckes  $p$  mit dem Überlagerungsdruck  $\rho g[H]$  genau diese Skalierung die richtige ist, d. h., Konsistenz in den Ordnungen von linken und rechten Seiten der Terme der skalierten Impulsbilanzen und der skalierten Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relationen herstellt.

Aus den oben eingeführten typischen Größen und für die Eisdynamik relevanten physikalischen Konstanten können nun dimensionslose Produkte gebildet werden. Die folgenden werden im weiteren Verlauf von Bedeutung sein:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{[H]}{[L]}, \\
F &= \frac{[V_L]^2}{g[L]}, \\
\mathcal{D} &= \frac{[\kappa]}{\rho[c][H][V_H]}, \\
\alpha &= \frac{g[H]}{[c][\Delta T]}, \\
\mathcal{K} &= \frac{\rho g[H]^3[A][f]}{[L][V_L]}, \\
\mathcal{R} &= \frac{\rho g[H]^2[V_H]}{[\kappa][\Delta T]}, \\
\mathcal{N} &= \frac{[H][Q_{\text{geoth}}]}{[\kappa][\Delta T]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_t &= \frac{g[H]}{L[\omega]}, \\
\mathcal{D}_t &= \frac{\nu}{\rho[H][V_H]}, \\
\mathcal{F}_{(t)} &= \frac{\rho g[H]^2[C_{(t)}]}{[L][V_L]}, \\
\mathcal{B} &= \frac{\beta[H]}{[\Delta T]}, \\
\mathcal{D}_r &= \frac{[\kappa_r]}{\rho_r[c_r][H][V_H]}, \\
\mathcal{T}_r &= \frac{\tau_V[V_H]}{[H]}, \\
\mathcal{N}_r &= \frac{[H][Q_{\text{geoth}}]}{[\kappa_r][\Delta T]};
\end{aligned}$$

$\varepsilon$  ist das Aspektverhältnis,  $F$  die Froude-Zahl,  $\mathcal{D}$  die Wärmeleitzahl,  $\alpha$  das Verhältnis potentielle Energie zu innere Energie in kaltem Eis,  $\mathcal{K}$  die Fluiditätszahl,  $\mathcal{R}$  die Reibungswärmezahl,  $\mathcal{N}$  die geotherme Wärmezahl,  $\alpha_t$  das Verhältnis potentielle Energie zu innere Energie in temperiertem Eis,  $\mathcal{D}_t$  die Wasserdiffusionszahl,  $\mathcal{F}$  bzw.  $\mathcal{F}_t$  die Gleitzahl für kalte bzw. temperierte Basis,  $\mathcal{B}$  die Clausius-Clapeyron-Zahl,  $\mathcal{D}_r$  die Wärmeleitzahl der Lithosphäre,  $\mathcal{T}_r$  die Zeitverzögerungszahl für das Einsinken der Lithosphäre in die Asthenosphäre, und schließlich  $\mathcal{N}_r$  die geotherme Wärmezahl in der Lithosphäre.

## 5.2 Skalierung und SIA für die Modellgleichungen

Im folgenden geht es darum, alle Feldgleichungen, Randbedingungen und Übergangsbedingungen des Kapitels 3 obiger Skalierung zu unterziehen und sie anschließend mit der SIA (Flacheisannahme) zu vereinfachen. Wie bereits erwähnt besteht diese SIA in der Annahme eines hinreichend flachen Eisschildes, dessen typische Längenabmessungen wesentlich größer als dessen typische Höhenabmessungen sind, was in der Natur stets gut erfüllt ist (typische Werte liegen im Bereich von  $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Formelhaft ausgedrückt bedeutet dies, daß der Limes

$$\varepsilon \rightarrow 0 \tag{5.1}$$

betrachtet wird, also alle Terme, die von der Ordnung  $O(\varepsilon^p)$  mit  $p \geq 1$  sind, in den Gleichungen zu vernachlässigen sind. Weiterhin läßt sich leicht abschätzen, daß die Froude-Zahl  $F$  bei realen Eisschilden in der Größenordnung  $F = 10^{-15}$  und weniger liegt, es also sinnvoll ist, gleichzeitig den Limes

$$\frac{F}{\varepsilon} \rightarrow 0 \tag{5.2}$$

zu betrachten.

### 5.2.1 Kalter Bereich

Die skalierte *Massenbilanz* ergibt sich durch Einsetzen der Skalierung in die ursprüngliche Massenbilanz (3.1) zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5.3)$$

(wie bereits erwähnt werden die Tilden, welche in Abschnitt 5.1 dimensionslose Größen anzeigen, im folgenden weggelassen, da nur noch mit solchen gerechnet wird), und kann durch die SIA nicht weiter vereinfacht werden.

Aus der *Impulsbilanz* (3.3) folgt

$$\frac{F}{\varepsilon} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_x^R}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad (5.4)$$

$$\frac{F}{\varepsilon} \frac{dv_y}{dt} = \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_y^R}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad (5.5)$$

$$F\varepsilon \frac{dv_z}{dt} = \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \sigma_z^R}{\partial z} - 1. \quad (5.6)$$

Anwendung der SIA ergibt weiter

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (5.7)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (5.8)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = 1; \quad (5.9)$$

dies gibt uns ein erstes, sehr eindrucksvolles Beispiel, wie sehr das Modell des Kapitels 3 durch die SIA vereinfacht wird. Das Ergebnis zeigt ferner, daß die Skalierung der Schubspannungen  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  mit  $\varepsilon \rho g[H]$  (vgl. Abschnitt 5.1) richtig war, denn ohne das zusätzliche  $\varepsilon$  im Vergleich zur Druckskalierung wären die Gleichungen (5.7) und (5.8) nicht konsistent in den Ordnungen der Summanden, sondern ein Term der Ordnung  $O(\varepsilon)$  und ein Term der Ordnung  $O(1)$  müßten sich zu Null aufsummieren, was nicht möglich ist.

Die *Energiebilanz* (3.8) ergibt mit ausgeschriebenem Advektionsterm

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\mathcal{D}}{c} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right\} + 2 \frac{\alpha}{c} \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma^2; \end{aligned} \quad (5.10)$$

mit der SIA wird hieraus

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2 \frac{\alpha}{c} \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma^2. \quad (5.11)$$

Die horizontale Wärmeleitung kann also im Rahmen des SIA-Limes vernachlässigt werden, jedoch muß sowohl die horizontale als auch die vertikale Advektion berücksichtigt werden.

Von den Materialgesetzen (3.4) – (3.6), die bereits in die Energiebilanz eingearbeitet sind, wird im folgenden nur noch die *Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation* (3.4) benötigt:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_x^R, \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_y^R, \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_z^R, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2 \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_{xy}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2 \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_{xz}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial v_z}{\partial y} = 2 \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_{yz}. \quad (5.17)$$

Mit der SIA vereinfacht sich dies zu

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_x^R, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_y^R, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_z^R, \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2 \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_{xy}, \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 2 \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_{xz}, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = 2 \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma_{yz}. \quad (5.23)$$

Hieraus wird ersichtlich, daß auch die Skalierung der normalen Reibungsspannungen  $\sigma_x^R$ ,  $\sigma_y^R$  und  $\sigma_z^R$  sowie der Schubspannung  $\sigma_{xy}$  gemäß Abschnitt 5.1 mit  $\varepsilon^2 \rho g [H]$  vernünftig war, also ordnungskonsistente Terme ergibt. Diese Spannungen sind folglich

für flache Eisschilde sehr klein, was auch intuitiv unmittelbar einleuchtet. Da im folgenden nur die letzten beiden dieser sechs Gleichungen benötigt werden (nämlich zur Berechnung der Horizontalgeschwindigkeiten), brauchen sie nicht weiter betrachtet zu werden.

Schließlich erhält man für die in der Energiebilanz und im Materialgesetz benötigte *effektive Schubspannung*

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{(\sigma_x^R)^2}{2} + \frac{(\sigma_y^R)^2}{2} + \frac{(\sigma_z^R)^2}{2} + \sigma_{xy}^2 \right)}; \quad (5.24)$$

im SIA-Limes ergibt dies

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2}. \quad (5.25)$$

### 5.2.2 Temperaturierter Bereich

Wie bereits festgestellt, haben die *Massenbilanz der Mischung* Eis plus Wasser und die *Impulsbilanz der Mischung* die gleiche Form wie die entsprechenden Bilanzen für kaltes Eis (vgl. (3.1), (3.3), (3.13), (3.14)); daher übertragen sich auch die skalierten und die SIA-Versionen hiervon aus dem vorigen Abschnitt (Gln. (5.3) – (5.9)). Sie werden hier nicht noch einmal explizit aufgeführt.

Für die Temperatur gilt gemäß (3.9)

$$\theta = \theta_M = -\mathcal{B}p. \quad (5.26)$$

Aus der *Energiebilanz der Mischung* (3.24) bzw. der *Massenbilanz für den Wassergehalt* (3.23) (diese beiden Gleichungen sind identisch) erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{c\alpha_t}{\alpha} \left( \frac{\partial \theta_M}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_M}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta_M}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) \\ &= \mathcal{D}_t \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right) \\ &+ \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \left\{ \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) \right\} \\ &+ 2\alpha_t \mathcal{K} E A_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.27)$$

was sich durch die SIA vereinfacht zu

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{c\alpha_t}{\alpha} \left( \frac{\partial \theta_M}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_M}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta_M}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) \\ &= \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) + 2\alpha_t \mathcal{K} E A_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Wie bei der Energiebilanz für kaltes Eis fällt die horizontale Diffusion durch die SIA heraus.

Die *Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation* (3.17) hat im wesentlichen die gleiche Form wie diejenige für kaltes Eis (3.4). Daher gelten die Gleichungen (5.12) – (5.23) auch für temperiertes Eis; es ist lediglich  $A(\theta')$  durch  $A_t(\omega)$  und  $f(\sigma)$  durch  $f_t(\sigma)$  zu ersetzen. Ebenso bleibt das Ergebnis für die *effektive Schubspannung* unverändert.

### 5.2.3 Lithosphäre

Die Skalierung der *Energiebilanz* (3.26) ergibt

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_r \kappa_r}{c_r} \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right), \quad (5.29)$$

bzw. im SIA-Limes

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_r \kappa_r}{c_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (5.30)$$

Die *zeitliche Evolution der Felsgrund-Oberseite* folgt aus (3.29) zu

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{T_r} \left[ b - \left( b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H \right) \right]; \quad (5.31)$$

dies kann nicht weiter vereinfacht werden. Entsprechend gilt für die Geschwindigkeit der Lithosphäre gemäß (3.30)

$$v_x = 0, \quad (5.32)$$

$$v_y = 0, \quad (5.33)$$

$$v_z = \frac{\partial b}{\partial t}(x, y, t) \quad (5.34)$$

mit  $\partial b / \partial t$  aus obiger Gleichung.

### 5.2.4 Randbedingungen an der freien Oberfläche

Zunächst soll die kinematische Bedingung (3.33) skaliert werden. Dies ergibt<sup>4</sup>

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_s^\perp; \quad (5.35)$$

<sup>4</sup>Die hochgestellten Minuszeichen  $(\cdot)^-$  zur Kennzeichnung der Eis-Seite bei den Randbedingungen an der freien Oberfläche sowie den Übergangsbedingungen an der Eisbasis (vgl. Kap. 3) werden im folgenden weggelassen. Nicht gekennzeichnete Größen beziehen sich daher stets auf die Eis-Seite.

mit der SIA verbleibt

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z = a_s^\perp. \quad (5.36)$$

Für das weitere Vorgehen werden die Terme  $\text{grad } F_s$  und  $\|\text{grad } F_s\|$  benötigt. Man erhält hierfür

$$\text{grad } F_s = \left( -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial y}, 1 \right)^t \quad (5.37)$$

und

$$\|\text{grad } F_s\| = \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad (5.38)$$

im SIA-Limes ergibt dies

$$\text{grad } F_s = (0, 0, 1)^t, \quad \|\text{grad } F_s\| = 1. \quad (5.39)$$

Mit dem äußeren Normalenvektor  $\mathbf{n} = \text{grad } F_s / \|\text{grad } F_s\|$  folgt aus der *Impulssprungbedingung* (3.34)

$$-(-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) \frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma_{xz} = 0, \quad (5.40)$$

$$-\varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial h}{\partial x} - (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) \frac{\partial h}{\partial y} + \sigma_{yz} = 0, \quad (5.41)$$

$$-\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial h}{\partial y} - p + \varepsilon^2 \sigma_z^R = 0. \quad (5.42)$$

Anwendung der SIA vereinfacht zunächst die letzte dieser Gleichungen zu

$$p = 0, \quad (5.43)$$

und hiermit ergeben die beiden ersten Gleichungen

$$\sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \quad (5.44)$$

Es verbleibt im Falle einer kalten freien Oberfläche die Randbedingung für die *Oberflächentemperatur* (3.35), welche skaliert einfach

$$\theta(x, y, t) = \theta_s(x, y, t) \quad (5.45)$$

ergibt; dies kann offensichtlich nicht weiter vereinfacht werden. Im Falle einer temperierten freien Oberfläche ist in analoger Weise der Wassergehalt  $\omega$  oder dessen Normalableitung vorzuschreiben.

