



Research Paper

DOI : 10.5281/zenodo.3738699

Open access



## Solution analytique pour l'analyse de la vibration libre des plaques fonctionnellement gradée FGP avec des porosités

Analytical solution for free vibration analysis of plates functionally graded FGP with porosities

**Slimane MERDACI**

Laboratoire des Structures et Matériaux Avancés dans le Génie Civil et Travaux Publics, Département de Génie Civil & Travaux Publics, Université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbès, Algérie.

### ARTICLE INFO

Article history:

Received 23 November 19

Accepted 23 December 19

Mots clés:

FGM - Plaques; Porosité; Vibration libre; Théorie d'ordre élevé

Keywords :

FG-Plates; Porosity; Free vibration; High order theory.

### RÉSUMÉ

Dans ce travail, une solution analytique pour l'analyse de la vibration libre des plaques en matériau fonctionnellement gradué (FGM) est présentée, en considérant les porosités qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. Une méthode basée sur la théorie d'ordre élevé sera présentée pour étudier la vibration libre des plaques FGM. La théorie proposée contient quatre inconnues contrairement aux autres théories. Les équations d'équilibre sont obtenues en utilisant le principe Hamilton et la solution du problème en termes de fréquences naturelles sera obtenue par le biais de la solution de Navier. Des résultats numériques de la présente méthode sont comparés avec ceux de la littérature. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et le facteur de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sont tous discutés.

### ABSTRACT

In this paper, an analytical solution for the analysis of the free vibration of plates in functionally graded material (FGM) is presented, considering the porosities that can occur inside the materials with gradient properties (FGM) during of their manufacture. A method based on high order theory will be presented to study the free vibration of FGM plates. The proposed theory contains four unknowns unlike other theories. The governing equations are obtained through the Hamilton's principal and the closed form solutions in terms of natural frequencies are obtained by using Navier technique. The numerical results obtained through the present analysis are compared with the ones available in the literature. The effects of various parameters, such as thickness ratio, gradient index, and porosity factor on the free vibration of FGM plates are all discussed.

## 1 Introduction

Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials, FGM), sont des matériaux composites avancés constitués de deux phases constituantes ou plus. Les FGM présentent de nombreux avantages pour les composants structurels d'ingénierie. Contrairement aux composites stratifiés à matrice-fibres, les FGM n'ont pas de problèmes de décollement ou de délaminage qui résultent de la grande concentration des contraintes inter-lamellaires.

\* Corresponding author.

E-mail address: slimanem2016@gmail.com

Ces matériaux FGM ayant une variation graduelle et continue des fractions volumiques de chaque constituant, générant des changements en conséquence des propriétés des matériaux, éliminant les discontinuités au niveau des interfaces alors que les caractéristiques des matériaux constituants sont préservées. Ils peuvent donc allier entre les propriétés des deux constituants totalement différents sans que l'un fasse des concessions au profit de l'autre. C'est ainsi qu'un FGM constitué de métal et de céramique combinera la dureté et l'usinabilité du métal à la résistance à la chaleur, à l'usure et à l'oxydation de la céramique. Ce sont donc des matériaux émergents capables de répondre à des cahiers des charges multicritères. Cette nouvelle classe de matériaux a suscité une attention particulière et un intérêt grandissant ces trois dernières décennies. Leur utilisation est en progression croissante dans les domaines de l'aéronautique, l'aérospatial, le génie civil, les ouvrages de travaux publics et bien d'autres secteurs où ils peuvent servir de barrières thermiques vue leur composition riche en céramique. De ce qui précède, Il est donc nécessaire de définir des lois de comportement adaptées à ces possibilités de fonctionnement des pièces ou éléments élaborés à partir de ces matériaux.

Le concept de "Matériaux à Gradient de propriétés" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial en 1984 par un groupe de scientifiques au Japon (M. Niino et ses collègues à Sendai). Les FGM sont microscopiquement inhomogènes (hétérogènes) et des matériaux composites spatiaux qui sont généralement composés de deux matériaux différents tels que le céramique et du métal ou de céramique-polymère. La composition du matériau change progressivement dans toute la direction de l'épaisseur.

Sur la base de la littérature ouverte, il semble que de nombreux chercheurs ont porté une attention particulière à l'analyse des structures de FGM présentant des porosités. La plupart de ces études portent sur le comportement vibratoire des structures poreuses FG [1–7]. Les autres chercheurs se concentrent uniquement sur le flambement [8–11] ou les vibrations et le flambement [12–15] de nombreuses structures poreuses. Behravan Rad [16] a présenté la réponse statique de structures hétérogènes poreuses multidirectionnelles reposant sur les fondations élastiques à gradient développées [17].

Dans la littérature on trouve plusieurs théories des plaques, les plus connues sont la théorie classique des plaques (CPT), la théorie des plaques du premier ordre (FSDT) et la théorie des plaques d'ordre élevé (HSDPT). Le modèle CPT est basé sur l'hypothèse de Kirchhoff-Love qui est la théorie la plus simple des plaques et qui stipule que les lignes droites restent droites et perpendiculaires au plan médian après déformation. Ces hypothèses impliquent l'annulation de la déformation normale et du cisaillement et, par conséquent, elles négligent les effets de cisaillement et de déformation normale.

