

---

---

## BOEKBESPREKING

---

29 April 1940 is te Utrecht overleden de heer *M. van Overeem*, Lid van het Nederlandsch Instituut van Accountants. De Redactie had van den overledene nog een doorwrochte boekbespreking in portefeuille, die een indruk geeft van de veelzijdigheid van den heer *van Overeem*. Het is der Redactie een eer deze boekbespreking bij wijze van posthume hulde hier plaats te verleen.

*S. Kleerekooper. Over het gebruik van de wiskunde in de economie (Diss.).*

Het proefschrift, waarop de Heer *Kleerekooper* op 15 December 1938<sup>1)</sup> aan de Universiteit te Amsterdam den graad van doctor in de economische wetenschappen verwierf, draagt, vergeleken met de meeste andere dissertaties, een bijzonder karakter. Veelal toch zijn deze te kwalificeeren als monografieën, zonder meer. De promovendus levert een min of meer diepgaande studie van een bepaald onderwerp van beperkten omvang uit het vak van wetenschap, waarvoor hij den doctoralen graad wenscht te verwerven of deelt in zijn dissertatie de resultaten mede van een door hem ingesteld empirisch onderzoek, onder gelijktijdige uiteenzetting van de wijze, waarop hij bij dit onderzoek te werk is gegaan. Een dergelijk zuiver monografisch karakter draagt het proefschrift van *Kleerekooper* niet. Reeds op pag. 2 van hoofdstuk I (Inleiding) wordt dit door K. zelf ook reeds tot uitdrukking gebracht. Na te hebben opgemerkt, dat vrijwel alle economen het er over eens zijn, dat de economie met vrucht gebruik kan maken van sommige hulpmiddelen en voorstellingen, die ontleend zijn aan de gewone rekenkunde, gaat hij n.l. als volgt verder:

„Er bestaat echter verschil van inzicht over de vraag naar de toepasbaarheid en de doelmatigheid van het gebruik van bepaalde hoofdstukken van de analytische meetkunde, van de differentiaal- en integraalrekening, van de differentiaalvergelijkingen, van de determinantentheorie, van de kansrekening en van eenige andere moeilijke hoofdstukken van de wiskunde op economische vraagstukken. Het is het gebruik van enkele van deze afdeelingen van de wiskunde, waarmee wij ons in de volgende bladzijden zullen bezig houden.”

Aan deze doelstelling, zooals zij in de laatste zinsnede van dit citaat tot uitdrukking komt, heeft K. in het geheele proefschrift vastgehouden. Het is ingedeeld in negen hoofdstukken. Het vangt aan met een inleiding, waarin hij een overzicht geeft van de onderwerpen uit de economie, die hij in zijn dissertatie onder toepassing van de wiskundige methode heeft behandeld, of die door hem voor een dergelijke behandelingswijze worden vatbaar geacht. Zij betreffen zoowel problemen uit de theoretische en toegepaste sociale economie als uit de theoretische en toegepaste bedrijfseconomie. Uit het vervolg van deze bespreking zal dit nog nader blijken.

Hoofdstuk II geeft een chronologisch overzicht van hetgeen door diverse schrijvers in vroegere perioden werd geproduceerd op het gebied van de toepassing van de wiskunde op economische problemen. Dit overzicht is in verschillende opzichten zeer lezenswaard, tot op zekere hoogte vrij volledig, terwijl het bovendien systematisch is opgesteld. Eerst bespreekt K. de literatuur, die zich bepaalt tot incidenteele toepassingen van de wiskunde. In het tweede gedeelte komen de schrijvers aan de orde, die getracht hebben een op wiskun-

digen grondslag opgebouwde verhandeling te geven van verschillende economische problemen van een meer algemeen en daardoor vèr strekkend karakter. Onze bespreking zou te uitvoerig worden voor een tijdschriftartikel, indien wij hier een opsomming gaven van al de verhandelingen en werken, die successievelijk door K. worden vermeld en in het kort worden besproken. Wie belang stelt in het onderwerp, waarover het proefschrift loopt, leze dit proefschrift zelf. Naast de literaturopgave brengt K. echter in hoofdstuk II twee punten ter sprake van principiëelen aard, waarop wij hier nader willen ingaan.