### 5.2.5 Übergangsbedingungen an der kalten Eisbasis

Die *kinematische Bedingung* (3.38) wird durch die Skalierung und SIA nicht verändert, sie lautet

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} - v_z = 0. \quad (5.46)$$

Analog zur freien Oberfläche seien nun die Terme  $\text{grad } F_b$  und  $\|\text{grad } F_b\|$  berechnet:

$$\text{grad } F_b = \left( \varepsilon \frac{\partial b}{\partial x}, \varepsilon \frac{\partial b}{\partial y}, -1 \right)^t \quad (5.47)$$

und

$$\|\text{grad } F_b\| = \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad (5.48)$$

im SIA-Limes erhält man hieraus

$$\text{grad } F_b = (0, 0, -1)^t, \quad \|\text{grad } F_b\| = 1. \quad (5.49)$$

Der äußere Normalenvektor folgt wie zuvor zu  $\mathbf{n} = \text{grad } F_b / \|\text{grad } F_b\|$ . Mit

$$\mathbf{Tn} = \frac{\rho g [H]}{\|\text{grad } F_b\|} \begin{pmatrix} \varepsilon \sigma_x \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^3 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial y} - \varepsilon \sigma_{xz} \\ \varepsilon^3 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon \sigma_y \frac{\partial b}{\partial y} - \varepsilon \sigma_{yz} \\ \varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial y} - \sigma_z \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

und

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{Tn}) \mathbf{n} = \frac{\rho g [H]}{\|\text{grad } F_b\|^3} \begin{pmatrix} \varepsilon^3 \sigma_x \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^3 + \varepsilon^3 \sigma_y \frac{\partial b}{\partial x} \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 + \varepsilon \sigma_z \frac{\partial b}{\partial x} \\ + 2\varepsilon^5 \sigma_{xy} \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial b}{\partial y} - 2\varepsilon^3 \sigma_{xz} \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - 2\varepsilon^3 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} \\ \varepsilon^3 \sigma_x \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial b}{\partial y} + \varepsilon^3 \sigma_y \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^3 + \varepsilon \sigma_z \frac{\partial b}{\partial y} \\ + 2\varepsilon^5 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 - 2\varepsilon^3 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - 2\varepsilon^3 \sigma_{yz} \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 \\ - \varepsilon^2 \sigma_x \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 - \varepsilon^2 \sigma_y \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 - \sigma_z \\ - 2\varepsilon^4 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} + 2\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial b}{\partial x} + 2\varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial b}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

(zur Vereinfachung der Terme wurden in den obigen Gleichungen die totalen Normalspannungen anstelle des Druckes und der Reibungsspannungen verwendet; es ist  $\sigma_{x/y/z} = -p + \varepsilon^2 \sigma_{x/y/z}^R$ ) erhält man aus dem *Gleitgesetz* (3.39)

$$(v_{sl})_x = -\frac{\mathcal{F}C}{\|\text{grad } F_b\|} \left[ \sigma_x \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial b}{\partial y} - \sigma_{xz} \right] \\ - \frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2} \left( \varepsilon^2 \sigma_x \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)^3 + \varepsilon^2 \sigma_y \frac{\partial b}{\partial x} \left( \frac{\partial b}{\partial y} \right)^2 + \sigma_z \frac{\partial b}{\partial x} \right)$$

$$+2\varepsilon^4\sigma_{xy}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2\frac{\partial b}{\partial y}-2\varepsilon^2\sigma_{xz}\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2-2\varepsilon^2\sigma_{yz}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}\Bigg], \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} (v_{\text{sl}})_y &= -\frac{\mathcal{F}C}{\|\text{grad } F_b\|}\left[\varepsilon^2\sigma_{xy}\frac{\partial b}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial b}{\partial y}-\sigma_{yz}\right. \\ &\quad -\frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2}\left(\varepsilon^2\sigma_x\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2\frac{\partial b}{\partial y}+\varepsilon^2\sigma_y\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^3+\sigma_z\frac{\partial b}{\partial y}\right. \\ &\quad \left.\left.+2\varepsilon^4\sigma_{xy}\frac{\partial b}{\partial x}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2-2\varepsilon^2\sigma_{xz}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}-2\varepsilon^2\sigma_{yz}\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2\right)\right], \quad (5.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_{\text{sl}})_z &= -\frac{\mathcal{F}C}{\|\text{grad } F_b\|}\left[\sigma_{xz}\frac{\partial b}{\partial x}+\sigma_{yz}\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{\sigma_z}{\varepsilon^2}\right. \\ &\quad -\frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2}\left(-\sigma_x\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)^2-\sigma_y\left(\frac{\partial b}{\partial y}\right)^2-\frac{\sigma_z}{\varepsilon^2}\right. \\ &\quad \left.\left.-2\varepsilon^2\sigma_{xy}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}+2\sigma_{xz}\frac{\partial b}{\partial x}+2\sigma_{yz}\frac{\partial b}{\partial y}\right)\right]. \quad (5.54) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von  $1/\|\text{grad } F_b\|^2 = 1 - \varepsilon^2(\partial b/\partial x)^2 - \varepsilon^2(\partial b/\partial y)^2 + O(\varepsilon^4)$  (in der letzten Gleichung sind die beiden Terme der Ordnung  $O(\varepsilon^2)$  wichtig) vereinfacht sich dies im SIA-Limes zu

$$(v_{\text{sl}})_x = \mathcal{F}C\sigma_{xz}, \quad (5.55)$$

$$(v_{\text{sl}})_y = \mathcal{F}C\sigma_{yz}, \quad (5.56)$$

$$(v_{\text{sl}})_z = \mathcal{F}C\left(\frac{\partial b}{\partial x}\sigma_{xz} + \frac{\partial b}{\partial y}\sigma_{yz}\right). \quad (5.57)$$

Für die Gleitgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{sl}}$  selbst gilt gemäß ihrer Definition (im Anschluß an Gl. (3.38))

$$\begin{aligned} (v_{\text{sl}})_x &= v_x - v_x^+ - \frac{\varepsilon^2}{\|\text{grad } F_b\|^2} \times \\ &\quad \left( (v_x - v_x^+)\frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+)\frac{\partial b}{\partial y} - (v_z - v_z^+) \right) \frac{\partial b}{\partial x}, \quad (5.58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_{\text{sl}})_y &= v_y - v_y^+ - \frac{\varepsilon^2}{\|\text{grad } F_b\|^2} \times \\ &\quad \left( (v_x - v_x^+)\frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+)\frac{\partial b}{\partial y} - (v_z - v_z^+) \right) \frac{\partial b}{\partial y}, \quad (5.59) \end{aligned}$$

$$(v_{\text{sl}})_z = v_z - v_z^+ + \frac{1}{\|\text{grad } F_b\|^2} \times$$

$$\left( (v_x - v_x^+) \frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+) \frac{\partial b}{\partial y} - (v_z - v_z^+) \right), \quad (5.60)$$

was sich durch Anwendung der SIA vereinfacht zu

$$(v_{sl})_x = v_x - v_x^+, \quad (5.61)$$

$$(v_{sl})_y = v_y - v_y^+, \quad (5.62)$$

$$(v_{sl})_z = (v_x - v_x^+) \frac{\partial b}{\partial x} + (v_y - v_y^+) \frac{\partial b}{\partial y}. \quad (5.63)$$

Im Rahmen des hier verwendeten Lithosphärenmodells verschwinden  $v_x^+$  und  $v_y^+$ ; vgl. Gl. (5.32), (5.33).

Die *Impulssprungbedingung* (3.40) wird nicht weiter benötigt, da in der Lithosphäre keine Spannungen berechnet werden. Sie wird somit nicht der Skalierung unterworfen.

Die *Energiesprungbedingung* (3.41) lautet skaliert

$$\begin{aligned} & \kappa \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \left( \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \theta^+}{\partial z} \right) \\ &= -\mathcal{R} \left\{ (v_{sl})_x \frac{\partial b}{\partial x} (-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) + \varepsilon^2 (v_{sl})_x \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{xy} - (v_{sl})_x \sigma_{xz} \right. \\ &+ \varepsilon^2 (v_{sl})_y \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xy} + (v_{sl})_y \frac{\partial b}{\partial y} (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) - (v_{sl})_y \sigma_{yz} \\ &\left. + \varepsilon^2 (v_{sl})_z \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xz} + \varepsilon^2 (v_{sl})_z \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{yz} - (v_{sl})_z (-p + \varepsilon^2 \sigma_z^R) \right\}. \quad (5.64) \end{aligned}$$

Der Term  $-\mathcal{R} \{ \dots \}$  verschwindet, falls Haften an der kalten Basis angenommen wird. Im Rahmen der SIA ergibt sich

$$\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \frac{\partial \theta^+}{\partial z} = -\mathcal{R}[(v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}]; \quad (5.65)$$

die den Druck  $p$  enthaltenden Terme in (5.64) verschwinden aufgrund von (5.61) – (5.63).

Schließlich hat man die Kontinuität der Temperatur (Gl. (3.42)):

$$\theta = \theta^+. \quad (5.66)$$

### 5.2.6 Übergangsbedingungen an der temperierten Eisbasis

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen (5.47) – (5.49) für  $\text{grad } F_b$  und  $\|\text{grad } F_b\|$  gelten unverändert. Die *kinematische Bedingung* (3.48) behält wie im Falle der kalten Eisbasis unter der Skalierung und SIA ihre Form, sie lautet

$$\frac{\partial b}{\partial t} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} - v_z = 0. \quad (5.67)$$

Gleichung (3.49), welche das Verschwinden der normalen basalen Wasser-Diffusionsstromdichte ausdrückt, ergibt

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (5.68)$$

was sich im SIA-Limes zu

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \quad (5.69)$$

vereinfacht.

Die Skalierung des *Gleitgesetzes* (3.50) geschieht in analoger Weise zum Vorgehen bei kalter Eisbasis und ergibt ein identisches Ergebnis; es ist lediglich in den Gleichungen  $\mathcal{FC}$  durch die entsprechenden Werte  $\mathcal{F}_t C_t$  zu ersetzen.

Die Energiesprungbedingung (3.54) ergibt skaliert

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_b^w = & \frac{\kappa}{\mathcal{N} \|\text{grad } F_b\|} \left\{ -\varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\} \\ & - \frac{\kappa_r}{\mathcal{N}_r \|\text{grad } F_b\|} \left\{ -\varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial \theta^+}{\partial z} \right\} \\ & - \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{N} \|\text{grad } F_b\|} \left\{ (v_{sl})_x \frac{\partial b}{\partial x} (-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) + \varepsilon^2 (v_{sl})_x \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{xy} - (v_{sl})_x \sigma_{xz} \right. \\ & + \varepsilon^2 (v_{sl})_y \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xy} + (v_{sl})_y \frac{\partial b}{\partial y} (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) - (v_{sl})_y \sigma_{yz} + \varepsilon^2 (v_{sl})_z \frac{\partial b}{\partial x} \sigma_{xz} \\ & \left. + \varepsilon^2 (v_{sl})_z \frac{\partial b}{\partial y} \sigma_{yz} - (v_{sl})_z (-p + \varepsilon^2 \sigma_z^R) \right\}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Anwendung der SIA ergibt hieraus

$$\mathcal{P}_b^w = \frac{\kappa}{\mathcal{N}} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\kappa_r}{\mathcal{N}_r} \frac{\partial \theta^+}{\partial z} + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{N}} ((v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}); \quad (5.71)$$

die Druckterme in (5.70) heben sich aufgrund von (5.61) – (5.63) weg.

Es verbleibt noch die Kontinuität der Temperatur (3.55):

$$\theta = \theta^+ = \theta_M. \quad (5.72)$$

### 5.2.7 Randbedingungen an der Felsgrundunterseite

Die Ausdrücke für  $\text{grad } F_r$  und  $\|\text{grad } F_r\|$  haben die gleiche Form wie für die kalte Eisbasis (vgl. (5.47) – (5.49)); es ist lediglich überall  $b$  durch  $b_r$  und  $F_b$  durch  $F_r$  zu ersetzen. Den Normaleneinheitsvektor erhält man dann wie üblich als  $\mathbf{n} = \text{grad } F_r / \|\text{grad } F_r\|$ . Hiermit erhält man aus (3.56)

$$\kappa_r \left( \varepsilon^2 \frac{\partial b_r}{\partial x} \frac{\partial \theta^-}{\partial x} + \varepsilon^2 \frac{\partial b_r}{\partial y} \frac{\partial \theta^-}{\partial y} - \frac{\partial \theta^-}{\partial z} \right) = \mathcal{N}_r Q_{\text{geoth}}^\perp, \quad (5.73)$$

was im SIA-Limes

$$\kappa_r \frac{\partial \theta^-}{\partial z} = -\mathcal{N}_r Q_{\text{geoth}}^\perp \quad (5.74)$$

ergibt.

### 5.2.8 Übergangsbedingungen an der CTS

Wie im Falle der freien Oberfläche erhält man aus der *kinematischen Bedingung* (3.58)

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_m}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_z = \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial z_m}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial z_m}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2} a_m^\perp; \quad (5.75)$$

mit der SIA vereinfacht sich das zu

$$\frac{\partial z_m}{\partial t} + v_x \frac{\partial z_m}{\partial x} + v_y \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_z = a_m^\perp. \quad (5.76)$$

Für  $\text{grad } F_m$  und  $\|\text{grad } F_m\|$  ergibt sich

$$\text{grad } F_m = \left( -\varepsilon \frac{\partial z_m}{\partial x}, -\varepsilon \frac{\partial z_m}{\partial y}, 1 \right)^t \quad (5.77)$$

und

$$\|\text{grad } F_s\| = \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial z_m}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial z_m}{\partial y} \right)^2 \right)^{1/2}; \quad (5.78)$$

im SIA-Limes folgt hieraus

$$\text{grad } F_m = (0, 0, 1)^t, \quad \|\text{grad } F_m\| = 1. \quad (5.79)$$

Für den Normaleneinheitsvektor gilt wie zuvor  $\mathbf{n} = \text{grad } F_m / \|\text{grad } F_m\|$ .

Aus der *Kontinuität von Temperatur und Geschwindigkeit* (Gln. (3.59) – (3.61)) ergibt sich

$$\theta^+ = \theta^- \quad (5.80)$$

und

$$v_x^+ = v_x^-, \quad v_y^+ = v_y^-, \quad v_z^+ = v_z^-. \quad (5.81)$$

Die *Impulssprungbedingung* (3.62) stellt sich in skaliertem Form als

$$\left[ \left[ -(-p + \varepsilon^2 \sigma_x^R) \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \sigma_{xz} \right] \right] = 0, \quad (5.82)$$

$$\left[ \left[ -\varepsilon^2 \sigma_{xy} \frac{\partial z_m}{\partial x} - (-p + \varepsilon^2 \sigma_y^R) \frac{\partial z_m}{\partial y} + \sigma_{yz} \right] \right] = 0, \quad (5.83)$$

$$\left[ \left[ -\varepsilon^2 \sigma_{xz} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \sigma_{yz} \frac{\partial z_m}{\partial y} + (-p + \varepsilon^2 \sigma_z^R) \right] \right] = 0, \quad (5.84)$$

dar, was sich mit der SIA zu

$$p^+ = p^-, \quad \sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^-, \quad \sigma_{yz}^+ = \sigma_{yz}^- \quad (5.85)$$

vereinfacht.

