

М. И. ХМЕЛЬНИК

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА И СТРУЙНОГО ОБТЕКАНИЯ ДУГИ НА СФЕРЕ

Как известно, при обтекании тела жидкостью, в случае больших чисел Рейнольдса происходит срыв пограничного слоя с обтекаемого контура и образование за телом вихревой области, что является причиной лобового сопротивления, которое испытывает тело при движении в жидкости.

Если попытаться вычислить лобовое сопротивление, заменяя вихревую зону застойной областью с постоянной по величине скоростью на ее границах (как это делается в теории струйных течений), то получается большое расхождение с опытом в значении коэффициента C_x лобового сопротивления.

Это объясняется тем, что теория струйных течений дает хорошее совпадение с опытом только тогда, когда плотности жидкостей с обеих сторон струи сильно отличаются друг от друга (например, при обтекании с кавитацией) [1].

Можно надеяться получить приближенно более верное значение коэффициента лобового сопротивления, если (как и в теории струй), заменяя вихревую область застойной областью, считать скорость на границах этой застойной области переменной по величине. В данной работе и рассматривается обтекание цилиндра по такой схеме; при этом скорость на границах застойной области предполагается изменяющейся обратно-пропорционально расстоянию от центра симметрии обтекаемого контура. При таком предположении задача оказывается более удобной для эффективного решения.

Результаты, полученные при решении плоской задачи, используются в статье для приближенного расчета одного случая струйного течения на сферической поверхности.

§ 1. Постановка задачи

Рассматриваем обтекание кругового цилиндра поступательным потоком (рис. 1). Одна из линий тока SA в точке A

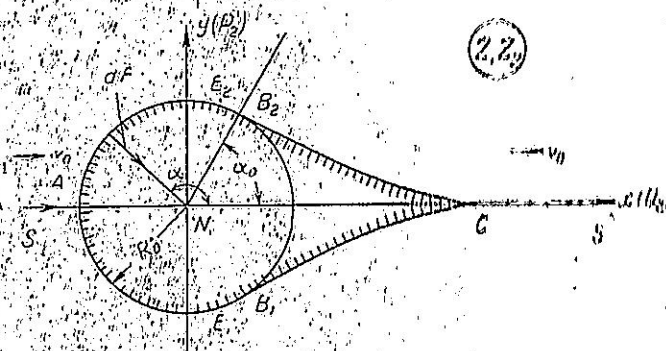


Рис. 1

цилиндра разветвляется на две, которые в точках B_1 и B_2 сходят с цилиндра и совпадают в некоторой точке C , имея в ней общую касательную, направленную по прямой $SANC$, и далее идут по этой прямой. Точка A критическая, скорость в ней равна нулю. Упомянутые линии тока B_2C и B_1C ограничивают за цилиндром застойную область. Величину скорости на этих линиях тока примем меняющейся обратно пропорционально расстоянию от центра контура N :

$$|v| = \frac{c}{R} \quad (1,1)$$

где R — расстояние точки от центра цилиндра,
 c — постоянный коэффициент.

Примем центр цилиндра за начало координат, ось Ox направим по прямой NC . Задача ставится так: заданы радиус кругового контура R_0 и скорость набегающего потока v_0 , требуется определить расстояние от центра цилиндра до точки схождения струи b , угловую координату точки схода струи с цилиндра α_0 и коэффициент пропорциональности c .

§ 2. Метод решения

Ищем z и w как функции параметрического переменного t . В качестве области изменения t берется верхняя полуплоскость (рис. 2). Границе области течения соответствует действительная ось. За границу области течения в (z) берется контур, состоящий из «разрезанной» прямой SA (S — бесконечно-удаленная точка потока), дуги цилиндра A_2B_2 и A_1B_1 и

струй B_2C и B_1C . (При этом критическая точка рассматривается как две точки A_2 и A_1).

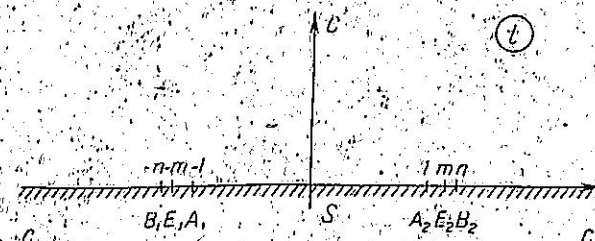


Рис. 2

Устанавливаем следующее соответствие точек: точка S переходит в $t = 0$, точка A_2 в $t = 1$, точка C в $t = \infty$. Тогда точка B_2 перейдет в точку $t = n$, где n — некоторое положительное число, подлежащее определению (очевидно, что $n > 1$). В силу симметрии очевидно, что точкам B_1 и A_1 будут соответствовать точки $(-n)$ и (-1) . В области (t) будем определять функции

$$w(t) \text{ и } \chi = \frac{1}{c} z \frac{dw}{dz}$$

Определив эти функции, находим $z(t)$:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dw}{c\chi} \quad (2,1)$$

$$\ln z = \ln z_0 + \frac{1}{c} \int_{t_0}^t \frac{1}{\chi} \frac{dw}{dt} dt \quad (2,2)$$

§ 3. Определение комплексного потенциала

Положим в точке A $w = 0$. Тогда на линиях тока SA_2B_2C и SA_1B_1C $\psi = 0$, ψ возрастает на линиях SA_1 и SA_2 от $-\infty$ до 0, и на A_2C и A_1C от 0 до некоторого положительного числа ψ . Область (w) будет представлять, следовательно, плоскость с разрезом вдоль оси абсцисс от $\psi = -\infty$ до $\psi = \psi$ (рис. 3). Сравнивая области w и t видим, что вблизи точек

