Disponible en línea / Available online / Disponível online: 2020-01-27
Versión: v1_2020_01_20

PREPRINT: Triangulación de procesos cognitivos traductores como recurso didáctico para el aprendizaje del álgebra

PREPRINT: Triangulation of cognitive processes translators as a teaching resource for the learning of algebra

PREPRINT: Triangulação de processos cognitivos tradutores como recurso de ensino para aprendizagem de álgebra

José Theódulo Esquivel-Grados
Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión
Huacho, Perú
jesquivel@unjfsc.edu.pe
https://orcid.org/0000-0002-4591-9921

Migdonio Nicolás Esquivel-Grados
Universidad Católica de Trujillo “Benedicto XVI”
Trujillo, Perú
m.esquivel@uct.edu.pe
https://orcid.org/0000-0002-1685-3994

Valia Luz Venegas-Mejía
Universidad Norbert Wiener
Lima, Perú
valia.venegas@uwiener.edu.pe
https://orcid.org/0000-0003-3032-8720

Resumen: El artículo es producto de un estudio que tuvo como propósito usar la triangulación de procesos cognitivos traductores como recurso didáctico para optimizar el aprendizaje de temas Álgebra en estudiantes de tercero de secundaria. En esta investigación aplicada se usó el diseño cuasi experimental de un grupo con experimentos y pruebas en series de tiempo para contrastar las hipótesis de diferencia de medias, obtenidas de los puntajes de las mediciones del aprendizaje de temas algebraicos (una antes, dos durante y una después del tratamiento). El análisis descriptivo de estos puntajes se realizó a partir de medidas estadísticas de resumen (centralidad y dispersión); en tanto que el inductivo, con la prueba z. Se encontraron diferencias significativas entre las medias comparadas dos a dos, considerando el nivel de significación de 0,05; resultados que indican una mejora progresiva y significativa del aprendizaje de temas algebraicos en estudiantes de secundaria como resultado del tratamiento o intervención pedagógica.

Palabras clave: Triangulación, procesos cognitivos traductores, recurso didáctico, aprendizaje.

Abstract: The article is the product of a study that aimed to use the triangulation of cognitive translation processes as a teaching resource to optimize the learning of Algebra topics in third-year high school students. In this applied research, the quasi-experimental design of a group with experiments and tests in time series was used to test the hypotheses of difference of means, obtained from the scores of the learning measurements of algebraic subjects (one before, two during and one after treatment). The descriptive analysis of these scores was based on statistical summary measures (centrality and dispersion); while the inductive, with the z test. Significant differences were found between the means compared two to two, considering the level of significance of 0.05; results that indicate a progressive and significant improvement in the learning of algebraic subjects in secondary school students as a result of the treatment or pedagogical intervention.

Keywords: Triangulation, translational cognitive processes, didactic resource, learning.

.

Resumo: O artigo é o produto de um estudo que teve como objetivo usar a triangulação dos processos de tradução cognitiva como recurso didático para otimizar o aprendizado de tópicos de Álgebra em alunos do terceiro ano do ensino médio. Nesta pesquisa aplicada, o delineamento quase-experimental de um grupo com experimentos e testes em séries temporais foi utilizado para testar as hipóteses de diferença de médias, obtidas a partir dos escores das medidas de aprendizagem de sujeitos algébricos (um antes, dois durante e um após o tratamento). A análise descritiva desses escores foi baseada em medidas de resumo estatístico (centralidade e dispersão); enquanto o indutivo, com o teste z. Diferenças significativas foram encontradas entre as médias comparadas de dois a dois, considerando o nível de significância de 0,05; resultados que indicam uma melhoria progressiva e significativa na aprendizagem de disciplinas algébricas em alunos do ensino médio como resultado do tratamento ou intervenção pedagógica.

Palavras-chave: Triangulação, processos cognitivos tradutores, recurso didático, aprendizagem.

Introducción

En el 2000 la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), realizó la primera evaluación del Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), y ha sido seguida de otras que se repiten cada tres años; las que permiten evaluar a los estudiantes que culminan la educación básica, considerando sus conocimientos y habilidades en comprensión lectora, Matemática y ciencias. En lo concerniente a los conocimientos matemáticos, éstos presentan cuatro categorías: 1) cambio y relaciones, 2) espacio y forma, 3) cantidad y 4) incertidumbre y datos; en tanto que, las habilidades matemáticas se organizan en tres grupos de competencia: 1) Reproducción, que consiste en cálculos simples y/o definiciones de tipo más familiar que en evaluaciones convencionales de Matemática; 2) conexiones, que requiere el conectar ideas y procedimientos para resolver problemas directos y algo familiares; y, 3) reflexión, que consiste en aspectos relacionados con el pensamiento matemático, generalización e intuición, y requiere que los estudiantes se comprometan en el análisis, identifiquen los elementos matemáticos en la solución de problemas nuevos con los que no están familiarizados, y propongan sus propios problemas. La escala para medir las capacidades matemáticas presenta siete niveles de desempeño, que van desde *estar por debajo del nivel 1*, donde los estudiantes sólo son capaces de realizar tareas matemáticas muy directas y sencillas, etc., hasta el *nivel 6*, donde

> pueden conceptualizar, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos, y pueden usar su conocimiento en contextos no usuales. Asimismo, pueden relacionar diferentes fuentes de información y tipos de representaciones, y pasar de una a otra con flexibilidad. Los alumnos de este nivel son capaces de pensar y razonar con matemática avanzada. Pueden aplicar su conocimiento, comprensión e intuición, así como su dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, para desarrollar nuevos planteamientos y estrategias frente a situaciones nuevas. (Ministerio de Educación, Minedu, 2017, p. 78)

De los 43 países participantes en PISA 2000, el promedio en Matemática de los países de la OCDE fue 500 puntos y Perú, que participó como invitado, obtuvo el último lugar del ranking y su promedio se ubicó por debajo del nivel 1 (menor de 358). Ha pasado el tiempo y la ubicación de Perú ha mejorado progresivamente en PISA 2009, 2012, 2015 y 2018. En el caso de Matemática, se pasó de 292 puntos (debajo del nivel 1) en PISA 2000 a 387 en el nivel 1 (que son puntuaciones comprendidas entre 358 y 420) en PISA 2015; mejora que se contrasta con el incremento en la brecha de resultados entre los segmentos (cuartiles) de mayor y menor nivel socioeconómico. Según el informe del Minedu (2017), en PISA 2015 el 21.0% del total de estudiantes evaluados del Perú se ubicaron en el nivel 2, cifra próxima al 22.5% de la OCDE; sin embargo, porcentajes altos se ubicaron en el nivel 1 y por debajo de éste. Cabe destacar que, considerando las ediciones PISA 2009, 2012 y 2015, el Perú registró una tendencia promedio de +10, la más alta de la región latinoamericana. Asimismo, el Minedu (2019) presenta los resultados de PISA 2018, donde el Perú nuevamente registra una tendencia promedio 2009-2018 de +11.7, que equivale a 35 puntos de incremento en el referido periodo, seguido de Colombia de +3.3, que equivale a un incremento de 10 puntos; en tanto que, los países de la región presentan tendencias negativas. Y respecto de PISA 2000, Perú incrementó el promedio en 108 puntos, una cifra poco usual en los participantes.

