Corso di Fisica 1

Docente: AC Sparavigna

Lezioni precedenti

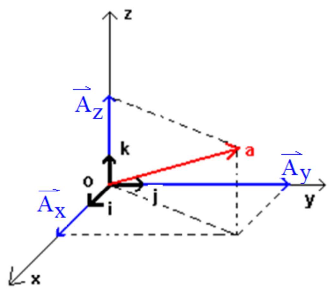
Lezione 4: https://doi.org/10.5281/zenodo.3707629

Lezione 3: https://doi.org/10.5281/zenodo.3702254

Lezione 2: https://doi.org/10.5281/zenodo.3701444

Lezione 1: https://doi.org/10.5281/zenodo.3701373

Posizione di un punto nello spazio



$$\vec{a}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

La posizione di un punto nello spazio viene individuata mediante il vettore posizione (o raggio vettore) che congiunge l'origine del riferimento con il punto materiale.

In coordinate cartesiane:

$$\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

P cambia nel tempo, le sue coordinate sono funzioni del tempo

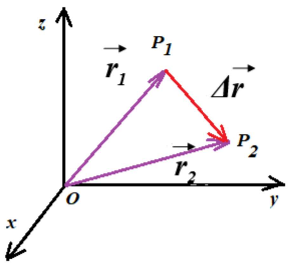
Vettore spostamento e velocità media

P_1 = posizione al tempo t; P_2 = posizione al tempo t+Δt

$$\vec{r}_2=\vec{r}_1+\Delta\vec{r}$$ *Vettor spostamento:*

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})-(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})$$

$$=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}=\Delta x\,\vec{i}+\Delta y\,\vec{j}+\Delta z\,\vec{k}$$



Velocità vettoriale media:

$$\vec{v}_M=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

La velocità media ha la stessa direzione dello spostamento!

Velocità vettoriale istantanea

La velocità istantanea è definita tramite la velocità media al limite per $\Delta t\rightarrow 0$:

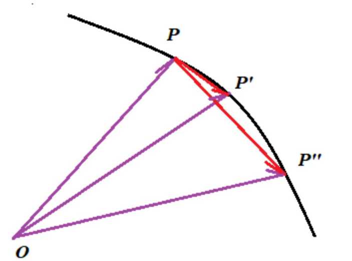
$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\vec{v}_M=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Il vettore velocità ha quindi le componenti:

$$v_x=\frac{dx}{dt}\quad v_y=\frac{dy}{dt}\quad v_z=\frac{dz}{dt}$$

Al limite $\Delta t\rightarrow 0$ la direzione dello spostamento tende ad essere tangente alla traiettoria

Il vettore velocità istantanea è tangente la traiettoria



Accelerazione vettoriale

Siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità del punto agli istanti di tempo $t_1=t$ e $t_2=t+\Delta t$

Accelerazione media:

$$\boxed{\vec{a}_M=\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

Accelerazione istantanea:

$$\boxed{\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\vec{a}_M=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\boxed{a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\qquad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\qquad a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}}$$

Moto vario nello spazio

Considerato un punto P nello spazio, la sua posizione può cambiare nel tempo. In un riferimento cartesiano le sue coordinate (x,y,z) sono delle funzioni del tempo x(t),y(t),z(t)

La velocità vettoriale del punto ha come componenti cartesiane le derivate delle coordinate (dx/dt, dy/dt, dz/dt).

L'accelerazione vettoriale ha come componenti cartesiane le derivate delle componenti della velocità vettoriale (dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt).

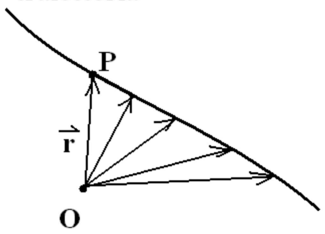
Moto vario nello spazio

Considerato un punto P nello spazio, il vettore posizione può cambiare nel tempo. $\boxed{\vec{r}}$

La velocità vettoriale del punto è la derivata del vettor posizione. $\boxed{\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}}$

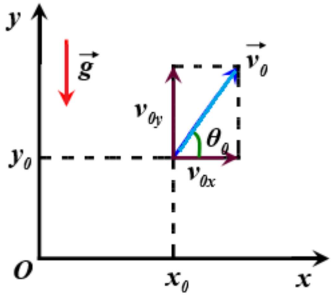
L'accelerazione vettoriale è la derivata della velocità vettoriale. $\boxed{\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}}$

La figura mostra vettori posizione a diversi istanti. I raggi vettori vanno dal polo fisso O al punto mobile sulla traiettoria.



Moto balistico nel piano verticale

Consideriamo una particella che si muove in 2 dimensioni con velocità iniziale $\vec{v}_0$ e accelerazione di gravità $\vec{g}$ costante



$$\boxed{\vec{g}=-g\vec{j}\ (\text{dove } g=9.8\text{m/s})}$$

Posizione iniziale: (x_0, y_0)

Velocità iniziale:

$$\boxed{\begin{aligned}v_{0x}&=v_0\cos\theta_0\\ v_{0y}&=v_0\sin\theta_0\\ tg\,\theta_0&=\sin\theta_0/\cos\theta_0\end{aligned}}$$

Il moto orizzontale ed il moto verticale sono indipendenti:

asse x: moto rettilineo uniforme con velocità v_{0x}

asse y: moto uniformemente accelerato con velocità iniziale v_{0y} e accelerazione -g

Equazioni del moto balistico

Asse x (Eq. di x e v_x scritte per t_0=0):

$$x = x_0 + v_{0x} t \Leftrightarrow x = x_0 + v_0 \cos\theta_0 \, t \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_0 \cos\theta_0$$

Asse y (Eq. di y e v_y scritte per t_0=0):

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Leftrightarrow y = y_0 + v_0 \sin\theta_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

Equazione della traiettoria (uso la (1) per avere t da mattere in (2)):

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$y = y_0 + \mathrm{tg}\theta_0 (x - x_0) - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

La traiettoria è un arco di parabola con concavità verso il basso

Gittata lungo l'orizzontale

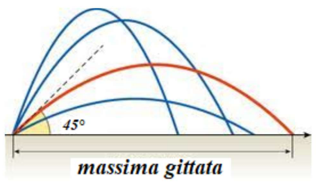
Un proiettile parte dall'origine del sistema di riferimento (x_0=0, y_0=0).
Cerco la sua gittata, ossia cerco y=0.

Traiettoria: $y = x \,\mathrm{tg}\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta_0}$

$$y = 0 \rightarrow x \left(\mathrm{tg}\theta_0 - \frac{1}{2} g \frac{x}{v_0^2 \cos^2\theta_0} \right) = 0 \rightarrow$$

$$x = 0 \text{ e } x = \frac{2 v_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

La gittata è massima per θ_0=45°



Formule valide solo se la quota di arrivo è uguale a quella di partenza! Ossia y=0.

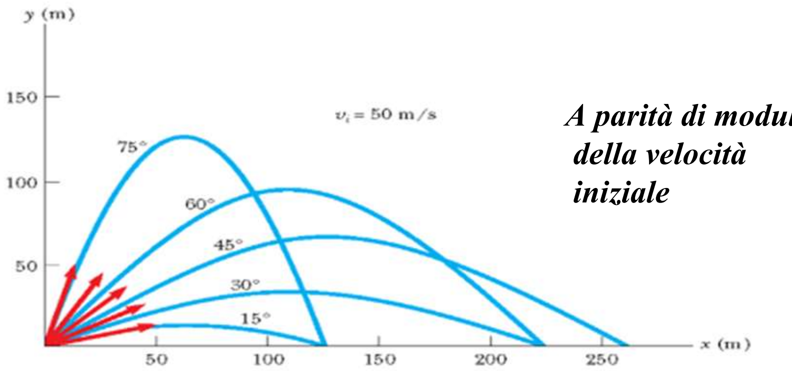
La gittata dipende dal modulo della velocità.

La gittata dipende anche dall'angolo formato dal vettore velocità iniziale. Il valore massimo possibile è dato da

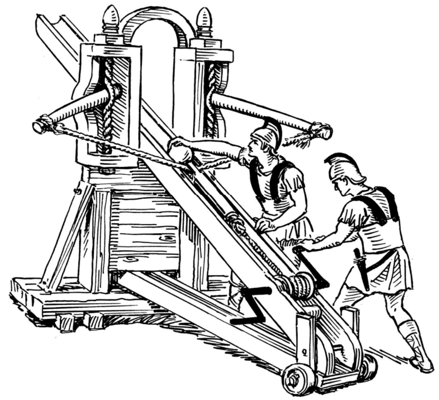
$$G_{max} = v_0^2/g.$$

Questo si ottiene se

sen $2\theta_0$= 1 => 2θ = 90° => θ_0= 45.

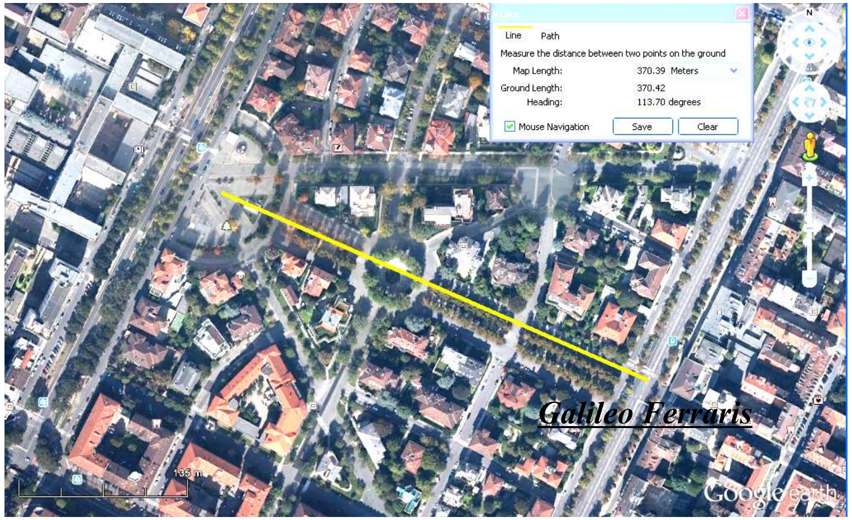


A parità di modulo della velocità iniziale



Notare inclinazione per la massima gittata!

Secondo Vitruvio erano macchine destinate al lancio di dardi e giavellotti. Per Ammiano Marcellino (IV secolo) avevano gittata era stimata in 350 metri circa. Flavio Giuseppe ricorda che potevano lanciare oltre i 377 metri.



$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{o,x}(t-t_0) \\ y &= y_0 + v_{0,y}(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= v_0\cos\theta_0 \cdot t \\ y &= v_0\sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

L'origine del riferimento è sulla cime dell'edificio. L'origine del tempo a t=0.

La pietra arriva al suolo, con y pari a –h, dove h=45 metri

$$-h = v_0\sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$-h - v_0\sin\theta_0 \cdot t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t = \frac{+v_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\theta_0 + 4\frac{g}{2}h}}{2g/2} =$$

$$= \frac{+v_0\sin\theta_0 \pm \sqrt{v_0^2\sin^2\theta_0 + 2gh}}{g} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 2\times 9.8\times 45}}{9.8}(s) = \frac{10 \pm 31.3}{9.8}(s) = \begin{matrix} 4.2\,s \\ -2.2\,s \end{matrix}$$

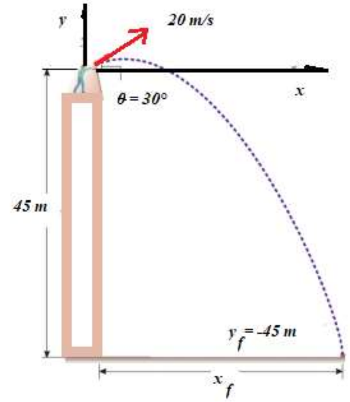
Il tempo negativo è da scartare, perché riferito ad una possibile posizione sull'arco di parabola che non si verifica nell'esperimento considerato

Una pietra viene scagliata verso l'alto, dalla sommità di un edificio, con un angolo di 30° rispetto all'orizzontale e con una velocità di 20m/s.

A) Se l'altezza dell'edificio è 45 metri, per quanto tempo la pietra rimane "in volo"?

B) Qual è la velocità della pietra appena prima di colpire il suolo?

C) A che distanza cade la pietra?



Massima altezza raggiunta

Come calcolato negli esempi del moto lungo la vertivale:

Nel punto di altezza massima v_y=0:

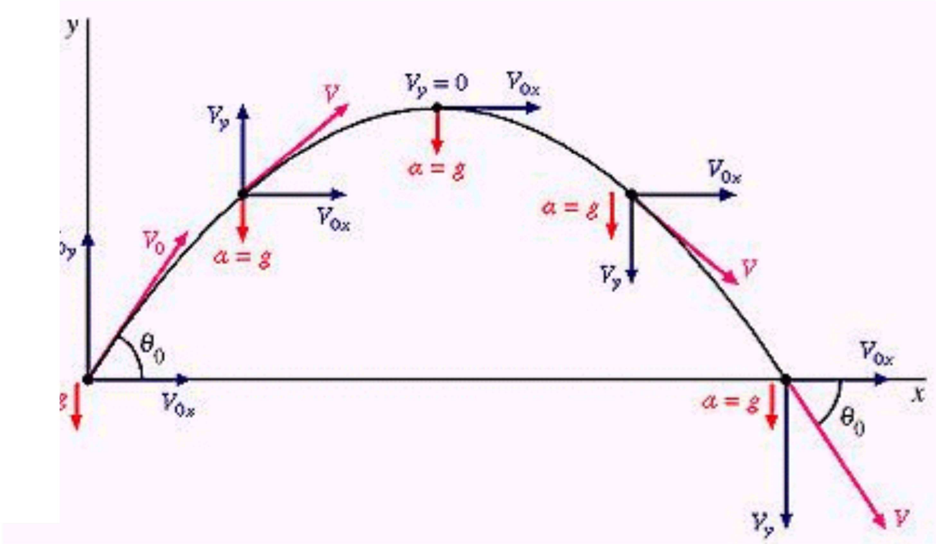
$$v_0\sin\theta_0 - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

$$x_H = x_0 + v_0\cos\theta_0 t = x_0 + \frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$$

$$y_H = y_0 + v_0\sin\theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = y_0 + \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

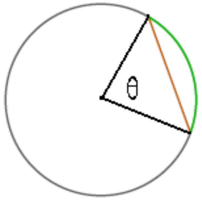
Disegnate i vettori velocità e accelerazione del moto parabolico, di una particella lanciata dall'origine del riferimento.

Si consideri il piano di riferimento come verticale.