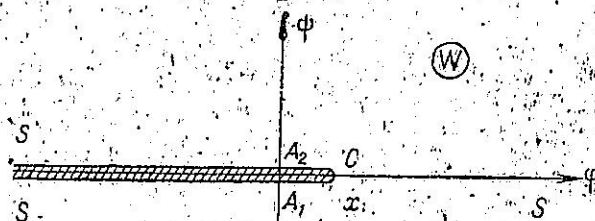


Рис. 3

C и $S dw/dt$ имеет соответственно полюс и нуль 3-го порядка.
Поэтому

$$\frac{dw}{dt} = \frac{N}{t^3},$$

$$w = -\frac{N}{2t^2} + N_1.$$

Так как при $t = \infty$ и $t = \pm 1$, $w = x$ и $w = 0$, то $N_1 = x$, $N_2 = 2x$; окончательно имеем:

$$w = x \left(1 - \frac{1}{t^2} \right), \quad (3,1)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2x}{t^3}. \quad (3,2)$$

§ 4. Определение функции $\chi(t)$

Предварительно отметим, что изменение скорости вдоль обтекаемого контура от точки A до B может быть в общем случае не монотонным, а таким, что в некоторой точке E дуги AB будет максимум скорости. Угловая координата этой точки α_{\max} и значение скорости в этой точке определяются в процессе решения. В области t точкам E_2 и E_1 будут соответствовать точки $t = \pm m$, где действительное число m подлежит определению. Очевидно, что

$$n \geq m > 1.$$

(Знак равенства соответствует случаю монотонного изменения скорости).

Рассмотрим теперь изменение функции $\chi(t)$.

Для модуля и аргумента χ имеем:

$$|\chi| = \frac{|z|}{c} \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{R|v|}{c}, \quad (4,1)$$

$$\arg \chi = \arg z - \arg v = \alpha - \mu, \quad (4,2)$$

где $z = Re^{i\alpha}$, $v = |v|e^{i\mu}$ — скорость течения.

На линиях тока SA_2 и SA_1 , $\arg \chi = \pm \pi$, $|\chi|$ изменяется от ∞ до 0.

На дугах A_2B_2 и A_1B_1 , $\arg \chi = \alpha - \mu = \pm \frac{\pi}{2}$ (рис. 4), $|\chi| = \frac{R|v|}{c}$ увеличивается от 0 до некоторого максимального значения в точке E и уменьшается от него до $|\chi| = 1$ в точке B .

На струях

$$|\chi| = \frac{R|v|}{c} = 1, \arg \chi = \alpha - \mu$$

изменяется от $\pm \frac{\pi}{2}$ до 0 (так как в точке C $\alpha = \mu = 0$).

Построим область переменного

$$\ln \chi = \ln |\chi| + i \arg \chi.$$

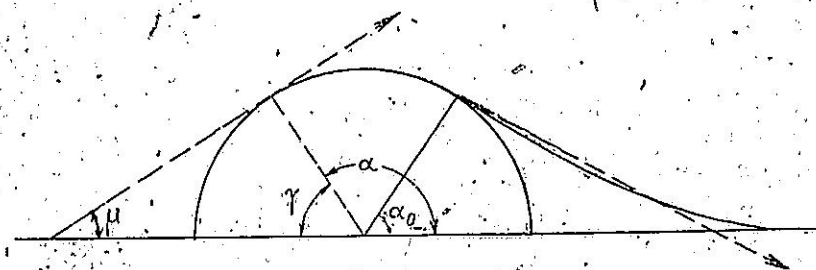


Рис. 4

Она будет иметь вид, изображенный на рис. 5. Область эта будет заключена между прямыми, параллельными оси абсцисс и удаленными от нее на π каждая (A_1S и A_2S) и полуполосой с разрезанными выступами $A_2E_2B_2CB_1E_1A_1$.

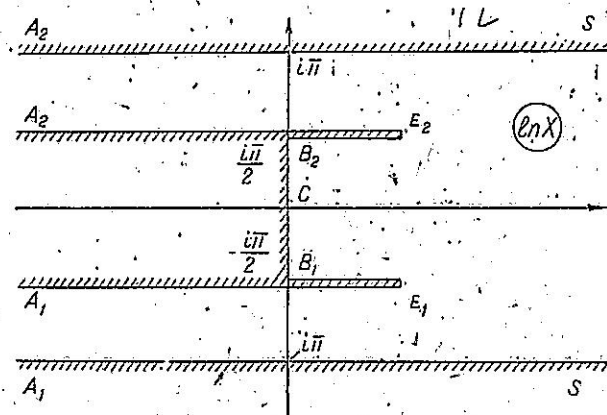


Рис. 5

По формуле Шварца — Кристофеля получаем отображение этой области на область t :

$$\ln \chi = A \int \frac{t^2 - m^2}{t(t^2 - 1)\sqrt{t^2 - n^2}} dt + A_1. \quad (4,3)$$

получаем:

$$\sigma = \sqrt{\frac{V^{n^2-1-i\sqrt{t^2-n^2}}}{V^{n^2-1+i\sqrt{t^2-n^2}}}} \quad (5.1)$$

и (3.2) и левая подстановку:

$$\frac{dw}{dt} \quad (4.8)$$

§ 5. Определение координат плоскости течения

Легко проверить, что выражение для χ (4.8) удовлетворяет наложенным на него условиям.