Las evidentes mejoras de Perú en las evaluaciones de la OCDE responden a diversos factores, entre los cuales se encontrarían la capacitación docente por el Minedu, la auto capacitación de docentes para acceder a nombramiento y ascenso de nivel, el incremento de sueldos, la disminución de la pobreza, la dotación de recursos didácticos (como libros y guías) y hasta el grado de felicidad que sienten los estudiantes en el colegio, la que se determinó con la información recolectada con las pruebas PISA cuando se pregunta a los evaluados: *¿estás de acuerdo con la afirmación me siento feliz en la escuela?*, que en los resultados de PISA 2012, Perú ocupó el primer lugar de los países participantes de la región con un 94% de estudiantes que consideraban sentirse felices. Este resultado podría interpretarse como que estudiantes de contextos más pobres aprecian más la escuela, lo que significa el acceso a derechos esenciales no siempre garantizados en el hogar como lo sostiene Reimers (citado por Rivas, 2015) o el hecho que en “contextos vulnerables, la escuela es un espacio de protección y pese a tener peores condiciones y resultados que en los países más desarrollados, es más valorada.” (Rivas, 2015, p. 253).

La mejora en conocimientos y habilidades en Matemática, como en los otros rubros de las evaluaciones PISA, es un buen indicador, pero resulta insuficiente. La transposición didáctica, por ejemplo, debe ir aparejada de estrategias innovadoras y participativas, como indica Murillo (2003), que es importante destacar los factores relacionados con los procesos formativos, como la diversidad y calidad de las estrategias y recursos didácticos, con énfasis en aquellas que permiten más involucramiento de los educandos. De ahí que, deficiencias en la enseñanza incidirán en el bajo nivel en el logro del aprendizaje y desarrollo de habilidades matemáticas, de manera particular en el Álgebra. Esto último se apreció en un diagnóstico realizado en estudiantes de tercer grado de secundaria en una institución educativa de la ciudad de Trujillo-Perú; asimismo, otros resultados de la observación fueron la preeminencia de ejercicios descontextualizados presentados en lenguaje natural, que para resolverlo directamente se optaba por su traducción al lenguaje algebraico, sin darle ninguna importancia a otros lenguajes o sistemas de representación que ayuden a una mejor comprensión, como los lenguajes aritmético y geométrico. La realidad descrita induce, entre otros aspectos, a innovar los recursos didácticos para optimizar la enseñanza y el aprendizaje.

En las innovaciones didácticas deben considerarse el lenguaje simbólico completo de cada rama de la Matemática que permite realizar operaciones matemáticas con más precisión y sencillez. Es así que, el lenguaje algebraico, que es una extensión del lenguaje de los números o aritmético, es fundamental en la comunicación matemática, la elaboración de modelos y la organización de formas de razonamiento; pero el uso de este lenguaje se puede optimizar si se usa a la par del lenguaje geométrico o el gráfico. En ese sentido, se proyectó una investigación con el propósito de determinar la eficacia de una técnica didáctica diseñada a partir de procesos cognitivos traductores asociados al uso de lenguajes matemáticos, respecto del aprendizaje de temas algebraicos; asociado a la pregunta: ¿En qué medida el uso de la triangulación de procesos cognitivos traductores como recurso didáctico optimiza el aprendizaje del Álgebra en estudiantes de tercer grado de secundaria de una Institución Educativa de la Unidad de Gestión Educativa Local [Ugel] N° 4 de la ciudad de Trujillo, Perú?

Estado de la cuestión

Maturana y Curbeira (2018), en su artículo *La formación de habilidades espaciales desde la Matemática en los estudiantes de cuarto y quinto de básica primaria*, consideran que “generar situaciones contextualizadas en el proceso de enseñanza–aprendizaje de la Matemática, asegura la formación de habilidades matemáticas en los estudiantes”. (p. 272)

Díaz y Díaz (2018), en su artículo *Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático,* hacen notar que: “En los últimos años se ha alcanzado cierto consenso acerca del papel de la enseñanza de la Matemática en el desarrollo del pensamiento, por encima de la transferencia de conocimientos matemáticos”. (p. 57)

Esquivel (2014), en su artículo *Enfoque didáctico desde una perspectiva heurístico constructivista para el desarrollo de habilidades matemáticas,* presenta resultados de una investigación cuasiexperimental en estudiantes de segundo grado de secundaria, en cuya contrastación de hipótesis se aplicó el estadístico t de student con un nivel de significación de 0,05, y se encontró que la aplicación de estrategias didácticas desde una perspectiva heurística desarrolla significativamente habilidades conceptuadoras, traductoras y operativas.

González (2012), en su tesis *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y* *resolución de problemas*, concluye que una de las formas de acercar a los niños al manejo de letras y a la construcción del lenguaje simbólico con significado es

> a través de procesos de generalización que se pueden abordar con actividades en diferentes contextos, dichas actividades introducen al manejo de letras, facilitan la comprensión del significado de variable a través de las relaciones de tipos numérico o geométrico, establece una relación aritmética-geometría, que se amplía con la simbolización en una relación aritmética-geometría-álgebra. (p. 61)

Forero-Sáenz (2008*),* en su artículo *Interacción y discurso en la clase de matemáticas*, presenta avances de la investigación sobre la comunicación en la clase de Matemática. Algunos resultados preliminares de este estudio de casos, con auxilio de metodologías de corte etnográfico y análisis del discurso, son: "En la clase aparecen diversos tipos de textos y actos de habla, de acuerdo con la intencionalidad que tiene el docente de llevar a los sujetos a una mayor comprensión" (p. 804).

Precisamente, en la línea de los hallazgos de los estudios referenciados, la presentación en leguaje usual de ejercicios o problemas con motivaciones del entorno del estudiante, se aparejó con la traducción a los lenguajes de los números, de las figuras y el algebraico, con el propósito de asegurar la comprensión y aprendizaje de la temática algebraica.