Abbiamo visto il moto rettilineo, il moto nel piano ed il moto parabolico.

Ora studiamo il moto circolare.



Arco e corda.

Un **arco** di circonferenza e la **corda** sottesa.

Si definisce **arco** la parte di una curva compresa fra due suoi punti, detti estremi dell'arco.

Il segmento di retta delimitato dagli estremi di un arco si dice corda sottesa dall'arco. L'asse di tale segmento passa per il centro dell'arco.
Per trovare la lunghezza ***l*** di un arco di circonferenza sotteso da due raggi ***r*** che formano un angolo θ fra loro, si mettono in relazione, tramite proporzione, la lunghezza dell'arco con quella di tutta la circonferenza e l'angolo sotteso dai raggi con l'angolo giro:

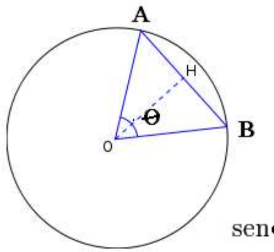
$$2\pi : \theta = 2\pi r : l$$

e quindi la lunghezza dell'arco è

$$l = \theta r$$

Quanto è lunga la corda?

Il teorema della corda esprime la lunghezza della corda tracciata lungo una circonferenza e l'angolo sotteso dalla corda stessa. Data una circonferenza di raggio R , e una corda tracciata tra due punti A e B della circonferenza, l'angolo sotteso dalla corda stessa con vertice al centro della circonferenza è detto *angolo al centro*:



$$\overline{AB} = 2R \,\mathrm{sen}\,\frac{\Theta}{2}$$

La funzione seno è una funzione analitica, la cui espansione in serie di Taylor è (*)

$$\mathrm{sen}\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Se quindi l'angolo α=θ/2 è piccolo, anzi molto piccolo: sen θ/2 = θ/2

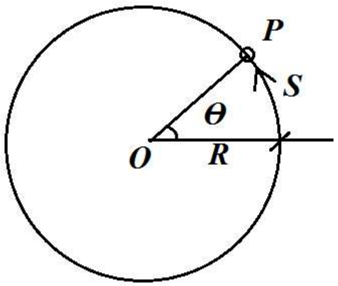
La corda allora si confonde con l'arco perché:
Lunghezza corda = AB = 2R sen(θ/2) ≈ 2R (θ/2) = R θ = lunghezza dell'arco!

(*) Per essere vero, l'argomento del seno deve essere adimensionale, così gli addendi sono omogenei.

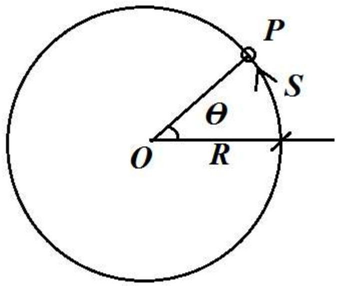
MOTO CIRCOLARE (solo con scalari).

Velocità scalare è l'arco percorso s diviso il tempo impiegato a percorrerlo.

$$v_s = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\theta R) = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$



MOTO CIRCOLARE (solo con scalari). E l'accelerazione?
In effetti, ci vogliono i vettori per fare un discorso corretto.
C'è una accelerazione «centripeta» pari a



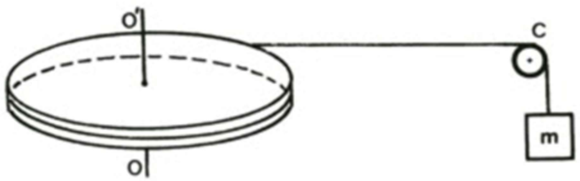
$$a_c = \frac{v_s^2}{R} = \omega^2 R$$

E c'è una accelerazione della velocità scalare, se c'è una accelerazione angolare α:

$$a_s = \frac{dv_s}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s) = \frac{d}{dt}\left(R\frac{d\theta}{dt}\right) = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

ESPERIENZA IN LABORATORIO

E' un volano, un disco di massa M e raggio R, libero di ruotare attorno all' asse verticale OO'. Sul disco è avvolta una fune di massa trascurabile che regge la massa m. C carrucola. Si misura l'accelerazione angolare del volano e si trova I, momento d'inerzia del volano.



Per la massa m dalla seconda legge di Newton: mg-T=ma

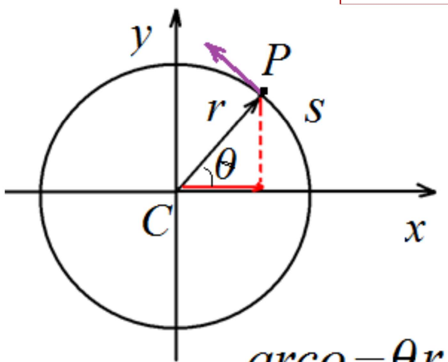
Per il volano TR = Iα (essendo α=a/R)

I = momento d'inerzia volano

T=tensione fune
a=αR

Moto e coordinate polari: r e θ

$$\boxed{r = R = \text{const}; \quad \theta = \theta(t); \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}}$$



$$arco = \theta r$$

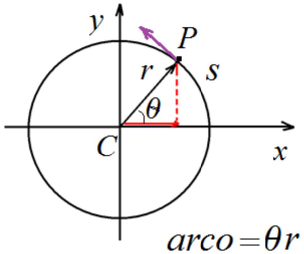
$$\boxed{v = R\omega}$$

Se il moto circolare è uniforme la velocità lineare v e quella angolare sono costanti.

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0)}$$

Moto e coordinate polari: r e θ



$arco = \theta r$

$$r = R = \text{const}\,; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Se il moto circolare ha accelerazione angolare costante:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = const$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha\cdot(t - t_0)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0\cdot(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha\cdot(t - t_0)^2$$

Moto circolare uniforme

La traiettoria è una circonferenza. La velocità è costante in modulo v. La velocità SCALARE è costante ed è pari a v_s=v; è il rapporto tra la lunghezza di un arco Δs e l'intervallo di tempo Δt impiegato per percorrerlo. La velocità VETTORIALE NON E' COSTANTE.

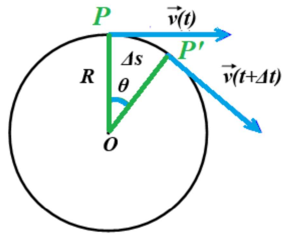
$$v.\ scalare = v_s = v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\theta = \frac{arco}{raggio} = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v\,\Delta t}{R}$$

Periodo: $\boxed{T}$

$$2\pi = \frac{2\pi R}{R} = \frac{v\,T}{R}$$

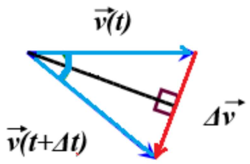
$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v} \qquad v = \frac{2\pi\,R}{T}$$

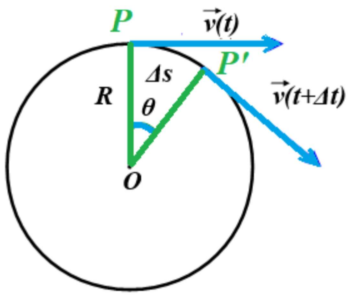


Moto circolare uniforme

Velocità vettoriale: cambia in direzione, ma non in modulo.
Calcoliamo quanto vale il modulo della variazione della velocità vettoriale.

Ridisegnamo la figura:





$$|\Delta\vec{v}| = 2v\sin\frac{\theta}{2}$$

Accelerazione centripeta

Il modulo della variazione del vettore velocità è quindi:

$$|\Delta\vec{v}| = 2v\sin\frac{\theta}{2} \qquad \theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{v\,\Delta t}{R}$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{2v\cdot\sin\frac{v\,\Delta t}{2R}}{\Delta t} = \frac{2v\ \cdot v\cdot\sin\frac{v\,\Delta t}{2R}}{v\cdot\frac{2R}{2R}\cdot\Delta t}$$

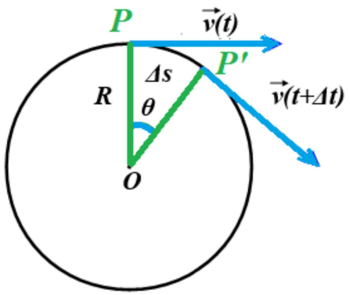
Moltiplico sopra e sotto per v. A denominatore moltiplico e divido per 2R.

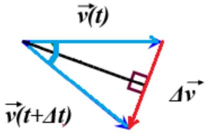
$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\cdot\frac{\sin\frac{v\,\Delta t}{2R}}{\frac{v\Delta\,t}{2R}}$$

Modulo accelerazione centripeta

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}\cdot\frac{\sin\frac{v\,\Delta t}{2R}}{\frac{v\Delta t}{2R}}$$

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = \frac{v_s^2}{R}$$





$\Delta t \to 0 \Rightarrow \theta \to 0 \Rightarrow \beta \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Delta\vec{v}$ e $\vec{v}$ perpendicolari $\Rightarrow$

$\vec{a}$ diretto verso il centro

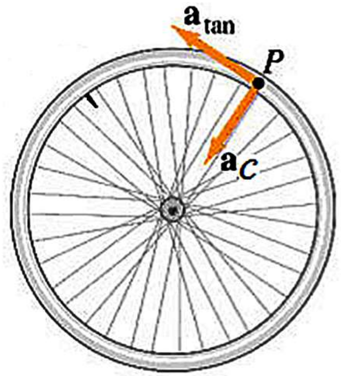
L'accelerazione è centripeta ed in modulo vale v^2/R

Moto circolare vario

Esistono moti circolari vari, la cui traiettoria è una circonferenza, ma la velocità scalare NON è costante.

In questo caso, oltre all'accelerazione centripeta v^2/R, esiste una accelerazione lungo la curva, che è un vettore parallelo alla velocità e che ha modulo:

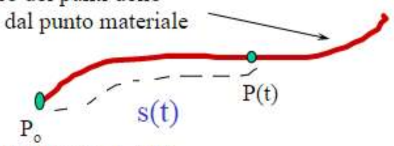
$$a_t = \frac{dv_s}{dt}$$



Coordinata curvilinea e velocità scalare media

- "Coordinata curvilinea" s(t) :
  - spazio percorso al tempo t lungo la "traiettoria"

luogo geometrico dei punti dello spazio occupati dal punto materiale durante il moto



Velocità scalare media tra due istanti t_1 e $t_2=t_1+\Delta t$

$$v_m = \frac{s(t_1+\Delta t)-s(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Velocità scalare istantanea

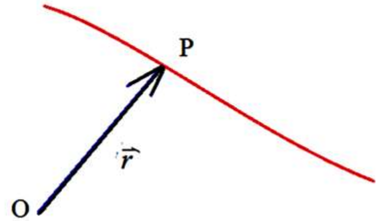
E' la derivata rispetto al tempo della coordinata curvilenea s(t):

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{ds(t)}{dt}$$

MOTO: DESCRIZIONE INTRINSECA ALLA TRAIETTORIA GENERICA

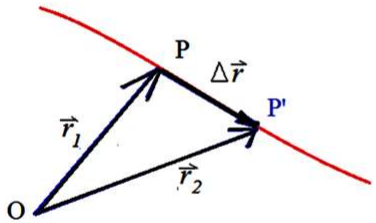
Vettore posizione e vettore spostamento

/ettore posizione: individua il)unto P della traiettoria in cui si rova il punto materiale ad un lato istante.



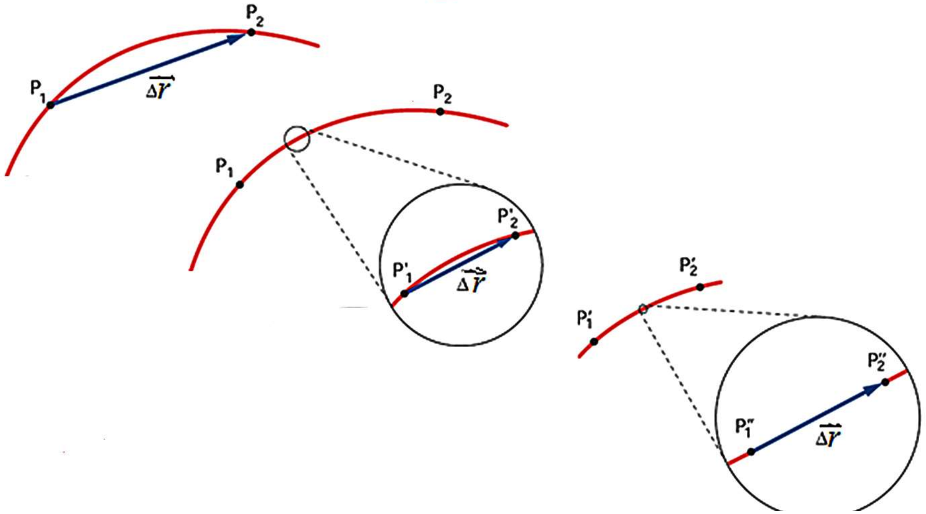
Vettore spostamento: è la variazione del vettore posizione in un intervallo di tempo.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



Vettore spostamento in Δt molto brevi

Lo spostamento di un punto materiale durante un intervallo di tempo sempre più piccolo diventa un vettore tangente alla traiettoria.



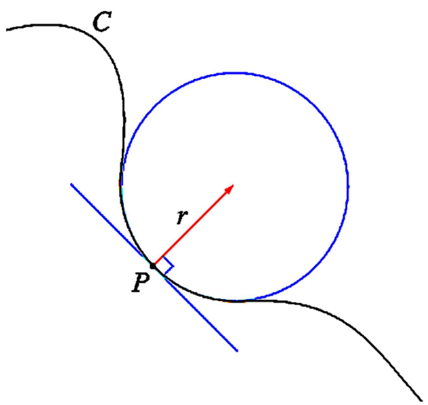
Si definiscono velocità e accelerazione vettoriale:

$$\vec{v}_m(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{a}_m(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

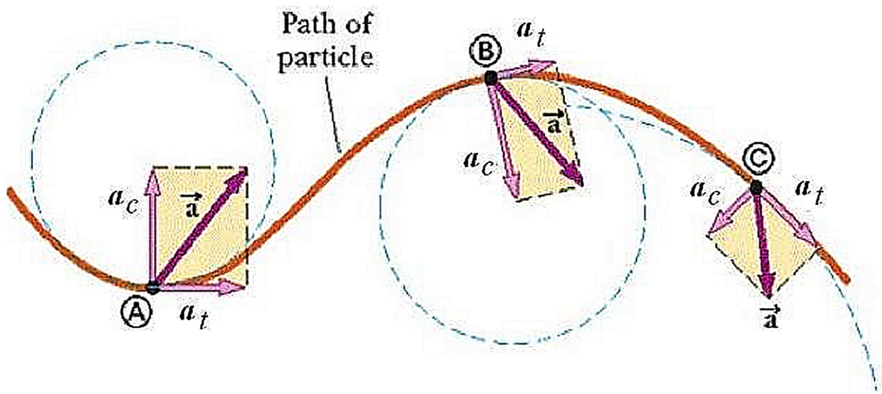
La velocità istantanea è vettore tangente la traiettoria. Nella descrizione del moto intrinseca alla traiettoria, l'accelerazione istantanea è un vettore composto da 2 componenti, una tangente la traiettoria, l'altra centripeta. La componente tangente è dovuta alla variazione della velocità scalare.