Het eerste dezer punten betreft het z.g. naturalisme, waaraan K. bijzondere aandacht heeft gewijd (zie pag. 19 tot 26). Daarbij verstaat K. onder naturalistische methode een door enkele schrijvers (o.a. *Jevons* en *Irving Fisher*) gevolgde mathematische behandeling van economische problemen, waarbij de terminologie, de methode en soms ook stellingen van de natuurwetenschappen, uitsluitend of in hoofdzaak op grond van analogie-redeneeringen worden toegepast op de economie. Deze methode wordt door K. volstrekt afgewezen. Wij achten het wenschelijk er hier eenigszins uitvoerig bij stil te staan en doen dit naar aanleiding van onderstaande aanhaling, betrekking hebbende op K.'s opmerkingen over het boek van *Irving Fisher*, waarvan de Fransche titel luidt: „Recherches mathématiques sur la théorie de la valeur et des prix.” *Irving Fisher* verdedigt de naturalistische methode op de volgende wijze:

„Il est rare que celui écrit sur l'économie manque d'établir quelque comparaison entre l'économie et la mécanique. L'un parle d'une „correspondance dans les grandes lignes entre le jeu des forces économiques” et „l'équilibre mécanique”. Un autre compare l'uniformité de prix à l'uniformité de niveau de la surface de l'eau. Un autre (*Jevons*) compare ses lois de l'échange à celles de l'équilibre d'un levier. Un autre (*Edgeworth*) représente le „système” économique comme un système de lacs de niveaux différens. Un autre compare la société à une masse plastique, telle qu'une „pression exercée en une région se disperse dans toutes les directions”. En fait l'économiste emprunte à la mécanique une grande partie des mots de son vocabulaire. En voici des exemples: équilibre, stabilité, élasticité, expansion, extension, contraction, cours, écoulement, force, pression, résistance, réaction, distribution, (prix)niveau, mouvement, portement”.

Hierop reageert K. als volgt:

„Inderdaad blijkt uit deze laatste opsomming, dat de economie een nog zoo onvolkomen wetenschap is, dat zij het nog niet tot een eigen afgesloten systeem van terminologie en definitie heeft kunnen brengen. Maar het blijft mij toch zeer de vraag of *Fisher* gelijk heeft met zijn suggestie, dat de economen al de door hem genoemde woorden rechtstreeks aan de natuurwetenschappen hebben ontleend. Veel meer lijkt mij het gewone dagelijksche spraakgebruik — dat overigens wel meer woorden gemeen heeft met de natuurwetenschappelijke terminologie — de bron, waaruit hier door de economen is geput. De economie heeft van deze woordgemeenschap veel meer nadeel gehad dan de natuurwetenschappen. Vermoedelijk vindt dit zijn oorzaak in het feit, dat de natuurwetenschap door haar wiskundige methode zich in een later stadium van analyse heeft kunnen losmaken van de vaagheden en innerlijke tegenstrijdigheden van het spraakgebruik. De economie echter, die zich in terminologie, zoowel als in analyse van de in-exacte taal heeft moeten bedienen, heeft hiermede ook de in-exactheden van het gewone spraakgebruik voor een groot deel naar binnen gehaald.”

Voor een deel kunnen wij ons met K.'s standpunt vereenigen. Ook ons lijkt het toe, dat de economen bij hun terminologie niet in de eerste plaats hebben geput uit de terminologie, die

<sup>1)</sup> De hieronder volgende bespreking van het proefschrift verschijnt door ziekte van den recensent veel later dan oorspronkelijk in diens voor-nemen lag.