Schließlich ist noch die *Energiesprungbedingung* (3.67) mit den daraus abgeleiteten Beziehungen (3.70) – (3.73) zu betrachten:

$$\text{i) } -(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0 \text{ (Schmelzbedingung):}$$

$$\omega^- = 0, \quad (5.86)$$

$$-\varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta^+}{\partial z} = -\varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z}; \quad (5.87)$$

letzteres ergibt in der SIA

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial z} = \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z}. \quad (5.88)$$

$$\text{ii) } -(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0 \text{ (Gefrierbedingung):}$$

Hier benötigt man (3.67) in seiner vollen Form. Mit dem Diffusionsgesetz (3.19) folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{D}\kappa}{\|\text{grad } F_m\|} \left( -\varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta^+}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta^+}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\mathcal{D}\kappa}{\|\text{grad } F_m\|} \left( -\varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_M^-}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\alpha}{\alpha_t} \frac{\mathcal{D}_t}{\|\text{grad } F_m\|} \left( -\varepsilon^2 \frac{\partial \omega^-}{\partial x} \frac{\partial z_m}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial \omega^-}{\partial y} \frac{\partial z_m}{\partial y} + \frac{\partial \omega^-}{\partial z} \right) \\ & = \frac{\alpha}{\alpha_t} \omega^- a_m^\perp, \end{aligned} \quad (5.89)$$

und weiter mit der SIA

$$\mathcal{D}\kappa \frac{\partial \theta^+}{\partial z} - \mathcal{D}\kappa \frac{\partial \theta_M^-}{\partial z} - \frac{\alpha}{\alpha_t} \mathcal{D}_t \frac{\partial \omega^-}{\partial z} = \frac{\alpha}{\alpha_t} \omega^- a_m^\perp. \quad (5.90)$$

### 5.3 Teilintegration der polythermen SIA-Gleichungen

Die oben hergeleiteten, der Flacheisannahme (SIA) unterworfenen Modellgleichungen können zum Teil analytisch integriert werden. Im folgenden wird gezeigt, daß die relevanten Spannungen  $p$ ,  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  sogar voll analytisch erhalten werden können; das Problem der Berechnung der drei Komponenten  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  des Geschwindigkeitsvektors kann auf einfache numerische Quadraturen zurückgeführt werden und bereitet daher auch keine numerischen Probleme. Die eigentliche "harte" Numerik beschränkt sich somit auf die Berechnung des Temperatur- bzw. Wassergehaltsfeldes und der Evolution der freien Oberfläche und der CTS des polythermen Eisschildes.

### 5.3.1 Berechnung der Spannungen

Aus Gleichung (5.9) zusammen mit der Randbedingung (5.43) und der Übergangsbedingung (5.85) erhält man für den Druck

$$p(x, y, z, t) = h(x, y, t) - z; \quad (5.91)$$

er unterliegt also einer rein hydrostatischen Verteilung. Unter Verwendung dieses Ergebnisses folgt aus (5.7), (5.8), (5.44) und (5.85)

$$\sigma_{xz} = -\frac{\partial h}{\partial x}(h - z), \quad (5.92)$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial h}{\partial y}(h - z). \quad (5.93)$$

Diese Schubspannungen ergeben sich also als Produkt aus Oberflächenneigung und Überlagerungsdruck. Für die effektive Schubspannung ergibt sich hiermit gemäß (5.25)

$$\sigma = (h - z) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \quad (5.94)$$

Man bemerke, daß die obigen Ergebnisse gleichermaßen im kalten und temperierten Bereich des Eisschildes gelten.

Die verbleibenden, sehr kleinen Spannungen  $\sigma_x^R$ ,  $\sigma_y^R$ ,  $\sigma_z^R$  und  $\sigma_{xy}$  können nicht direkt berechnet werden, sie werden jedoch auch im weiteren nicht benötigt. Man kann sie im Anschluß an die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus den ersten vier Gleichungen (5.18) – (5.21) der Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation ermitteln.

### 5.3.2 Berechnung der Geschwindigkeit

Die Horizontalgeschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_y$  lassen sich durch Einsetzen der obigen Ergebnisse für  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  in die beiden letzten Gleichungen (5.22), (5.23) der Spannungs-Verzerrungsgeschwindigkeits-Relation und anschließende Integration erhalten:

$$v_x = v_{x,b} - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz', \quad (5.95)$$

$$v_y = v_{y,b} - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz'. \quad (5.96)$$

Hierbei ist

$$A_{(t)}(\cdot) = \begin{cases} A(\theta') & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ A_t(\omega) & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}) \end{cases} \quad (5.97)$$

und

$$f_{(t)}(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{für } z > z_m \quad (\text{kalter Bereich}), \\ f_t(\sigma) & \text{für } z < z_m \quad (\text{temperierter Bereich}). \end{cases} \quad (5.98)$$

Die Integrationskonstanten  $v_{x,b}$  und  $v_{y,b}$ , welche die entsprechenden basalen Geschwindigkeiten darstellen, folgen aus dem Gleitgesetz (5.55), (5.56) unter Verwendung der Ergebnisse für  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  zu

$$v_{x,b} = (v_{sl})_x = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial x} (h - b), \quad (5.99)$$

$$v_{y,b} = (v_{sl})_y = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial y} (h - b). \quad (5.100)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß die Lithosphäregeschwindigkeit keine  $x$ - bzw.  $y$ -Komponente hat (vgl. (5.32), (5.33)), so daß gemäß (5.61), (5.62) die entsprechenden Gleitgeschwindigkeitskomponenten mit den Eischwindigkeitskomponenten identisch sind. Weiterhin wurde

$$\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} = \begin{cases} \mathcal{F}C & \text{für kalte Basis,} \\ \mathcal{F}_tC_t & \text{für temperierte Basis} \end{cases} \quad (5.101)$$

gesetzt.

Mit den obigen Ergebnissen für die Horizontalgeschwindigkeiten kann man aus der Massenbilanz (5.3) auch die Vertikalgeschwindigkeit berechnen:

$$v_z = - \int_b^z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + v_{z,b}. \quad (5.102)$$

Die basale Vertikalgeschwindigkeit  $v_{z,b}$  kann gemäß der kinematischen Bedingung (5.46) bzw. (5.67) durch  $v_{x,b}$  und  $v_{y,b}$  ausgedrückt werden.

Zusammenfassend gilt also für die Geschwindigkeiten:

$$v_x = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial x} (h - b) - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma) (h - z') dz', \quad (5.103)$$

$$v_y = -\mathcal{F}_{(t)}C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial y} (h - b) - 2\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma) (h - z') dz', \quad (5.104)$$

$$v_z = - \int_b^z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + \frac{\partial b}{\partial t} + v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} + v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y}. \quad (5.105)$$

Bei bekanntem Temperatur- und Wassergehaltfeld können alle Integrale leicht numerisch berechnet werden. Nimmt man die Eisfluidität als temperatur- bzw. wassergehaltsunabhängig an ( $A_{(t)} = \text{const}$ ), so treten Abhängigkeiten von Temperatur und Wassergehalt gar nicht mehr auf, und die Integrationen können sogar analytisch durchgeführt werden.

Abschließend sei noch bemerkt, daß offensichtlich  $(v_x, v_y) \propto -(\partial h/\partial x, \partial h/\partial y) = -\text{grad}_{(x,y)} h$  gilt, d. h., der Vektor der Horizontalgeschwindigkeit zeigt in jedem Punkt des Eisschildes in Richtung des stärksten Oberflächengefälles, insbesondere also entlang eines Vertikalprofils immer in die gleiche Richtung (vgl. Hutter [13]). Dieses überraschende Ergebnis ermöglicht es, durch Bestimmung der Richtung der Eisflußgeschwindigkeit in Eisbohrkernen die Gültigkeit der SIA in einem gegebenen realen Eisschild zu überprüfen.

### 5.3.3 Evolution der freien Oberfläche

Eine Gleichung, die die zeitliche Evolution der freien Oberfläche, mit anderen Worten also die Dickenänderung des Eisschildes mit der Zeit beschreibt, kann aus der Massenbilanz (5.3) in Kombination mit den kinematischen Bedingungen (5.36), (5.46) und (5.67) für die freie Oberfläche bzw. die Basis erhalten werden. Integration der Massenbilanz (5.3) von der Basis bis zur freien Oberfläche liefert unter Verwendung der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned} v_{z,s} - v_{z,b} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h v_x dz' + v_{x,s} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v_y dz' + v_{y,s} \frac{\partial h}{\partial y} - v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Unter Verwendung der kinematischen Bedingungen (5.36) für die freie Oberfläche und (5.46) bzw. (5.67) für die Basis ergibt dies

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(h-b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v_y dz' + a_s^\perp. \quad (5.107)$$

Diese Gleichung bilanziert die zeitliche Änderung der Eisdicke mit der horizontalen Divergenz der vertikalintegrierten Horizontalgeschwindigkeit und der Akkumulations-Ablations-Funktion; letztere stellt eine klimatische Input-Größe dar.

### 5.3.4 Evolution der CTS

In ähnlicher Weise wie für die freie Oberfläche kann eine Evolutionsgleichung für die CTS hergeleitet werden. Hierzu wird die Massenbilanz (5.3) von der Basis bis zur CTS integriert, dies ergibt

$$\begin{aligned} v_{z,m} - v_{z,b} &= -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{z_m} v_x dz' + v_{x,m} \frac{\partial z_m}{\partial x} - v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^{z_m} v_y dz' + v_{y,m} \frac{\partial z_m}{\partial y} - v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y}, \end{aligned} \quad (5.108)$$

wobei wiederum die Leibniz-Regel verwendet wurde. Mit den kinematischen Bedingungen (5.67) für die Basis und (5.76) für die CTS erhält man

$$\frac{\partial(z_m - b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{z_m} v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^{z_m} v_y dz' + a_m^\perp. \quad (5.109)$$

Die Interpretation dieses Ergebnisses ist dieselbe wie im Falle der freien Oberfläche, jedoch ist der Volumenfluß durch die CTS  $a_m^\perp$  als innere Variable keine Inputgröße, so daß diese Gleichung zur Bestimmung der Evolution der CTS-Position zunächst nicht geeignet ist.

### 5.3.5 Evolution der Eisbasis bzw. Felsgrund-Oberseite

Hierfür ist keine weitere Rechnung vonnöten, sondern (5.31) kann direkt übernommen werden:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{T}_r} [b - (b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H)]. \quad (5.110)$$

### 5.3.6 Temperatur und Wassergehalt

Wie bereits erwähnt müssen die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Gleichungen zur Berechnung des Temperatur- und Wassergehaltsfeldes numerisch gelöst werden. Der Vollständigkeit halber seien sie an dieser Stelle mit ihren zugehörigen Rand- und Übergangsbedingungen noch einmal aufgeführt, wobei die Wassergehaltsgleichung und die CTS-Übergangsbedingung mit Hilfe des hydrostatischen Druckfeldes noch etwas vereinfacht werden können. Die Temperaturgleichung für den kalten Bereich (5.11) lautet

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + 2 \frac{\alpha}{c} \mathcal{K} E A(\theta') f(\sigma) \sigma^2. \quad (5.111)$$

Im temperierten Bereich ist die Temperatur durch den Druck eindeutig bestimmt; mit (5.26) und (5.91) erhält man

$$\theta = \theta_M = -\mathcal{B}(h(x, y, t) - z). \quad (5.112)$$

Somit gilt

$$\frac{\partial \theta_M}{\partial t} + v_x \frac{\partial \theta_M}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta_M}{\partial y} + v_z \frac{\partial \theta_M}{\partial z} = -\mathcal{B} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z \right) \quad (5.113)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right) = \mathcal{B} \frac{\partial \kappa}{\partial z} = \mathcal{B}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \theta}; \quad (5.114)$$

es ergibt sich für die Wassergehaltsgleichung im temperierten Bereich (5.28)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \mathcal{D}_t \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\mathcal{D}\alpha_t}{\alpha} \mathcal{B}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \\ + \frac{c\alpha_t}{\alpha} \mathcal{B} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z \right) &+ 2\alpha_t \mathcal{K} E A_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.115)$$

wobei für die effektive Schubspannung  $\sigma$  gemäß (5.94)

$$\sigma = (h - z) \sqrt{\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} \quad (5.116)$$

gilt. Die Temperaturgleichung für die Lithosphäre (5.30) lautet mit (5.32) – (5.34)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mathcal{D}_r \kappa_r}{c_r} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \quad (5.117)$$

An der kalten freien Oberfläche ist die Temperatur vorgeschrieben (Gl. (5.45), Randbedingung vom Dirichlet-Typ):

$$\theta = \theta_s(x, y, t); \quad (5.118)$$

im unwahrscheinlichen Fall einer temperierten freien Oberfläche wird statt dessen der Wassergehalt  $\omega$  oder dessen Normalableitung als Randbedingung verwendet. Für eine kalte Eisbasis gelten (5.65) und (5.66):

$$\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{[\kappa_r]}{[\kappa]} \kappa_r \frac{\partial \theta^+}{\partial z} = -\mathcal{R}[(v_{sl})_x \sigma_{xz} + (v_{sl})_y \sigma_{yz}], \quad (5.119)$$

$$\theta = \theta^+, \quad (5.120)$$

und beim Vorliegen einer temperierten Basis kommen (5.69), (5.72) zur Anwendung:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (5.121)$$

$$\theta = \theta^+ = \theta_M. \quad (5.122)$$

An der Felsgrundunterseite gilt (5.74):

$$\kappa_r \frac{\partial \theta^-}{\partial z} = -\mathcal{N}_r Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (5.123)$$

Es verbleiben noch die Übergangsbedingungen an der CTS (5.80), (5.86), (5.88) und (5.90):

$$\theta^+ = \theta^-. \quad (5.124)$$

i)  $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0$  (Schmelzbedingung):

$$\omega^- = 0, \quad (5.125)$$

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial z} = \mathcal{B}. \quad (5.126)$$

ii)  $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0$  (Gefrierbedingung):

$$\mathcal{D}\kappa \left( \frac{\partial \theta^+}{\partial z} - \mathcal{B} \right) - \frac{\alpha}{\alpha_t} \mathcal{D}_t \frac{\partial \omega^-}{\partial z} = \frac{\alpha}{\alpha_t} \omega^- a_m^\perp. \quad (5.127)$$

Hierfür wurde  $\partial \theta_M^- / \partial z = \mathcal{B}$  verwendet.