Qualsiasi moto ha la sua traiettoria che localmente può essere rappresentato da un arco di circonferenza. Esiste un «cerchio osculatore» i cui raggio è il raggio di curvatura della traiettoria.



Supponiamo la curva C descritta dal parametro tempo t. Il cerchio osculatore in P approssima la curva C intorno al valore scelto del parametro "fino al secondo ordine": ha cioè le stesse derivate prima e seconda della curva nel punto P. Se t è il tempo, allora vuol dire che il punto in P si muove sulla curva come se si muovesse su sul cerchio con la stessa velocità e accelerazione.

Data la traiettoria, il vettore velocità è un vettore tangente ad essa. Il vettore accelerazione è un vettore che ha due componenti, una tangente la traiettoria a_t e una centripeta a_c, come se il punto si muovesse sull'arco del «cerchio osculatore». Dato che la direzione delle componenti dipende dalla traiettoria, questa descrizione del moto si dice descrizione «intrinseca alla traiettoria».



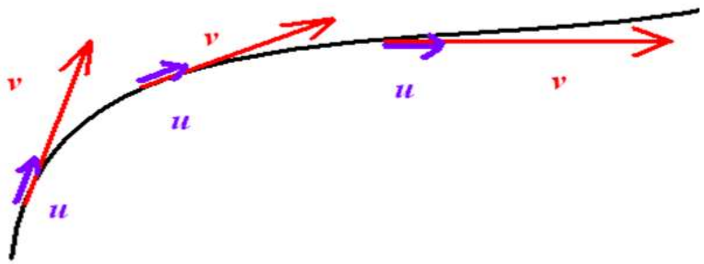
Come calcolare le accelerazioni partendo dal vettore velocità.

Scrivo il vettore velocità come il prodotto di uno scalare per un versore (vettore di modulo 1) che ha la stessa direzione del vettore v. Questo si può fare per tutti i vettori.

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = v_s \; \vec{u}_v$$

Sia lo scalare che il versore sono funzioni del tempo.

$$\vec{v} = \vec{v}(t) = v_s(t) \, \vec{u}_v(t)$$



La velocità (freccia rossa) è un vettore tangente la traiettoria (sempre!). Il suo modulo (velocità scalare), può cambiare e quindi la freccia è più o meno lunga.
Il versore ha sempre modulo UNO, e quindi nella figura, dove è reso col colore viola, è sempre lungo uguale. MA la sua direzione cambia, e quindi anche il versore è funzione del tempo.

Applico la regola della derivazione del prodotto di funzioni

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)) = \frac{d}{dt}(v_s(t)\,\vec{u}_v(t)) = \frac{dv_s}{dt}\vec{u}_v(t) + v_s\,\frac{d\vec{u}_v}{dt}$$

Il primo termine è un vettore che ha la stessa direzione della velocità e modulo pari alla derivata della velocità scalare. Questa è l'accelerazione tangenziale. Ha la stessa direzione della velocità, che è tangente alla traiettoria. Il secondo termine, contenente la derivata del versore, è l'accelerazione centripeta.

$$\vec{a} = \frac{dv_s}{dt}\vec{u}_v + v_s\,\frac{d\vec{u}_v}{dt} = a_t\,\vec{u}_v + ?$$

Dimostriamo che la derivata di un versore è un vettore che è perpendicolare al versore.

$$1 = (\vec{u}_v \cdot \vec{u}_v) = const$$

$$\frac{d(\vec{u}_v \cdot \vec{u}_v)}{dt} = 0$$

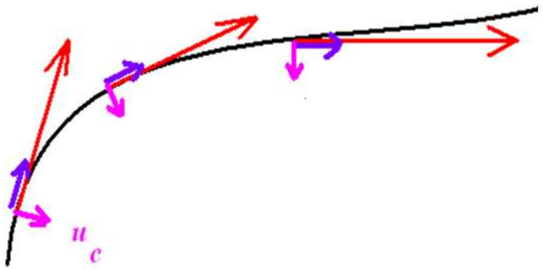
Dato che il prodotto scalare è commutativo

$$\frac{d(\vec{u}_v \cdot \vec{u}_v)}{dt} = \frac{d\vec{u}_v}{dt}\cdot\vec{u}_v + \vec{u}_v\cdot\frac{d\vec{u}_v}{dt} = 2\vec{u}_v\cdot\frac{d\vec{u}_v}{dt} = 0$$

Vettori perpendicolari hanno prodotto scalare nullo.

Quindi il versore e la sua derivata sono perpendicolari.

Il termine contenente la derivata del versore della velocità è un vettore perpendicolare alla traiettoria. La derivata del versore la scrivo come il prodotto di uno scalare per un nuovo versore $\vec{u}_c$:



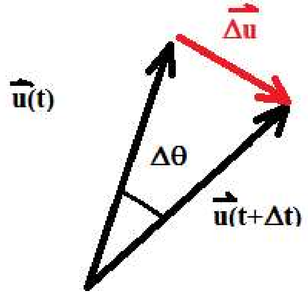
Si può dimostrare che:

$$\frac{d\vec{u}_v}{dt} = \frac{v_s}{R}\vec{u}_c$$

Il verso di $\vec{u}_c$ (vettore rosa) è diretto verso il centro di curvatura. La direzione è perpendicolare alla curva che localmente è approssimata da un arco di circonferenza del cerchio osculatore di raggio R.

In figura vedete vettori unitari tangenti la traiettoria

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim \Delta t \to 0 \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$$



Quando $\Delta t \to 0 \, , \, \Delta\theta \to d\theta$

E la corda si confonde con l'arco.

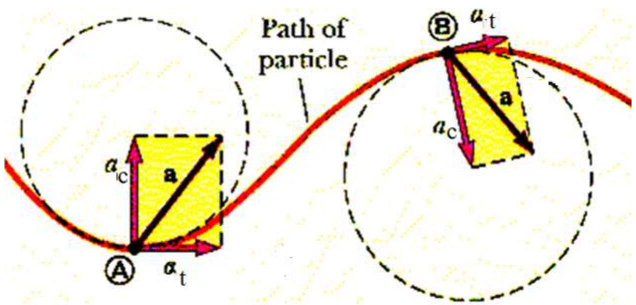
$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{|\vec{u}|d\theta}{dt}\vec{u}_c = \frac{1\cdot d\theta}{dt}\vec{u}_c = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_c = \omega\vec{u}_c = \frac{v_s}{R}\vec{u}_c$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s\vec{u}_v) = \frac{dv_s}{dt}\vec{u}_v + v_s\frac{d\vec{u}_v}{dt} =$$

$$= a_t\,\vec{u}_v + v_s\frac{v_s}{R}\vec{u}_c = a_t\,\vec{u}_v + \frac{v_s^2}{R}\vec{u}_c = a_t\,\vec{u}_v + a_c\vec{u}_c$$

R=Raggio di curvatura

L'accelerazione è un vettore con due componenti, tangenziale e centripeta.



Un treno viaggia alla velocità costante di 60 km/h per 40 min verso est, quindi per 20 min nella direzione che forma un angolo di 50° verso est rispetto al nord, e infine per 50 min verso ovest. Quale è la sua **velocità vettoriale media** su tutto il tragitto?

Quale è la sua velocità scalare media su tutto il tragitto?

L'asse x è l'asse ovest-est, e l'asse y è quello sud-nord.

$$\boxed{\begin{aligned} &|\Delta\vec{r}_1| = v\,\Delta\,t_1 = 40\,\text{km} \\ &\Delta\vec{r}_1 = (40\text{km})\,\vec{i} \end{aligned}}$$

v=60 km/h = 1 km/min

$$\boxed{\begin{aligned} &|\Delta\vec{r}_2| = v\,\Delta\,t_2 = 20\,\text{km} \\ &\Delta\vec{r}_2 = 20\,\text{km}\cdot\sin(50°)\,\vec{i} + 20\,\text{km}\cdot\cos(50°)\,\vec{j} \\ &= (15.3\,\text{km})\,\vec{i} + (12.9\,\text{km})\,\vec{j} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &|\Delta\vec{r}_3| = v\,\Delta\,t_3 = 50\,\text{km} \\ &\Delta\vec{r}_3 = (-50\text{km})\,\vec{i} \end{aligned}}$$

Spostamento totale: $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 = (5.3\text{km})\vec{i} + (12.9\text{km})\vec{j}$

Intervallo di tempo: $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 110 \text{ min}$

Velocità vettoriale media:

$$\vec{v}_M = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = 0.0482\,\vec{i} + 0.117\,\vec{j} \ \text{(in km/min)}$$

Modulo: $v_M = \sqrt{0.0482^2 + 0.117^2} = 0.127\,\text{km/min} = 7.62\,\text{km/h}$

Direzione e verso: $\varphi = \text{arctg}\dfrac{0.117}{0.0482} = 67.6°$

Quale è la sua velocità scalare media su tutto il tragitto?

$S_1 = 40\,\text{km}$

v=60 km/h = 1 km/min

$S_2 = v\,\Delta t_2 = 20\,\text{km}$

$S_3 = v\,\Delta t_3 = 50\,\text{km}$

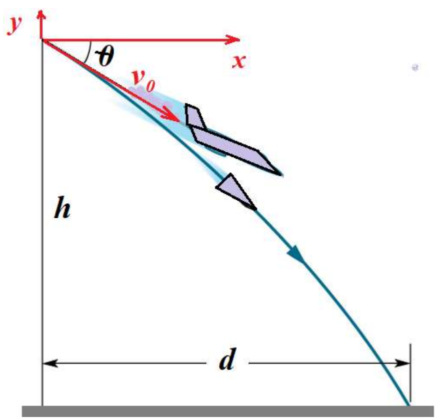
Intervallo di tempo:

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 110 \text{ min}$$

Velocità scalare media:

$$v_{s,M} = \frac{S}{T} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{T} = \frac{110\,\text{km}}{110\,\text{min}} = 1\frac{\text{km}}{\text{min}} = 60\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Un aeroplano che vola alla velocità di 290 km/h con un angolo di 30° verso il basso rispetto alla direzione orizzontale, sgancia un bersaglio. La distanza orizzontale fra il punto di rilascio ed il punto in cui il bersaglio colpisce il terreno è di 700 metri. Per quanto tempo è rimasto in aria il bersaglio? A che quota si trovava l'aereo al momento dello sgancio?



Posizione iniziale: (0,h)

Velocità iniziale: ($v_0\cos\theta$, $-v_0\sin\theta$)

(v_0=290 km/h=80.6 m/s)

Moto del bersaglio:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t$$
$$y = h - v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

All'istante di caduta $\mathbf{t_c}$ il bersaglio ha percorso la distanza orizzontale d

$$d = v_0 \cos\theta \cdot t_c \Rightarrow t_c = \frac{d}{v_0 \cos\theta} = 10\,\text{s}$$

L'altezza da cui il bersaglio è stato lanciato si ricava imponendo $\mathbf{y(t_c)=0}$

$$h - v_0\sin\theta\frac{d}{v_0\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{d}{v_0\cos\theta}\right)^2 = 0$$
$$\Rightarrow h = d \cdot \text{tg}\theta + \frac{g \cdot d^2}{2v_0^2 \cos^2\theta} = 897\,\text{m}$$

Un tennista serve la palla **orizzontalmente** ad un'altezza H (riferita al centro della palla) dal campo di gioco di 2.37 metri a una velocità v_o di 23.6 m/s.

Riuscirà la palla a passare sopra la rete, alta h = 0.9 metri, che si trova ad una distanza D di 12 metri ? Se sì, a che altezza sulla rete (riferita al centro della palla)?

La palla supera la rete se nell'istante in cui x=D è y>h.

Equazioni del moto della palla:

$$x = v_0 t \qquad y = H - \frac{1}{2} g t^2$$

Calcoliamo l'istante di tempo t_1 in cui x=D:

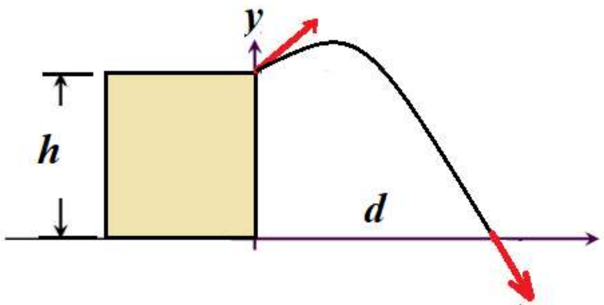
$$D = v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{D}{v_0}$$

L'altezza della palla sulla rete è $y(t_1)$:

$$y(t_1) = H - \frac{1}{2} g t_1^2 = H - \frac{g \cdot D^2}{2 v_0^2} = 1.1 \text{ m}$$

Poichè $y(t_1)>h$ la palla supera la rete.

Dall'estremità dell'edificio alto h (vedi figura) si lancia una palla che cade al suolo dopo 1.5 s alla distanza d=25 metri dalla base dell'edificio, arrivando con una velocità che ha una direzione che forma un angolo θ=60° (negativo) rispetto all'orizzontale. Trovare l'altezza h. Determinare il modulo della velocità e l'angolo di lancio rispetto all'orizzontale. **La palla è stata lanciata verso l'alto o verso il basso**?