Woo et al. [18] ont étudié la vibration non linéaire des plaques FG dans des environnements thermiques. Les équations non linéaires issues de la CPT avec des hypothèses de Von-Karman ont été résolues pour les plaques FG avec des conditions aux limites arbitraires en utilisant une méthode de série. Hu et Zhang [19] ont également adopté la CPT avec les hypothèses Von-Karman pour effectuer l'analyse de la vibration et de la stabilité des plaques FG sous excitation en plan. La vibration libre des plaques FG reposant sur fondation élastique avec diverses conditions aux limites a été étudiée par Chakraverty et Pradhan [20] en utilisant la CPT et la méthode de Rayleigh-Ritz. Chakraverty et Pradhan [21] ont amélioré leur travail antérieur (2014) en tenant compte de l'effet des ambiances thermiques. Ruan et Wang [22] ont investigué sur la vibration et la stabilité du déplacement des plaques obliques FG en utilisant la CPT. La FSDPT développée par Mindlin [23] représente l'effet de la déformation de cisaillement par le biais d'une variation linéaire des déplacements dans le plan à travers l'épaisseur. Touratier [24] a utilisé la théorie des plaques de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDPT) pour décrire la distribution parabolique des déformations en cisaillement transversal sur l'épaisseur de la plaque et a pris le champ de déplacement sous la forme. Karama et al. [25] ont utilisé une théorie de la plaque de déformation par cisaillement exponentiel (ESDPT).

Jha et al. [26] ont étudié la flexion statique et la vibration libre des plaques FG en utilisant la théorie quasi-3D de Kant et Manjunatha [27] avec 12 inconnues. Des solutions analytiques ont été obtenues pour les plaques simplement appuyées en utilisant la solution de Navier. L'influence des termes d'ordre supérieur dans le champ de déplacement sur la fréquence naturelle des plaques FG a également été étudiée.

Toutefois, dans la fabrication des FGM, des micro-porosités ou des vides peuvent se produire dans les matériaux au cours du processus de frittage. Ceci est dû à la grande différence de température de solidification entre les constituants matériels [28]. Wattanasakulpong et al. [29] ont également donné la discussion sur les porosités qui se déroulent à l'intérieur des échantillons FGM fabriqués par une technique d'infiltration séquentielle en plusieurs étapes. Par conséquent, il est important de prendre en compte l'effet de la porosité lors de la conception des structures FGM soumises à des charges

statique et dynamiques [30]. Par conséquent, des études consacrées à la compréhension des comportements statiques et dynamiques des structures en matériau FGM ont été accordées de plus en plus d'attention ces dernières années.

L'objectif de ce travail est la présentation d'une théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé pour l'analyse de la vibration libre des plaques FGM poreuses qui peuvent se produire à l'intérieur des matériaux à gradient de propriétés (FGM) au cours de leur fabrication. Une distribution de la porosité suivant l'épaisseur de la plaque seront retenues. Le module d'élasticité et la densité massique de ces plaques sont supposés variés suivant l'épaisseur de la plaque en fonction de cette distribution. La théorie proposée contient quatre inconnues, elle vérifie les conditions limites sans contraintes sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque sans l'aide de facteur de correction de cisaillement. Des solutions analytiques sont obtenues pour la plaque FGM par la présente théorie et sa précision est vérifiée en comparant les résultats obtenus avec ceux rapportés dans la littérature. Une grande concordance a été trouvée. Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et la fraction volumique de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sont tous discutés.

## 2 Formulation théorique

### 2.1 Configuration géométrique

Considérons une plaque rectangulaire en matériaux fonctionnellement gradués (FGM) d'épaisseur  $h$ , de longueur  $a$  et de largeur  $b$  tel que montrée par la figure (1). La plaque est réalisée en matériau isotrope avec les propriétés matérielles qui varient sans interruption dans la direction de l'épaisseur.

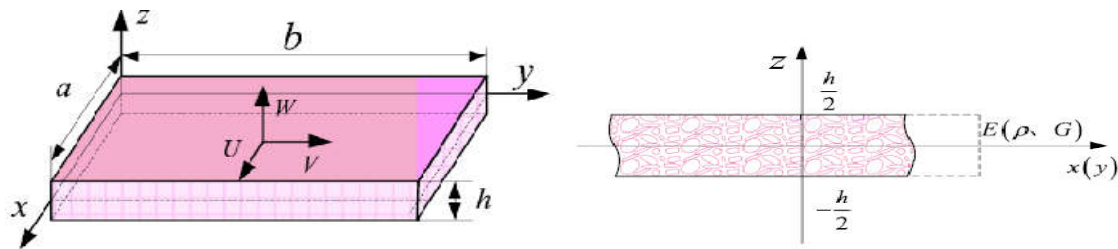


Fig. 1 – Géométrie et coordonnées de la plaque poreuse FGM.