Abschließend sei auf einige Beschränkungen der SIA-Näherung hingewiesen. Zunächst schließt diese Skalierung geschlossene CTS-Linien aus, da sie nur flache CTS-Linien erlaubt. Einschlüsse von temperiertem Eis in einer Umgebung von kaltem Eis sind also nicht erfaßt, sondern nur solche temperierten Bereiche, die bis zur Eisbasis reichen. Das ist aber der weitaus wichtigste Fall. Weiterhin ergibt die SIA Singularitäten an Eisrändern und an Eisdomen (Maxima der Eishöhe über Normal Null). Hutter [15] weist darauf hin, daß unter der Voraussetzung eines beschränkten basalen Gleitkoeffizienten  $C_{(t)}$  die Eishöhe an seitlichen Begrenzungen in Form einer Wurzelfunktion gegen Null strebt und somit am Rand eine vertikale Tangente aufweist, was im Widerspruch zur Flachheitsannahme steht. Für Eisdome erhält man bei Verwendung einer pseudoplastischen Kriechfunktion  $f_{(t)}(\sigma) = \sigma^{n-1}$  mit  $n > 1$ , wie sie üblicherweise angesetzt wird (vgl. §5.5), eine unendliche Krümmung der Eisoberfläche, was mit der gegen unendlich strebenden Viskosität einer solchen Kriechfunktion bei kleinen Spannungen bzw. Verzerrungsgeschwindigkeiten zusammenhängt. Diese Ergebnisse sind für den Fall eines reinen Kalteismodells hergeleitet, jedoch auf die SIA für polytherme Eisschilde übertragbar. Eine strenge Behandlung müßte daher in der Nähe von Eisdomen und seitlichen Rändern die SIA aufgeben. Es kann jedoch davon ausgegangen werden, daß eine numerische Lösung des Modells mit diskreten Gitterpunkten diese lokalen Singularitäten verschmiert, so daß sie nicht weiter betrachtet werden müssen.

## 5.4 Zusammenstellung in dimensionsbehafteter Form

Der Übersichtlichkeit und besseren Anschaulichkeit halber sollen an dieser Stelle die in Abschnitt 5.3 hergeleiteten teilintegrierten polythermen SIA-Gleichungen in *dimensionsbehafteter* Form aufgeführt werden. Diese lassen sich leicht aus den dimensionslosen Gleichungen gewinnen, indem alle typischen Werte  $[\cdot]$  auf 1 gesetzt werden (vgl. Abschnitt 5.1).

Spannungen:

$$p = \rho g(h - z), \quad (5.128)$$

$$\sigma_{xz} = -\rho g(h - z) \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (5.129)$$

$$\sigma_{yz} = -\rho g(h - z) \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.130)$$

$$\sigma = \rho g(h - z) \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}. \quad (5.131)$$

Geschwindigkeit:

$$v_x = -\rho g(h - b) C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial x} - 2\rho g \frac{\partial h}{\partial x} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz', \quad (5.132)$$

$$v_y = -\rho g(h - b) C_{(t)} \frac{\partial h}{\partial y} - 2\rho g \frac{\partial h}{\partial y} \int_b^z EA_{(t)}(\cdot) f_{(t)}(\sigma)(h - z') dz', \quad (5.133)$$

$$v_z = -\int_b^z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dz' + \frac{\partial b}{\partial t} + v_{x,b} \frac{\partial b}{\partial x} + v_{y,b} \frac{\partial b}{\partial y}. \quad (5.134)$$

Entwicklung der freien Oberfläche:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial(h - b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^h v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^h v_y dz' + a_s^\perp. \quad (5.135)$$

Entwicklung der CTS:

$$\frac{\partial(z_m - b)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_b^{z_m} v_x dz' - \frac{\partial}{\partial y} \int_b^{z_m} v_y dz' + a_m^\perp. \quad (5.136)$$

Entwicklung der Eisbasis bzw. Felsgrund-Oberseite:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_V} \left[ b - \left( b_0 - \frac{\rho}{\rho_a} H \right) \right]. \quad (5.137)$$

Temperatur und Wassergehalt:

*Temperaturgleichung kalter Bereich:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{2}{\rho c} EA(T') f(\sigma) \sigma^2. \quad (5.138)$$

*Temperatur temperierter Bereich:*

$$T = T_M = T_0 - \beta(h - z). \quad (5.139)$$

Wassergehaltsgleichung temperierter Bereich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + v_z \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\beta^2}{\rho L} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \\ + \frac{c\beta}{L} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \frac{\partial h}{\partial y} - v_z \right) &+ \frac{2}{\rho L} EA_t(\omega) f_t(\sigma) \sigma^2 - \frac{1}{\rho} D(\omega). \end{aligned} \quad (5.140)$$

Hier wurde ein zusätzlicher Term  $-D(\omega)/\rho$  eingeführt;  $D(\omega)$  ist die *Wasserdrainage-Funktion*, die einer negativen volumenmäßigen Wasserproduktion entspricht und einen einfachen Ansatz der Beschreibung der Wasserdrainage aus den temperierten Eisbe-  
reichen darstellt.

Temperaturgleichung Lithosphäre:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\kappa_r}{\rho_r c_r} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5.141)$$

Kalte freie Oberfläche:

$$T = T_s(x, y, t). \quad (5.142)$$

Kalte Eisbasis:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial z} - \kappa_r \frac{\partial T^+}{\partial z} = -(v_{sl})_x \sigma_{xz} - (v_{sl})_y \sigma_{yz}, \quad (5.143)$$

$$T = T^+. \quad (5.144)$$

Temperierte Eisbasis:

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0, \quad (5.145)$$

$$T = T^+ = T_M. \quad (5.146)$$

Felsgrundunterseite:

$$\kappa_r \frac{\partial T^-}{\partial z} = -Q_{\text{geoth}}^\perp. \quad (5.147)$$

Übergangsbedingungen CTS:

$$T^+ = T^-. \quad (5.148)$$

i)  $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) > 0$  (Schmelzbedingung):

$$\omega^- = 0, \quad (5.149)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial z} = \beta. \quad (5.150)$$

ii)  $-(w_x - v_{w,x}) \frac{\partial z_m}{\partial x} - (w_y - v_{w,y}) \frac{\partial z_m}{\partial y} + (w_z - v_{w,z}) < 0$  (Gefrierbedingung):

$$\kappa \left( \frac{\partial T^+}{\partial z} - \beta \right) - L\nu \frac{\partial \omega^-}{\partial z} = L\rho\omega^- a_m^\perp \quad (5.151)$$

Es sei daran erinnert (vgl. §3.2.5), daß die im allgemeinen Fall aufwendige Unterscheidung nach Schmelz- bzw. Gefrierbedingungen im Falle vernachlässigbarer Wasserdiffusion einfach nach dem Vorzeichen des Volumenflusses durch die CTS,  $a_m^\perp$ , erfolgt.

## 5.5 Spezifizierung physikalischer Größen

Die im vorigen Abschnitt zusammengestellten Gleichungen des polythermen SIA-Eismodells enthalten eine Reihe von noch unbestimmten physikalischen Größen. Diese sollen hier spezifiziert werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden im einzelnen verwendet:

*Kriechfunktion für kaltes und temperiertes Eis:*

Glen'sches Fließgesetz (vgl. z. B. Nye [22])

$$f(\sigma) = f_t(\sigma) = \sigma^{n-1} \quad \text{mit } n = 3. \quad (5.152)$$

*Rate-Faktor für kaltes Eis:* Arrhenius-Gesetz (Paterson [25])

$$A(T') = A_0 e^{-Q/R(T_0+T')}, \quad (5.153)$$

mit der Aktivierungsenergie  $Q$

$$\begin{aligned} Q &= 60 \text{ kJ mol}^{-1} & (T' < -10^\circ\text{C}), \\ Q &= 139 \text{ kJ mol}^{-1} & (T' \geq -10^\circ\text{C}), \end{aligned} \quad (5.154)$$

der universellen Gaskonstanten  $R$ , und als verbindendem Wert für die beiden Temperaturbereiche

$$A(T' = -10^\circ\text{C}) = 5.2 \cdot 10^{-25} \text{ s}^{-1} \text{ Pa}^{-3}. \quad (5.155)$$

*Rate-Faktor für temperiertes Eis:* Hierfür kann nach Lliboutry & Duval [18]

$$A_t(\omega) = A(T' = 0^\circ\text{C}) (1 + 184\omega) \quad (5.156)$$

angesetzt werden.

*Gleitgesetz für kalte Basis:* Haftbedingung

$$\mathbf{v}_{sl} = \mathbf{v}_b = \mathbf{0}; \quad (5.157)$$

*Gleitgesetz für temperierte Basis: Gleitgesetz vom Weertman-Typ*

$$\mathbf{v}_{sl} = \mathbf{v}_b = -\frac{C_{sl}}{\rho g} \frac{\|\mathbf{t}_{||}\|^p}{(\rho g H)^q} \frac{\mathbf{t}_{||}}{\|\mathbf{t}_{||}\|} \quad \text{mit } p = 3, q = 2, \quad (5.158)$$

woraus

$$\mathbf{v}_{sl} = \mathbf{v}_b = -C_{sl} H \|\text{grad } h\|^2 \text{grad } h \quad (5.159)$$

gemäß Calov [5] folgt; in dieser Arbeit wird für den Gleitkoeffizienten  $C_{sl} = 6 \cdot 10^4 \text{ a}^{-1}$  angegeben.

*Wasserdrainage-Funktion:*

Dies ist sehr problematisch, da darüber keine Daten vorhanden sind. Es wird daher ein pragmatischer Ansatz gewählt, der die Wasser-Drainage proportional zum Wassergehalt ansetzt, was gewährleistet, daß ein großer Wassergehalt auch eine große Drainage nach sich zieht:

$$D(\omega) = \rho D_0 \omega \quad (\text{mit } D_0 = 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}). \quad (5.160)$$

Der Drainagekoeffizient  $D_0$  ist so gewählt, daß der maximal erreichte Wassergehalt in den Modellläufen im Prozentbereich liegt, was gemessenen Werten entspricht.

Sonstige Größen sind in Tabelle 5.1 zusammengestellt.

Größe	Wert
Dichte von Eis $\rho$	$910 \text{ kg m}^{-3}$
Wärmeleitfähigkeit von Eis $\kappa$	$9.828 e^{-0.0057 T[K]} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Spezifische Wärme von Eis $c$	$(2127.5 + 7.253 T[^\circ\text{C}]) \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Latente Wärme von Eis $L$	$335 \text{ kJ kg}^{-1}$
Enhancement-Faktor $E$	3
Clausius-Clapeyron-Gradient $\beta$	$8.7 \cdot 10^{-4} \text{ K m}^{-1}$
Wasser-Diffusivität $\nu$	0
Dichte $\times$ spez. Wärme der Lithosphäre $\rho_r c_r$	$2000 \text{ kJ m}^{-3} \text{ K}^{-1}$
Wärmeleitfähigkeit der Lithosphäre $\kappa_r$	$3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Dicke der Lithosphäre $H_r$	5 km
Verzögerungszeit der Lithosphäre $\tau_V$	3000 a
Dichte der Asthenosphäre $\rho_a$	$3300 \text{ kg m}^{-3}$
Geothermer Wärmefluß $Q_{\text{geoth}}^\perp$	$0.042 \text{ W m}^{-2}$
Schwerebeschleunigung $g$	$9.81 \text{ m s}^{-2}$
Universelle Gaskonstante $R$	$8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Tabelle 5.1: Zusammenstellung der im Modell verwendeten physikalischen Größen. Referenzen:  $\rho$ ,  $E$ ,  $\beta$ ,  $Q_{\text{geoth}}^\perp$ : Calov [5],  $\tau_V$ ,  $\rho_a$ : Abe-Ouchi [1],  $\kappa$ ,  $c$ ,  $\rho_r c_r$ ,  $\kappa_r$ : Ritz [26],  $L$ : Blatter [3].

## 6 2-d-Eisschildsimulationen

In diesem Kapitel wird die Anwendung des in §5 beschriebenen polythermen Inlandeismodells auf zweidimensionale Eisschildgeometrien beschrieben. Es werden also zunächst nur vertikale Querschnitte von Eisschilden anstatt Eisschilde in ihrer vollen Dreidimensionalität betrachtet. Mathematisch bedeutet dies die Beschränkung auf die  $xz$ -Ebene, d. h., alle  $y$ -Abhängigkeiten im Modell werden vernachlässigt. Dies hat den Vorteil, daß der Rechenaufwand zur numerischen Lösung der Gleichungen relativ gering bleibt, so daß die Simulationen auf einer gewöhnlichen Workstation durchgeführt werden können, wohingegen dreidimensionale Simulationen mit realistischen Rechenzeiten nur auf Höchstleistungs-Vektorrechnern möglich sind (vgl. Huybrechts [17], Calov [5]).