Moto della palla:

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \qquad y = h + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha \qquad v_y = v_0 \sin\alpha - g t$$

Incognite: h, v_0, α

All'istante di caduta (**t_c=1.5 s**) **x=d=25 m**:

$$d = v_0 \cos\alpha\, t_c \rightarrow v_0 \cos\alpha = \frac{d}{t_c} \quad (1)$$

L'angolo del vettore velocità con l'asse x a **t_c =1.5 s** è **-60°** :

$$\frac{v_y(t_c)}{v_x(t_c)} = \tan(-60°) \rightarrow \frac{v_0 \sin\alpha - g t_c}{v_0 \cos\alpha} = -\sqrt{3} \quad (2)$$

$$(1): v_0 \cos\alpha = \frac{d}{t_c}$$

$$(2): v_0 \sin\alpha - g t_c = -\sqrt{3} v_0 \cos\alpha \Rightarrow v_0 \sin\alpha = g t_c - \sqrt{3} \frac{d}{t_c}$$

Elevo al quadrato le equazioni (1) e (2) e sommo:

$$v_0^2 = \left(g t_c - \sqrt{3} \frac{d}{t_c} \right)^2 + \frac{d^2}{t_c^2} \rightarrow v_0 = \sqrt{g^2 t_c^2 + \frac{4d^2}{t_c^2} - 2\sqrt{3} g d} = 21.9 \text{ m/s}$$

Dalla seconda equazione:

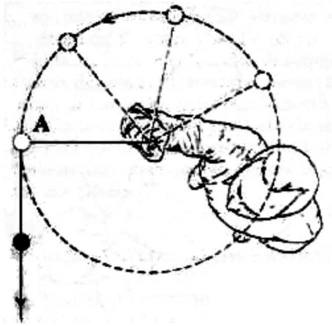
$$\sin\alpha = \frac{1}{v_0} \left(g t_c - \sqrt{3} \frac{d}{t_c} \right) = -0.647 \rightarrow \alpha = -40.3°$$

E' stata lanciata VERSO IL BASSO

Quando la palla arriva al suolo, si ha y=0:

$$y(t_c) = 0 \rightarrow h = -v_0 \sin\alpha\, t_c + \frac{1}{2} g t_c^2 = 32.3 \text{ m}$$

Un giovane fa ruotare una biglia legata ad una cordicella. La biglia ruota su di una circonferenza orizzontale di raggio R=1.5m ad una altezza di 2 m dal suolo. La cordicella si rompe e la biglia scappa via, con velocità iniziale orizzontale, andando a cadere a 10m di distanza orizzontale (moto parabolico). Quale era l'accelerazione centripeta del sasso in moto circolare?



Moto parabolico della biglia in un piano verticale:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

R=1.5m, g=9.8m/s²
h=2m, d=10m

La biglia arriva al suolo nell'istante t_1 in cui y=0:

$$\boxed{y = 0 \Rightarrow h - \frac{1}{2} g t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

All'istante di caduta t_1 dovrà essere x=d:

$$\boxed{d = x(t_1) = v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v_0 = d\sqrt{\frac{g}{2h}}}$$

L'accelerazione centripeta del moto circolare è $a_c = v_0^2/R$:

$$\boxed{a_c = \frac{v_0^2}{R} = \frac{d^2 g}{2hR} = 163.3 \text{ m/s}^2}$$

Un treno Freccia Rossa viaggia ad una velocità di 216 km/h. Se inizia una curva a questa velocità e la massima accelerazione accettabile dai passeggeri è 0.1 g, quale è il minimo raggio permesso per le curve dei binari? Se una curva ha raggio di 1 km, a quanto deve essere ridotta la velocità del treno per rispettare il limite di accelerazione consentito?

Se v=216 km/h(= 60 m/s):

$$\boxed{a_c < 0.1\,g \Rightarrow \frac{v^2}{R} < 0.1\,g \Rightarrow R > \frac{(60\text{m/s})^2}{0.1\text{g}} = 3665\,\text{m}}$$

Se R=1km=1000m:

$$\boxed{\begin{aligned} &a_c < 0.1\,g \Rightarrow \frac{v^2}{R} < 0.1\,g \Rightarrow \\ &v^2 < 0.1\,g\,R \Rightarrow v < \sqrt{0.1\,g\,R} = 22.1\,\text{m/s} = 31.3\,\text{km/h} \end{aligned}}$$

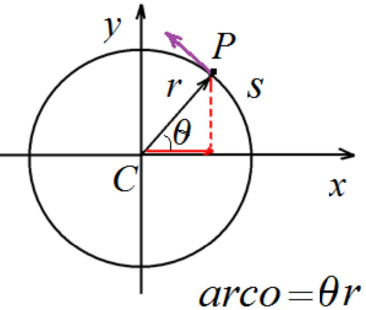
Qual è l'accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra per un oggetto che si trova sull'equatore?

Raggio della Terra: $R=6.37\times10^6$m
Periodo di rotazione: 1giorno=86400s

$$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 3.37\times10^{-2} \text{ m/s}^2}$$

Ricordiamo - Moto e coordinate polari: r e θ



$$arco = \theta r$$

$$\boxed{r = \text{const}; \quad \theta = \theta(t); \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Se il moto circolare è uniforme, la velocità angolare è costante:

$$\boxed{\omega = \omega_0}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0)}$$

Se il moto circolare ha accelerazione angolare costante:

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0)}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha \cdot (t - t_0)^2}$$

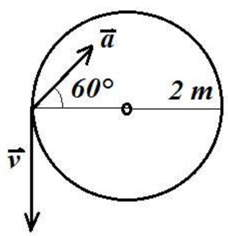
Quando si inizia ad osservare il moto circolare di un punto, l'angolo è di π/6 e la velocità angolare di π/12 al secondo. L'accelerazione angolare è costante ed è di π/24 al secondo quadrato. Dopo 2 secondi, quanto vale l'angolo?

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha \cdot (t - t_0)^2}$$

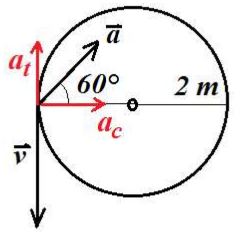
$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12s} \cdot (t - 0s) + \frac{1}{2}\frac{\pi}{24s^2} \cdot (t - 0s)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12s} \cdot (2s) + \frac{1}{2}\frac{\pi}{24s^2} \cdot (2s)^2 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6} = \frac{5}{12}\pi \end{aligned}}$$

Una particella si muove su una circonferenza di raggio pari a due metri. Ad un certo istante la particella ha una velocità di 8 m/s e un'accelerazione che forma un angolo di 60° come in figura.
Trovate l'accelerazione centripeta.
Trovate l'accelerazione tangenziale.



$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(8\,m/s)^2}{2\,m} = 32\frac{m}{s^2}$$

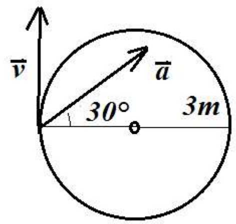


$$a_c = |\vec{a}|\cos 60° \Rightarrow |\vec{a}| = \frac{a_c}{\cos 60°}$$

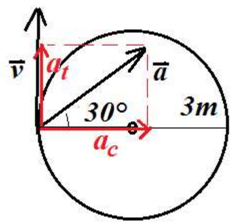
$$a_t = |\vec{a}|\sin 60° = \frac{a_c \sin 60°}{\cos 60°} = \frac{32 \times 0.866}{0.5}\frac{m}{s^2} = 55.4\frac{m}{s^2}$$

Opposta a v, è quindi una decelerazione

Una particella si muove su una circonferenza di raggio pari a tre metri. Ad un certo istante la particella ha accelerazione con modulo di 15 m/s² e che forma un angolo di 30° come in figura. Trovate l'accelerazione centripeta. Trovate l'accelerazione tangenziale. Trovate v.



$$a_c = \frac{v^2}{R} = |a|\cos 30° = (15\cos 30°)\frac{m}{s^2}$$



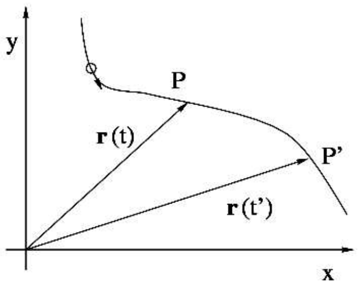
$$a_t = \frac{dv}{dt} = |a|\sin 30° = (15\sin 30°)\frac{m}{s^2}$$

$$v^2 = |a|\cos 30° R = (15 \times 3 \times \cos 30°)\frac{m^2}{s^2}$$

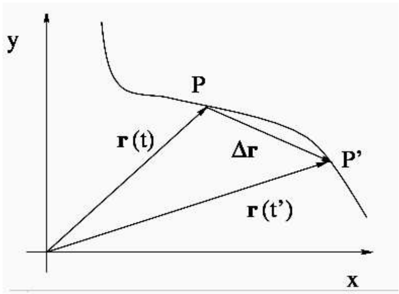
$$v = 6.24\frac{m}{s}$$

Moto nello spazio

Adesso che abbiamo introdotto il concetto di vettore, possiamo studiare il moto di un punto in tre dimensioni. Si sono già incontrati il vettore posizione e il vettore spostamento. Nello spazio, la posizione di un punto in funzione del tempo la possiamo descrivere tramite il vettore posizione $\vec{r}(t)$.



Per comodità in figura si sono rappresentate solo le due dimensioni x e y. Si sono indicate le posizioni P e P' del punto nei due istanti t e t'. Lo spostamento del punto da P a P' lo diamo tramite la differenza dei vettori posizione e quindi tramite un vettore spostamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$.



La velocità media sarà definita come il rapporto tra il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ ed il tempo impiegato per compiere questo spostamento $t' - t = \Delta t$:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

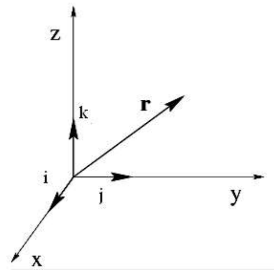
Notiamo che essendo, per definizione, il rapporto di un vettore per un scalare, la velocità è una grandezza vettoriale.
Se l'intervallo Δt diventa molto piccolo si ottiene la velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

dove compare l'espressione già incontrata prima della derivata.

Come abbiamo già fatto per il calcolo della somma dei vettori, passiamo ad utilizzare le componenti cartesiane per semplificare i calcoli. Un generico vettore lo possiamo pensare come la somma di tre pezzi:

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\vec{i} + r_y(t)\vec{j} + r_z(t)\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



Siccome i tre versori non cambiano al passare del tempo perché si tiene fisso il riferimento, quello che potranno cambiare sono solo le componenti x, y e z (infatti nella scrittura ne abbiamo già esplicitato la dipendenza come funzioni del tempo). Scriviamo allora immediatamente la velocità come la seguente derivata:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)\vec{i} + y(t+\Delta t)\vec{j} + z(t+\Delta t)\vec{k} - x(t)\vec{i} - y(t)\vec{j} - z(t)\vec{k}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Indico con:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}$$

le componenti della velocità lungo i tre assi. L'accelerazione è:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Il moto nello spazio, se lo pensiamo descritto mediante le tre componenti cartesiane diventa la composizione di tre moti lungo i tre assi cartesiani. Il moto lungo l' asse non è altro che il moto della proiezione sull'asse stesso. Quindi $x(t)$ descriverà il moto lungo l'asse x e così per y e z. Tutto ciò che abbiamo visto per il moto lungo un asse e che abbiamo studiato in precedenza continua a valere per ciascuno dei tre assi.

Esercizio1 Una particella, inizialmente posta nell'origine, ha una accelerazione $\vec{a} = 3\vec{j}\ m/s^2$ ed una velocità iniziale $\vec{v}_o = 5\vec{i}\ m/s$. Trovare il vettore posizione e la velocità ad un generico istante t e le coordinate della posizione della particella a $t = 2\ s$.

Soluzione
Notiamo che la particella ha una accelerazione costante lungo l'asse y ma non ha accelerazione lungo l'asse x e z. La velocità iniziale è lungo x ma non lungo y e z. Inoltre la posizione iniziale è nell'origine:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{v}_o &= 5\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ \vec{r}_o &= 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \end{aligned}$$

Allora, scriviamo le equazioni del moto uniformemente accelerato lungo i tre assi:

$$asse\ x \rightarrow a_x = cost,\ v_x = v_{xo} + a_x t,\ x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{xo}t + x_o$$
$$a_x = 0,\ v_{xo} = 5,\ x_o = 0 \quad quindi \quad a_x = 0,\ v_x = 5,\ x = 5t$$

$$asse\ y \rightarrow a_y = cost,\ v_y = v_{yo} + a_y t,\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{yo}t + y_o$$
$$a_y = 3,\ v_{yo} = 5,\ y_o = 0 \quad quindi: a_y = 3,\ v_y = 3t,\ y = \frac{1}{2}3t^2$$

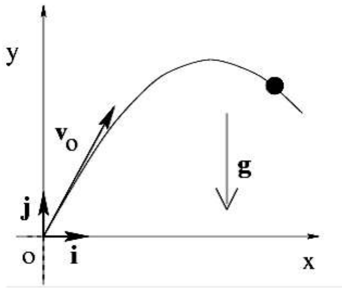
$$asse\ z \rightarrow a_z = cost\ \ v_z = v_{zo} + a_z t,\ z = \frac{1}{2}a_z t^2 + v_{zo}t + z_o$$
$$a_z = 0,\ v_{zo} = 0,\ z_o = 0 \quad quindi: a_z = 0,\ v_z = 0,\ z = 0$$

Il moto si svolge nel piano xy. Sommando i contributi per i vettori velocità e posizione:

$$\begin{aligned} &\vec{a} = 3\ \vec{j} \\ &\vec{v} = 5\ \vec{i} + 3t\ \vec{j} \\ &\vec{r} = 5t\ \vec{i} + \frac{1}{2}3t^2\ \vec{j} \end{aligned}$$

Al tempo $t = 2\ s$: $\vec{v} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{r} = 10\vec{i} + 6\vec{j}$

Siamo ora in grado di analizzare il moto dei gravi in due dimensioni. Per iniziare consideriamo il caso in cui vi sia solo presente l'accelerazione di gravità g lungo l'asse verticale y. Scegliamo l'asse y orientato verso l'alto (vedi figura pagina seguente).