Les propriétés du la plaque FGM varient continuellement en raison de la fraction volumique progressive des constitutifs des matériaux (céramique et métal), généralement dans la direction de l'épaisseur. La fonction de la loi de puissance P-FGM est couramment utilisée pour décrire ces variations des propriétés des matériaux. L'expression donnée ci-dessous représente le profil de la fraction volumique. Maintenant, la fraction du volume total du métal et de la céramique est:  $V_c + V_m = 1$ , et la loi de puissance de la fraction volumique de la céramique et métal est décrit comme :

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p, \quad V_m = 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \tag{1}$$

Une plaque FGM fabriquée à partir d'un mélange de deux matériaux, par exemple, le métal et la céramique. Les propriétés du matériau de la plaque FG sont supposée variées de manière continue à travers l'épaisseur de la plaque. Dans cette étude, la plaque imparfaite est supposée avoir des porosités réparties dans l'épaisseur en raison de défaut pendant la production. Considérons un FGM imparfait avec une fraction volumique de porosité ( $\alpha$ ) ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) répartie uniformément entre le métal et la céramique, la loi du mélange modifiée proposée par Wattanasakulpong et Ungbhakorn [30] est utilisée comme :

$$E(z) = E_m \left( V_m - \frac{\alpha}{2} \right) + E_c \left( V_c - \frac{\alpha}{2} \right) \tag{2}$$

Par conséquent, toutes les propriétés d'un FGM imparfait peuvent être écrites comme [17] :

$$E(z) = (E_c - E_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + E_m - (E_c + E_m) \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad (3)$$

où  $E_c$  et  $E_m$  sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement, et «P» est l'exposant de fraction volumique prenant des valeurs supérieures ou égales à zéro. L'hypothèse de la loi de puissance ci-dessus reflète une simple règle de mélanges utilisée pour obtenir les propriétés effectives de la plaque de métal en céramique. La règle des mélanges ne s'applique qu'à la direction de l'épaisseur. Notez que la fraction volumique du métal est élevée près de la surface inférieure de la plaque et celle de la céramique est élevée près de la surface supérieure. En outre, Eq. (3) indique que la surface inférieure de la plaque ( $z = -h/2$ ) est en métal alors que la surface supérieure ( $z = h/2$ ) de la plaque est en céramique.

Ainsi, l'équation de densité du matériau ( $\rho$ ) de la plaque FG avec porosité peut être exprimée

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + \rho_m - (\rho_c + \rho_m) \left( \frac{\alpha}{2} \right) \quad (4)$$

Cependant, le coefficient de Poisson ( $\nu$ ) est supposé être constant. Les propriétés matérielles d'une plaque FGM parfaite peuvent être obtenues lorsque  $\alpha$  est égale à zéro.

## 2.2 Équations constitutives

En se basant sur la théorie des plaques qui tient compte l'effet de cisaillement, le champ des déplacements est donné par [31]

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

où la fonction  $f(z)$  est choisi dans la forme

$$f(z) = \frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (6)$$

Les déformations associées aux déplacements dans l'éq. (5) sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{df(z)}{dz} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{df(z)}{dz} \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Pour un comportement linéaire élastique des plaques (FGM), la relation contraintes déformations s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

où  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{yx})$  sont les composantes de contraintes et de déformations, respectivement. En utilisant les propriétés des matériaux définis dans l'équation.(3), les coefficients de rigidité, «  $Q_{ij}$  », peuvent être exprimé par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}, \quad (9)$$

### 2.3 Équations du mouvement

Les équations de mouvement pour la plaque FGM sont obtenues en utilisant le principe d'Hamilton, qui peut être écrit comme pour la plaque FGM comme suit :

$$\int_0^T (\delta U - \delta K) dt = 0 \quad (10)$$

$\delta U$  est la variation virtuel de l'énergie de déformation; et  $\delta K$  est la variation virtuel de l'énergie cinétique de la plaque FGM. Les équations du mouvement pour la plaque FGM résultantes sont :

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz \quad (11)$$

où les efforts et les moments sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ A & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix}, \quad S = A^s \gamma \quad (12)$$

La variation de l'énergie cinétique de l

$$\delta K = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho(z) (u \delta u + v \delta v + w \delta w) dA dz \quad (13)$$

la convention point-exposant indique la différenciation par rapport à la variable de temps t; et  $(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6)$  sont des inerties de masse définies comme :

$$(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2) \rho(z) dz \quad (14)$$

Les équations du mouvement pour la plaque FGM résultantes sont :

$$\begin{aligned} \delta u : \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_1 \overset{\square}{u}_0 - I_2 \frac{\partial \overset{\square}{w}_b}{\partial x} - I_4 \frac{\partial \overset{\square}{w}_s}{\partial x} \\ \delta v : \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_1 \overset{\square}{v}_0 - I_2 \frac{\partial \overset{\square}{w}_b}{\partial y} - I_4 \frac{\partial \overset{\square}{w}_s}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_b : \quad & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} = I_1 (w_b + w_s) + I_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - I_3 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right) \\
 \delta w_s : \quad & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} = I_1 (w_b + w_s) + I_4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - I_5 \left( \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) - I_6 \left( \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