in de natuurwetenschappen wordt gevolgd, maar daarbij in vele gevallen gebruik hebben gemaakt van woorden, die ook in het gewone spraakgebruik dagelijks voorkomen. Wat dat betreft, gaat dus *Irving Fisher's* verdediging van de naturalistische methode inderdaad mank. Maar mag men nu de afbrekende critiek op deze verdediging aanvangen door als praemisse te stellen, dat de economie een nog zoo onvolkomen wetenschap is, dat zij het nog niet tot een eigen afgesloten systeem van terminologie en definitie heeft kunnen brengen? Het kwalificeeren van de economie in haar huidig stadium van ontwikkeling als een zeer onvolkomen wetenschap blijve voor rekening van den promovendus. Wij gelooven, dat een dergelijke kwalificatie heel wat economen, die de moeite hebben genomen K's dissertatie zorgvuldig door te lezen, niet al te prettig zal hebben aangedaan. Maar dit terzijde latende, gaat o.i. K in de aangehaalde zinsnede veel te ver, legt anderzijds niet den vinger op de wonde plek, die inderdaad, wat betreft den wetenschappelijken opzet van de behandeling van diverse onderwerpen, in de economische litteratuur is aan te wijzen. Uit K's uitlating zou men de conclusie kunnen trekken, dat de graad van ontwikkeling of volkomenheid eener wetenschap tot op groote hoogte parallel loopt met het aantal neologismen, dat de beoefenaars dier wetenschap successievelijk zijn gaan gebruiken en nu is het ons inziens volmaakt onjuist een dergelijk criterium te stellen. Het is ons natuurlijk niet bekend, welken graad van onvolkomenheid K, krachtens de door hem opgedane ervaringen bij zijn studie van de economie in de bestaande litteratuur heeft ontdekt. Vermoedelijk zal hij het met ons eens zijn, dat er ook geen eenheid bestaat, waarin men dezen graad van onvolkomenheid zou kunnen uitdrukken. Maar wel staat het vast, dat de wiskunde, die toch zeker een veel hooger graad van ontwikkeling heeft bereikt dan de economie, zich tot heden niet geroepen heeft gevoeld neologismen in te voeren voor in deze wetenschap sinds lang algemeen gebruikte termen, die ook in het dagelijksch leven worden gebezigd en daarin een geheel andere betekenis hebben dan in de wiskunde. Woordvorming en spraakgebruik zijn inderdaad niet altijd betrouwbare gidsen bij het bepalen van den zin, dien men in de wetenschap aan een of andere term hecht. Meestal toch moet de betekenis, die een woord in het dagelijksche leven heeft, beperkt, somtijds uitgebreid, bijna altijd meer of minder gewijzigd worden vóórdat het als wetenschappelijke term zonder dubbelzinnigheid te veroorzaken dienst kan doen. Ook dagteekent een zoodanige term soms uit een tijd, toen de betreffende wetenschap nog op een lageren trap van ontwikkeling stond en men onmogelijk noemde, wat naderhand bleek zeer goed mogelijk te zijn of de stof rangschikte op een wijze, waartegen gegronde bezwaren bleken te bestaan. In andere gevallen weer heeft men zich bij de keuze van een uitdrukking laten leiden door een of ander in het oog vallend kenmerk, dat echter met het wezen van de zaak weinig te maken had. Als voorbeelden van een en ander noemen wij de termen: hoek, deeling, oneindig klein, gelijkvormig, imaginair, evenwijdig, ondeelbaar en onverkleinbare breuk. Al deze woorden hebben in de wiskunde een speciale scherp omlijnde betekenis, die met de etymologische weinig of niets te maken heeft.

Leidt nu het gebruik van deze woorden, die zich in de huidige literatuur hebben gehandhaafd, in de wiskunde tot misverstanden, vaagheden of onduidelijkheden of is het vasthouden aan deze termen een aanwijzing voor een zekeren graad van onvolkomenheid van ontwikkeling der wiskundige wetenschap? Wij meenen die vraag onvoorwaardelijk ontkennend te moeten beantwoorden. Waarom zou zich nu een dergelijk verschijnsel wel in de economie moeten voordoen, zoolang deze zich nog niet bedient van allerlei neologismen en niet in de wiskunde? O.i. is de reden uitsluitend hierin gelegen, dat