($A_1 = i\frac{\pi}{2}$, так как при $t = \infty$, $\chi = 1$).

$$\chi = i \frac{V^{n^2-1-i\sqrt{t^2-n^2}}}{V^{n^2-1+i\sqrt{t^2-n^2}}} \quad (4.8)$$

Из (4.7) получаем:

$$\ln \chi = \frac{2i}{n} \ln \frac{V^{n^2-1+i\sqrt{t^2-n^2}}}{V^{n^2-1-i\sqrt{t^2-n^2}}} - \ln \frac{n+i\sqrt{t^2-n^2}}{n-i\sqrt{t^2-n^2}} + A_1 \quad (4.7)$$

Выполняя интегрирование в формуле (4.3) и подставляя вместо A его значение (4.4), имеем:

$$n \leq \sqrt{\frac{4}{3}} \quad (4.6a)$$

Так как всегда должно быть $m \leq n$, то, подставляя в это равенство полученное значение для m , будем иметь следующую:

$$m^2 = \frac{2n - \sqrt{n^2-1}}{2n} \quad (4.6)$$

$$\frac{m^2}{2n} = \frac{m^2-1}{V^{n^2-1}} \quad (4.5)$$

$$A = -\frac{2ni}{m^2} = -i \frac{V^{n^2-1}}{m^2-1} \quad (4.4)$$

Находим значения коэффициентов A и A_1 и связь между n и m , рассматривая изменение их вблизи точек A и S , и используя то, что в точке S , $\chi = 1$, тогда:

$$\chi = i \frac{\sigma^2 + h^2}{\sigma(1 + \sigma^2 h^2)} \quad (5.6)$$

Приведем еще выражения χ и σ через переменное σ :

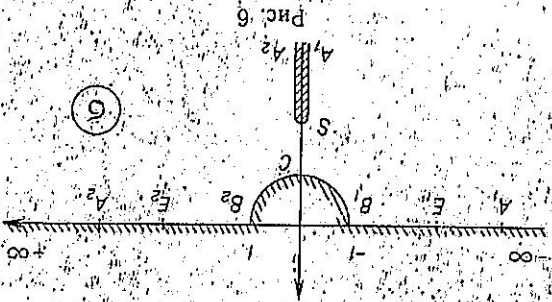
$$\ln z = \ln R + i\alpha = \ln R_0 + i\pi - \frac{4h}{i(1-h^2)} \times \quad (5.5)$$

Подставляя это значение в (5.2) и интегрируя, имеем:

$$\chi = -\frac{ch(1-h^2)(V^{n^2-1}+n^2)}{4(n^2-1)} = ch \quad (5.4)$$

Тогда получим

Для определения коэффициента χ используем условие, что при переходе вблизи точки S в область σ по дуге окружности (с центром в S) от $A_1 S$ к $S_2 A$ получаем приращение равное $(-i\pi)$.



до $-i\pi$ (рис. 6)

В дальнейшем удобно будет выражать все формулы не через переменное t , а через переменное σ . Исследуя выражение (5.1), получаем для σ область, границами которой будут действительная ось, за исключением интервала $(-1, +1)$, нижняя половина единичной окружности и разрезанная полуокружность, идущая вдоль мнимой оси от $-i/h$ до $-i\pi$ (рис. 6).

$$h = \sqrt{\frac{n - \sqrt{n^2-1}}{n + \sqrt{n^2-1}}} > 1 \quad (5.3)$$

$$\ln z = \ln R_0 + i\pi - \frac{8i(n^2-1)}{\sigma^2(1-\sigma^2)} \int_0^\sigma \frac{c(V^{n^2-1}+n^2)}{(\sigma^2+h^2)^2(1+\sigma^2 h^2)} d\sigma \quad (5.2)$$

$$w = ch(1 - h^2) - \frac{\sigma^2}{(\sigma^2 + h^2)(1 + h^2\sigma^2)} \quad (5,7)$$

Значение σ , при котором скорость на цилиндре имеет максимум, можно получить, подставляя в (5,1) $t = m$ или из условия максимума выражения (5,6). Значение это равно

$$\sigma_{\max} = \frac{1 - 3h^4}{2h^2} + \sqrt{\left(\frac{1 - 3h^4}{2h^2}\right)^2 - 1} \quad (5,8)$$

Из последней формулы вытекает, что возможные значения h должны лежать в интервале

$$0 \leq h \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5,9)$$

При монотонном возрастании скорости $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Формулы (5, 5) и (5, 7) дают решение задачи, устанавливая между переменными z и w зависимость в параметрическом виде.

В дальнейшем определим еще зависимость между основными параметрами потока.

§ 6. Определение точки схода струи с цилиндра

На цилиндре σ — действительное число. Поэтому выражение z (5, 5) для точек на поверхности цилиндра $A_2B_2A_1B_1$ примет вид:

$$z = R_0 e^{i\alpha} = R_0 \exp i \left\{ \pi - \frac{1 - h^4}{4h} \frac{\sigma^2(1 - 5h^4) - h^2(1 + 3h^4)}{(\sigma^2 + h^2)^2} \sigma - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{h\sigma} + \frac{1 + 10h^4 - 3h^8}{4h^2} \operatorname{arctg} \frac{h}{\sigma} \right\} \quad (6,1)$$

Отсюда видно, что $|z| = R_0$ на $B_1A_1A_2B_2$, а аргументы точек на A_1B_1 и A_2B_2 равны и противоположны по знаку, как и должно быть. Положение точки схода струи с цилиндра B_1 определится углом α_0 (рис. 1):

$$\alpha_0 = - \frac{1 - h^2}{4h(1 + h^2)} (1 - h^2 - 5h^4 - 3h^6) + \\ + \frac{1 + 8h^2 + 10h^4 - 3h^8}{4h^2} \operatorname{arctg} h, \quad (6,2)$$