En substituant Eq. (7) dans Eq. (8) et intégrant à travers l'épaisseur de la plaque, les résultantes de contrainte sont données comme :

$$N = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^t, \quad M^b = \{M_x^b, M_y^b, M_{xy}^b\}^t, \quad M^s = \{M_x^s, M_y^s, M_{xy}^s\}^t \tag{16a}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^t, \quad k^b = \{k_x^b, k_y^b, k_{xy}^b\}^t, \quad k^s = \{k_x^s, k_y^s, k_{xy}^s\}^t \tag{16b}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \tag{16c}$$

$$B^s = \begin{bmatrix} B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{66}^s \end{bmatrix}, \quad D^s = \begin{bmatrix} D_{11}^s & D_{12}^s & 0 \\ D_{12}^s & D_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^s \end{bmatrix}, \quad H^s = \begin{bmatrix} H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \tag{16d}$$

$$S = \{S_{xz}^s, S_{yz}^s\}^t, \quad \gamma = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^t, \quad A^s = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix} \tag{16e}$$

où  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc. sont les coefficients de rigidités, et sont définis comme :

$$\begin{aligned}
 \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 \{B_{ij}^s, D_{ij}^s, H_{ij}^s\} &= \int_{-h/2}^{h/2} (f(z), z f(z), f^2(z)) Q_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \\
 \{A_{ij}^s\} &= \int_{-h/2}^{h/2} ([g(z)]^2) Q_{ij} dz, \quad (i, j = 4, 5)
 \end{aligned} \tag{17}$$

### 2.4 Solution de Navier pour des plaques rectangulaires simplement appuyées

Les conditions aux limites le long des côtes d'une plaque simplement appuyée peuvent être obtenues comme suit :

$$v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_x^b = M_x^s = 0 \quad \text{and} \quad x = 0, \quad a \tag{18a}$$

$$u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_y^b = M_y^s = 0 \quad \text{and} \quad y = 0, \quad b \tag{18b}$$

Pour la solution analytique des équations (15), la méthode de Navier est utilisée sous les conditions aux limites spécifiques. Les fonctions de déplacement qui satisfirent les équations (18) des conditions aux limites sont exprimées en série de Fourier comme suit :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w_b \\ w_s \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} U_{mn} e^{i\omega t} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} e^{i\omega t} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

Où  $U_{mn}$ ,  $V_{mn}$ ,  $W_{bmn}$ , et  $W_{smn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer et  $\omega$  est la fréquence avec le mode (m, n) avec  $\lambda = m\pi/a$  et  $\mu = n\pi/b$ , « m » et « n ».

On substituant les équations (14) et (19) dans les équations de mouvement (15), on obtient le système d'équation pour chaque valeur fixée de  $m$  et  $n$ , pour un problème de vibration libre, on a :

$$([K] - \omega^2 [M])\{\Delta\} = \{0\}, \quad (20)$$

où  $[K]$  et  $[M]$ , les matrices de rigidité et de masse, respectivement, et représentés par:

$$\left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_{44} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$a_{11} = -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2)$$

$$a_{12} = -\lambda \mu (A_{12} + A_{66})$$

$$a_{13} = \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2]$$

$$a_{14} = \lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2]$$

$$a_{22} = -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2)$$

$$a_{23} = \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22}\mu^2]$$

$$a_{24} = \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s\mu^2]$$

$$a_{33} = -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4)$$

$$a_{34} = -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4)$$

$$a_{44} = -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{12}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2)$$

$$m_{11} = -I_1; m_{12} = 0; m_{13} = \lambda I_2; m_{14} = \lambda I_4$$

$$m_{21} = 0; m_{22} = -I_1; m_{23} = \mu I_2; m_{24} = \mu I_4$$

$$m_{31} = \lambda I_2; m_{32} = \mu I_2; m_{33} = -[I_1 + I_3 (\lambda^2 + \mu^2)]; m_{34} = -I_5 (\lambda^2 + \mu^2)$$

$$m_{41} = \lambda I_4; m_{42} = \mu I_4; m_{43} = -I_5 (\lambda^2 + \mu^2); m_{44} = -I_6 (\lambda^2 + \mu^2)$$

### 3 Résultats et discussion

Dans cette partie, l'analyse de la vibration libre des plaques FG est examinée en utilisant la présente méthode de déformation de cisaillement. La solution de Navier est adoptée. Le coefficient de poisson est fixé à  $\nu=0,3$ . En premier lieu une étude comparative en confrontant les résultats de la présente méthode avec ceux de la littérature. En deuxième lieu, une étude paramétrique sera présentée pour souligner les effets des différents facteurs, notamment la porosité, sur la réponse en termes de fréquence naturelle de la plaque FGM. Pour cela, les propriétés matérielles utilisées dans cette étude sont :

Métal (Aluminium, AL):  $E_m = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho_m = 2702 \text{ Kg/m}^3$ .

Céramique (Alumine, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>):  $E_c = 380 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho_c = 3800 \text{ Kg/m}^3$ .

Pour faciliter les calculs, la fréquence adimensionnelle suivante sont utilisée dans les exemples numériques suivant :

$$\omega = \left( \frac{a^2 \omega}{h} \right) \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}$$

L'analyse dynamique (vibration libre) des plaques FGM poreuses est également considérée dans cette étude. Les résultats de la présente théorie ont été comparés avec ceux qui sont disponible dans la littérature obtenus par les différentes

théories de cisaillement tels que la théorie de cisaillement de premier ordre de Timoshenko (FSDPT) [23], la théorie de cisaillement sinusoïdale de Touratier (SSDPT)[24], et la théorie de cisaillement exponentielle de Karama (ESDPT) [25] et la théorie classique des plaques CPT (Euler-Bernoulli).