Referencias Teóricas

El estudio de la Matemática se asocia con frecuencia al hecho de recordar y aplicar algoritmos, formulación de preguntas y la veracidad de las respuestas que se determinan con la ratificación por parte del docente o los libros de texto (Santos, 1997); sin embargo, la aplicación de algoritmos no garantiza la resolución adecuada del ejercicio o problema. En tal sentido, las actividades desarrolladas por el docente desde esta concepción están orientadas a formar estudiantes en la solución de ejercicios rutinarios, algo que podría terminar restándoles interés y gusto por la Matemática; en cambio, si el docente opta por un procedimiento contrario, entonces motivará sus educandos y pondrá a prueba su curiosidad, planteándoles ejercicios o problemas adecuados, coherentes con sus conocimientos previos y habilidades, y les acompañará en la búsqueda de la solución aplicando estrategias estimulantes que permitan despertar el interés y el gusto por la Matemática (Majmutov, 1989); es decir, serán más adecuados los ejercicios o problemas contextualizados que pueden motivar al estudiantes a partir de situaciones del entorno. Por tanto, la enseñanza de la Matemática debería asegurar que los estudiantes dispongan de estrategias que les permitan tomar decisiones sobre qué conocimientos utilizar a partir de las condiciones que envuelven la situación que se deberá resolver y, por lo tanto, planificar, regular y evaluar la propia actuación con la intención de ajustarla en todo momento. (Monereo, 2001)

Los propósitos de la Educación Matemática contienen aspectos concernientes al uso del conocimiento matemático en relación con situaciones del entorno físico y social del estudiante, así como instrumento de representación y comunicación de informaciones y mensajes usuales de su esfera cultural (Martínez, 2005). Asimismo, la enseñanza de la Matemática debe tener como propósito fundamental dotar a los estudiantes de conocimientos y habilidades para que desarrollen su pensamiento matemático y puedan enfrentarse a las demandas de su entorno en diferentes ámbitos. Es así que, el logro de estos propósitos pasa, entre otros aspectos, por conjugar adecuadamente el uso de los lenguajes usual y matemático.

> El lenguaje de las matemáticas, al igual que cada uno de los lenguajes de los diferentes campos especializados de la actividad humana, tiene su propio y muy exclusivo modelo semántico, sus propias formas de construir significados. Entonces, al enseñar matemáticas los docentes le proporcionan recursos a los alumnos para que se hagan a ese modelo semántico, para que aprendan a hacer matemáticas, a hablar matemáticamente, a pensar matemáticamente. Enseñar, aprender y pensar matemáticamente son procesos sociales, enseñados, aprendidos y construidos por miembros de comunidades sociales grandes y pequeñas (como las aulas). (Forero-Sáenz, 2008, p. 792)

Pero, el estudiante debe formarse en el contexto y comprender la realidad, para lo cual debe hacer uso de lo aprendido en el área de Matemática. Se trata de darle sentido a todo lo aprendido para que sea perdurable; lo que implica resultado de asimilar los fundamentos proporcionados por los elementos del lenguaje usado con su propio modelo semántico. Al respecto, Mosterín (2000) refiere que:

> La realidad es excesivamente compleja para poder ser directamente comprendida por nuestras limitadas entendederas. Lo único que podemos hacer es buscar en el universo matemático una estructura que se parezca a algún aspecto relevante a la porción de la realidad por la que nos interesemos, y usar esa estructura como modelo teórico simplificado de la realidad. Una vez que disponemos de un modelo teórico, podemos traducir al lenguaje de las matemáticas las preguntas que nos hacemos en la vida real, podemos computar la respuesta dentro del modelo y, finalmente,

> podemos traducir esa respuesta matemática al lenguaje de la vida real. (p. 11)

De lo señalado, se aprecia el vínculo entre lenguaje y pensamiento, y para explicar tal asociación se presentan argumentos del "interaccionismo social", que sustenta el desarrollo del lenguaje en función de la adquisición de reglas que el ser humano abstrae e interioriza del entorno social donde se desarrolla. Esta teoría, representada por Lev Vigotsky, introduce una diferencia en cuanto a las relaciones de pensamiento y lenguaje que las concibe Jean Piaget; mientras que para el psicólogo ginebrino primero se desarrolla la capacidad cognitiva antes de surgir la habilidad lingüística, para el psicólogo ruso las funciones de pensamiento, lenguaje y razonamiento se desarrollan y cambian debido a su interrelación con el medio social y cultural.

> En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero entre personas (interpsicológica) y después al interior del propio niño (intrapsicológica)... Todas las funciones superiores se originan como relación entre seres humanos. (Vigotsky, 2003, p. 192).

Como se puede apreciar, la teoría vigotskiana destaca el rol trascendente del contexto sociocultural, mediante del proceso de internalización del lenguaje social, en el progreso de las funciones superiores del pensamiento.

Las etapas del desarrollo cognitivo son distintivas, según Piaget (2003), quien indica que "las operaciones formales representan exclusivamente la estructura del equilibrio final, hacia el cual tienden las operaciones concretas cuando se reflejan en sistemas más generales combinando entre sí las proposiciones que la expresan" (p. 165); es decir, concibe el pensamiento formal y el pensamiento representacional como un continuum. En esa direccionalidad, Piaget consideraba que la Matemática debe estudiarse e interpretarse en función de la experiencia de quien aprende.

> La interpretación empirista de la Matemática presenta a ésta como conectada directa o indirectamente a la experiencia; sea esta física (abstrayendo las nociones a partir de objetos que se encuentran fuera del sujeto investigador) o psicológica (a partir de lo dado en el sujeto y construido por una visión interna llamada introspección). (Iglesias, 1972, p. 8)

Sánchez y Fernández (2003), consideran que el proceso didáctico de enseñanza aprendizaje de la Matemática, según Piaget, ofrece resultados positivos si entre el estudiante y su entorno suceden una serie de intercambios originales provocados por los dos procesos: la asimilación y la acomodación. Se entiende por asimilación a la incorporación de la nueva información en las estructuras intelectuales ya existentes; en tanto que, la acomodación, es un proceso de cambios en las estructuras intelectuales que permite manejar nueva información o nuevos sucesos. Precisando lo expuesto, se nota que la acomodación es el proceso cognitivo que permite la creación de nuevos esquemas o la modificación de los existentes, traducido en un desarrollo de las estructuras cognitivas (esquemas matemáticos es este caso), algo que se orienta hacia la transformación cualitativa (desarrollo), a diferencia de la asimilación, que es un proceso orientado al cambio de tipo cuantitativo (crecimiento).