### 6.1 Transformation des Modells auf $\sigma$ -Koordinaten

Das numerische Verfahren zur Lösung der polythermen Inlandeisgleichungen in zwei Dimensionen, auf welches im nächsten Abschnitt genauer eingegangen wird, verwendet finite Differenzen zur Diskretisierung der zeitlichen und räumlichen Ableitungen. Hierfür könnte ein numerisches Gitter in den kartesischen Koordinaten  $x, z$  verwendet werden (vgl. Herterich [9], Calov [5]), dies hat jedoch den Nachteil, daß dann zum einen die freie Oberfläche und die Eisbasis im allgemeinen nicht mit den Gitterpunkten zusammenfällt, was aufwendige Interpolationen nach sich zieht, und zum anderen in Randgebieten des betrachteten Eisschildes mit geringer Eisdicke nur noch sehr wenige Gitterpunkte innerhalb des Eisbereiches liegen. Um diese Probleme zu vermeiden, wird hier eine Transformation auf  $\sigma$ -Koordinaten  $\xi, \zeta, \tau$  durchgeführt, welche darin besteht, daß jede Vertikalsäule des Eisschildes, begrenzt durch  $z = b$  an der Eisbasis und  $z = h$  an der freien Oberfläche, auf das Intervall  $[0,1]$  abgebildet wird:

$$x = \xi, \quad \frac{z - b}{H} = \frac{e^{a\zeta} - 1}{e^a - 1}, \quad t = \tau. \quad (6.1)$$

Verwendung eines äquidistanten numerischen Gitters in diesen  $\sigma$ -Koordinaten stellt sicher, daß die freie Oberfläche und die Eisbasis exakt mit Gitterpunkten zusammenfällt, und daß weiterhin unabhängig von der tatsächlichen Eisdicke eine stets konstante Anzahl an Gitterpunkten in jeder Vertikalsäule zur Verfügung steht. Die Transformation (6.1) enthält eine zusätzliche exponentielle Streckung (Streckparameter  $a$ ), welche bewirkt, daß ein äquidistantes Gitter in  $\sigma$ -Koordinaten einem Gitter mit sich in Bodennähe stark verdichtenden Gitterpunkten im physikalischen Raum, beschrieben durch die kartesischen Koordinaten, entspricht (Abbildung 6.1). Dies ist wichtig, um sehr dünne temperierte Bereiche über der Eisbasis mit einer realistischen Anzahl an Gitterpunkten in der Vertikalen noch auflösen zu können (vgl. Funk, Echelmeyer & Iken [8], wo eine ähnliche Transformation angegeben wird). Eine lineare Transfor-

mation, wie sie von Huybrechts [17] und Abe-Ouchi [1] verwendet wird, ergibt sich aus (6.1) im Limes  $a \rightarrow 0$ .

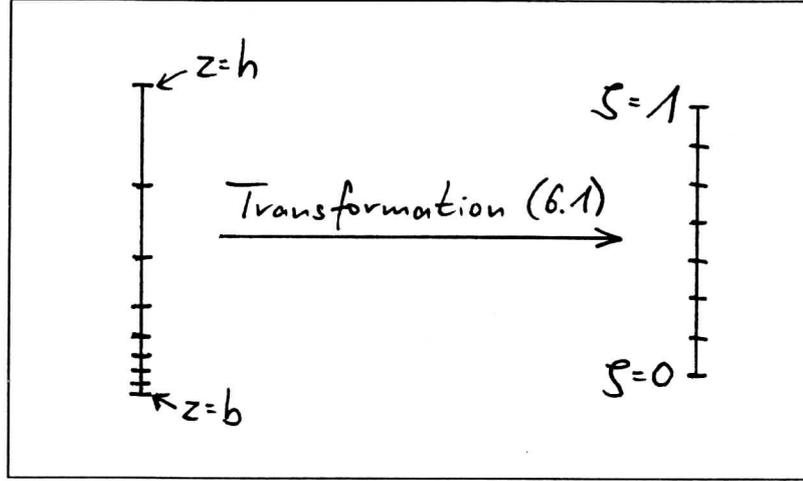


Abb. 6.1: Transformation auf gestreckte  $\sigma$ -Koordinaten.

Analog wird auch der Lithosphärenbereich auf  $\sigma$ -Koordinaten transformiert, jedoch besteht hier keine Notwendigkeit, die exponentielle Streckung einzuführen; statt dessen wird eine lineare Transformation der Lithosphären-Vertikalsäulen  $[b_r, b]$  auf das Intervall  $[0,1]$  verwendet:

$$x = \xi_r, \quad \frac{z - b_r}{H_r} = \zeta_r, \quad t = \tau_r; \quad (6.2)$$

$H_r = b - b_r$  bedeutet die Dicke der Lithosphäre.

Zur Formulierung des Modells in den oben definierten  $\sigma$ -Koordinaten benötigt man die Transformation von Ableitungen und vertikalen Integralen. Im Eisbereich gilt nach der Kettenregel (wobei  $(m, \mu) \in \{(x, \xi), (t, \tau)\}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} &= \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial \zeta}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{1}{H_a e^{a\zeta}} \left( (e^a - 1) \frac{\partial b}{\partial m} + (e^{a\zeta} - 1) \frac{\partial H}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{e^a - 1}{H_a e^{a\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (6.4)$$

und vertikale Integrale transformieren sich nach der Substitutionsregel gemäß

$$\int(\cdot) dz' = \int(\cdot) \frac{H_a e^{a\zeta'}}{e^a - 1} d\zeta'. \quad (6.5)$$

Analog ergibt sich die Transformation für den Lithosphärenbereich  $((m, \mu_r) \in \{(x, \xi_r), (t, \tau_r)\})$ :

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} + \frac{\partial \zeta_r}{\partial m} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} = \frac{\partial}{\partial \mu_r} - \frac{1}{H_r} \left( \frac{\partial b_r}{\partial m} + \zeta_r \frac{\partial H_r}{\partial m} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_r}, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta_r} = \frac{1}{H_r} \frac{\partial}{\partial \zeta_r}, \quad (6.7)$$

$$\int(\cdot) dz' = \int(\cdot) H_r d\zeta_r'. \quad (6.8)$$

Es sei angemerkt, daß Vektoren und Tensoren wie  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{T}$  bei der Transformation des Modells nicht in den Einheitsvektoren des krummlinigen, nicht-orthogonalen  $\sigma$ -Koordinatensystems dargestellt werden; statt dessen werden die kartesischen Komponenten der Vektoren und Tensoren bei der Transformation wie skalare Größen betrachtet. Mit Hilfe der oben formulierten Transformationsregeln können nun die in §5.4 zusammengestellten Gleichungen auf  $\sigma$ -Koordinaten transformiert werden. Es sei jedoch darauf verzichtet, die resultierenden, ziemlich länglichen Gleichungen hier einzeln aufzuführen.

## 6.2 Numerisches Lösungsverfahren

Ziel einer numerischen Lösung des polythermen Eismodells ist die Berechnung des Geschwindigkeits-, Temperatur- und Wassergehaltsfeldes sowie der Eisdicke, der Ausdehnung des Eisschildes auf dem zugrundeliegenden Kontinentalschelf und der Position der CTS als Funktion der Zeit bei gegebener Oberflächentemperatur und Akkumulations-Ablations-Funktion sowie gegebenem geothermen Wärmefluß an der Unterseite der Lithosphäre. Hierzu wird das Rechengebiet diskretisiert, d. h., über den Eis- und Lithosphärenbereich (in  $\sigma$ -Koordinatendarstellung) wird ein äquidistantes Gitter mit den Gitterweiten  $\Delta x = \Delta \xi = \Delta \xi_r$  in der Horizontalen und  $\Delta \zeta$  bzw.  $\Delta \zeta_r$  in der Vertikalen gelegt. Aufgrund besserer numerischer Stabilität wird für den Eisbereich ein "staggered grid" verwendet, wobei die Geschwindigkeitskomponenten  $v_x$  und  $v_z$  nicht auf, sondern zwischen den Gitterpunkten berechnet werden, und zwar  $v_x$  zwischen aufeinanderfolgenden Gitterpunkten in  $\xi$ -Richtung und  $v_z$  zwischen aufeinanderfolgenden Gitterpunkten in  $\zeta$ -Richtung (Abbildung 6.2).

Die Vorgehensweise bei den zeitlichen Iterationen ist in Abbildung 6.3 dargestellt; sie wird im folgenden detailliert beschrieben. Zur Lösung der Temperaturgleichungen für den Kalteis- bzw. Lithosphärenbereich (5.138), (5.141) in  $\sigma$ -Koordinaten werden diese Gleichungen mit einem Finite-Differenzen-Schema diskretisiert. Hierzu werden für die Zeitableitungen Vorwärts-Differenzen, für die Ableitungen nach  $\zeta$  bzw.  $\zeta_r$  implizite zentrale Differenzen und für die Ableitungen nach  $\xi$  explizite zentrale Differenzen verwendet, so daß für jede Vertikalsäule des Rechengebietes ein Tridiagonal-Gleichungssystem zu lösen ist. Eine Besonderheit ist die Diskretisierung des hori-

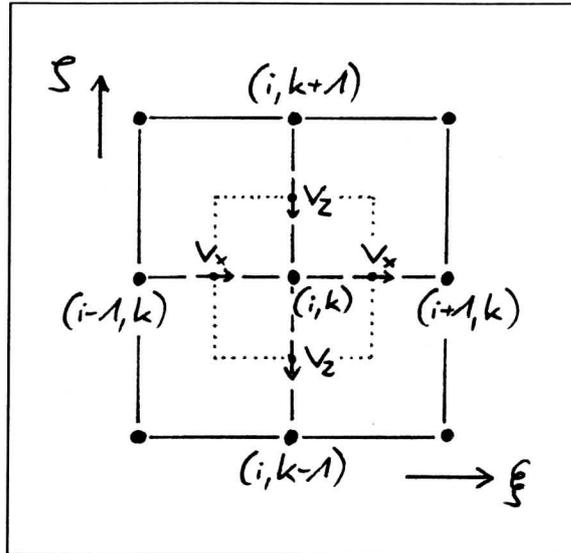


Abb. 6.2: Staggered grid für den Eisbereich.

zontalen Advektionsterms  $v_x(\partial T/\partial \xi)$  in der Temperaturgleichung für den Kalteisbereich, für den eine “upstream-Diskretisierung” verwendet wird (vgl. Calov [5]):

$$\begin{aligned} \left( v_x \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_{i,k} &\sim \frac{(v_x)_{i+1/2,k} - |(v_x)_{i+1/2,k}|}{2} \cdot \frac{T_{i+1,k} - T_{i,k}}{\Delta \xi} \\ &+ \frac{(v_x)_{i-1/2,k} + |(v_x)_{i-1/2,k}|}{2} \cdot \frac{T_{i,k} - T_{i-1,k}}{\Delta \xi}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dies entspricht einer Verschiebung des Punktes, um den herum diskretisiert wird, um eine halbe horizontale Gitterweite stromaufwärts, d. h., im Fall positiver  $v_x$  wird  $v_x(\partial T/\partial \xi)$  für die Stelle  $(i - 1/2, k)$ , im Fall negativer  $v_x$  dagegen für die Stelle  $(i + 1/2, k)$  diskretisiert, obwohl es eigentlich an der Stelle  $(i, k)$  benötigt wird. Der Grund für dieses Vorgehen liegt in der numerischen Stabilität; es hat sich gezeigt, daß eine Diskretisierung von Advektionstermen mit zentralen Differenzen Instabilitäten hervorbringt und daher ungeeignet ist.

Simultan mit der Berechnung des Temperaturfeldes wird die Position der CTS bestimmt. Dies geschieht dadurch, daß für jede Vertikalsäule im Falle einer temperierten Eisbasis das Temperaturfeld im Kalteisbereich zwischen  $z = z_m$  und  $z = h$  mit gegebener Oberflächentemperatur bei  $z = h$  und gegebener Schmelztemperatur bei  $z = z_m$  (Dirichlet-Bedingungen) berechnet wird, wobei zunächst die CTS-Position  $z_m$  des alten Zeitpunktes  $t_{\text{alt}}$  verwendet wird. Die CTS-Übergangsbedingungen (5.149), (5.150) bzw. (5.151) werden anschließend dazu ausgenutzt, die Position der CTS

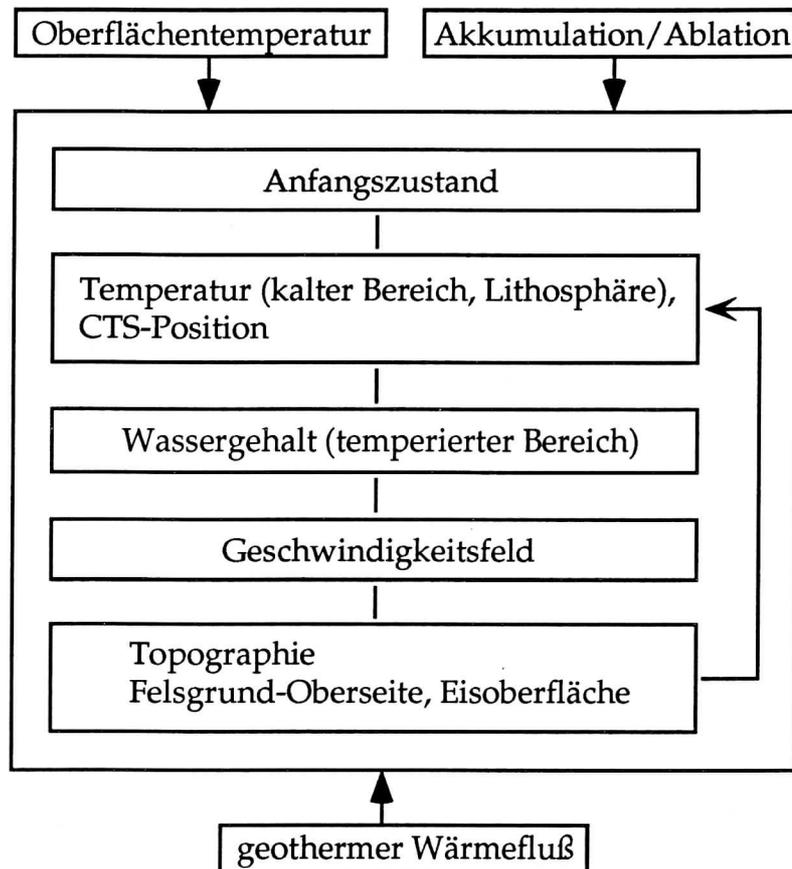


Abb. 6.3: Iterationsverfahren zur numerischen Lösung des polythermen Inlandeismodells.

zum neuen Zeitpunkt  $t_{\text{neu}} = t_{\text{alt}} + \Delta t$  zu bestimmen, indem die CTS-Position  $z_m$  so lange in vertikaler Richtung verschoben und das Temperaturfeld mit den beiden Dirichlet-Bedingungen neu berechnet wird, bis der Temperaturgradient an der CTS diese Übergangsbedingungen möglichst gut erfüllt<sup>5</sup>. Zur Berechnung des Volumenstroms durch die CTS  $a_m^\perp$ , welcher zur Unterscheidung zwischen Schmelz- und Gefrierbedingungen benötigt wird, wird die Eigengeschwindigkeit der CTS  $w$  gegen die Eisgeschwindigkeit  $v$  vernachlässigt, was eine quasistationäre Näherung für die Bewegung der CTS darstellt.