Les tableaux 1, 2 et 3 montrent également l'exactitude de la présente théorie raffinée avec et sans porosité ( $\alpha$ ) en comparant les résultats de la fréquence fondamentale adimensionnelle des plaques FGM en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec celles rapportées dans la littérature obtenus par les théories de cisaillement d'ordre élevés développées par SSDPT et ESDPT. Un excellent accord entre les solutions de la présente théorie raffinée d'ordre élevé (RPT) et les résultats développés par SSDPT et ESDPT. On constate aussi que les fréquences de vibrations diminuent avec l'augmentation de la fraction volumique de la porosité car la présence des pores aux niveaux de la plaque FGM affaiblit sa rigidité. On peut voir que toutes les théories de cisaillement des plaques avec la présente théorie raffinée d'ordre élevé (RPT) donnent presque les mêmes fréquences, tandis que la théorie classique des plaques CPT surestime les fréquences de vibration pour tous les cas considérés.

**Table 1 - Etude comparative de la fréquence fondamentale d'une plaque en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pour différentes valeurs de l'indice de puissance P et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  avec (a/ h=5, b/a=1).**

Méthodes	$\alpha$	P=0	P=1	P=2	P=3	P=4	P=5	P=10
CPT	$\alpha=0$	5,78604	4,40481	3,99222	3,86101	3,80878	3,77911	3,66792
FSDPT	$\alpha=0$	5,35593	4,12725	3,74059	3,60358	3,53954	3,49875	3,36245
ESDPT	$\alpha=0$	5,28452	4,08021	3,68132	3,52443	3,44287	3,39023	3,25129
SSDPT	$\alpha=0$	5,28222	4,07869	3,68044	3,52451	3,44372	3,39139	3,25060
La présente étude	$\alpha=0,0$	5,28132	4,07809	3,68052	3,52567	3,44574	3,39381	3,25136
	$\alpha=0,1$	5,35684	3,99813	3,49907	3,29904	3,19952	3,13835	2,98685
	$\alpha=0,2$	5,44657	3,88199	3,21141	2,91913	2,77548	2,69301	2,52061

**Table 2- Etude comparative de la fréquence fondamentale d'une plaque en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pour différentes valeurs de l'indice de puissance P et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  avec (a/ h=10, b/a=1).**

Méthodes	$\alpha$	P=0	P=1	P=2	P=3	P=4	P=5	P=10
CPT	$\alpha=0$	5,92483	4,51937	4,10610	3,97558	3,92304	3,89214	3,77146
FSDPT	$\alpha=0$	5,79441	4,43541	4,02911	3,89612	3,83947	3,80486	3,67619
ESDPT	$\alpha=0$	5,77036	4,41984	4,00909	3,86893	3,80584	3,76675	3,63661
SSDPT	$\alpha=0$	5,76966	4,41938	4,00886	3,86905	3,80624	3,76727	3,63647
La présente étude	$\alpha=0,0$	5,76942	4,41923	4,00895	3,86952	3,80704	3,76823	3,63684
	$\alpha=0,1$	5,85193	4,32430	3,79987	3,61092	3,52959	3,48467	3,35924
	$\alpha=0,2$	5,94995	4,18743	3,46910	3,17470	3,04388	2,97785	2,85482



**Table 3 - Etude comparative de la fréquence fondamentale d'une plaque en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> pour différentes valeur de l'indice de puissance P et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  avec (a/ h=20, b/a=1).**

Méthodes	$\alpha$	$P=0$	$P=1$	$P=2$	$P=3$	$P=4$	$P=5$	$P=10$
CPT	$\alpha=0$	5,96111	4,54931	4,13590	4,00558	3,95295	3,92172	3,79853
FSDPT	$\alpha=0$	5,92668	4,52717	4,11553	3,98450	3,93074	3,89850	3,77316
ESDPT	$\alpha=0$	5,92011	4,52294	4,11007	3,97703	3,92146	3,88794	3,76214
SSDPT	$\alpha=0$	5,91993	4,52282	4,11001	3,97707	3,92157	3,88810	3,76210
La présente étude	$\alpha=0,0$	5,91987	4,52278	4,11004	3,97721	3,92180	3,88837	3,76222
	$\alpha=0,1$	6,00453	4,42295	3,89197	3,70824	3,63438	3,59613	3,48203
	$\alpha=0,2$	6,10510	4,27932	3,54725	3,25363	3,12845	3,06927	2,96736

Dans cette partie, nous proposons de valider le modèle proposé à travers quelques tests standards connus de la littérature. Il s'agit essentiellement d'évaluer ses performances en précision sur les fréquences naturelle fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction de l'indice de puissance P d'une plaque FG carré en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> et sans porosité ( $\alpha = 0$ ). L'exemple traite d'une plaque isotrope simplement appuyé soumise à un chargement dynamique vibration libre. Une comparaison a été faite avec les résultats de la méthode Euler-Bernoulli (CPT). Les solutions exactes de Mindlin [23] (FSDPT), les résultats de, Touratier [24] (SSDPT) et Karama et al [25] (ESDPT) seront également introduits dans la comparaison. Les résultats obtenus à partir des déférentes modèles [23-25], coïncident avec ceux issus de la présente méthode comme il illustré dans les fig.2.