Nella figura si vede una parte della traiettoria di un pallone che parte dall'origine con una velocità iniziale $\vec{v}_o = v_{xo}\vec{i} + v_{yo}\vec{j}$ e che è soggetto all'accelerazione di gravità $\vec{g} = -g\,\vec{j}$, dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità. La traiettoria che descrive il pallone risulta essere una traiettoria parabolica.
Scriviamo le equazioni per il moto lungo l'asse x e l'asse y:

$$\begin{aligned} &\vec{a} = a_x\ \vec{i} + a_y\ \vec{j} = -g\ \vec{j} \\ &\vec{v} = \vec{v}_o - gt\ \vec{j} = v_{xo}\ \vec{i} + v_{yo}\ \vec{j} - gt\ \vec{j} = v_{xo}\ \vec{i} + (v_{yo} - gt)\ \vec{j} \\ &\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = v_{xo}t\ \vec{i} + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_{yo}t)\ \vec{j} \end{aligned}$$

Quindi: $x = v_{xo}t$; $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{yo}t$. Da cui, se si ricava t dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda:

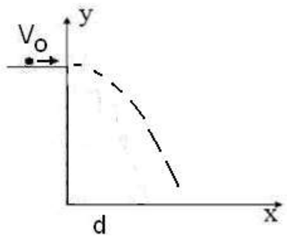
$$t = \frac{x}{v_{xo}}\ ; \qquad y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{xo}}\right)^2 + v_{yo}\frac{x}{v_{xo}} = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_{xo}^2} + \frac{v_{yo}}{v_{xo}}x$$

che è l'equazione di una parabola: $y = Ax^2 + Bx$

Esercizio 2 Discutete il moto lungo la verticale

Soluzione
Consideriamo un corpo che cade verticalmente da una posizione di riposo (V_o= 0) , ossia che viene lasciato cadere, da una altezza h dal piano orizzontale. L'equazioni sono: $x = x_o = 0$; $y = h - ½\ g\ t^2$.
Il corpo cadendo descrive il moto lungo la verticale. Al suolo la quota y è zero: $0 = h - ½\ g\ t^2$ $\Rightarrow$ $t = (2h/g)^{1/2}$, che è il tempo per arrivare al suolo.
Se lo stesso corpo cade dalla stessa altezza, ma prima si muove lungo l'orizzontale con velocità v_{xo}. le equazioni sono: $x = x_o + v_{xo}t$; $y = h - ½\ g\ t^2$. La sua traiettoria sarà parabolica.

Nella figura seguente, la traiettoria di questo moto parabolico viene rappresentata con una linea tratteggiata.



Si ricava il tempo che il corpo impiega a descrivere l'altezza h: esso si trova ponendo $y = 0$ nell'espressione che fornisce l'ordinata. Si avrà di nuovo:

$$y = h - \tfrac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 0 = h - \tfrac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = (2h/g)^{1/2}$$

cioè *il moto lungo la verticale è lo stesso nei due casi.*

A che distanza dal piede della verticale arriva il corpo?

Uso l'equazione: $x = x_o+v_{xo}t$, per $t = (2h/g)^{1/2}$ e quindi $d = v_{xo} (2h/g)^{1/2}$

Esercizio 3 Discutete il moto del proiettile.

Soluzione Il moto di un punto materiale che si muove su un piano verticale con velocità iniziale e accelerazione di gravità **g** diretta verso il basso è detto moto di un proiettile. In queste condizioni, assumo come piano xy (vedi figura) quello sul quale si svolge il moto e la sua origine come posizione iniziale. La traiettoria descritta dal punto materiale è una parabola e si possono applicare le equazioni del moto bidimensionale con accelerazione costante, assumendo $a_y= -g$ e $a_x= 0$ se si trascura la resistenza dell'aria. Indicato con Θ_o l'angolo formato dalla velocità iniziale con l'asse x, si avranno le relazioni

$$v_{xo}= v_o \cos \Theta_o$$
$$v_{yo}= v_o \operatorname{sen} \Theta_o$$

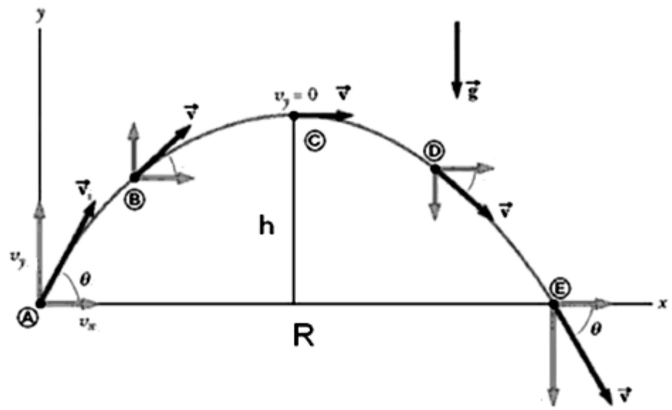
che danno:

$v_o \cos \Theta_o$ = costante (nella direzione orizzontale)

$$v_y = v_{yo} - g\, t = v_o \operatorname{sen} \Theta_o - g\, t$$

$$x = x_o+ v_{xo}t = 0 + (v_o \cos \Theta_o)\, t$$

$$y= y_o+ v_{yo}\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2 = (v_o \operatorname{sen} \Theta_o)\, t - \tfrac{1}{2} g\, t^2$$



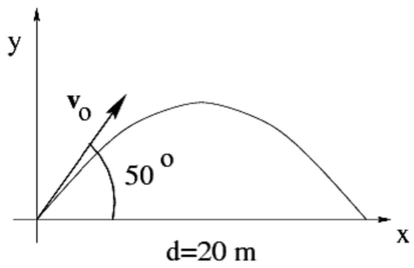
Ci sono dei punti della traiettoria del proiettile da analizzare: il punto più alto e il punto di atterraggio. L'ordinata di C è l'altezza massima raggiunta dal proiettile, indicata con h, e la distanza AE è detta **gittata**. Le coordinate di questi due punti sul piano *xy* sono quindi (R/2, h) per C e (R, 0) per E. Per determinare h e R in funzione dei parametri del moto v_o, Θ_o e g, si osservi che la componente y della velocità si annulla nel punto C, il più alto della traiettoria, raggiunto in un tempo t_C, per cui dall'equazione $v_{yC} = v_o \operatorname{sen} \Theta_o - g\, t_C = 0$, si ha:

$$t_C = (v_o \operatorname{sen} \Theta_o) / g.$$

La gittata si raggiunge al doppio di questo tempo e quindi vale:

$$x = v_{xo}\, 2\, t_C = (v_o \cos \Theta_o)\, 2\, (v_o \operatorname{sen} \Theta_o) / g = (v_o^2 \operatorname{sen} 2\Theta_o) / g$$

Esercizio 4 Un pallone, calciato con un angolo di $50°$ con l'orizzontale, percorre una distanza di $20\ m$ prima di toccare il suolo. Trovare la velocità iniziale, il tempo per cui rimane in aria e la massima altezza raggiunta.



Soluzione
Per semplicità prendiamo l'origine del riferimento nel punto in cui viene calciato il pallone. Quindi

$x_o = 0\,,\ y_o = 0$

$a_x = 0\,,\ v_x = v_{xo}\,,\ x = x_o + v_{xo}t = v_{xo}t$

$a_y = -g\,,\ v_y = v_{yo} - gt\,,\ y = y_o + v_{yo}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{yo}t - \frac{1}{2}gt^2$

Il moto della componente x è a velocità costante ma quello di y è accelerato. Dobbiamo determinare la velocità iniziale. Per la trigonometria, la velocità iniziale risulta avere componenti:

$v_{xo} = v_o\cos(50^\circ) = 0.6\,v_o \quad v_{yo} = v_o\sin(50^\circ) = 0.7\,v_o$

Non conosciamo il modulo della velocità ma conosciamo la massima distanza $x = d = 20\,m$ raggiunta, che si trova alla quota $y = 0$ al tempo T di volo del pallone:

$$d = x = v_{xo}T = v_o\cos 50^\circ\ T \to d = v_o(0.6)T \to T = d/(0.6v_o)$$
$$y = 0 = v_{yo}T - \frac{1}{2}gT^2 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{d}{0.6v_o}\right)^2 + 0.7v_o\left(\frac{d}{0.6v_o}\right) \to$$
$$0 = -\frac{g}{2}\frac{d^2}{0.6^2v_o^2} + \frac{0.7}{0.6}d$$

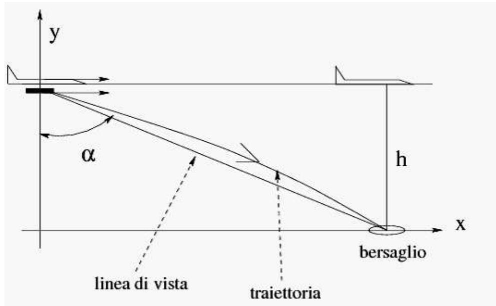
da cui ricavo che: $v_o = 15\frac{m}{s}$ e quindi che $T = 2.2\ s$.

Al tempo $T/2$ si raggiunge la massima altezza. Utilizzo l'equazione:

$$y = v_{yo}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h_{max} = -\frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 + 0.7v_o\left(\frac{T}{2}\right) = 5.5\ m$$

Esercizio 5 In una gara, deve essere lanciato un proiettile contro un bersaglio da un aereo. L'aereo vola con una velocità orizzontale costante v_o di $155\ km/h$ ad una altezza h di $225\ m$ verso il punto direttamente sopra il bersaglio. Con quale angolo di vista α deve essere lanciato il proiettile per colpire il bersaglio?



Soluzione
Il proiettile ha una velocità iniziale uguale a quella dell'aereo:

$$v_{ox} = 155\ km/h = 43\ m/s$$
$$v_{oy} = 0$$

La posizione del proiettile ha componenti:

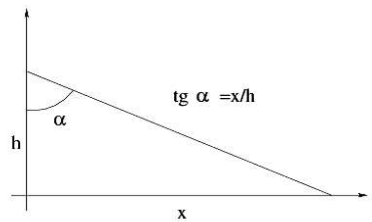
$$y = y_o + v_{oy}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = y_o - \frac{1}{2}gt^2$$
$$x = x_o + v_{ox}t + \frac{1}{2}a_xt^2 = v_{ox}t$$

poiché $a_x = 0$. Devo trovare il tempo T che impiega il proiettile per arrivare a terra cioè per passare dalla quota iniziale h alla quota zero.

Utilizzando l'equazione: $y = h - \frac{1}{2}gt^2$, ottengo: $0 = h - \frac{1}{2}gT^2$, da cui:

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6.8\ s$$

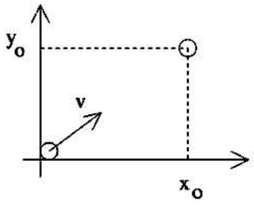
La distanza x dall'origine a cui arriva il proiettile è: $x = v_{ox}T = 292\ m$



Dalla trigonometria: $\tan\alpha = \frac{x}{h} \to \alpha = \tan^{-1}\frac{x}{h} = 52^\circ$

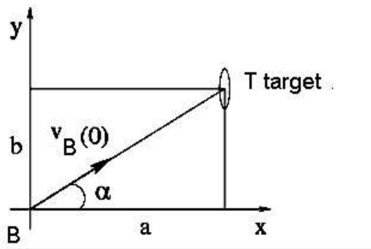
Esercizio 6 Una pallina viene lanciata dall'origine degli assi cartesiani nello stesso istante in cui un'altra pallina viene lasciata cadere da un punto di coordinate $x_o = 3\ m, y_o = 2\ m$. La

direzione del lancio della prima pallina è quella della congiungente l'origine degli assi col punto x_o, y_o mentre la sua velocità iniziale vale $v = 8\ m/s$.
Determinare le coordinate del punto di incontro.



Provate a risolvere l'esercizio da soli; se non ci riuscite guardate il n.8. Dopo aver visto il problema 8, proviamo a risolvere.

Soluzione
La pallina B viene lanciata dall'origine degli assi cartesiani nello stesso istante in cui un'altra pallina target T viene lasciata cadere da un punto di coordinate $a = x_o = 3\ m, b = y_o = 2\ m$. La direzione del lancio della prima pallina è quella della congiungente l'origine degli assi col punto x_o, y_o mentre la sua velocità iniziale vale $v = 8\ m/s$. Rifacciamo la figura così.



Per il target le equazioni sono:
$$x_T(t) = a$$
$$y_T(t) = b - \frac{1}{2}gt^2$$

Per la pallina B:
$$x_B(t) = (v_B \cos\alpha)t$$
$$y_B(t) = (v_B \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Dalla trigonometria $\tan\alpha = \frac{b}{a}$. Se B e P si incontrano, al tempo t^* sono nello stesso punto dello spazio:
$$x_B(t^*) = x_T(t^*)$$
$$y_B(t^*) = y_T(t^*)$$

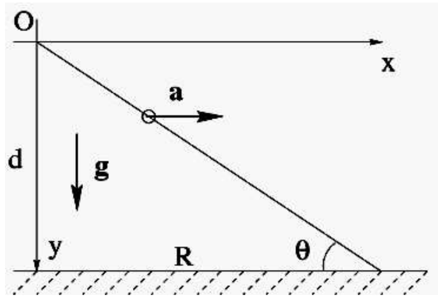
Da $x_B(t^*) = x_T(t^*)$, ossia dal fatto che per incontrarsi, la pallina B deve avere la stessa ascissa a del target, si ha: $a = (v_B \cos\alpha)t^*$ e quindi:

$$t^* = \frac{a}{v_B \cos\alpha} = \frac{a}{v_B \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_B} = 0.45s$$

Poi ricaviamo la quota:

$$y_B(t^*) = v_B \sin\alpha \frac{a}{v_B \cos\alpha} - \frac{1}{2}gt^{*2} = a\ \tan\alpha - \frac{1}{2}gt^{*2} = b - \frac{1}{2}gt^{*2} =$$
$$= y_T(t^*) = 2m - 1.01m = 0.99m$$

Esercizio 7 Un oggetto è lasciato cadere da un'altezza di $39\ m$. Il vento soffia orizzontalmente e produce sull'oggetto una accelerazione costante di $1.2\ m/s^2$. Mostrare che la traiettoria dell'oggetto è una retta. Trovare i parametri R e Θ della retta. Quanto tempo impiega ad arrivare a terra? Con che velocità arriva al suolo?



Soluzione
Scegliamo un riferimento con l'origine nel punto iniziale del moto con l'asse y rivolto verso il basso. Scriviamo le equazioni rispetto ai due assi x e y :

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{xo}t + x_o = \frac{1}{2}at^2 + v_{xo}t + x_o$$
$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{yo}t + y_o = \frac{1}{2}gt^2 + v_{yo}t + y_o$$

Siccome l'oggetto ha velocità iniziale nulla ($v_{xo} = 0, v_{yo} = 0$) e parte dall'origine del riferimento ($x_o = 0, y_o = 0$) :

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

da cui: $t^2 = \frac{2x}{a}$; $y = \frac{1}{2}gt^2 = g\frac{x}{a} = \frac{g}{a}x$

che è l'equazione di una retta. Sostituendo i dati d ed a :

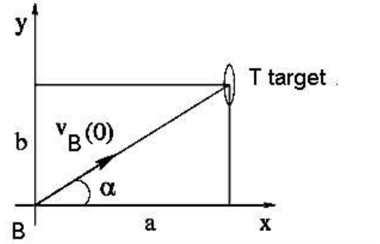
$$d = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

$$R = \frac{1}{2}a\frac{2d}{g} = 4.7\ m$$

Per la trigonometria: $\tan\theta = d/R = 8.3 \rightarrow \theta = 83°$

$$\begin{aligned} v_x &= a_x t = 3\ m/s \\ v_y &= a_y t = 2.8\ m/s \quad (al\ suolo) \end{aligned}$$

Esercizio 8
A bullet is fired from a gun against a target, which is initially suspended at a certain altitude, but left free when the bullet is fired. Show that if the gun is initially pointed toward the target, the bullet will hit the target.