§ 7. Уравнения струй. Определение точки совмещения струй

Для точек струй B_2CB_1 $\sigma = e^{-i\gamma}$. Подставляя это в (5,5), получим уравнение струй в полярных координатах:

$$R = R_0 \exp \left\{ \frac{1 - h^4}{4h} \times \right. \\ \times \frac{(1 - 2h^2 - 7h^4 + 11h^6 - 6h^8 + 3h^{10}) \sin \gamma_1 - (1 + h^2 - 5h^4 + 3h^6) \sin 3\gamma_1}{1 + 2h^2 \cos 2\gamma_1 + h^4} \left. \right\} \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{1 + 2h \sin \gamma_1 + h^2}{1 - 2h \sin \gamma_1 + h^2}} \right) \frac{-1 + 8h^2 - 10h^4 + 3h^8}{8h^2} \quad (7,1)$$

$$\alpha = - \frac{1 - h^4}{4h} \times \\ \times \frac{(1 + 2h^2 - 7h^4 - 11h^6 - 6h^8 + 3h^{10}) \cos \gamma_1 + (1 - h^2 - 5h^4 - 3h^6) \cos 3\gamma_1}{1 + 2h^2 \cos 2\gamma_1 + h^4} + \\ + \frac{1 + 8h^2 + 10h^4 - 3h^8}{8h^2} \operatorname{arctg} \frac{2h \cos \gamma_1}{1 - h^2} \quad (7,2)$$

(Здесь $\gamma_1 = -\gamma > 0$).

Для точки совмещения струй $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, поэтому $\alpha = 0$.

Подставляя в (7,1) $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, получим расстояние точки C от центра цилиндра:

$$b = B(h) R_0, \quad (7,3)$$

где

$$B(h) = \exp \left[\frac{(1 - h^4)(1 + 3h^2)}{4h} \right] \times \\ \times \left(\frac{1 + h}{1 - h} \right) \frac{-1 + 8h^2 - 10h^4 + 3h^8}{8h^2} \quad (7,4)$$

Таким образом расстояние от точки C до цилиндра прямо пропорционально радиусу цилиндра и не зависит от скорости потока.

§ 8. Скорость течения

Из формулы

$$\chi = \frac{z}{c} \frac{dw}{dz}$$

получаем:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{c\chi}{z}$$

Следовательно, для скорости течения получаем:

$$v = c \cdot \left(\frac{\chi}{z'} \right) \quad (8,1)$$

Подставляя значение χ (5,6) и значение z (5,5) в (8,1), получаем для скорости потока формулу:

$$v = - \frac{ci(\sigma^2 + h^2)}{R_0 \sigma (\sigma h + i)^2} \left(\frac{\sigma + ih}{\sigma - ih} \right)^{\frac{1+10h^4-3h^8}{8h^2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{(1-h^4)}{4h} \frac{\sigma^2(1-5h^4) - h^2(1+3h^4)}{(\sigma^2 + h^2)^2} (\sigma + i\pi) \right\} \quad (8,2)$$

Определим постоянную c . В бесконечно-удаленной точке $S(\sigma = -i/h)$, $v = v_0$. Подставляя это в (8,2), получаем:

$$c = C_0(h) v_0 R_0, \quad (8,3)$$

где

$$C_0(h) = \frac{4h}{1-h^4} \left(\frac{1-h^2}{1+h^2} \right)^{\frac{1+10h^4-3h^8}{8h^2}} \times \\ \times \exp \frac{1-4h^4+3h^8}{4(1-h^4)} \quad (8,4)$$

Найдем еще значения скорости в точках E_2 , B_2 и C .

На цилиндре σ — действительное число. Тогда для модуля скорости на цилиндре имеем:

$$|v| = \frac{C_0(h) (\sigma^2 + h^2)}{\sigma (1 + \sigma^2 h^2)} v_0 \quad (8,5)$$

Величина скорости в точке отрыва ($\sigma = 1$) будет:

$$v_B = C_0(h) v_0 \quad (8,6)$$

Максимальное значение скорости на цилиндре (точка E , $\sigma = \sigma_{\max}$):

$$v_{\max} = V_m(h) v_0, \\ V_m(h) = C_0(h) \frac{\sigma_{\max}^2 + h^2}{\sigma_{\max} (1 + \sigma_{\max}^2 h^2)} \quad (8,7)$$

Так как на струях модуль скорости равен

$$|v| = \frac{c}{R} = \frac{C_0(h) R_0 v_0}{R}$$

то, подставляя сюда $R = b$, получим для скорости в точке совмещения струй:

$$v_c = V_c v_0, \quad V_c(h) = \frac{C_0(h)}{B(h)} \quad (8,8)$$

Таким образом, значения угловой координаты для точки отрыва струй α_0 , отношений $\frac{b'}{R_0}$, $\frac{v_B}{v_0}$ и $\frac{v_c}{v_0}$ получаются как функции параметра h .

Поэтому решение является неоднозначным. Чтобы сделать его однозначным выберем параметр h так, чтобы угловая координата точки отрыва струи была равна $\gamma_0 = 82^\circ$ (обозначим в дальнейшем через γ угол с осью Ox , отсчитываемый от критической точки A , так что $\gamma = \pi - \alpha$). Такое значение дает эксперимент для положений точки отрыва пограничного слоя при обтекании круглого цилиндра [5].