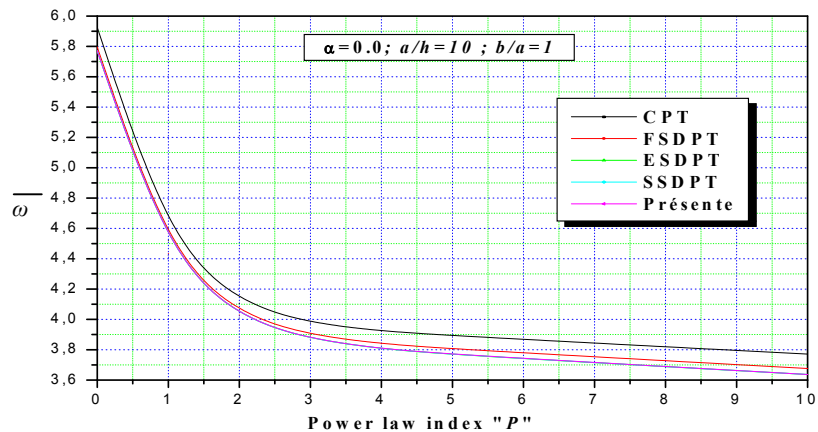


Fig.2 – Comparaison entre les différentes méthodes pour déterminer les fréquences naturelle fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  en fonction de l'indice de puissance P d'une plaque FG en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec a/h=10.

L'effet de l'indice matérielle P sur les fréquences naturelle fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  ou premier mode (m=1, n=1) des plaques FGM parfaite et imparfaite pour différentes valeurs du rapport d'épaisseur (a/h=5, 10 et 20) de la plaque en utilisant la présente théorie de cisailment d'ordre élevé sont illustrées dans les figures 3, 4 et 5 respectivement. Ainsi que le premier mode de la fréquence naturelle fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$  et le mode le plus grande par rapport aux autres modes.

Il est à noter que la fréquence adimensionnelle  $\bar{\omega}$  ou premier mode diminue avec l'augmentation de la valeur de l'indice de loi de puissance P pour les plaques parfaites et imparfaites et cela pour les trois rapports d'épaisseur (a/h=5, 10 et 20). Les fréquences sont supérieures pour les plaques entièrement en céramique (P=0) tandis que les fréquences sont inférieures pour les plaques en métal (P=∞). Cette diminution des fréquences est expliquée par l'influence de la rigidité du matériau c-à-dire une augmentation de la valeur de l'indice de puissance P conduit à une diminution du module d'élasticité de la plaque. En d'autres termes, la plaque devient flexible lorsque l'indice de loi de puissance P augmente, et diminuant ainsi les valeurs de la fréquence. De plus, la porosité (α) conduit à une diminution de la fréquence de la plaque. L'effet du rapport d'épaisseur (a/h) de la plaque sur la fréquence de vibration est très clair dans les trois figures. Une diminution dans le rapport (a/h) conduit à une diminution dans les fréquences adimensionnelle  $\bar{\omega}$ . On peut également dire que le rapport d'épaisseur (a/h) à un effet considérable sur la fréquence fondamentale adimensionnelle  $\bar{\omega}$ . Cette dépendance est liée à l'effet de cisaillement sur la fréquence de vibration.

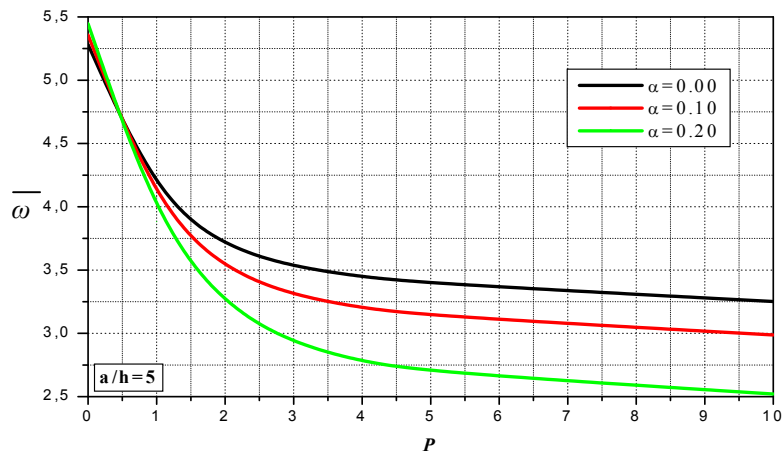


Fig.3 – Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}_{mn}$  (m = n = 1) en fonction de l'indice de puissance P et de la fraction volumique de porosité α d'une plaque FG en Al/Al2O3 avec a/h=5.