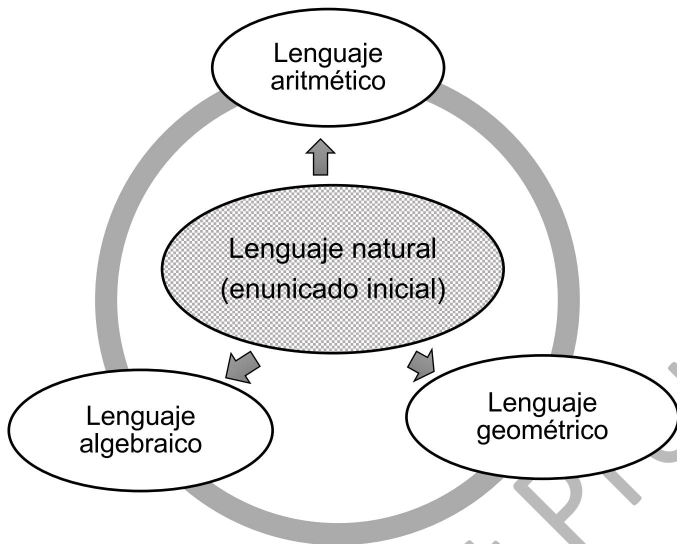
El enunciado de ejercicios o problemas matemáticos debe no sólo referirse a cuestiones del entorno del estudiante, sino que debe presentarse en un lenguaje natural sencillo y comprensible, para logar una adecuada traducción al lenguaje matemático, tal como lo indican Alastre y Alastre (2011), "la comprensión del lenguaje matemático, implica la necesidad de conocer el lenguaje natural" (p. 128) y acotan que el estudiante "debe apoyarse en el lenguaje natural para interpretar y comprender el lenguaje simbólico de las matemáticas y…la lógica subyacente en los conceptos matemáticos para así poder desarrollar su pensamiento lógico" (Alastre y Alastre, 2011, p. 130) y destacan que:

> Si enseñar no es fácil, es posible que menos lo sea enseñar matemáticas, debido al grado de complejidad y abstracción que ésta presenta... De allí que se hace imperiosa la necesidad de buscar herramientas que permitan la comprensión e interpretación de esta ciencia. (p. 128)

Precisamente, en el estudio que originó este artículo, para comprender e interpretar temas algebraicos, y por ende aprenderlos, se optó por una herramienta didáctica: la triangulación procesos cognitivos traductores, la que su utilizó con especial cuidado a la par de las estrategias didácticas convencionales.

Tal como se aprecia en la Figura 1, la triangulación de procesos cognitivos traductores consiste en las reiteradas traducciones del lenguaje natural, con el cual se enuncia el ejercicio o problema de temas de Álgebra, a los lenguajes simbólicos matemáticos (numérico o aritmético, geométrico o gráfico, y algebraico) en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El término triangulación, de uso frecuente en el campo de la investigación cualitativa, por ejemplo, no significa que se utilice necesariamente los tres lenguajes o habilidades cognitivas, como no se usan en investigación tres métodos o igual número de fuentes de datos, teorías, etc.

Figura 1: Lenguajes matemáticos en la triangulación de procesos cognitivos traductores



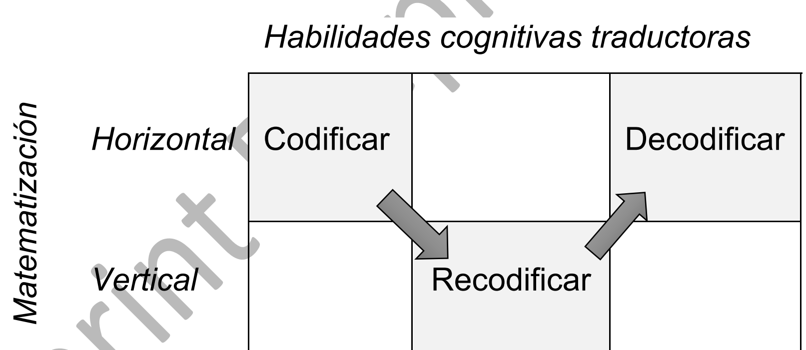
Nota: Elaboración propia.

En el aprendizaje de temas matemáticos, en particular algebraicos, se deben incluir ejercicios y problemas contextualizados cuya organización de datos previo a la resolución demandan de propiedades, algoritmos, definiciones, teoremas, etc. Es decir, el estudiante está ante la denominada matematización, que es una actividad que consiste en organizar la información matemática, con el fin de identificar aspectos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras; y que presenta dos formas: una matematización horizontal y la otra, vertical, cuya ilustración se presenta en la Figura 2.

La matematización horizontal es la actividad que conduce de una situación del mundo real enunciada en leguaje usual al de los símbolos y posibilita tratar matemáticamente tal situación, ejercicio o problema. Dos procesos cognitivos o habilidades clave de esta actividad son codificar y decodificar. Codificar consiste en transferir un ejercicio o problema contextualizado y formulado en lenguaje usual a uno matemático; mientras que decodificar, implica seguir la ruta inversa de la codificación, puesto que, por ejemplo, la respuesta del ejercicio o problema debe presentarse de nuevo en lenguaje usual.

La matematización vertical es la actividad que consiste en el tratamiento específicamente con el lenguaje matemático de una situación, ejercicio o problema. Dos procesos cognitivos importantes son: recodificar y resolver. El primero implica otros procesos traductores como representar una relación mediante una fórmula, utilizar diferentes modelos o algoritmos, etc.; es decir, recurrir a los diversos lenguajes de diversas ramas de la Matemática.

Figura 2: Habilidades cognitivas traductoras en la triangulación



Nota: Elaboración propia.

Un proceso cognitivo es un conjunto de habilidades para asimilar, procesar y sistematizar información a la que se accede a partir de la experiencia, la percepción u otras vías; siendo las habilidades potenciales de tipo cognitivo las que posee el estudiante y que permiten realizar actividades con éxito, y se clasifican en dos clases: cognitivas y metacognitivas. Amestoy (citado por Maita y Choque, 2011), hace referencia que:

> El pensamiento se genera a partir de dos tipos de operaciones: las cognitivas o cognoscitivas y las metacognitivas o metacognoscitivas. Estas últimas están encargadas de monitorear el buen desarrollo del pensamiento, mientras las primeras son las que posibilitan acceder a los procesos particulares del pensamiento mismo. (p. 30)

Asimismo, Maita y Choque (2011) indican que la aparición de las habilidades de pensamiento depende de cómo se haya desarrollado la trayectoria de la simbolización respecto de cuestiones de la realidad.