Anschließend wird der Wassergehalt in den temperierten Bereichen, deren Begrenzung zum Zeitpunkt  $t_{\text{neu}}$  nun bekannt ist, aus der Wassergehaltsgleichung (5.140) (auf  $\sigma$ -Koordinaten transformiert) bestimmt. Die Diskretisierung geschieht analog zur Diskretisierung der Temperaturgleichung, wie oben beschrieben. Trotz der Vernachlässigung der physikalischen Wasser-Diffusion wird in den Rechnungen  $\nu = 10^{-6} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$

<sup>5</sup>Die kinematische Gleichung (5.136) wird also zur Bestimmung der CTS-Position gar nicht verwendet.

als sehr kleine numerische Diffusion verwendet, um Instabilitäten des berechneten Wassergehalts zu dämpfen. Für die Randbedingung an der oberen Grenze der temperierten Bereiche, der CTS, muß festgestellt werden, ob Schmelz- oder Gefrierbedingungen vorliegen; dies geschieht über das Vorzeichen von  $a_m^\perp$ . Im Fall von Schmelzbedingungen ( $a_m^\perp > 0$ ) ist der Wassergehalt an der CTS gleich Null, während er bei Gefrierbedingungen ( $a_m^\perp < 0$ ) größer Null sein kann. Da aufgrund des numerischen Diffusionsterms auch in letzterem Fall eine obere Randbedingung notwendig ist, wird hierfür die Neumannsche Bedingung  $\partial\omega/\partial z = 0$  verwendet, welche eine sinnvolle Wahl darstellt, um das Ergebnis möglichst wenig zu beeinflussen.

Der dritte Schritt besteht in der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes für den neuen Zeitpunkt  $t_{\text{neu}}$  aus den Gleichungen (5.132) und (5.134) in  $\sigma$ -Koordinaten. Hierfür müssen lediglich Integrale numerisch berechnet werden, was unproblematisch ist. Das  $v_x$ -Integral wird mit der Trapezregel, das  $v_z$ -Integral mit der Tangentenregel bestimmt. Diese Quadraturverfahren sind beide von der Fehlerordnung  $O(\Delta\zeta^2)$ , jedoch ist bei der Berechnung von  $v_z$  die Tangentenregel aufgrund des staggered grid besser geeignet.

Schließlich ist die neue Bodentopographie und freie Oberfläche aus (5.135) und (5.137) in  $\sigma$ -Koordinaten zu berechnen. Die Zeitableitung in der Bodentopographiegleichung (5.137) wird durch Vorwärts-Differenzen diskretisiert. Zur Berechnung der neuen Eishöhen wird (5.135) mit Hilfe von (5.132) umgeformt. (5.132) kann in der Form

$$v_x = -\tilde{D}(x, z, t) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (6.10)$$

dargestellt werden; das ergibt in die 2-d-Version von (5.135) eingesetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_b^h \tilde{D}(x, z', t) dz' \frac{\partial h}{\partial x} \right) + a_s^\perp + \frac{\partial b}{\partial t} \\ &=: \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x, t) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + a_s^\perp + \frac{\partial b}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dies hat die Form einer Diffusionsgleichung mit ortsabhängiger Diffusionskonstante  $D$ , welche bei der Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes durch eine weitere numerische Integration mitberechnet wird. Zur Diskretisierung dieser Gleichung in  $\sigma$ -Koordinaten werden die Zeitableitung mit Vorwärts-Differenzen und die  $\xi$ -Ableitungen mit impliziten zentralen Differenzen dargestellt, so daß zur Berechnung der neuen Eishöhen ein Tridiagonal-Gleichungssystem gelöst werden muß.

Abschließend wird die Modellzeit um einen Zeitschritt  $\Delta t$  erhöht, und das Iterationsschema beginnt von neuem. Der Modellauf wird beendet, sobald eine vorgegebene Endzeit erreicht wird.

Die Programmierung des oben beschriebenen Verfahrens erfolgt in der Programmiersprache Fortran 77. Im Rahmen dieser Arbeit ist so ein Programmpaket mit

dem Namen SICOPOLIS (*Simulation Code for Polythermal Ice Sheets*) entstanden, welches für den Gebrauch auf Workstations konzipiert ist. Die Programmstrukturen sind jedoch zusätzlich auf gute Vektorisierbarkeit ausgelegt, so daß SICOPOLIS auch auf Höchstleistungs- Vektorrechnern effizient verwendet werden kann.

### 6.3 Modellrechnungen für das EGIG-Profil des grönländischen Inlandeises

Als Grundlage für eine konkrete Anwendung des oben beschriebenen numerischen 2-d-Modells SICOPOLIS wird das gut bekannte und vermessene EGIG-Profil (EGIG: Expédition Glaciologique International au Groenland, Hofmann [10]) verwendet. Hierbei handelt es sich um einen West-Ost-Querschnitt durch das grönländische Inlandeis bei etwa  $70 - 72^\circ$  nördlicher Breite, welcher in seinem westlichen Teil entlang einer Fließlinie, d. h., entlang des maximalen Oberflächengradienten, verläuft, im östlichen Teil dagegen nordwärts abweicht (Abbildung 6.4). Für die Rechnungen wird daher der westliche Teil des EGIG-Profils so nach Osten verlängert, daß es auch dort einer Fließlinie folgt (Abe-Ouchi [1]); das so erhaltene Profil wird im folgenden als EGIG1 bezeichnet.

#### 6.3.1 Daten für die Oberflächentemperatur

In Ohmura [23] sind umfangreiche Oberflächentemperaturdaten für das gesamte grönländische Inlandeis unter dem gegenwärtigen Klima zusammengestellt. Calov [5] hat diese Daten näherungsweise als lineare Funktion der geographischen Breite  $\phi$  und der Höhe über Normal Null  $z$  dargestellt. Für  $\phi = 70^\circ$  erhält man aus dieser Darstellung

$$T_s^0(z) = T_0 - \gamma z, \quad (6.12)$$

mit  $T_0 = -3.5^\circ\text{C}$  als Temperatur auf Meeresniveau und dem vertikalen atmosphärischen Temperaturgradienten  $\gamma = -8^\circ\text{C}/\text{km}$ . Dies soll hier verwendet werden.

Zur Modellierung anderer Klimabedingungen wie etwa des eiszeitlichen Klimas wird der Einfachheit halber angenommen, daß diese Verteilung erhalten bleibe und sich lediglich als ganzes um eine konstante Temperaturdifferenz  $\Delta T_s$  verschiebt. Für ein eiszeitliches Klima ist  $\Delta T_s = -10^\circ\text{C}$  ein geeigneter Wert.

#### 6.3.2 Daten für die Akkumulations-Ablations-Funktion

Die Akkumulations-Ablations-Funktion  $a_s^\pm$  setzt sich zusammen aus dem Schneefall auf das Eis (positiv gezählt) und dem oberflächlichen Abschmelzen (negativ gezählt) in Eis-Äquivalenten. Für Grönland unter heutigen Bedingungen haben Ohmura & Reeh [24] hierzu umfangreiches Datenmaterial zusammengestellt. Weiterhin existiert eine einfache Parameterisierung der Akkumulations-Ablations-Funktion als

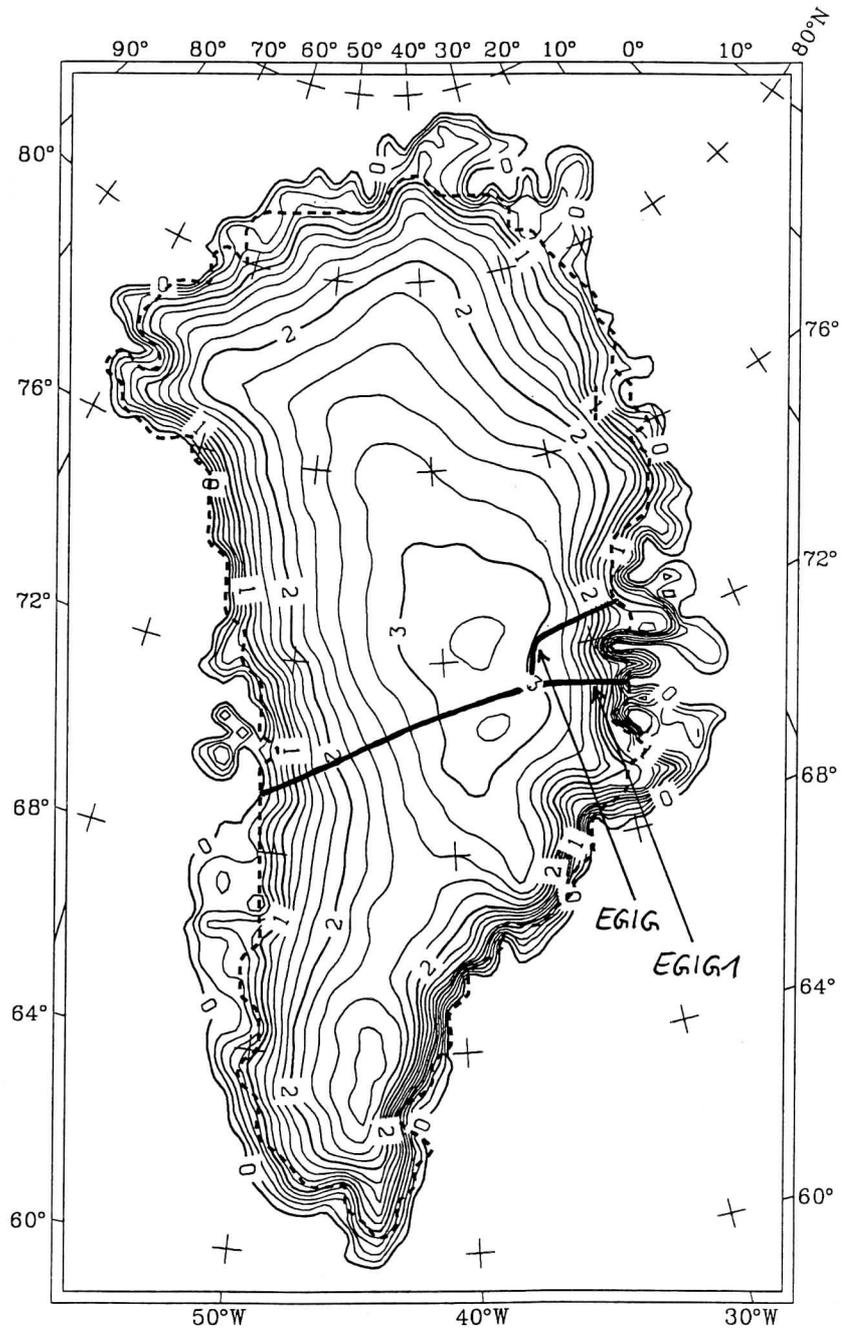


Abb. 6.4: Das grönländische Eisschild mit Isolinien der Oberflächentopographie in km über Normal Null (Darstellung von Calov [5]). Dick eingezeichnet ist das EGIG-Profil, welches im Osten nach Norden hin abknickt, sowie das im Osten modifizierte Profil EGIG1 entlang einer Fließlinie.

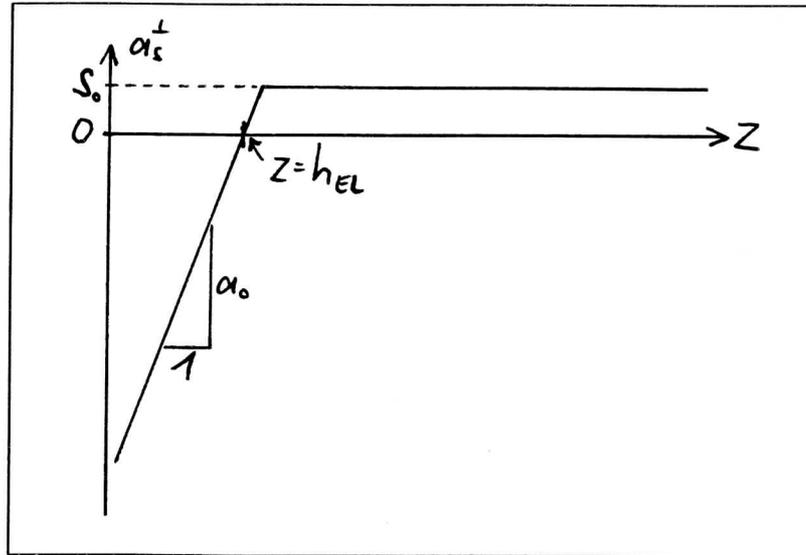


Abb. 6.5: Parameterisierung der Akkumulations-Ablations-Funktion.

Funktion der Höhe über Normal Null (vgl. Herterich [9], Abbildung 6.5). Diese Parameterisierung verwendet drei Parameter, nämlich die Schneefallrate  $S_0$ , die Höhe der Gleichgewichtslinie über Normal Null  $h_{EL}$  (Höhe, bei der der Schneefall im Jahresmittel gerade vom Schmelzen kompensiert wird, so daß  $\alpha_s^\perp = 0$  wird) und den Schmelzgradienten  $a_0$ , und lautet

$$\alpha_s^\perp = \min (S_0, a_0(z - h_{EL})) . \quad (6.13)$$

Abe-Ouchi [1] verwendet zur Beschreibung des heutigen Klimas für die drei Parameter die Werte

$$\begin{aligned} S_0 &= 0.3 \text{ m a}^{-1}, \\ h_{EL} &= 1100 \text{ m}, \\ a_0 &= 0.005 \text{ a}^{-1}; \end{aligned} \quad (6.14)$$

eiszeitliches Klima ( $\Delta T_s = -10^\circ\text{C}$ , vgl. vorigen Abschnitt) wird durch den Parametersatz

$$\begin{aligned} S_0 &= 0.15 \text{ m a}^{-1}, \\ h_{EL} &= 100 \text{ m}, \\ a_0 &= 0.005 \text{ a}^{-1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

dargestellt. Dies wird hier übernommen. Für Übergangs- oder wärmere Klimate sei hier angenommen, daß die drei Parameter linear an die Oberflächentemperatur  $\Delta T_s$ ,

gekoppelt sind. Mit Hilfe der beiden Sätze (6.14) und (6.15) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} S_0 &= (0.3 + 0.015 \Delta T_s [^\circ\text{C}]) \text{ m a}^{-1}, \\ h_{\text{EL}} &= (1100 + 100 \Delta T_s [^\circ\text{C}]) \text{ m}, \\ a_0 &= 0.005 \text{ a}^{-1}; \end{aligned} \tag{6.16}$$

die Parameter des Akkumulations-Ablations-Modells sind hiermit eindeutig durch Vorgabe der Oberflächentemperatur  $\Delta T_s$  bestimmt.