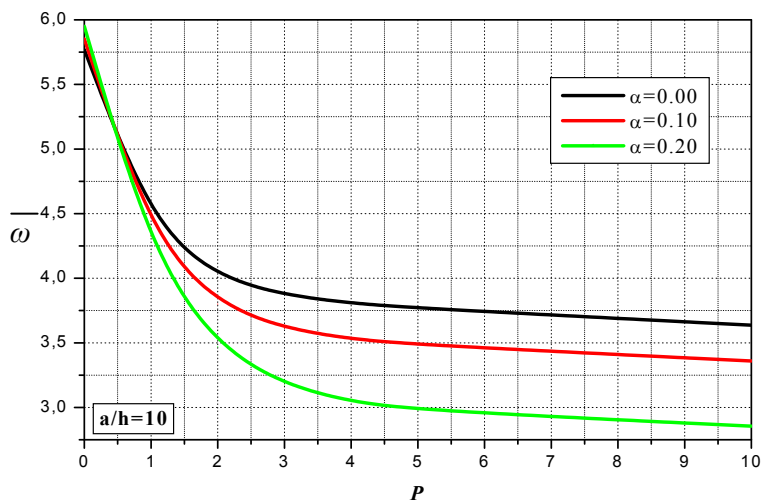


Fig.4 –Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}_{mn}$  (m = n = 1) en fonction de l'indice de puissance P et de la fraction volumique de porosité α d'une plaque FG en Al/Al2O3 avec a/h=10.

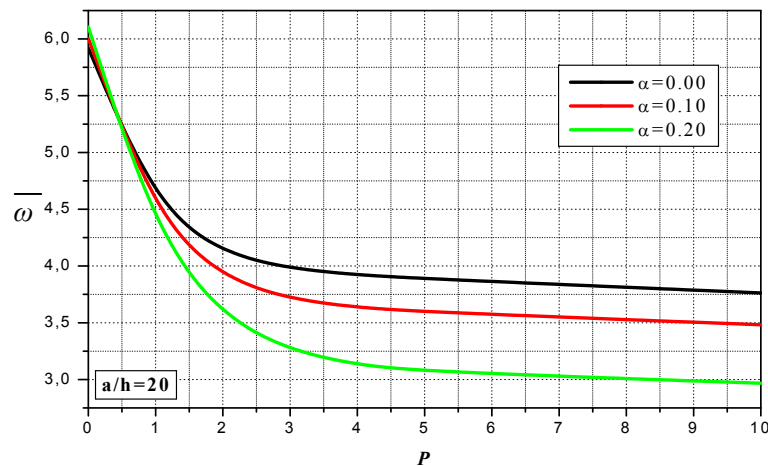


Fig.5 –Variation de la fréquence fondamentale  $\bar{\omega}_{mn}$  ( $m = n = 1$ ) en fonction de l'indice de puissance  $P$  et de la fraction volumique de porosité  $\alpha$  d'une plaque FG en Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec  $a/h=20$ .

#### 4 Conclusion

Dans ce travail, l'analyse de la vibration libre des plaques poreuse en FGM à savoir les fréquences fondamentales compte tenu des effets de la déformation de cisaillement. Cet effet compte dans est pris en un modèle cinématique. Les plaques poreuse FGM est examinée par une nouvelle simple théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Cette théorie satisfait la nullité des contraintes aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. La loi du mélange modifiée couvrant les phases de porosité est utilisée pour décrire approximativement les propriétés des plaques FGM avec porosité. Sur la base de la présente théorie de la plaque, les équations de mouvement sont dérivées du principe des travaux virtuels et le principe d'Hamilton.

Les effets de divers paramètres, tels que le rapport d'épaisseur, l'indice de gradient et la fraction volumique de la porosité sur la vibration libre des plaques FGM sont tous discutés. A partir de ce travail, on dire que la présente théorie des plaques proposée est exacte et simple pour la résolution du comportement mécanique des plaques FGM avec porosité. Cette étude peut être considérée comme première étape pour l'étude des structures FGM présentant des défauts de fabrication à savoir la porosité.

#### RÉFÉRENCES

- [1] A.S. Rezaei, A.R. Saidi, Exact solution for free vibration of thick rectangular plates made of porous materials, *Compos. Struct.* 134 (2015) 1051–1060.
- [2] A. Behravan Rad, M. Shariyat, Three-dimensional magneto-elastic analysis of asymmetric variable thickness porous FGM circular plates with non-uniform tractions and Kerr elastic foundations, *Compos. Struct.* 125 (2015) 558–574.
- [3] A.S. Rezaei, A.R. Saidi, Application of Carrera unified formulation to study the effect of porosity on natural frequencies of thick porous-cellular plates, *Composites, Part B, Eng.* 91 (2016) 361–370.
- [4] F. Ebrahimi, A. Jafari, M.R. Barati, Vibration analysis of magneto–electro-elastic heterogeneous porous material plates resting on elastic foundations, *Thin-Walled Struct.* 119 (2017) 33–46, 2017.
- [5] A.S. Rezaei, A.R. Saidi, M. Abrishamdari, M.H. Pour Mohammadi, Natural frequencies of functionally graded plates with porosities via a simple four variable plate theory: an analytical approach, *Thin-Walled Struct.* 120 (2017) 366–377.
- [6] A.S. Rezaei, A.R. Saidi, On the effect of coupled solid–fluid deformation on natural frequencies of fluid saturated porous plates, *Eur. J. Mech. A, Solids* 63 (2017) 99–109.
- [7] B. Lhoucine, E. Khalid, B. Rhali, Thermal behavior analysis at large free vibration amplitudes of thin annular FGM plates with porosities, *Proc. Eng.* 199 (2017) 528–533.