The target equations are: $$\begin{aligned} x_T(t) &= a \\ y_T(t) &= b - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

For the bullet: $$\begin{aligned} x_B(t) &= (v_B \cos\alpha)t \\ y_B(t) &= (v_B \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

From trigonometry: $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

If the bullet hits the target, bullet and target (B and T) must be at the same time t^* in the same place, that is:

$$\begin{aligned} x_B(t^*) &= x_T(t^*) \\ y_B(t^*) &= y_T(t^*) \end{aligned}$$

From equation $x_B(t^*) = x_T(t^*)$ we have: $a = (v_B \cos\alpha)t^*$

And then: $t^* = \frac{a}{v_B \cos\alpha}$

That we place in $y_B(t^*)$ and $y_T(t^*)$

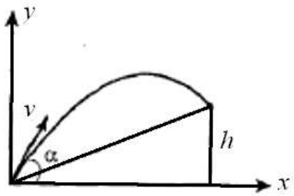
$$\begin{aligned} y_B(t^*) &= v_B \sin\alpha \frac{a}{v_B \cos\alpha} - \frac{1}{2}gt^{*2} = \\ &= a \tan\alpha - \frac{1}{2}gt^{*2} = b - \frac{1}{2}gt^{*2} = y_T(t^*) \end{aligned}$$

We find that $y_B(t^*) = y_T(t^*)$ is correct. The bullet hits the target.

What would happen if you fired a gun on a train moving as fast as a bullet?
This is a good question because it involves the concept of **reference frames**.

"An especially interesting case arises when a projectile is hurled from the rear of a fast-moving train or other vehicle. Let us suppose that someone throws a stone, horizontally, down the track from the rear platform of a train speeding along at 60 miles per hour. And suppose that the stone is thrown at an initial speed of 60 miles per hour (relative to the train, of course) . Then, to the people on the train, the stone will appear to follow a perfectly normal parabolic path. But how will it seem to a person standing on the ground alongside the track? Remember that velocity is always relative. The forward motion of the train will just cancel the backward motion of the stone. In other words, the stone will plummet straight down to the ground, with no motion at all in the horizontal direction.
A similar situation arises when a bullet is fired from a speeding aeroplane. A revolver bullet, for instance, has a muzzle velocity of only about 500 miles per hour. If such a bullet is fired from the rear of a modern warplane speeding along at 500 miles per hour, the two velocities cancel, and the bullet at first stands still momentarily then falls straight down as though it had been dropped. On the other hand, if the bullet is fired from the front of the plane, the velocities add, and the speed of the bullet relative to the earth is 1,000 miles per hour. Of course, the machine guns used in warfare fire their bullets at speeds much greater than 500 miles per hour. Moreover, if the target is another moving plane, it is the speed of the bullet relative to this moving target that counts in determining the damage done not the speed relative to the earth. It makes no difference at all whether a revolver bullet stands still with respect to the earth and you run into it with a speed of 500 miles per hour, or whether you are standing still with respect to the earth and the revolver bullet strikes you with this speed. In both cases the effect is the same, and unpleasant for you." From PHYSICS TELLS WHY, An Explanation of Some Common Physical Phenomena, by OVERTON LUHR
What's true for bullets, however, is not true of some other things that you might "shoot" from the front of the train. A great example is **sound waves**. If you turn on the stereo in your living room, sound waves "shoot out" of the speaker at the speed of sound - something like 700 mph. The waves propagate through the air at that fixed speed, and they can go no faster. So if you put a speaker at the front of the 1,000 mph train, the sound waves will not depart the train at 1,700 mph. They cannot go faster than the speed of sound. This is the reason why planes travelling faster than the speed of sound create sonic booms.

Esercizio 9 Un cannone spara proiettili con una velocità iniziale di 300 m/s che devono colpire un bersaglio situato su un monte di altezza pari a 1000 m rispetto al cannone; la distanza in linea d'aria tra cannone e bersaglio è di 5000 m. Trovare l'angolo di alzo α del cannone.



Soluzione

$$x(t) = (v_o \cos\alpha)t$$
$$y(t) = (v_o \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il moto avviene sulla parabola di equazione $y(x) = x \cdot tg\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2\cos^2\alpha}$

che si può anche scrivere come (dato che $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha$):

$$y(x) = x \cdot tg\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_o^2}tg^2\alpha - \frac{1}{2}\frac{g \cdot x^2}{2v_o^2}$$

Questa è un'equazione da cui possiamo ricavare $tg\alpha$. Mettendo i dati:

$$y = 10^3 m; x = \sqrt{(5\times10^3)^2 m^2 - 10^6 m^2} = 4.9\times10^3 m$$

Ho due soluzioni: $tg\alpha_1 = 0.54,\ \alpha_1 = 28.4°$
$tg\alpha_2 = 3.18,\ \alpha_2 = 72.5°$

La soluzione con l'angolo minore si dice "tiro diretto". L'altra "tiro indiretto".

Esercizio 10 La "Perla Nera" veleggia a una distanza di 3 km dalla costa. Le sentinelle sulla costa l'avvistano e preparano il cannone che spara proiettili a 300 m/s. Che alzo deve avere il cannone per colpire il veliero dei pirati?

Soluzione
Le equazioni del proiettile sono:

$$x(t) = (v_o \cos\alpha)t$$
$$y(t) = (v_o \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Siccome il cannone e il veliero hanno la stessa y pari a zero:

$$0 = (v_o \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(v_o \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right)$$

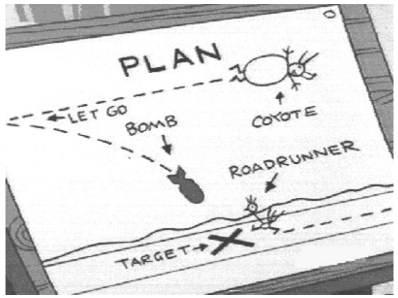
che ha una soluzione t=0, che rappresenta l'istante di sparo. Poi c'è la soluzione di:

$$0 = \left(v_o \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) \quad (*)$$

Se il proiettile deve colpire il veliero: $d = (v_o \cos\alpha)t \to t = d/(v_o \cos\alpha)$.
Questo tempo sostituito in (*) determina l'alzo del cannone.

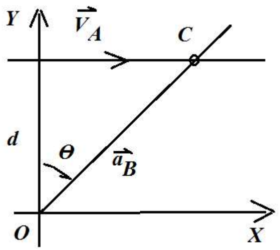
$$0 = \left(v_o \sin\alpha - \frac{1}{2}g\frac{d}{v_o \cos\alpha}\right) \to 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{gd}{v_o^2} = \frac{10m/s^2\, 3000m}{(300m/s)^2} = \frac{1}{3}$$

Questa è un'equazione da cui possiamo ricavare , $\alpha/2$ e poi α . Ho due soluzioni, la soluzione con l'angolo minore si dice "tiro diretto". In questo caso è di circa 39°. L'altra "tiro indiretto", ed è 90°−39°=51°.



Un progetto di Wile E. Coyote

Esercizio 11 Una particella A si sposta sulla retta y=d (30 m) a velocità costante v di modulo v= 3.0 m/s e direzione parallela all' asse x. Una seconda particella B parte dall' origine, con velocità iniziale zero e accelerazione **a** di modulo a = 0.40 m/s^2, nello stesso istante in cui la particella A attraversa l' asse y. Quale angolo θ fra **a** e il verso positivo dell' asse y potrebbe provocare una collisione fra le due particelle?



Soluzione

$$x_A = v_A t \qquad x_B = \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad a_x = a\sin\theta$$
$$y_A = d \qquad y_B = \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad a_y = a\cos\theta$$

Se due particelle si incontrano se si trovano al tempo t nello stesso punto del piano. Quindi:

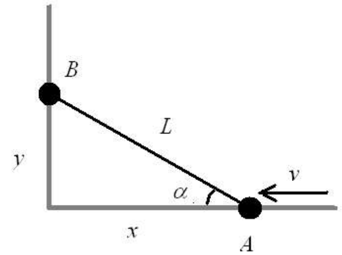
$$\begin{array}{l} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} v_A t = \frac{1}{2} a_x t^2 \\ d = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} v_A = \frac{1}{2} a_x t \\ d = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} t = \frac{2v_A}{a_x} \\ d = \frac{1}{2} a_y \left(\frac{2v_A}{a_x}\right)^2 = \frac{2a\cos\theta\, v_A^2}{a^2\sin^2\theta} \end{array}$$

$$1 = \frac{2\cos\theta\, v_A^2}{d\cdot a\sin^2\theta} = \frac{2\cos\theta\, v_A^2}{d\cdot a\cdot(1-\cos^2\theta)} = \frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta} A$$

Con $A = \frac{2\,v_A^2}{d\cdot a}$; $-1+\cos^2\theta + A\cos\theta = 0$

$$A\cos\theta = \frac{-A+\sqrt{A^2+4}}{2} = 0.5$$

Esercizio 12 Due oggetti A e B sono collegati ad un'asta rigida che ha lunghezza L. Gli oggetti slittano lungo la guida perpendicolare, come mostrato in figura. Se A slitta a sinistra con una velocità v, trovate la velocitò di B quando α=60°.



Soluzione
Possiamo dalla rappresentazione grafica data in figura a quella matematica attraverso un modello geometrico, notando che le distanza x e y sono sempre correlate da $x^2+y^2=L^2$. Differenziando questa equazione rispetto al tempo:

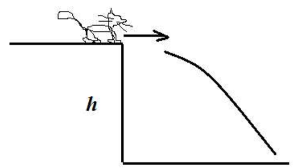
$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Dato che $\frac{dy}{dt} = v_B$, che è la velocità incognita di B e $\frac{dx}{dt} = -v$.

$-2xv + 2yv_B = 0$ da cui $v_b = \frac{x}{y}v$ e inoltre $\frac{x}{y} = \tan\alpha$. Quindi : $v_B = \frac{1}{\tan\alpha}v$

Se α=60°, $v_B = \frac{1}{\tan 60°}v = \frac{v}{\sqrt{3}} = 0.577v$

Esercizio 13 Tom the cat is chasing Jerry the mouse across the surface of a table 1.5 m above the floor. Jerry steps out of way at the last second, and Tom slides off the edge of the table at a speed of 5 m/s. Where will Tom strike the floor, and what velocity components will he have just before he hits?



Soluzione
Let us suppone the y axis oriented downwards:

$$\begin{array}{l} v_x = v_o = const \\ v_y = gt \\ h = \frac{1}{2}gt^2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} t = \sqrt{2h/g} \\ v_{y,floor} = g\sqrt{2h/g} = \sqrt{2hg} \\ v_{x,floor} = v_o \end{array}$$

Esercizio 14

A tennis player standing 12.6 m from the net hits the ball at 3° above the horizontal. To clear the net, the ball must rise at least 0.330 m. If the ball just clears the net at the apex of its trajectory, how fast was the ball moving when it left the racquet?

Soluzione
Let us orient the y axis upwards.

$$\begin{aligned} v_x &= v_o \cos 3° \\ v_y &= -gt + v_o \sin 3° \\ (apex)\quad h &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_o \sin 3° t \\ (apex)\quad l &= v_o \cos 3° t \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & t = l/(v_o \cos 3°) \\ & h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{l}{v_o \cos 3°}\right)^2 + v_o \sin 3° \frac{l}{v_o \cos 3°} \\ & h - l\cdot\tan 3° = -\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_o^2 \cos^2 3°} \\ & angle = 3° = \frac{3}{180}\pi \approx \frac{1}{20} radiant \end{aligned}$$

The angle is quite small and then the sine is the angle and the cosine is equal to 1.

$$v_o^2 = -\frac{gl^2}{2}\left(h - l\frac{1}{20}\right)^{-1} = -\frac{10m/s^2 \times (12.6m)^2}{2}\left(0.330m - \frac{12.6}{20}m\right)^{-1} =$$
$$= 5\times 12.6^2 \frac{m^3}{s^2}\frac{1}{(0.63-0.33)m} = \frac{50}{3}12.6^2\frac{m^2}{s^2} \rightarrow v_o = 52m/s$$

Esercizio 15 A daredevil decides to jump a canyon. Its walls are equally high and 10 m apart. He takes off by driving a motorcycle up a short ramp sloped at an angle of 15°. What minimum speed must he have in order to clear the canyon?

Soluzione

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_o \sin 15° t \\ d &= v_o \cos 15° t \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & t(-gt/2 + v_o \sin 15°) = 0 \\ & t = 2v_o \sin 15°/g \end{aligned}$$

$$d = v_o \cos 15° \cdot 2v_o \sin 15°/g \rightarrow v_o = \sqrt{gd/(2\cos 15° \sin 15°)}$$

Esercizio 16 A stunt man sitting on a tree limb wishes to drop vertically onto a horse galloping under the tree. The speed of the horse is 10 m/s, and the man is initially 3 m above the level of the saddle. What must be the horizontal distance between the saddle and the limb when the stunt man makes his move?

Soluzione

$$\begin{aligned} D_{horizontal} &= V_{horse}t \\ h &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & t = \sqrt{2h/g} = 0.77s \\ & D_{horizontal} = V_{horse}t = 7.5m \end{aligned}$$

Esercizio 17 Un camionista schiaccia i freni quando vede un tronco bloccargli la strada. Il camion decelera costantemente a 5.6 m/s^2, per 4.2 s, lasciando un segno della frenata lungo 62.4 m. Che velocità aveva il camion prima di frenare?

Soluzione

$$D_{frenata} = 62.4m \quad ; \quad a = 5.6m/s^2 \quad ; \quad t = 4.2s$$
$$D = -\frac{1}{2}at^2 + v_o t$$
$$v_o = (D + \frac{1}{2}at^2)/t = \frac{62.4m + \frac{1}{2}5.6\times(4.2)^2 m}{4.2s} = 26.6m/s = 95km/h$$

Esercizio 18 Un camionista viaggia lungo un muro di pietra. Il camionista schiaccia i freni quando vede una pietra che cade verticalmente dalla sommità del muro. Il muro è alto 10 m. Riesce a fermarsi in una distanza di 20 metri, giusto per evitare la pietra, e appena prima che la essa tocchi terra. Che decelerazione ha il camion?