### 6.3.3 Modellläufe

Im folgenden werden drei verschiedene Modellläufe mit SICOPOLIS präsentiert. Lauf rg001 stellt einen Gleichgewichtslauf unter heutigen Bedingungen dar, d. h.,  $T_s$  wird zeitlich konstant auf dem Wert  $T_s^0(z)$  gehalten, und die Iteration wird hinreichend lange durchgeführt, so daß das resultierende Eisschild seinen stationären Zustand erreicht. Als Anfangszustand wird ein Zustand ohne Vereisung und mit entspanntem Boden ( $b = b_0$ , Gleichgewichtsposition der Lithosphärenoberseite ohne Eislast) gewählt, und die Iteration läuft über 200000 Modelljahre. Lauf rg002 ist analog zu Lauf rg001, jedoch wird hier der stationäre Zustand unter eiszeitlichen Bedingungen  $T_s = T_s^0(z) + \Delta T_s$  mit  $\Delta T_s = -10^\circ\text{C}$  simuliert. Exemplarisch für ein transientes Szenario wird schließlich in Lauf rt001 eine Simulation über zwei idealisierte Eiszeit-Warmzeit-Zyklen vorgestellt, wobei ein solcher Zyklus durch einen sinusförmigen Verlauf von  $\Delta T_s$  mit den Extremwerten  $\Delta T_s = 0$  und  $\Delta T_s = -10^\circ\text{C}$  und einer Periode von 100000 a modelliert wird. Als Anfangszustand wird hier das in Lauf rg001 erhaltene Gleichgewicht unter heutigen Bedingungen verwendet.

Für die numerischen Parameter haben sich folgende Werte als geeignet erwiesen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 20 \text{ km}, \\ \Delta \zeta &= 0.0125, \\ \Delta \zeta_r &= 0.1, \\ \Delta t &= 2.5 \text{ a}, \\ a &= 5; \end{aligned} \tag{6.17}$$

dies entspricht bei einer Länge des EGIG1-Profiles von Küste zu Küste von 800 km 41 Gitterpunkten in der Horizontalen (Laufindex  $i = 0 \dots 40$ ), 81 Gitterpunkten in der Vertikalen im Eisbereich ( $k = 0 \dots 80$ ) und 11 Gitterpunkten in der Vertikalen im Lithosphärenbereich ( $k_r = 0 \dots 10$ ).

In Abbildung 6.6 sind die Ergebnisse der Läufe rg001 und rg002 in Form von Zeitserien der maximalen Höhe des Eisschildes über Normal Null  $h_{\text{max}}$ , der gesamten Querschnittsfläche  $A_{\text{ges}}$ , der Fläche der temperierten Bereiche  $A_t$  und der Länge der temperierten Eisbasis  $L_{t,b}$  dargestellt. Es zeigt sich hierbei, daß die Maximalhöhe und

Querschnittsfläche im eiszeitlichen Gleichgewicht größer sind als im heutigen Gleichgewicht. Dies ist im übrigen nicht selbstverständlich, da unter eiszeitlichen Bedingungen zwar die Temperatur niedriger ist, was langsames Fließen und geringeres Schmelzen bewirkt, jedoch auch der Niederschlag um die Hälfte reduziert ist (vgl. Gl. (6.16)). Temperierte Bereiche mit nichtverschwindender Dicke treten nur im Falle heutiger Klimabedingungen auf; das eiszeitliche Klima ist dafür offensichtlich zu kalt. Jedoch machen diese auch im ersteren Fall weniger als 1% der gesamten Querschnittsfläche aus und beschränken sich auf eine wenige Meter dicke basale Schicht im westlichen Bereich des EGIG1-Profiles. Eine teilweise temperierte *Eisbasis* ist bei beiden Simulationen vorhanden; unter heutigen Klimabedingungen stärker ausgeprägt als unter eiszeitlichen.

Auffällig ist in diesem Zusammenhang die starke Oszillation der Ausdehnung der temperierten Eisbasis in beiden Fällen. Man denkt hier zuerst an numerische Instabilitäten, jedoch haben weitere Simulationen gezeigt, daß die Oszillationen praktisch vollständig verschwinden, wenn anstelle von basalem Gleiten nur bei temperierter, nicht aber bei kalter Eisbasis (vgl. (5.157), (5.158)) basales Gleiten überall oder nirgends angenommen wird. Dies weist auf einen physikalischen Ursprung der Oszillationen hin, was weiter unten noch diskutiert wird.

Die Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen Ergebnisse des transienten Laufes rt001. In Abbildung 6.7 werden Zeitserien analog denen der Läufe rg001 und rg002 dargestellt, und Abbildung 6.8 repräsentiert den Zustand des EGIG1-Profiles am Ende des Laufes, was als Näherung für den heutigen Zustand betrachtet werden kann. Bei Betrachtung der Zeitserien stellt man zunächst fest, daß der Einschwingvorgang bereits nach 50000 Modelljahren bereits in guter Näherung abgeschlossen ist. Danach folgen die aufgetragenen Größen dem eingprägten Sinus der Oberflächentemperatur  $T_s$ , wobei die Phasenverschiebung im Falle der Maximalhöhe  $h_{\max}$  und der Querschnittsfläche  $A_{\text{ges}}$  bei etwa 40000 Jahren liegt (etwas mehr nach den den Oberflächentemperatur-Maxima folgenden Minima, etwas weniger nach den den Oberflächentemperatur-Minima folgenden Maxima); es liegt also fast eine Phasendrehung vor. Für die Fläche der temperierten Bereiche  $A_t$  und die Länge der temperierten Eisbasis  $L_{t,b}$  ist die Phasenverschiebung dagegen wesentlich geringer.

Auch hier tritt wie bei den Gleichgewichtsläufen eine starke hochfrequente Oszillation von  $L_{t,b}$  auf. Des weiteren sieht man deutlich ausgeprägte Oszillationen für  $h_{\max}$  und  $A_{\text{ges}}$ , welche jedoch interessanterweise nicht immer, sondern nur zu eiszeitlichen Klimabedingungen auftreten (dies gilt auch für die Gleichgewichtszustände der Läufe rg001 und rg002, ist jedoch aufgrund der anderen Achsskalierung in den gezeigten Zeitserien nicht gut zu erkennen). Es ist eine deutliche Korrelation zwischen dem Verschwinden dieser Oszillationen und dem Vorhandensein einer nichtverschwindenden Fläche temperierter Bereiche  $A_t$  zu erkennen, so daß die temperierten Bereiche offenbar einen dämpfenden Einfluß auf die Oszillationen haben. Auch die Oszillationen von  $L_{t,b}$  sind dann deutlich geringer, wenn auch nicht gänzlich verschwunden.

Eine physikalische Erklärung für das Auftreten solcher Oszillationen könnte wie folgt aussehen: Geht man von einem Zustand mit großem  $L_{t,b}$  aus, so herrschen im Eisschild aufgrund des angenommenen Gleitens bei temperierter Eisbasis relativ große Fließgeschwindigkeiten vor. Dadurch fließt das Eisschild schnell auseinander, was einen Rückgang der Maximalhöhe und Querschnittsfläche nach sich zieht. Gleichzeitig bewirken die hohen Geschwindigkeiten eine verstärkte Advektion von sehr kaltem Eis in die unteren Eisbereiche, so daß irgendwann ein Teil der vormals temperierten Eisbasis kalt wird. Dann schaltet die basale Gleitbedingung jedoch von Gleiten zu Haften um, die Geschwindigkeiten werden geringer, und das Eisschild gewinnt wieder an Querschnittsfläche und Maximalhöhe. Dies geht solange, bis aufgrund zunehmender Isolierung der Basis des dicker werdenden Eisschildes von der sehr kalten Oberfläche und schwächerer Advektion nach unten wieder eine Vergrößerung der temperierten Eisbasis auftritt, was die Fließgeschwindigkeiten wieder erhöht; der Prozeß beginnt dann von vorne.

Es gibt eine beobachtete Evidenz für das Auftreten solcher hochfrequenter Oszillationen bei natürlichen Eisschilden unter eiszeitlichen Klimabedingungen. Hierbei handelt es sich um die sogenannten Heinrich Events (Heinrich [9]), welche plötzliche heftige Vorstöße des eiszeitlichen nordamerikanischen Eisschildes ("Laurentisches Eisschild") nach Osten in den Nordatlantik darstellen, die sich in Tiefsee-Sedimenten widerspiegeln und etwa alle 7000 Jahre auftraten. Nach einem Erklärungsansatz von MacAyeal [20,21] könnte ein ähnlicher Prozeß wie oben beschrieben für dieses interessante Phänomen verantwortlich sein.

Abschließend seien einige Bemerkungen zu Abbildung 6.8 angebracht. Das Geschwindigkeitsfeld zeigt sehr schön das Auseinanderfließen des Eisschildes, wobei die Geschwindigkeiten in Randnähe deutlich größer als in den zentralen Bereichen sind. Die Isolinien des homologen Temperaturfeldes verdichten sich in Bodennähe, was auf den advektiven Transport von sehr kaltem Oberflächeneis in die Tiefe zurückzuführen ist. Derselbe Effekt zusammen mit den großen Geschwindigkeiten in den Randbereichen des EGIG1-Profiles bewirkt dort eine Inversion der Temperaturverteilung: Das Eis wird mit zunehmender Tiefe zunächst kälter und erst ab einer bestimmten Position mit weiter zunehmender Tiefe wärmer, was aufgrund des geothermen Wärmeflusses von unten eigentlich überall der Normalzustand wäre. Schließlich zeigt sich, daß vor allem im Westteil, aber auch ganz im Osten des EGIG1-Querschnittes Bereiche mit temperierter Eisbasis auftreten; temperierte Bereiche mit nichtverschwindender Höhe über der Basis finden sich jedoch nur im Westen, und dort auch nur mit sehr geringen Dicken von einigen Metern.

# Versuche rg001, rg002

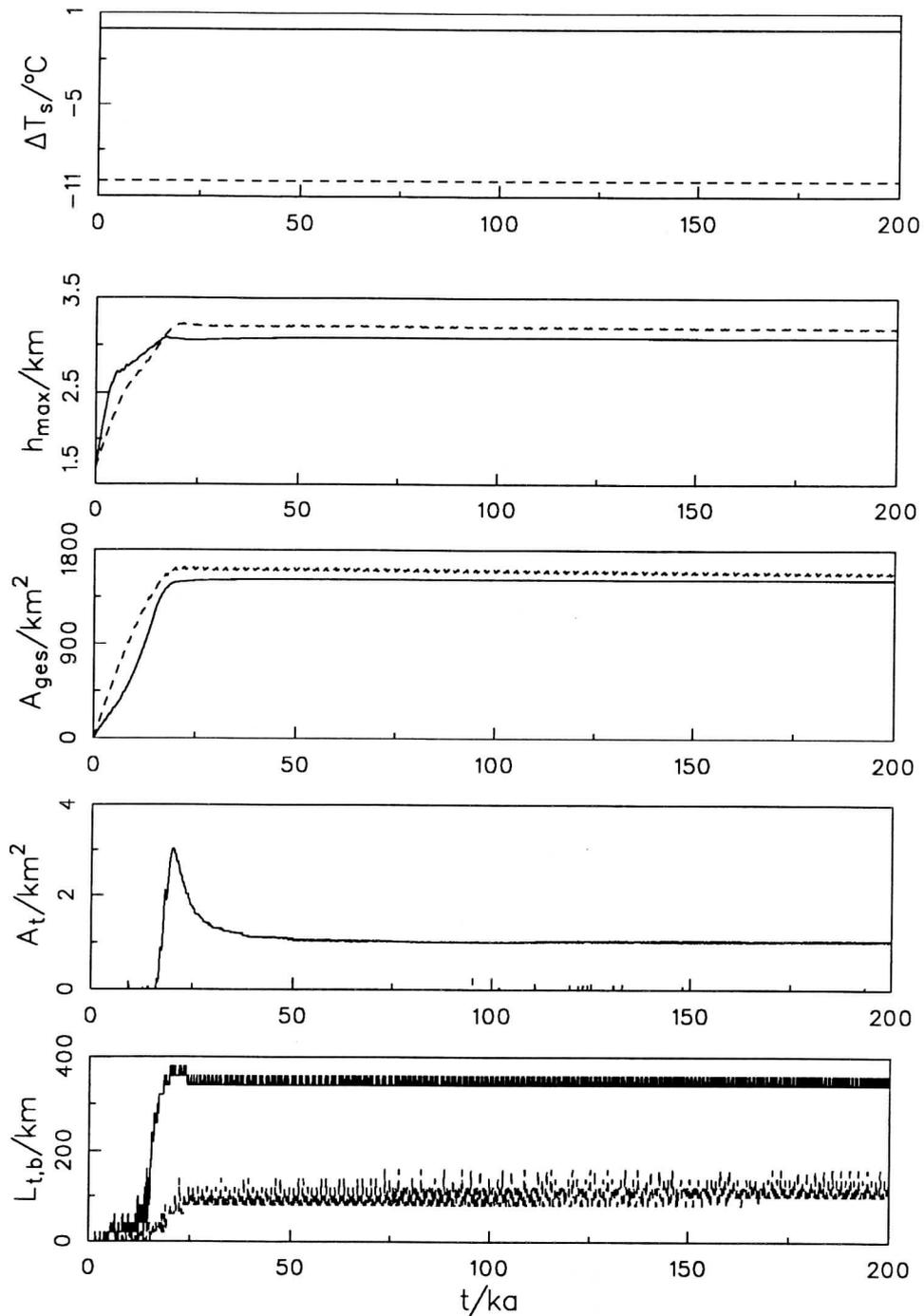


Abb. 6.6: Zeitserien der vorgegebenen Oberflächentemperatur  $T_s$  sowie der berechneten Größen Maximalhöhe über Normal Null  $h_{\text{max}}$ , gesamte Querschnittsfläche  $A_{\text{ges}}$ , Fläche der temperierten Bereiche  $A_t$  und Länge der temperierten Basis  $L_{t,b}$  für die beiden Gleichgewichtsläufe rg001 (durchgezogene Linien) und rg002 (gestrichelte Linien) unter heutigen bzw. eiszeitlichen Bedingungen.