Подставляя в формулу $\gamma_0 = \pi - \alpha_0$ указанное значение γ_0 и значение α_0 из (6,2) и решая численно полученное уравнение, будем иметь для параметра h значение:

$$h = 0,539. \quad (8,9)$$

Для основных параметров потока тогда получим:

$$b = 2,212 R_0 \quad (8,10)$$

$$v_c = 0,802 v_0 \quad v_B = 1,774 v_0$$

$$c = 1,774 v_0 R_0$$

Течение при заданном значении точки отрыва будет однозначно определяться размерами цилиндра и величиной скорости набегающего потока.

Определим еще значение угловой координаты точки цилиндра, в которой скорость достигает максимума. При $h = 0,539$, $\sigma_{\max} = 1,455$ (из формулы 5,8). Подставляя это значение в формулу для γ (6,1), получим:

$$\gamma_{\max} = 77,1^\circ$$

Если подсчитать значение γ_{\max} , исходя из экспериментально полученного распределения скорости вдоль цилиндра [5], [6], то для γ_{\max} получается близкое значение $72,2^\circ$.

§ 9. Сила, действующая на цилиндр

В любой точке потока сила давления на цилиндр, очевидно, будет направлена по радиусу к центру (рис. 1). Для величины этой силы, действующей на элемент дуги в некоторой точке цилиндра $Re^{i\alpha}$, имеем:

$$dF = PR_0 d\alpha, \quad (9,1)$$

где P_0 — давление на поверхности цилиндра. В силу симметрии течения относительно оси Ox , для результирующей силы давления на цилиндр, которая будет направлена по оси Ox , можем написать:

$$F = 2 \int_0^\pi dF_x = -2R_0 \left\{ \int_0^\pi P \cos \alpha d\alpha + P_0 \int_0^{\alpha_0} \cos \alpha d\alpha \right\},$$

где P_0 — давление в застойной области.

Далее, вычисляя второй интеграл, получаем:

$$F = -2R_0 P_0 \sin \alpha_0 - 2R_0 \int_{\alpha_0}^\pi P \cos \alpha d\alpha. \quad (9,2)$$

Из интеграла Бернулли имеем:

$$P = P_\infty + \frac{\rho}{2} (v_0^2 - |v|^2) \quad (9,3)$$

(P_∞ — давление в бесконечности, ρ — плотность потока). Подставляя (9, 3) в (9, 2), получаем:

$$F = 2R_0 \left(P_\infty - P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \right) \sin \alpha_0 + \rho R_0 \int_{\alpha_0}^\pi |v|^2 \cos \alpha d\alpha. \quad (9,4)$$

Обозначим далее скорость в той точке жидкости, где давление равно P_0 через V_0 , угол α выразим через угол $\gamma = \pi - \alpha$ (отсчитываемый от критической точки A) и $|v|$ выразим через $|\chi|$ (исходя из формулы 8,1).

Тогда получим:

$$F = C_x \frac{\rho v_0^2}{2} D. \quad (9,5)$$

Здесь D — диаметр обтекаемого цилиндра, C_x — коэффициент лобового сопротивления, который будет равен:

$$C_x = \left(\frac{V_0}{v_0} \right)^2 \sin \gamma_0 - C_0^2 \int_0^{\gamma_0} \frac{(\sigma^2 + h^2)^2}{\sigma^2(1 + \sigma^2 h^2)^2} \cos \gamma d\gamma, \quad (9,6)$$

где C_0 дается формулой (8, 4) и $\gamma = \pi - \alpha$ определится из (6, 1). Подставляя в (9, 6) значение h (8, 9) и произведя численное интегрирование, получим для C_x значение:

$$C_x = \left(\frac{V_0}{v_0} \right)^2 0,988 - 1,211. \quad (9,7)$$

Наиболее естественно будет принять давление в застойной области средним между давлениями в точках B и C . Так как давление определяется квадратом скорости, то примем за V_0 среднюю квадратичную скоростей v_C и v_B :

$$V_0^2 = v_0^2 (1,774 \cdot 0,802) = 1,423 v_0^2$$

Тогда получим

$$C_x = 0,67,$$

что не намного превосходит действительный коэффициент сопротивления.

Полученный результат говорит в пользу рассмотрения разобранной схемы обтекания цилиндра.

§ 10. Приближенное решение задачи о струйном обтекании дуги на сфере

а) Постановка задачи. Как показано в работе [2], струйному обтеканию на поверхности будет соответствовать струйное обтекание на плоскости только в том случае, если поверхность будет развертывающейся. Сфера не является развертывающейся поверхностью, поэтому нельзя найти такого отображения на плоскость, чтобы струйному течению на сфере соответствовало струйное течение на плоскости. Для получения точного решения задачи струйного обтекания дуги на сфере можно использовать уравнения, данные в упомянутой работе. Но решение этих уравнений представляет большие математические трудности. Поэтому имеет смысл искать приближенные, но более простые методы решения. В настоящем параграфе будет рассмотрена схема обтекания, для которой можно будет дать приближенное решение, исходя из решения рассмотренной в предыдущих параграфах плоской задачи. Следует отметить, что приближенное решение получается здесь довольно грубым, поэтому его следует рассматривать только как подход к решению задачи.