Soluzione
Troviamo il tempo di caduta della pietra:

$$h = 10m = \frac{1}{2}gt^2 \quad (pietra) \rightarrow 10m = \frac{1}{2}10\frac{m}{s^2}t_p^2 \rightarrow t_p = 1.4s$$
$$d = -\frac{1}{2}at^2 + v_o t \quad (camion)$$
$$v_f = 0 = v_o - at \rightarrow v_o = at$$

Il tempo di frenata del camion deve essere uguale al tempo di caduta della pietra.

$$d = -\frac{1}{2}at^2 + v_o t = -\frac{1}{2}at^2 + (at)t = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow 20m = \frac{1}{2}at_p^2 = \frac{1}{2}a(1.4s)^2$$
$$a = \frac{40m}{(1.4s)^2} \approx 20\frac{m}{s^2}$$

Esercizio 20 Un aereo vola a velocità costante orizzontale di 300km/h ad un'altezza di 10000m. A un certo istante sgancia una bomba. A quell'istante, l'aereo passa sopra il punto O al suolo. A che distanza da O, la bomba arriva al suolo?

Soluzione

$$v_{aereo,orizz} = 300km/h = 3\times 10^5 m/3600s = 83m/s = v_{bomba,orizz}$$
$$v_{bomba,verticale} = 0$$

$$h = 10000m = \frac{1}{2} g\tau^2 \rightarrow \tau = \sqrt{2h/g} = 45s$$
$$d = v_{bomba,orizz} \cdot \tau = 4000\, m$$

Esercizio 21 Un calciatore calcia la palla ad un angolo di 30° dall'orizzontale e a una velocità di 12m/s. Assumendo che la palla si muova su un piano verticale, trovare a che tempo dal calcio la palla raggiunge il punto più alto della sua traiettoria. A che altezza arriva?

Soluzione

$$v_{palla,orizz} = \sin 30° \cdot 12m/s \approx 10m/s$$
$$v_{palla,vertic} = \cos 30° \cdot 12m/s = 6m/s$$
$$0 = (velocità\ verticale\ punto\ più\ alto) = v_{palla,vertic} - gt \rightarrow 6m/s = t \cdot 10m/s^2$$
$$t = 0.6s$$

L'altezza raggiunta dal pallone è:
$$h = v_{palla,vertic} \cdot t - \frac{1}{2} gt^2 = (6m/s)\cdot(0.6s) - 0.5 \times (10m/s^2)\cdot(0.6s^2) = 1.8m$$

Esercizio 22 Un motoscafo si muove a 30m/s verso una boa fissa che dista 100 m con una decelerazione di 3.5m/s^2. Quanto impiega il motoscafo a raggiungere la boa?

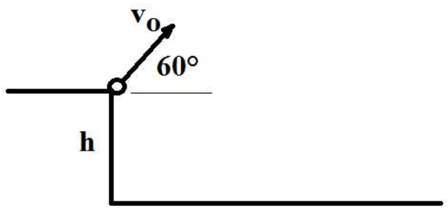
Soluzione

$$d_{boa} = -\frac{1}{2} at^2 + v_o t = 100m = -\frac{1}{2} 3.5 \frac{m}{s^2} t^2 + 30 \frac{m}{s} t$$
$$t = \frac{30\frac{m}{s} \pm \sqrt{(30m/s)^2 - 4\frac{(3.5m/s^2)\cdot 100m}{2}}}{3.5\frac{m}{s^2}} = \begin{array}{l} t_1 = 12.s \\ t_2 = 5.3s \end{array}$$

Ci sono due soluzioni dato che il motoscafo raggiunge la boa all'andata (t=5.3s) e poi quando ha invertito al velocità e torna indietro (t=12.s). In effetti nel moto decelerato, la velocità che prima è positiva, diventa dopo un po' negativa. Infatti:

$$v_1(al\ tempo\ t_1) = 12m/s$$
$$v_2(al\ tempo\ t_2) = -10m/s$$

Esercizio 23 Da un'altezza h, una palla è lanciata con una velocità di modulo v_o, che forma un angolo θ di 60° con la direzione orizzontale. Quale è la massima altezza raggiunta dalla palla? A cge distanza dall'origine la palla arriva al suolo?



Soluzione
Scriviamo le solite equazioni:

$$\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} v_x = v_{x,o} \\ v_y = -gt + v_{y,o} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = v_{x,o}t \\ y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_{y,o}t + h \end{array}$$

Massima altezza, quando la velocità verticale è nulla: $v_y = -gt + v_{y,o} = 0 \rightarrow t = v_{y,o}/g$.

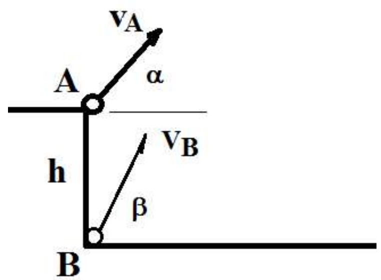
Quindi: $y_{\max} = -\frac{1}{2} g\left(\frac{v_{y,o}}{g}\right)^2 + v_{y,o}\frac{v_{y,o}}{g} + h = h + \frac{v_{y,o}^2}{2g} = h + \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g}$

La palla arriva al suolo quando y=0: $y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_{y,o}t + h = 0 \rightarrow \frac{1}{2} gt^2 - v_{y,o}t - h = 0$.

Risolvendo l'equazione ho: $t = \dfrac{v_{y,o} \pm \sqrt{v_{y,o}^2 + 2gh}}{g}$

Trovo due soluzioni, una è negativa, corrispondente ad un tempo prima del lancio che non prendiamo; l'altra soluzione è quella cercata. Basta moltiplicare questa soluzione per la velocità orizzontale, per avere la distanza orizzontale dal lancio.

Esercizio 24 Due palle A e B sono lanciate contemporaneamente e si muovono su un piano verticale. A è lanciata dal punto (0,h) mentre B è lanciata da (0,0), ossia dall'origine. La palla A ha velocità iniziale che ha modulo V_A e forma un angolo con l'orizzontale α, mentre B ha una velocità iniziale V_B in modulo che forma un angolo con l'orizzontale pari a β. Si possono incontrare in volo?



Soluzione

$$x_A = (v_A \cos\alpha)t \qquad x_B = (v_B \cos\beta)t$$
$$y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 + (v_A \sin\alpha)t \qquad y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_B \sin\beta)t$$

Se A e B si incontrano, vuol dire che ad un certo tempo t si trovano nello stesso punto:

$$x_A = (v_A \cos\alpha)t = x_B = (v_B \cos\beta)t$$
$$y_A = h - \frac{1}{2}gt^2 + (v_A \sin\alpha)t = y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_B \sin\beta)t$$

E quindi:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$$
$$h - \frac{1}{2}gt^2 + (v_A \sin\alpha)t = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_B \sin\beta)t \rightarrow h + (v_A \sin\alpha)t = (v_B \sin\beta)t$$

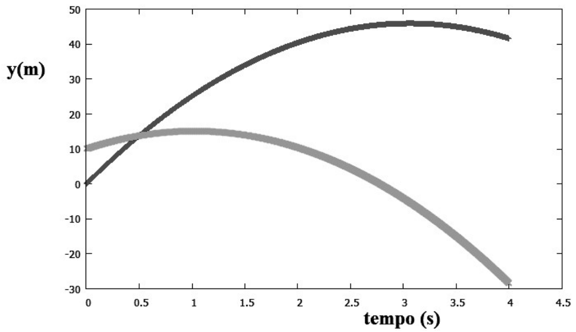
Una condizione è che: $v_B = v_A \cos\alpha / \cos\beta$. E quindi:

$$h + (v_A \sin\alpha)t = (v_A \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta)t \rightarrow t = \frac{h}{v_A\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\sin\beta - \sin\alpha\right)}$$

$$t = \frac{h\cos\beta}{v_A(\cos\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha)} = \frac{h\cos\beta}{v_A \sin(\beta-\alpha)}$$

L'angolo β deve essere maggiore di α per avere un tempo positivo.

Nel grafico seguente vediamo come si comportano le y delle due palline in funzione del tempo. Gli angoli sono di 30° e di 60°. La quota iniziale di A è a 10 m, mentre B è nell'origine. La velocità iniziale di A e di 20 m/s.



Cap. 5 Componenti intrinseche della velocità e dell' accelerazione. Moto circolare

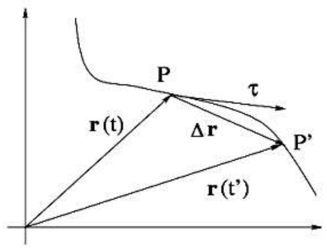
Torniamo all'espressione della velocità data sopra

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

osserviamo che nel passaggio di limite che comporta Δt tendente a zero non facciamo altro che far tendere il punto P' al punto P: quindi il vettore $d\vec{r}$ diventa il vettore tangente alla curva che si può scrivere come:

$$d\vec{r} = dr\,\vec{\tau}$$

con $\vec{\tau}$ il versore tangente alla traiettoria: questo vettore è funzione del tempo. Infatti, cambiando con il tempo la posizione di P sulla curva cambia anche la tangente.



La velocità sarà allora: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{\tau} = v\vec{\tau}$

con v che caratterizza il modulo della velocità (velocità scalare) mentre $\vec{\tau}$ caratterizza la direzione ed il verso della velocità. Cosa succede all'accelerazione?

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

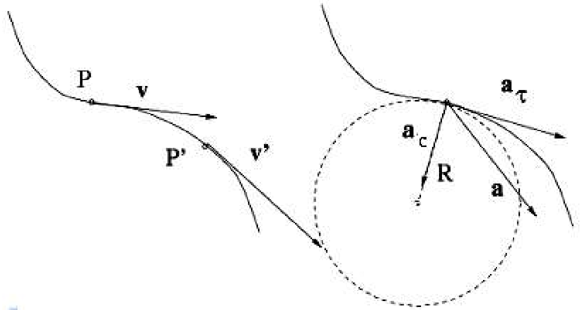
Ma abbiamo visto che $\vec{v} = v\vec{\tau}$: calcoliamo la derivata rispetto al tempo di $\vec{v}$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

derivando il versore $\vec{\tau}$ in questa espressione si arriva, dopo opportuni calcoli, alla seguente formula:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{c} = a_t\vec{\tau} + a_c\vec{c}$$

dove a_t ed a_c sono dette la componente tangenziale e centripeta dell'accelerazione. La prima componente ha la direzione del vettore tangente alla traiettoria ed è legata alla variazione del modulo della velocità. La seconda componente ha la direzione normale alla traiettoria stessa ed è legata alla variazione della direzione della velocità. Con R si indica il raggio di curvatura della traiettoria ed è il raggio della circonferenza che meglio approssima la curva nel punto considerato.



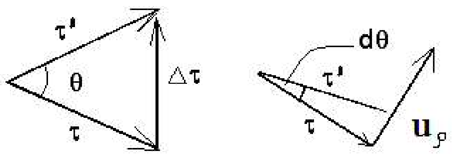
Osserviamo come possa esistere una accelerazione anche nel caso in cui il modulo della velocità non cambi: basta che esista una variazione della direzione della velocità ed è presente la componente della accelerazione centripeta.

Derivative of the unit vector.

$$\vec{\rho} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\tau}(t+\Delta t) - \vec{\tau}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\tau}' - \vec{\tau}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

From the following figure, we see that as the time interval becomes very small, vector $\vec{\rho}$ is perpendicular to vector $\vec{\tau}$. For a small angle $d\Theta$, the magnitude of $\vec{\rho}$ is:

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = |\tau| \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{because } |\tau| = 1$$



Let us consider that a vector is equal to its magnitude multiplied by its unit vector. For instance:

$$\Delta\vec{\tau} = |\Delta\vec{\tau}|\vec{u}_\Delta = 2|\vec{\tau}|\sin\frac{\Delta\theta}{2}\vec{u}_\Delta$$

And therefore: $\vec{\rho} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{\tau}|\vec{u}_\Delta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{\tau}}{dt}$

Il vettore che si ottiene derivando un versore è un **vettore perpendicolare** al versore. Infatti poiché il versore è un vettore di modulo 1 costante dobbiamo poter scrivere:

$$\tau^2 = \vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = \text{cost} = 1$$

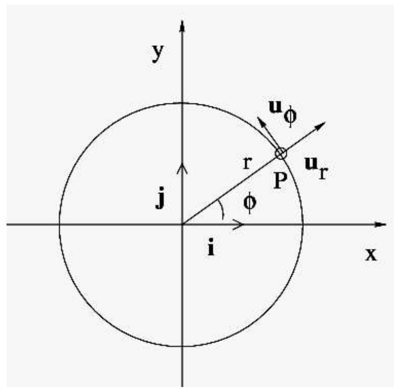
Tale espressione, derivata, dà:

$$\frac{d(\tau^2)}{dt} = \vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\vec{\tau} = 2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 2\vec{\tau}\cdot\vec{\rho} = 0$$

e questo ci fa vedere, appunto, che il versore e la sua derivata sono due vettori perpendicolari fra loro, poiché hanno il prodotto scalare nullo.

Problema 1 Discutete velocità ed accelerazione di un moto circolare, intrinsecamente alla sua traiettoria.

Soluzione
Vediamo un caso in cui è abbastanza semplice discutere l'accelerazione. Consideriamo un punto che si muove su di una circonferenza di raggio R.



I due versori radiale e tangente alla circonferenza $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\phi$ mostrati nella figura sono due versori che seguendo il moto del punto si muovono lungo la circonferenza stessa. Essi sono legati ai versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$ dalle seguenti due espressioni:

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \vec{i}\cos\phi + \vec{j}\sin\phi \\ \vec{u}_\phi &= \vec{i}\cos(\phi+\frac{\pi}{2}) + \vec{j}\sin(\phi+\frac{\pi}{2}) = -\vec{i}\sin\phi + \vec{j}\cos\phi\end{aligned}$$

La velocità del punto che si muove sulla circonferenza sarà

$$\vec{v} = v\vec{u}_\phi$$

che è il prodotto di due funzioni del tempo: uno il modulo della velocità v (detta velocità scalare o velocità lineare) e l'altra il versore $\vec{u}_\phi$. Notiamo che quando il punto si muove sulla circonferenza, r rimane costante mentre ϕ e $\vec{u}_\phi$ variano. ϕ e $\vec{u}_\phi$ sono quindi funzioni del tempo.
Nel discutere il moto intrinsecamente alla traiettoria abbiamo chiamato $\vec{u}_\phi = \vec{\tau}$, vettore tangente la traiettoria. Quindi la velocità vettoriale del moto circolare è: $\vec{v} = v\vec{u}_\phi = v\vec{\tau}$.