En lo referente a las capacidades y habilidades, el Minedu (2016) indica que las primeras son “los conocimientos, habilidades y actitudes que los estudiantes utilizan para afrontar una situación determinada. Estas capacidades suponen operaciones menores implicadas en las competencias, que son operaciones más complejas” (p. 30) y en lo referente a las habilidades, el referido Diseño se indica que “hacen referencia al talento, la pericia o la aptitud de una persona para desarrollar alguna tarea con éxito…pueden ser sociales, cognitivas, motoras”. (Minedu , 2016, p. 30)

Las habilidades cognitivas son un conjunto de operaciones mentales cuyo propósito es que el estudiante integre la información lograda en una estructura de conocimiento con significación. Pueden ser conceptuales (las que operan directamente con conceptos), traductoras (las que admiten pasar de un dominio a otro del conocimiento: codificar, recodificar, decodificar, etc.), operativo-heurísticas (las que operan como auxiliares de otras más complejas: graficar, calcular, resolver, analizar, etc.); mientras que las habilidades metacognitivas son necesarias para adquirir, usar y controlar el conocimiento, así como otras habilidades cognitivas, como calcular, comprobar, etc. Estas habilidades deben recibir atención especial en la formación de los estudiantes, tal como refieren Maita y Choque (2011), que en "la formación integral de una persona es necesario que el aprendizaje ocurra a través del uso de las habilidades cognoscitivas en toda su plenitud. No es posible llamar aprendizaje a la mera repetición de información". (p. 28)

Los procesos u operaciones cognitivas traductoras se sustentan en los argumentos del "desarrollo cognitivo" de Piaget (2003) y el "interaccionismo social" de Vigotsky (2003), los que sustentan el recurso didáctico para lograr un mejor manejo de un tema, ejercicio o problema cuando se integran el lenguaje usual con los diversos tipos de lenguajes matemáticos, vía la traducción.

La triangulación de lenguajes como recurso didáctico, diseñado por José Esquivel Grados, se usa a la par de estrategias que aplican otras habilidades de uso frecuente como calcular, resolver, comprobar, etc. Una descripción breve de las habilidades cognitivas traductoras eje de la triangulación, se presentan a continuación:

1° *Codificar*: Es el proceso cognitivo que a partir del texto contextualizado en lenguaje usual, natural u ordinario con el que se presenta el ejercicio o problema, se efectúa la traducción al lenguaje simbólico matemático (numérico, geométrico y algebraico). Tener en consideración que el hecho de partir con ejercicios o problemas persuasivos de la realidad formulados en lenguaje usual o natural, traería consigo múltiples ventajas para el estudiante, empezando por apreciar en general a la Matemática como algo ventajoso, importante y necesaria en la vida cotidiana, y que en particular ocurriría con cualquier rama de esta ciencia, como el Álgebra.

2° *Recodificar*: Es el proceso cognitivo que consiste en la traducción del ejercicio o problema en lenguaje simbólico matemático a otro matemático. En palabras de Velázquez (2005), "Recodificar es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro, expresar el mismo objeto a través de formas diferentes o usar signos diferentes para un mismo modelo". (p. 220)

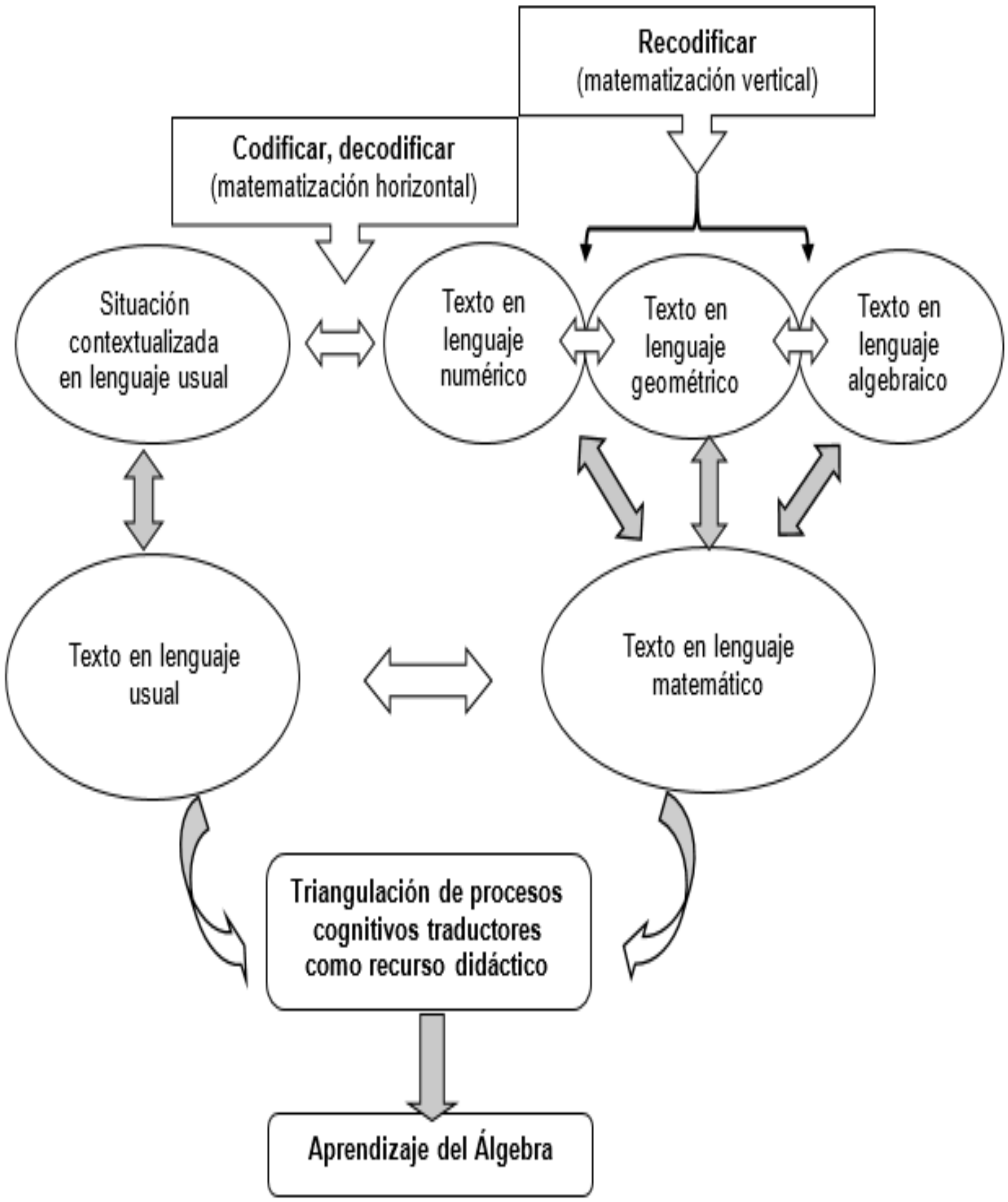
Recodificar con el apoyo de gráficas o figuras geométricas resulta medular en la triangulación, puesto que el lenguaje geométrico permite visualizar y comprender mejor, para proceder enseguida a comprender, resolver e interpretar. Sobre la cuestión, Pérez, Postigo, López y Marín (2009), refieren que:

> la potencia de los sistemas figurativos frente a los sistemas textuales o numéricos radica, por un lado, en que permiten transmitir la información y los conocimientos de manera más global y sintética y, por otro, en que guardan cierto grado de analogía con sus referentes o los elementos de la realidad que representan. (p. 138)

3° *Descodificar o decodificar*: Es el proceso cognitivo que consiste en la traducción al lenguaje usual del tema, ejercicio o problema que ha sido expresado o resuelto en lenguaje simbólico matemático.