Схема обтекания будет такова (рис. 7). На сфере радиуса r , параллель, расположенная в верхней половине сферы, обтекается потоком диполя, расположенного в южном полюсе сферы S . Момент диполя направлен по меридиану SA . Линия тока SA , идущая по меридиану, в критической точке A разветвляется на две линии, идущие вдоль обтекаемой дуги и сходящиеся с ней в точках B_1 и B_2 , расположенных симметрич-

но относительно меридиана SA . Эти линии тока сходятся в некоторой точке C на противоположной половине меридиана SA , касаясь меридиана в этой точке, и ограничивая вместе с обтекаемой параллелью застойную область. Требуется найти потенциал течения по заданным: мощности диполя M и широте параллели Θ_0 . Определению будут также подлежать: широта точки $C = \Theta_c$, долгота точек схода струи с обтекаемой дуги $\pm \lambda_0$ (меридиан SA принимаем за начало отсчета долгот), и скорость на струе $-c_0$.

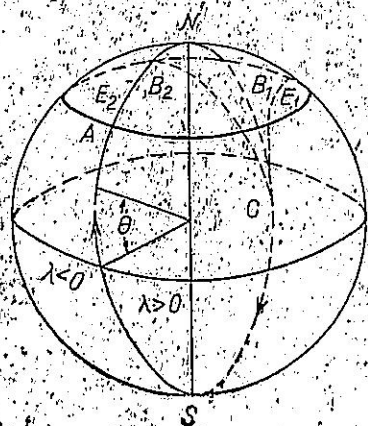


Рис. 7

б) Сведение к плоской задаче. Будем решать задачу сведением ее к плоской задаче.

В качестве вспомогательной плоскости берем плоскость, отображение на которую осуществляется формулой:

$$Z_2 = -e^{iZ_1}, \quad (10,1)$$

где Z_1 определяется формулой (1,2) работы [2].

Берем в качестве криволинейных координат:

$$\begin{cases} p = \Theta, \\ q = \lambda. \end{cases}$$

Тогда коэффициенты первой квадратичной формы поверхности будут:

$$E = r^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = r^2 \cos^2 \Theta.$$

Подставляя эти значения в формулы (1,2) для Z_1 и (1,2a) [2] для интегрирующего множителя a , получим:

$$Z_1 = X_1 + iY_1 = \ln \operatorname{ctg} \left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + i\lambda, \quad (10,2)$$

$$a = r \cos \Theta, \quad (10,3)$$

$$Z_2 = X_2 + iY_2 = \operatorname{Re} e^{i\alpha} = -\operatorname{ctg} \left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\lambda}. \quad (10,4)$$

При таком отображении сеть криволинейных координат на поверхности перейдет в полярную сеть на плоскости: мериди-

аны $\lambda = \operatorname{const}$ перейдут в лучи $\alpha = \operatorname{const}$, исходящие из начала координат: параллели $\Theta = \operatorname{const}$ перейдут в окружности $R = \operatorname{const}$, с центром в начале координат.

Так как Θ и λ заключены в пределах

$$-\frac{\pi}{2} \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

то для плоскости:

$$\infty > R \geq 0, \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi.$$

(очевидно, что $\alpha = -\pi + \lambda$ при $\lambda > 0$ и $\alpha = \pi + \lambda$ при $\lambda < 0$). Сфера таким образом отображается на всю плоскость. При этом северный полюс переходит в начало координат, южный — в бесконечно удаленную точку, меридиан SA переходит в ось абсцисс (рис. 1). Определим еще соотношение между скоростями. Имеем:

$$V_2 = \frac{dw}{dZ_2} = \frac{dw}{dZ_1} \cdot \frac{dZ_1}{dZ_2}.$$

Так как [3]:

$$\frac{dw}{dZ_1} = a(v_p - iv_q) = r \cos \Theta (v_\Theta - iv_\lambda),$$

то:

$$V_2 = -r(1 + \sin \Theta) [v_\Theta \cos \lambda - v_\lambda \sin \lambda + i(v_\Theta \sin \lambda + v_\lambda \cos \lambda)];$$

отсюда:

$$|V_2| = r(1 + \sin \Theta) |v| = \frac{2r}{1 + R^2} |v|,$$

$$V_{2R} = r(1 + \sin \Theta) v_\Theta,$$

$$V_{2a} = -r(1 + \sin \Theta) v_\lambda. \quad (10,4a)$$

Диполь в южном полюсе сферы будет соответствовать на плоскости (Z_2) диполь в бесконечности, т. е. поступательный поток. Очевидно, что диполь, момент которого направлен по меридиану SA , в плоскости будет соответствовать поступательный поток, текущий в положительном направлении оси абсцисс.

Найдем еще связь между моментом диполя и скоростью соответствующего поступательного потока. Как показано в § 2 [2], моменты диполей на поверхности и плоскости (M и M) связаны соотношением:

$$M = a \frac{dZ_1}{dZ_2} M.$$

Подставляя сюда значения a и $\frac{dZ_1}{dZ_2}$, получаем:

$$\mathcal{M} = r(1 - \sin \Theta) M e^{i\lambda}$$

В точке S , $\Theta = -\frac{\pi}{2}$, а $\gamma = 0$ для данного диполя, следовательно:

$$\mathcal{M} = 2rM.$$

С другой стороны, рассматривая поступательный поток как диполь в бесконечности, т. е. предел системы источника и стока, когда они уходят в бесконечность, а мощности их бесконечно возрастают, можем записать (обозначая скорость поступательного потока через v_0 , а текущие координаты источника и стока, расположенных на оси абсцисс через u и s):

$$v_0 Z_2 = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ u, s \rightarrow \infty}} Q [\ln(Z_2 - u) - \ln(Z_2 - s)] = \\ = \frac{Z_2}{2\pi} \left[\lim_{\substack{Q \rightarrow \infty \\ u, s \rightarrow \infty}} Q \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{u} \right) \right] = \frac{M}{2\pi} Z_2.$$

(Здесь $M > 0$, так как $s < u$).