# Versuch rt001

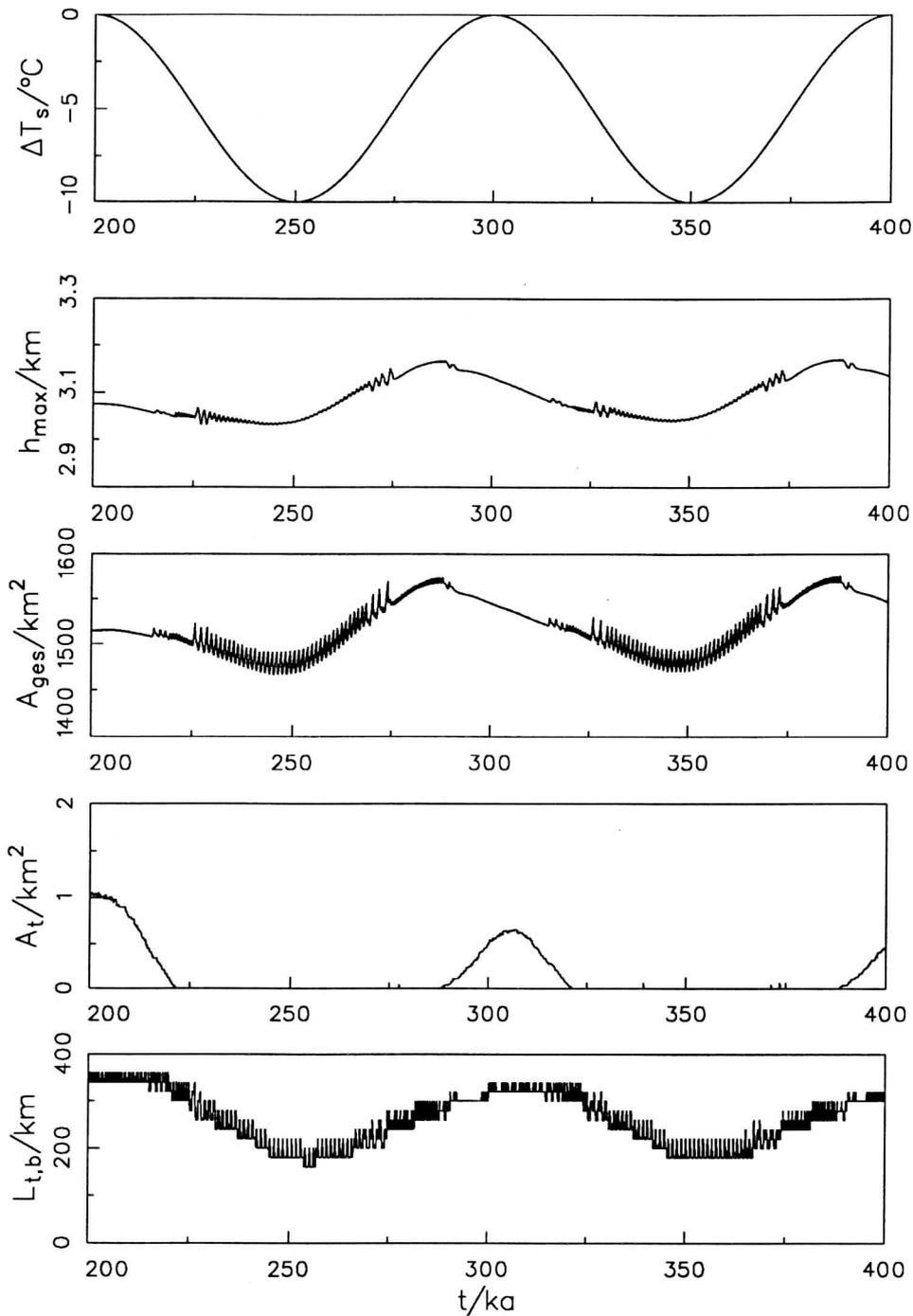


Abb. 6.7: Zeitserien der vorgegebenen Oberflächentemperatur  $T_s$  sowie der berechneten Größen Maximalhöhe über Normal Null  $h_{\text{max}}$ , gesamte Querschnittsfläche  $A_{\text{ges}}$ , Fläche der temperierten Bereiche  $A_t$  und Länge der temperierten Basis  $L_{t,b}$  für den transienten Lauf rt001 über zwei idealisierte Eiszeitzyklen hinweg.

# Versuch rt001

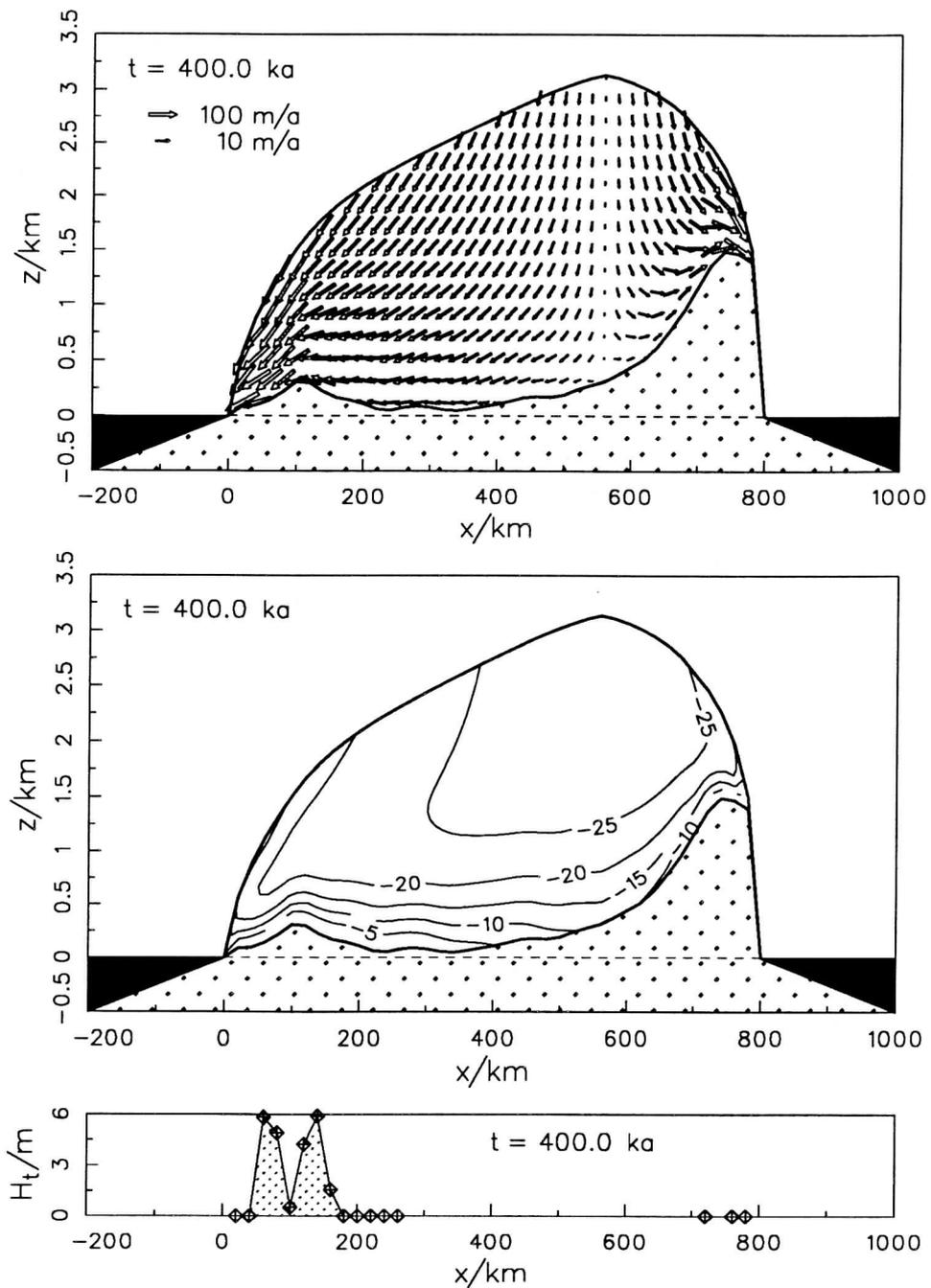


Abb. 6.8: Endzustand des modellierten EGIG1-Profiles von Lauf rt001. Oben: Geschwindigkeitsfeld. Mitte: Isolinien der homologen Temperatur. Unten: Dicke der basalen temperierten Bereiche (ein Diamantsymbol auf der  $x$ -Achse bedeutet, daß an diese Stelle die Eisbasis temperiert ist, jedoch keine temperierte Eissäule darüber existiert).

## Literatur

- [1] Abe-Ouchi, A., 1993 *Ice sheet response to climatic changes: a modelling approach*. Dissertation, Geographisches Institut, ETH Zürich.
- [2] Becker, E. & Bürger, W., 1975 *Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher Mechanik.
- [3] Blatter, H., 1991 *Effect of climate on the cryosphere*. Zürcher Geographische Schriften, Heft 41.
- [4] Blatter, H. & Hutter, K., 1991 *Polythermal conditions in arctic glaciers*. Journal of Glaciology, Vol. 37, No. 126, 261-269.
- [5] Calov, R., 1993 *Das thermomechanische Verhalten des grönländischen Eisschildes unter der Wirkung verschiedener Klimaszenarien – Antworten eines theoretisch-numerischen Modells*. Dissertation, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [6] Fowler, A. C., 1984 *On the transport of moisture in polythermal glaciers*. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, 28, 99-140.
- [7] Fowler, A. C. & Larson, D. A., 1978 *On the flow of polythermal glaciers. I. Model and preliminary analysis*. Proceedings Royal Society London, Ser. A, 363, 217-242.
- [8] Funk, M., Echelmeyer, K. & Iken, A., 1994 *Mechanisms of fast flow in Jacobs-havns Isbræ, Greenland: Part II. Modelling of englacial temperatures and comparison with measured ones*. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [9] Heinrich, H., 1988 *Origin and consequences of cyclic ice rafting in the northeast Atlantic Ocean during the past 130000 years*. Quat. Res. N.Y., 29, 143-152.
- [9] Herterich, K., 1990 *Modellierung eiszeitlicher Klimaschwankungen*. Habilitationsschrift, Fachbereich Geowissenschaften, Universität Hamburg.
- [10] Hofmann, W., 1974 *Die Internationale Glaziologische Grönland-Expedition EGIG*. Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie, 5, 217-224.
- [11] Hutter, K., 1982 *A mathematical model of polythermal glaciers and ice sheets*. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, Vol. 21, 201-224.
- [12] Hutter, K., 1982 *Dynamics of glaciers and large ice masses*. Ann. Rev. Fluid Mech., 14, 87-130.

- [13] Hutter, K., 1983 *Theoretical glaciology; material science of ice and the mechanics of glaciers and ice sheets*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- [14] Hutter, K., 1990 *Mechanik umweltrelevanter Systeme*. Vorlesungsskript, Institut für Mechanik, TH Darmstadt.
- [15] Hutter, K., 1993 *Thermo-mechanically coupled ice sheet response. Cold, polythermal, temperate*. Journal of Glaciology, Vol. 39, No. 131, 65-86.
- [16] Hutter, K., Blatter, H. & Funk, M., 1988 *A model computation of moisture content in polythermal glaciers*. Journal of Geophysical Research, Vol. 93, No. B10, 12205-12214.
- [17] Huybrechts, P., 1992 *The Antarctic ice sheet and environmental change: a three-dimensional modelling study*. Berichte zur Polarforschung 99 (1992), Alfred-Wegener-Institut Bremerhaven.
- [18] Lliboutry, L. & Duval, P., 1985 *Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies*. Annales Geophysicae, 1985, 3, 2, 207-224.
- [20] MacAyeal, D. R., 1994 *Binge/purge oscillations of the Laurentide ice sheet as a cause of the North Atlantic's Heinrich Events*. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [21] MacAyeal, D. R., 1994 *A low-order model of the Heinrich Event cycle*. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [19] Morland, L. W., 1984 *Thermo-mechanical balances of ice sheet flows*. Journal of Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, Vol. 29, 237-266.
- [20] Morland, L. W., 1992 *The flow of ice sheets and ice shelves*. IUTAM International Summer School, Udine 1992.
- [21] Müller, I., 1973 *Thermodynamik*. Bertelsmann Universitätsverlag.
- [22] Nye, J. F., 1957 *The distribution of stress and velocity in glaciers and ice-sheets*. Proceedings Royal Society London, Ser. A, 239, 113-133.
- [23] Ohmura, A., 1987 *New temperature distribution maps for Greenland*. Zeitschrift für Gletscherkunde und Glazialgeologie, 23, 1-45.
- [24] Ohmura, A. & Reeh, N., 1991 *New precipitation and accumulation maps for Greenland*. Journal of Glaciology, Vol. 37, 140-148.

- [25] Paterson, W. S. B., 1981 *The physics of glaciers*. Pergamon Press.
- [26] Ritz, C., 1987 *Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets*. In: Waddington, E. D. & Walder, J. S., 1987: The physical basis of ice sheet modelling. IAHS Publication No. 170.
- [27] Svendsen, B., Greve, R. & Hutter, K., 1994 *Classical mixture model for polythermal ice*. Zur Veröffentlichung eingereicht.