En la Figura 3 se sintetiza la triangulación de procesos cognitivos traductores como recurso didáctico innovador que, a la par de otros procedimientos de uso frecuente como calcular, resolver, comprobar, etc., debe coadyuvar a optimizar el aprendizaje del Álgebra. Y en la Figura 4 se presenta un ejemplo con tres lenguajes.

Figura 3. Esquema que sintetiza la triangulación de procesos cognitivos traductores como recurso didáctico para el aprendizaje del Álgebra.



Nota: Elaboración propia.

Disponible en línea / Available online / Disponível online: 2020-01-27
Versión: v1_2020_01_20

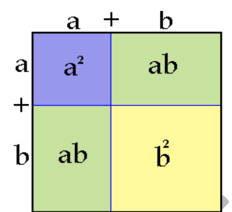
Figura 4: Ejemplo de triangulación de procesos cognitivos traductores (codificar, recodificar y decodificar) en ejercicio contextualizado que permite generalizar un caso particular a la *fórmula del cuadrado de un binomio*. La sistematización de procesos traductores requiere de un componente heurístico para gestionar procedimientos que permitan optimizar la relación contexto-Aritmética-Geometría-Álgebra

	Lenguaje natural (*Situación contextualizada*) En un colegio hay dos aulas de los talleres de arte que son cuadradas cuyos lados, que miden 5m y 3m, coinciden en una esquina y proyectándolos son dos a dos paralelos. Como han resultado pequeñas ante la afluencia de estudiantes, las autoridades han decidido que se construirá un aula cuadrada grande, que abarcará las dos aulas iniciales, más dos espacios rectangulares adyacentes que forman un cuadrado con las aulas pequeñas. Entonces, ¿cuál será el área del nuevo ambiente? Y, ¿cómo se generalizaría el caso anterior para medidas arbitrarias?	
Lenguaje algebraico (*Proceso: decodificar*) Si los lados de las aulas cuadradas midieran a y b, el área del aula grande de lado a+b, según la visualización de la gráfica, será: $\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$, la *fórmula del producto notable del cuadrado de la suma de un binomio,* que se lee*: "El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo".*	Triangulación de procesos cognitivos traductores	**Lenguaje aritmético** (*Proceso: codificar*) Al área de ambas aulas, $25m^2$ y $9m^2$, se añade dos áreas de dos rectángulos de 5m de largo y 3m de ancho, 2(5m)(3m), para formar el aula cuadrada grande. Es decir: $\mathbf{(5m)^2 + (3m)^2 + 2(5m)(3m)^2 = (5m+3m)^2 = (8m)^2}$. Entonces, $64m^2$ será el área total de la nueva aula cuyo lado mide 8m.

Lenguaje geométrico

(*Proceso: recodificar letras por figura para visualizar*)

Gráfica de las áreas de las aulas cuadradas de lados con medidas arbitrarias a y b, más los dos espacios rectangualres de área ab. Resulta una nueva aula de lado a+b.



Nota: Elaboración propia.

En la Figura 4 se observa un ejercicio expresado en diferentes lenguajes. El enunciado inicial en lenguaje natural es sobre una situación contextualizada. Luego, por el proceso cognitivo de *codificar,* permite presentar dicha situación en lenguaje aritmético, que es un caso específico, como para ejemplificar. El proceso *recodificar* permite expresar, por ejemplo, un caso más general del resultado aritmético en lenguaje geométrico que permite visualizar o pasar del lenguaje geométrico al algebraico, que en este caso permite comprender la fórmula del cuadrado de un binomio, $(a+b)^2$. Y *decodificar* implica que el cuadrado del binomio, donde a es el primer término y b, el segundo, se exprese nuevamente en lenguaje natural así: *El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primero, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo*.

Metodología

La investigación fue aplicada, según su relación con la práctica (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014) y por su nivel, experimental. Para contrastar la hipótesis se usó el diseño cuasiexperimental de un grupo con experimentos y pruebas en serie de tiempo. Este tipo de diseños "ofrecen un grado de validez suficiente" (Carrasco, & Calderero, 2000, p. 68). Se administraron una prueba inicial, dos de progreso y una final para medir el aprendizaje de tópicos de Álgebra, luego de periodos similares de tres semanas cada uno, en los cuales se desarrollaron sesiones de aprendizaje con el recurso didáctico, la triangulación de procesos cognitivos traductores.

El universo hipotético lo constituyeron estudiantes del tercer grado de instituciones educativas estatales de educación secundaria de la UGEL N° 4 de la ciudad de Trujillo, Perú. La muestra estuvo formada por estudiantes de ambos sexos del tercer grado de una institución educativa de gestión estatal de la citada Unidad.

Las puntaciones sobre resolución de problemas algebraicos se obtuvieron con pruebas de desarrollo, válidas y confiables, considerando la escala vigesimal con tres niveles: Nivel alto (NA: 18-20), si el o la estudiante ejecuta prácticamente todas las operaciones planificadas para alcanzar los logros esperados; nivel medio (NM: 10.50-17.99), si el o la estudiante ejecuta al menos el 50% de las operaciones planificadas y alcanza parcialmente los logros esperados; y, nivel bajo (NB: 00-10.49), si el o la estudiante sólo ejecuta con éxito menos del 50% de las operaciones planificadas y aún está en proceso hacia la consecución de los logros esperados.

El análisis estadístico descriptivo de los resultados se realizó a partir de medidas de centralidad y dispersión, y para contrastar las hipótesis de diferencia de medias para determinar la eficacia del recurso didáctico propuesto, se usó la prueba z, por ser la muestra grande (n>30) (Bizquerra, 2004) y por cumplir las exigencias requeridas.

Resultados y discusión

Tabla 1: Estadígrafos de las puntaciones del aprendizaje de temas algebraicos

Estadígrafos	Prueba inicial (PI)	Prueba de progreso 1 (PP1)	Prueba de progreso 2 (PP2)	Prueba final (PF)
Media aritmética*	6.00	9.73	10.83	12.23
Coeficiente de variación	0.25	0.19	0.18	0.14
Nivel de logro	Bajo	Bajo	Medio	Medio

* Medida de resumen obtenida de puntuaciones en base a la escala vigesimal.