Отсюда:

$$M = 2\pi v_0.$$

Окончательно связь между \mathcal{M} и v_0 получаем в виде:

$$\mathcal{M} = 4\pi r v_0. \quad (10,5)$$

Далее. Обтекаемая параллель $\Theta_0 = \text{const}$ перейдет на плоскости (Z_2) в окружность радиуса R_0 (рис. 1):

$$R_0 = \text{ctg} \left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (10,6)$$

Если $\Theta_0 > 0$, то $R_0 > 1$.

Линия тока SA на плоскости будет идти по отрицательной части оси абсцисс до точки $X_2 = -R_0$.

Аргументы точек схода струй с окружности будут:

$$\pm \alpha_0 = \pm (\pi - \lambda_0).$$

Застойной области на сфере соответствует застойная область на плоскости. Струи, ограничивающие эту застойную область, будут сходиться в точке C на оси абсцисс, касаясь ее в этой точке. При этом абсцисса точки C будет:

$$b = \text{ctg} \left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (10,7)$$

Скорость на струях будет изменяться по закону:

$$|V_2| = r(1 + \sin \Theta) c_0 = \frac{2rc_0}{1 + R^2}. \quad (10,8)$$

Таким образом, приходим к плоской задаче обтекания кругового цилиндра с образованием за цилиндром конечной застойной области, на границах которой скорость переменная. В общем виде такая задача представляет большие трудности для решения. Но, как показано в предыдущих параграфах, решение оказывается возможным получить в замкнутом виде, если скорость на струях изменяется обратно пропорционально расстоянию от центра цилиндра. Полученное течение будет приближаться к указанному, если радиусы векторы точек застойной области близки к 1. Действительно, записав

$$1 + R^2 = 2R + (1 - R)^2$$

и, пренебрегая членом $(1 - R)^2$, получаем закон изменения скорости на струях в виде:

$$|V_2| = \frac{rc_0}{R} = \frac{c}{R}, \quad (10,9)$$

Если полученное плоское течение отобразить на сферу, то на сфере уже получим не струйное течение, а течение с переменной скоростью на границах застойной области. Но если R близко к 1, то в первом приближении это течение будет мало отличаться от струйного.

Подводя итог сказанному, приходим к выводу, что решение задачи отрывного обтекания контура, при котором скорость на струях изменяется обратно пропорционально расстоянию от центра контура, может в первом приближении рассматриваться как решение задачи исследования плоского течения, являющегося отображением на плоскость (Z_2) течения на поверхности сферы. При этом связь между параметрами плоского течения и параметрами течения на сфере будет дана формулами (10,5), (10,6), (10,7), (10,9).

В следующем пункте рассмотрим соотношения, определяющие течение на сфере, для чего совершим обратный переход от плоскости к сфере.

в) Течение на сфере. Подставляя в (5,5) вместо z

$$Z_2 = -\text{ctg} \left(\frac{\Theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) e^{i\lambda},$$

получим:

$$\Theta = -\frac{\pi}{2} + \\ + 2\text{arccctg} \left\{ \exp \left[-\text{Im} \left(\frac{1 - h^4}{4h} i \frac{\sigma^2(1 - 5h^4) - h^2(1 + 3h^4)}{(\sigma^2 + h^2)^2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left| \frac{\sigma - ih}{\sigma + ih} \right|^{\frac{1 + 10h^4 - 3h^8}{8h^2}} \left| \frac{\sigma h + i}{\sigma h - i} \right| \right\},$$

$$\lambda = \pm \pi + \left[\pi - \frac{1-h^4}{4h} \operatorname{Re} \frac{\sigma^2(1-5h^4) - h^2(1+3h^4)}{(\sigma^2+h^2)^2} \sigma - \frac{1+10h^4-3h^8}{8h^2} \arg \left(\frac{\sigma-ih}{\sigma+ih} \right) + \arg \left(\frac{\sigma h-i}{\sigma h+i} \right) \right] \quad (10,10)$$

(Знак + берется, когда выражение в скобках меньше нуля).

Эти два уравнения, вместе с уравнением (5, 7) определяют комплексный потенциал w как функцию от координат сферической поверхности Θ и λ .

Определяем далее соотношения между параметрами течения. Отметим предварительно, что закон изменения скорости на параллели $\Theta_0 = \text{const}$ будет такой же, как на обтекаемой дуге в плоскости (на основании (10, 4a)).

Из (6, 2) и (7, 3) получаем для определения долготы точки схода струи с дуги и широты точки совмещения струй выражения:

$$\lambda_0 = \pi - \alpha_0 = \pi + \frac{1-h^2}{4h(1+h^2)} (1-h^2-5h^4-3h^8) - \frac{1+8h^2+10h^4-3h^8}{4h^2} \operatorname{arctg} h. \quad (10,11)$$

$$\Theta_c = -\frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \left[B(h) \operatorname{ctg} \left[\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right], \quad (10,12)$$

(где $B(h)$ определяется формулой (7, 4)).

Таким образом, широта точки совмещения струй однозначно определяется широтой обтекаемой дуги и долготой точки схода струи, и не зависит от радиуса шара.

Сопоставляя (10, 5), (10, 9) и (8, 3), получаем значение скорости на струе:

$$c_0 = \frac{C_0(h)}{4\pi r^2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad (10,13)$$

(здесь $C_0(h)$ определяется формулой (8, 4)).