Calcoliamo ora la derivata della velocità e cioè l'accelerazione. Trattiamo la derivazione di questo prodotto esattamente nella stessa maniera in cui abbiamo trattato la derivazione del prodotto di due funzioni:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u}_\phi) = v\frac{d\vec{u}_\phi}{dt} + \vec{u}_\phi\frac{dv}{dt}$$

Calcoliamo la derivata del versore:

$$\frac{d\vec{u}_\phi}{dt} = -\vec{i}\,\frac{d(\sin\phi)}{dt} + \vec{j}\,\frac{d(\cos\phi)}{dt} =$$
$$= -\vec{i}\,\cos\phi\frac{d\phi}{dt} - \vec{j}\,\sin\phi\frac{d\phi}{dt} = (-\vec{i}\,\cos\phi - \vec{j}\,\sin\phi)\frac{d\phi}{dt} = -\vec{u}_r\,\frac{d\phi}{dt}$$

Abbiamo usato la formula di derivazione composta:

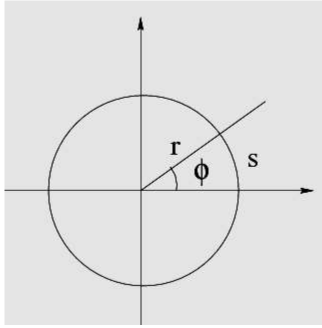
$$\frac{dg(f(t))}{dt} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dt}$$
$$\frac{d(\cos\phi)}{dt} = \frac{d(\cos\phi)}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = -\sin\phi\frac{d\phi}{dt}$$

$\vec{i}$ e $\vec{j}$ non vanno derivati perché sono fissi. Quindi:

$$\vec{a} = -\vec{u}_r v\frac{d\phi}{dt} + \vec{u}_\phi\,\frac{dv}{dt} = -\vec{u}_r v\omega + \vec{u}_\phi\,\frac{dv}{dt} = -\vec{u}_r v\omega + \vec{\tau}\,\frac{dv}{dt}$$

siccome nel caso attuale $\vec{u}_\phi = \vec{\tau}$.
Abbiamo anche definito la *velocità angolare*: $\omega = \dfrac{d\phi}{dt}$, che dà la variazione dell'angolo in funzione del tempo. Se la velocità angolare è costante, allora l'angolo può essere scritto come $\phi = \omega t$.

Qual è la relazione che esiste tra i moduli di ω e v ed r ? Prendiamo una particella che descrive un cerchio di raggio r.



L'arco s corrispondente all'angolo ϕ è dato da:

$$s = r\phi$$

derivando questa equazione e tenendo conto che il raggio r non varia, si ottiene:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt} = r\omega$$

ma ds/dt non è altro che la velocità lineare v e quindi:

$$v = \omega r$$

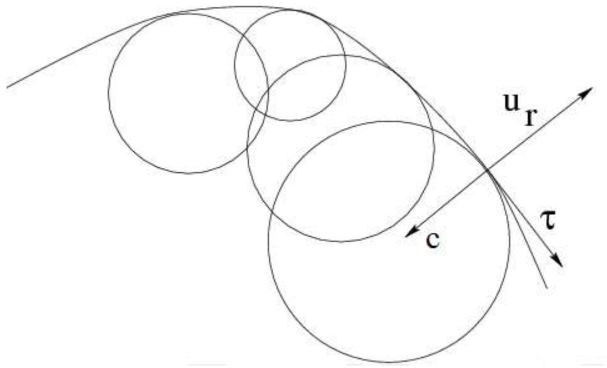
In conclusione, l'accelerazione potrà essere scritta come:

$$\vec{a} = -\vec{u}_r\,\frac{v^2}{r} + \vec{\tau}\,\frac{dv}{dt}$$

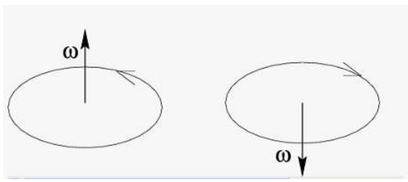
Siccome il versore $\vec{c}$ che abbiamo introdotto prima quando discutevamo in maniera generale del moto nello spazio è uguale a $-\vec{u}_r$ (confrontate le figure!), si ha:

$$\vec{a} = \vec{c}\,\frac{v^2}{r} + \vec{\tau}\,\frac{dv}{dt}$$

Se il punto percorresse una traiettoria qualsiasi, noi possiamo pensare di approssimare ciascun pezzo della traiettoria con una circonferenza di raggio variabile: l'accelerazione sarà quindi data dall'ultima equazione dove con r si deve intendere il raggio della circonferenza tangente alla traiettoria.



Al concetto di velocità angolare del moto circolare si possono associare delle caratteristiche vettoriali. Si definisce velocità angolare il vettore ω tale che il modulo sia $\omega = d\theta/dt$ e la direzione perpendicolare al piano della circonferenza ed il verso tale che dall'estremo del vettore ω il moto sia antiorario.



Dalla figura si vede come il vettore ω cambi verso al variare del senso del moto.

Esercizio 2 Calcolare la velocità angolare di un disco che ruota con moto uniforme descrivendo $13.2\ radianti$ in $6\ s$. Calcolare inoltre il periodo e la frequenza.

Soluzione
Il periodo T è il tempo impiegato a fare un giro completo e cioè a percorrere un angolo di 2π. Siccome la velocità angolare è costante (il problema ci dice che il moto è uniforme):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad \omega = \frac{13.2}{6}\frac{rad}{s} = 2.2\frac{rad}{s}; \ T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e la frequenza che è l'inverso del periodo: $\nu = \frac{1}{T}$

Esercizio 3 Quanto tempo impiega il disco di prima a ruotare di un angolo di 780 gradi e a compiere 12 giri?

Soluzione
780 gradi corrispondono a $13.6\ radianti$. Siccome l'angolo $\theta = \omega t$ ne segue che

$$t = \frac{\theta}{\omega}$$

Per dodici giri:

$$\theta = 12\ 2\pi \to t = \frac{12\ 2\pi}{2.2} = 34.3\ s$$

Esercizio 4 Noti il raggio dell'orbita lunare ($R_L = 3.48 \times 10^8$ m) e il tempo di rotazione medio attorno alla Terra (T = 27.3 giorni), calcolare la velocità media orbitale della Luna.

Soluzione
Per un moto circolare uniforme, nel quale può essere schematizzato il moto della Luna attorno alla Terra, il modulo della velocità vale:

v = ΔL/Δt (lunghezza percorsa / tempo per percorrerla) = $2\pi\ R_L / T$ =

= 2π (3.48 x 10 m) / [(27.3 x 24 x 3600 secondi)] = 1.02×10^3 m/s

Il modulo dell'accelerazione centripeta è:

$a = v^2/r = (1.02 \times 10^3\ m/s)^2 / (3.48 \times 10^8\ m) = 2.72 \times 10^3\ m/s^2$

Esercizio 5 Calcolare la velocità angolare, la velocità lineare e l'accelerazione centripeta della Luna sapendo che essa compie una rivoluzione in 28 giorni e che la distanza tra la Terra e la Luna è di $4 \times 10^5\ km$.

Soluzione
Calcoliamo innanzi tutto la velocità angolare:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{28 \times 24 \times 60 \times 60\ s} = 2.6 \times 10^{-6} s^{-1}$$

La velocità lineare:

$$v = \omega R = 2.6 \times 10^{-6} s^{-1}\ 4 \times 10^5 \times 10^3\ m = 1.3 \times 10^3\ m/s$$

E per finire l'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{R} = 0.25 \times 10^{-2}\ \frac{m}{s}$$

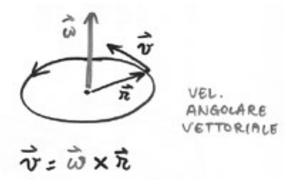
Esercizio 6 Immaginiamo che un proiettile si muova di moto parabolico nel piano verticale. Al culmine della traiettoria dite che velocità ha, e che accelerazione. In quel punto, sapete calcolare la curvatura della traiettoria?

Soluzione
La velocità al culmine della traiettoria è la componente orizzontale della velocità iniziale v_o e quindi è v_{ox}. L'accelerazione è sempre solo verticale ed è pari a g. Se consideriamo l'accelerazione in componenti intrinseche alla traiettoria, al culmine di essa, l'accelerazione sarà solo centripeta e pari a v_{ox}^2/R. R è il raggio di curvatura.

$v_{ox}^2/R=g$ quindi $R= v_{ox}^2/g$ → $1/R=\text{curvatura}=g/ v_{ox}^2$

Esercizio 7 Discutere velocità ed accelerazione del moto circolare coi prodotti esterni di vettori.

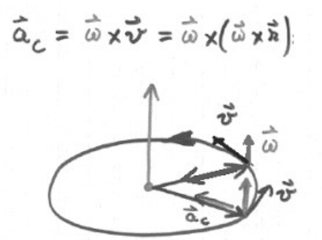
Soluzione
Alla velocità angolare si può dare un carattere vettoriale, introducendo il vettore velocità angolare, che è perpendicolare al cerchio e tale che il suo prodotto col raggio vettore dia il vettore velocità, come si vede in figura.



Se deriviamo la velocità, abbiamo: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$

Che ha due componenti, una parallela alla traiettoria e l'altra centripeta. Se la velocità angolare resta costante, c'è solo il termine centripeto, come abbiamo già discusso prima.

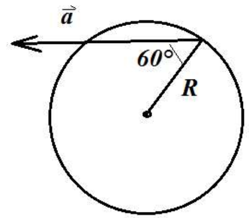
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_c$$



Quindi: nel caso del moto circolare uniforme:

$$\vec{v} = (\vec{\omega}\times\vec{r});\ \vec{a}_c = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Esercizio 8 Una particella si muove su una circonferenza di raggio R pari a 10 metri. A un certo istante, la velocità scalare della particella è di 2 m/s. Se allo stesso istante l'accelerazione $\vec{a}$ forma un angolo di 60° col raggio vettore (vedi figura), quanto vale il modulo dell'accelerazione?



Soluzione
Sappiamo che l'accelerazione centripeta è:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(2m/s)^2}{10m} = \frac{4}{10}\frac{m}{s^2}$$

L'accelerazione centripeta è la proiezione dell'accelerazione su raggio e quindi:

$$a_c = \cos 60°\, a = \frac{1}{2}a \rightarrow a = 2a_c = \frac{8}{10}\frac{m}{s^2}$$

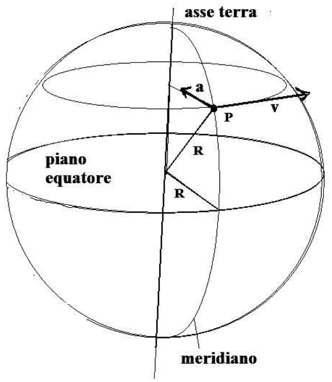
Adesso possiamo calcolare il valore dell'accelerazione tangenziale:

$$a_t = \sin 60°\, a = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{8}{10}\frac{m}{s^2}$$

Esercizio 9 Sapendo che il raggio della Terra è circa 6.4×10^6 m (6400 km) e che la Terra compie un giro su se stessa in 24 ore, calcolare quanto vale la velocità lineare di un punto che si trova all'equatore e quanto vale la sua accelerazione centripeta

Soluzione
Un punto che si trova all'equatore descrive un moto circolare uniforme di raggio $R = 6.4 \times 10^6\ m$ e di periodo $T = 24$ h. La lunghezza della circonferenza percorsa vale $C = 2\pi R = 6.28 \times 6.4 \times 10^6$ m $= 40.2 \times 10^6$ m $= 4.02 \times 10^7$ m. Il tempo in cui viene percorsa la distanza C è un periodo, cioè T = 24 h = 24 h × (3600 s/1h) = 86400 s = 8.64×10^4 s.
La velocità lineare sarà dunque $v = C/T = 4.02 \times 10^7$ m / (8.64×10^4 s) = 0.465×10^3 m/s ≈ 4.7×10^2 m/s (470 metri al secondo, ovvero circa 1700 km/h).
L'accelerazione centripeta vale $a = \omega^2 R = v^2/R = (4.65 \times 10^2\ \text{m/s})^2 / (6.4 \times 10^6\ \text{m}) = 3.4 \times 10^{-2}$ m/s^2 (circa un trecentesimo dell'accelerazione di gravità).

Esercizio 10 Calcolare la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta di un punto P sulla superficie terrestre che si trova a 30° di latitudine Nord, sapendo che il raggio terrestre è R = 6380 km.



Soluzione

Calcoliamo il raggio della circonferenza a 30° Nord. Il punto P si muove di moto circolare uniforme, poiché la terra ruota su se stessa, con traiettoria data da una circonferenza di raggio minore di quello della terra. La velocità angolare della terra è :

$$\omega = \frac{2\pi}{24h} = \frac{6.28}{24\times 60\times 60} = \frac{6.28}{86400\, s}$$

$$= 7.27\times 10^{-5} s^{-1}$$

La velocità tangenziale si trova con la formula $v = \omega \cdot r$, dove r è il raggio della circonferenza percorsa dal punto P sulla crosta terrestre. La velocità angolare è uguale per tutti i punti della terra, mentre la velocità tangenziale dipende dal raggio, ovvero dalla distanza del punto P dall'asse di rotazione terrestre. P gira su una circonferenza di raggio $r = R\sin 60° = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 5.52\times 10^6 m$ e ha una velocità tangenziale il cui modulo è: $v = \omega\, r = 7.27\times 10^{-5} \times 5.52\times 10^6 = 401.2\frac{m}{s}$.

Oltre a girare su se stessa, la terra è anche in rivoluzione intorno al sole. Dunque, supponiamo che l'orbita intorno al sole sia circolare, per semplicità, ma sappiamo che in realtà è ellittica e il sole occupa uno dei due fuochi. Il periodo del moto della terra intorno al sole è di 365 giorni, ovvero: 365 × 24 × 60 ×60 secondi = 31,536 × 10^6 s.

La velocità tangenziale della terra, supponendo l'orbita intorno al sole circolare con raggio pari a $R = 1.50\times 10^8 km$. La velocità angolare della terra, supponendo l'orbita circolare è pari a $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{31.536\times 10^6} = 0.20\times 10^{-6} s^{-1}$. La velocità tangenziale della terra supponendo l'orbita circolare: $v = \omega R = 0.20\times 10^{-6} \times 1.50\times 10^8 \times 10^3 \frac{m}{s} = 0.3\cdot 10^5 \frac{m}{s}$ = 30 km/sec