Nota: Elaboración propia.

En la Tabla 1 se presentan estadígrafos de los puntajes, referentes al aprendizaje de temas del Álgebra, obtenidos al administrar cuatro pruebas de aprovechamiento. Las medias aritméticas fueron incrementándose desde 6.00 sobre 20 en la PI hasta ubicarse en 12.23 sobre 20 en la PF; notándose un incremento considerable de 6.23, que equivale a más del 100% respecto del promedio inicial. Estos resultados, en promedio indican un desplazamiento del nivel bajo de aprendizaje hacia el nivel medio; es decir, en promedio los estudiantes de no ejecutar con éxito el 50% de las operaciones o procedimientos planificados, pasaron a realizar al menos el 50% y alcanzar parcialmente los logros esperados luego del uso del recurso didáctico programado. El coeficiente de variación para cada medición indica que el grupo fue homogéneo antes, durante y después del tratamiento, por presentar valores menores al 0.33 requerido (Esquivel, & Venegas, 2014) y fue decreciendo de 0.25 en la PI a 0.14 en la PF, es decir, la intervención pedagógica relativa al uso de la triangulación de lenguajes matemáticos y procesos cognitivos traductores cohesionó al grupo en términos del aprendizaje del Álgebra.

Tabla 2: Pruebas de hipótesis estadísticas para la comparación de medias de los puntajes referentes al aprendizaje de temas algebraicos y observar si hay diferencia significativa cuando se usa la triangulación de lenguajes matemáticos y procesos cognitivos traductores como recurso didáctico

Comparación	Promedios		Valor obtenido z	Valor tabular z*	Decisión para H_o	p: α
	1	2				
PI - PP1	6.00	9.73	7.31	1.65	Se rechaza	p<0.05
PP1- PP2	9.73	10.83	2.24	1.65	Se rechaza	p<0.05
PP2- PF	10.83	12.23	2.92	1.65	Se rechaza	p<0.05
PI - PF	6.00	12.23	12.46	1.65	Se rechaza	p<0.05

* Valor obtenido considerando un nivel de significación de 0,05.

Nota: Elaboración propia.

En la Tabla 2 se presentan las pruebas de hipótesis estadísticas para la comparación de dos promedios de los puntajes respecto del aprendizaje de temas de Álgebra y observar si hay diferencias significativas, como efecto de la aplicación de la triangulación de lenguajes matemáticos y procesos cognitivos traductores como recurso didáctico. Para contrastar la hipótesis de diferencia de promedios, se formuló la hipótesis estadística de investigación que afirma que el promedio de la PI es menor que el promedio de la PP1 (H_1: $\mu_{PI} < \mu_{PP1}$), en tanto que la hipótesis nula indica que no hay diferencia de los promedios (Ho: $\mu_{PI} = \mu_{PP1}$). Considerando que los datos provienen de una distribución normal, según el test de Shapiro-Wilks, se recurrió a la prueba z para diferencia de medias en una muestra grande (n≥30) y se logró un valor igual a z = 7,31, mayor que el tabular igual a 1,65, asociado a un nivel de significación de 5%; es decir, el resultado significa que existe mejora en el aprendizaje de temas algebraicos como resultado de la triangulación con un nivel de confianza de 95%.

En la contrastación de las hipótesis de comparaciones de promedios de la PP1 con la PP2, la PP2 con la PF y la PI con la PF, se formularon hipótesis similares a la hipótesis de los promedios de la PI y de la PP1 y, también, se consiguieron valores de z superiores al tabular 1,65, los que indicaron la confirmación de todas las hipótesis de investigación, que significa mejoras en el aprendizaje de temas del Álgebra luego de la aplicación del tratamiento.

Para el análisis de los resultados se tomó en cuenta la forma en que se planteó el problema, el marco teórico y la hipótesis sujeta a prueba, con el fin que se cumpla el objetivo de la investigación, tal como lo indica Rojas (2006). En tal sentido, las pruebas de hipótesis unilateral considerando un nivel de significación de 0,05, confirman que la triangulación de lenguajes matemáticos y de procesos cognitivos traductores optimiza significativamente el aprendizaje de temas algebraicos, contrastaciones que aseguran el logró el objetivo propuesto.

Las diferencias significativas de las medias (Tabla 2) indican un incremento progresivo y significativo del aprendizaje de tópicos algebraicos, lo que explica la eficacia del recurso didáctico de la triangulación, considerando como fundamento ciertos lineamientos de las teorías del aprendizaje de Piaget y Vigotsky. El hecho de codificar un enunciado en lenguaje natural y recodificar en los lenguajes matemáticos, permite alcanzar una comprensión de los temas, ejercicios o problemas, requisito esencial para diseñar un plan orientado para resolverlo; "Pero para resolver el problema no basta con traducirlo al sistema de signos del álgebra. Hace falta ser capaz de resolver el problema en el sistema de signos al que se ha traducido". (Aymerich, & Macario, 2006, p. 50)

Los diversos recursos que se planifican para efectuar la enseñanza de la Matemática, como la triangulación de procesos cognitivos traductores, se orientan fundamentalmente hacia la solución de problemas o ejercicios, lo que implica que el estudiante previamente debe codificar, recodificar y decodificar diversos datos; sin embargo, comprender el lenguaje natural y, sobre todo, los lenguajes matemáticos es todavía más importante, ya que ello implica que el estudiante esté en capacidad de edificar el significado del problema o ejercicio como paso previo a su solución. Pero ocurre que en la codificación, recodificación y decodificación interviene el sistema cognoscitivo del estudiante, que le permite identificar símbolos y transformarlos para tener acceso a variados significados, algo que resulta factible desde el conocimiento y dominio de los lenguajes natural y matemáticos. Y la sistematización de los diferentes procesos traductores demanda de un elemento heurístico, con la intención de gestionar procedimientos ilustrativos que permitan internalizar temáticas, resolver ejercicios o problemas de modo creativo, lo que guarda relación con los resultados precisados por Esquivel (2014), quien refiere que la aplicación de estrategias didácticas desde una perspectiva heurístico constructivista desarrollan significativamente habilidades traductoras, entre otras.