Таким образом, скорость на струе прямо пропорциональна моменту диполя и уменьшается с увеличением широты обтекаемой дуги.

Полученное в результате отображения на сферу течение в действительности не будет струйным, и значения скорости на струе будут разные в разных точках струи. Оценим теперь ошибку, которую мы делаем, считая скорость на струе равной c_0 , определяемой из (10, 13). Получаем, используя (8, 7), (8, 8) и (10, 8) (заменяя предварительно в первых двух формулах v на V_2), относительные ошибки в точках B и C :

$$\delta_B = \frac{v_B - c_0}{c_0} = \frac{(1-R_0)^2}{2R_0} \quad (10,14)$$

$$\delta_C = \frac{v_C - c_0}{c_0} = \frac{(1-BR_0)^2}{2R_0B} \quad (10,15)$$

Наименьшая ошибка, как нетрудно усмотреть, будет тогда, когда застойная область на плоскости располагается по обе стороны от единичной окружности; при этом наибольшей будет ошибка в одной из точек: B или C .

Рассмотрим, какова должна быть широта обтекаемой дуги, чтобы относительная ошибка не превосходила некоторой заданной величины Δ . Для таких дуг должны соблюдаться неравенства $\delta_B \leq \Delta$ и $\delta_C \leq \Delta$. Подставляем в эти неравенства значения (10, 14) и (10, 15); получим:

$$1 + R_0^2 - 2R_0(1 + \Delta) \leq 0, \\ 1 + B^2 R_0^2 - 2R_0B(1 + \Delta) \leq 0, \quad (10,16)$$

или

$$[R_0 - (1 + \Delta + \sqrt{2\Delta})][R_0 - (1 + \Delta - \sqrt{2\Delta})] \leq 0, \\ [BR_0 - (1 + \Delta + \sqrt{2\Delta})][BR_0 - (1 + \Delta - \sqrt{2\Delta})] \leq 0, \quad (10,17)$$

(при этом считаем Δ настолько малым, чтобы можно было пренебречь величиной Δ^2).

Эти неравенства будут совместимы только в том случае, когда R_0 будет находиться в пределах

$$1 + \Delta - \sqrt{2\Delta} < R_0 < \frac{1 + \Delta + \sqrt{2\Delta}}{B}. \quad (10,18)$$

При этом B должно удовлетворять неравенству

$$B < \frac{1 + \Delta + \sqrt{2\Delta}}{1 + \Delta - \sqrt{2\Delta}} \quad (10,19)$$

или при достаточно малых Δ

$$B < 1 + 2\Delta. \quad (10,20)$$

Так как B зависит от параметра h , который определяется положением точки схода струи с дуги, то, следовательно, при полученных пределах для значений R_0 значение долготы точки схода λ_0 также должно быть ограничено. Используя еще выражение для R_0 (10, 6), приходим окончательно к следующему выводу. Для того, чтобы относительная ошибка в определении скорости при разобранном приближенном решении не превосходила заданной малой величины Δ , широта обте-

каемой дуги должна лежать в пределах, характеризуемых неравенством

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(1 + \Delta - \sqrt{2\Delta}) \leq \Theta_0 \leq \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \Delta + \sqrt{2\Delta}}{B}\right), \quad (10,21)$$

а долгота точки схода должна быть больше некоторой величины λ_{\min} , определяемой по формуле (10, 11), подстановкой в нее значения h , удовлетворяющего равенству

$$B = \frac{1 + \Delta + \sqrt{2\Delta}}{1 + \Delta - \sqrt{2\Delta}}. \quad (10,22)$$

Формулы для определения основных параметров потока значительно упрощаются, если рассматривать течения, при которых долгота точки схода достаточно мала.

Производя в формулах (10, 11), (10, 12) и (10, 13) разложение в ряд по степеням h и отбрасывая члены с h в степени выше второй, получим для λ_0 , Θ_c и c_0 значения;

$$\pi - \lambda_0 = \frac{7}{6} h,$$

$$\Theta_c - \frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg}\left[\frac{11}{4} h \operatorname{ctg}\left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$c_0 = \frac{h M}{\pi r^2} \operatorname{ctg}\left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (10,23)$$

откуда имеем выражения Θ_c и c_0 через долготу точки схода струи с дуги:

$$\Theta_c - \frac{\pi}{2} = 2 \operatorname{arctg}\left[\frac{33}{14} (\pi - \lambda_0) \operatorname{ctg}\left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (10,24)$$

$$c_0 = \frac{6 M}{7 \pi r^2} (\pi - \lambda_0) \operatorname{ctg}\left(\frac{\Theta_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (10,25)$$

Из этих формул видно, что длина застойной области и скорость на струе уменьшаются с увеличением долготы точки схода.

Следует ожидать, что установленные качественные закономерности будут соблюдаться для струйного обтекания дуги на сфере при любых Θ_0 и λ_0 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Некоторые замечания о стационарных схемах капиллярного обтекания пластины, «Изв. АН СССР, от.п.» 2, 1947.
2. Хмельник М. И. О задаче струйного обтекания дуги на криволинейной поверхности (см. настоящий выпуск).
3. Голубева О. В. Исследование движений жидкости по криволинейной поверхности. Уч. записки МОПИ, т. XVIII, Труды кафедр физики, п. 2, 1951.
4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, т. I, М., 1949.
5. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. Теоретическая гидромеханика, т. II, М., 1949.
6. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Dingers Politechnisches Journal. Bd. 326, 1911.