- [8] M. Jabbari, A. Mojahedin, M. Haghi, Buckling analysis of thin circular FG plates made of saturated porous-soft ferromagnetic materials in transverse magnetic field, *Thin-Walled Struct.* 85 (2014) 50–56.
- [9] A.R. Khorshidvand, E. Farzaneh Joubaneh, M. Jabbari, M.R. Eslami, Buckling analysis of a porous circular plate with piezoelectric sensor–actuator layers under uniform radial compression, *Acta Mech.* 225 (2014) 179–193.
- [10] A. Mojahedin, E. Farzaneh Joubaneh, M. Jabbari, Thermal and mechanical stability of a circular porous plate with piezoelectric actuators, *Acta Mech.* 225 (2014) 3437–3452.
- [11] M. Jabbari, M. Hashemitaheri, A. Mojahedin, M.R. Eslami, Thermal buckling analysis of functionally graded thin circular plate made of saturated porous materials, *J. Therm. Stresses* 37 (2014) 202–220.
- [12] M.H. Shojaeefard, H.S. Googarchin, M. Ghadiri, M. Mahinzare, Micro temperature-dependent FG porous plate: free vibration and thermal buckling analysis using modified couple stress theory with CPT and FSDT, *Appl. Math. Model.* 50 (2017) 633–655.
- [13] D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai, Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams, *Compos. Sci. Technol.* 142 (2017) 235–245.
- [14] S. Kitipornchai, D. Chen, J. Yang, Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets, *Mater. Des.* 116 (2017) 656–665.
- [15] J. Yang, D. Chen, S. Kitipornchai, Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev–Ritz method, *Compos. Struct.* 193 (2018) 281–294.
- [16] A. Behravan Rad, Static analysis of non-uniform 2D functionally graded auxetic porous circular plates interacting with the gradient elastic foundations involving friction force, *Aerosp. Sci. Technol.* 76 (2018) 315–339.
- [17] S. Merdaci, H. Belghoul, “High Order Shear Theory for Static Analysis Functionally Graded Plates with Porosities”, *Comptes rendus Mécanique*, Vol 347, Issue 3, pp 207-217, 2019.
- [18] Woo J, Meguid SA, Ong LS, Nonlinear free vibration behavior of functionally graded plates, *J. Sound Vib.*, 289(3) (2006) 595–611.
- [19] Hu Y., Zhang X., Parametric vibrations and stability of a functionally graded plate, *Mech. Based Des. Struct. Mach.* 39(3) (2011) 367–77.
- [20] Chakraverty S., Pradhan K. K., Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions, *Aerosp. Sci. Technol.* 36 (2014) 132–56.
- [21] Chakraverty S., Pradhan K. K., Free vibration of functionally graded thin rectangular plates resting on Winkler elastic foundation with general boundary conditions using Rayleigh–Ritz méthode, *Int. J. Appl. Mech.*, 6(4) (2014) 1450043.
- [22] Ruan M., Wang Z. M., Transverse vibrations of moving skew plates made of functionally graded material, *J. Vib. Control.* (2014): <http://dx.doi.org/10.1177/1077546314563967>.
- [23] Mindlin R. D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 (1951) 31-38.
- [24] Touratier, M.: An efficient standard plate theory. *Int. J. Eng. Sci.* 29(8), 901–916 (1991).
- [25] Karama, M., Afaq, K.S., Mistou, S.: Mechanical behaviour of laminated composite beam by new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *Int. J. Solids Struct.* 40(6), 1525–1546 (2003)
- [26] Jha D. K., Kant T., Singh R. K., A critical review of recent research on functionally graded plates, *Compos. Struct.* 96 (2013) 833–49.
- [27] Kant T. and Manjunatha B. S., An unsymmetric FRC laminate C0 finite element model with 12 degrees of freedom per node, *Engineering Computations* 5 (4) (1988) 300-308.
- [28] Zhu, J. Lai, Z. Yin, Z. Jeon, J. and Lee, S. Fabrication of ZrO<sub>2</sub>–NiCr functionally graded material by powder metallurgy. *Mater. Chem. Phys.* 68(1-3), 130-135, 2001.
- [29] Wattanasakulpong, N. Prusty, B.G. Kelly, D.W. and Hoffman, M. Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation. *Mater. Des.* 36, 182-190, 2012.
- [30] Wattanasakulpong, N. and Ungbhakorn, V. Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities. *Aerosp. Sci. Technol.* 32(1), 111-120, 2014.
- [31] S. Merdaci, A. Tounsi, M.S.A. Houari, I. Mechab, H. Hejali, S. Benyoucef, Two new refined shear displacement models for functionally graded sandwich plates, *Arch. Appl. Mech.* 81 (2011) 1507e22.