Los deficientes logros en el aprendizaje de la Matemática, se deben, entre otros factores al insuficiente dominio de los lenguajes matemáticos (aritmético, geométrico y, sobre todo, algebraico) y la deficiente comprensión de éstos; por eso, innovar e implementar recursos didácticos como la triangulación de procesos cognitivos traductores, que requiere un uso simultáneo de los citados lenguajes, permiten encontrar mejores vías pedagógicas con las cuales se pueda establecer reciprocidad entre el lenguaje natural con los lenguajes simbólicos y abstractos, a fin de facilitar el aprendizaje de la Matemática en general, y de cualquiera de sus ramas en particular; resultados que concuerdan con los de González (2012), quien refiere la manera de aproximar a los estudiantes al manejo de letras a la par de números y figuras a partir de situaciones del contexto, que coadyuva a la formación de un leguaje simbólico, que es el elemento necesario para lograr el fortalecimiento de la relación del contexto del estudiante con los idiomas de la Aritmética, la Geometría y el Álgebra.

Conclusiones

El aprendizaje es resultado de la matematización horizontal y vertical; por eso, las estrategias didácticas deben usar recursos considerando los procesos cognitivos en ambos sentidos. Es así como el aprendizaje de temas algebraicos se mejora con el uso de la triangulación de procesos cognitivos traductores como recurso didáctico que involucra juntamente la codificación, recodificación y decodificación. Esta afirmación es el resultado de la confirmación de las hipótesis unilaterales de diferencias de medias aritméticas (correspondientes a cuatro momentos: una antes, dos durante y una después de la intervención pedagógica), considerando la prueba paramétrica z con un nivel de significación de 0,05, luego de verificar la normalidad de los datos; es decir, los valores encontrados de z permitieron el rechazo de la hipótesis de nulidad, lo que significa mejora significativa del aprendizaje de temas algebraicos como resultado de la intervención pedagógica.

El recurso didáctico de la triangulación, que se apoya en los argumentos del “desarrollo cognitivo” de Piaget y el “interaccionismo social” de Vigotsky, implica el hecho de articular el lenguaje natural que refleja las situaciones contextualizadas (interaccionismo social) con los lenguajes aritmético, geométrico y algebraico (desarrollo cognoscente), lo que permite al estudiante comprender los temas, ejercicios o problemas algebraicos y optimizar su aprendizaje a partir de la sistematización didáctica de su entorno asociado con procedimientos cognoscitivos traductores como los referidos.

Referencias

Alastre, V. y Alastre, N. (julio-diciembre, 2011). Metacognición como estrategia para la interpretación del lenguaje matemático. *Arjé, Revista de Postgrado FACE-UC*, *5*(9), 127-137. Recuperado de http://arje.bc.uc.edu.ve/arj09/art07.pdf

Aymerich Miralles, J. V., & Macario Vives, S. (2006). Matemáticas para el siglo XXI. Castellón de la Plana: Publicaciones de la Universitat Jaume I.

Bizquerra, R. (Coord.) (2004). *Metodología de la Investigación Educativa*. La Madrid: Muralla.

Carrasco, J. y Calderero, J. (2000). *Aprendo a investigar en educación*. Madrid: Rialp.

Díaz, J. y Díaz, R. (2018). Los métodos de resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento matemático. *Bolema, Rio Claro (SP), 32*(60), 57-74.

Esquivel Grados, J. y Venegas Mejía, V. (2014). *Preparación de la tesis universitaria*. Lima: Juan Gutenberg.

Esquivel Grados, J. (enero-abril, 2014). Enfoque didáctico desde una perspectiva heurístico constructivista para el desarrollo de habilidades. *Revista @mbienteeducação*, *7*(1), 105-113. Recuperado de http://arquivos.cruzeirodosuleducacional.edu.br/principal/old/revista_educacao/pdf/volume_7_1/Educa%C3%A7%C3%A3o_01-2014.pdf#page=105

Forero-Sáenz, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. *Universitas Psychologica,* *7*(3), 787-805. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/rups/v7n3/v7n3a14.pdf

González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. El significado de la variable. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación (6ª ed.)*. México: McGraw-Hill.

Iglesias, S. (1972). *Epistemología, Matemática y Psicología*. México: Universidad Autónoma de Nuevo León.

Maita, J. y Choque, J. (2011). Habilidades de pensamiento y aprendizaje. *Scientia, revista de investigación, 1*(1). Recuperado de http://www.revistasbolivianas.org.bo/pdf/risc/v1n1/v1n1_a03.pdf

Majmutov, M. (1989). *La enseñanza problémica y sus particularidades*. La Habana: Pedagogía.

Martínez, H. (2005). *Investigación en Educación Matemática.* La Habana: Pueblo y educación.

Maturana Muñoz, H. y Curbeira Hernández, D. (2018). La formación de habilidades espaciales desde la Matemática en los estudiantes de cuarto y quinto de básica primaria. *Revista Conrado, 14*(65), 267-274. Recuperado de https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/844

Ministerio de Educación (Minedu). (2016). *Diseño Curricular Nacional*. Lima: Autor.

Ministerio de Educación (Minedu). (2017). *El Perú en PISA 2015. Informe nacional de resultados.* Lima: Autor.

Ministerio de Educación (Minedu). (2019). *Evaluación PISA 2018*. Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2019/12/PISA-2018-Resultados.pdf

Monereo, C. (coord.) (2001). *Ser estratégico y autónomo aprendiendo: unidades didácticas de enseñanza estratégica para la ESO*. Barcelona: Graó.

Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid, España: Espasa Calpe.

Murillo, F. (2003). El Movimiento de investigación de eficacia escolar. En F. Murillo (coord.), *La investigación sobre eficacia escolar en Iberoamérica. Revisión Internacional sobre el estado del arte* (pp.53-92). Bogotá: Convenio Andrés Bello - Centro de Investigación y Documentación Educativa.

Pérez, M., Postigo, Y., López, A. y Marín, C. (2009). Aprender con imágenes e información gráfica. En J. Pozo y M. Pérez (coords.), *Psicología del aprendizaje universitario: La formación de competencias* (pp. 134-148). Madrid: Morata

Piaget, J. (2003). *La psicología de la inteligencia*. Barcelona: Crítica.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En J. Aymerich y S. Macario (Eds.), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57). Publicacions de la Universitat Jaume I.

Rivas, A. (2015). *América Latina después de PISA. Lecciones aprendidas de la educación en siete países (2000 - 2015)*. CIPPEC- Instituto Natura.

Rojas, R. (2006). *La presentación de los resultados de investigación*. Madrid: Espasa Calpe.

Sánchez, J. y Fernández, J. (2003). *La enseñanza de la Matemática: Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas*. Madrid: CCS.

Santos Trigo, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Velázquez, S. (2005). El desarrollo de habilidades matemáticas y actividades matemáticas universales. Sus implicaciones en la formación de profesores.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18, 417-423. http://funes.uniandes.edu.co/6167/1/VelazquezDesarrolloAlme2005.pdf

Vigotsky, L. (2003). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.