men zich in de economie lang niet altijd streng houdt aan de methode, die in de wiskunde steeds zorgvuldig wordt gevolgd en die hierin bestaat, dat men bij het invoeren van een bepaalden term (onverschillig of dit een neologisme is of een in het dagelijksch leven reeds in één of meer beteekenissen gebruikelijk woord) consequent vóór alles een scherpe omschrijving geeft van de betekenis, die deze term in de betreffende verhandeling, het betreffende leerboek of handboek zal hebben. Indien men, wat dit punt betreft, de economische wetenschap op een hooger peil wil brengen en de studeerenden niet periodiek voor onbegrijpelijkheden en vaagheden wil stellen, laat men dan beginnen met althans in dit opzicht de wiskundige methode volledig over te nemen. Dat kan door alle economen geschieden, ook al maken zij niet eerst, zooals K, blijkens zijn dissertatie heeft gedaan, een min of meer grondige studie van verschillende onderdeelen der *Hoogere Wiskunde*.

Hiermede stappen wij van K's opmerkingen over de naturalistische methode af en gaan over tot een ander gedeelte van hoofdstuk II zijner dissertatie. K, eindigt dit hoofdstuk met eenige zinsneden, waarin hij de reden aangeeft, waarom hij zich in zijn verhandeling niet heeft bepaald tot de toepassing van de wiskunde op abstract theoretische problemen, maar ook aan de empirische een, zij het dan ook bescheiden, plaats heeft ingeruimd. Deze zinsneden luiden als volgt: (zie pag. 29/30)

„De sterke verwaarloozing van de wiskunde door de economen heeft de wiskundige economische statistiek geheel van de economie vervreemd. Iets dergelijke is in andere vakken niet het geval. Naar mijn weten b.v. wordt de biometrica door de biologen beoefend.

Deze verwaarloozing door de economen heeft tengevolge gehad dat de econometrica door niet-economen (ingenieurs, mathematica enz.) van hen is overgenomen. Deze laatsten nu zijn niet deskundig op het gebied van de eigenlijke economische theorie.

In deze ontwikkeling schuilen ernstige gevaren, omdat hierdoor de theoretische analyse van op wiskundig empirische wijze verzamelde gegevens vaak achterwege zal blijven of, hetgeen nog erger is, door niet-economen op onvoldoende wijze zal worden verricht.

Het is ook ter wille van de taak, die hier voor den vak-econoom is weggelegd — en welke hem verplicht de wiskundestudie ter hand te nemen — dat wij in dit werk het wiskundig statistisch onderzoek toch in het kort zullen bespreken”.

In het kort uitgedrukt komen de hier geciteerde beweringen van K, hierop neer, dat een in ieder opzicht bevredigende en volledige behandeling van tal van onderwerpen uit de economie alleen kan worden gegeven door dengene, die tegelijkertijd wiskundige en econoom is. Indien K, er zich toe bepaald had een dergelijke algemeene uitspraak te geven, zou er voor ons geen reden geweest zijn, daarop nader in te gaan. Nu zijn eindconclusie hierop neerkomt, dat de vak-econoom terwille van de theoretische analyse van op wiskundig empirische wijze verzamelde gegevens verplicht is de wiskundestudie ter hand te nemen, voelen wij ons gedrongen nog enkele opmerkingen te maken.

Het zou onjuist zijn, indien men beweerde, dat men het volle profijt trekt van de studie der wiskunde, indien men zich een voldoende of zelfs groote vaardigheid eigen maakt in het differentieeren, integreeren, het oplossen van differentiaalvergelijkingen, het gebruik van determinanten enz., enz. Die techniek is ongetwijfeld noodig voor het maken van toepassingen. Maar daarmee wordt men nog geen wiskundige in den juisten zin van het woord. De groote betekenis van de studie der wiskunde voor den econoom zien wij in de eerste

plaats in de vormende waarde dezer wetenschap, die met de kunst van differentieeren, integreeren enz. weinig te maken heeft. De wiskunde ontleent haar vormende waarde aan haar methode van exacte definieering en exacte redeneering en bewijsvoering. Wie bij zijn wiskundige studie daarop in de eerste plaats zijn volle aandacht vestigt (en van de studenten in de wiskunde wordt *dit*, speciaal in de laatste decennia in de eerste plaats verlangd) maakt zich een denkwijze eigen, die hem er vanzelf toe brengt ook bij de beoefening van een andere wetenschap dezelfde strenge eischen te stellen en hij zal er zich dientengevolge voor wachten conclusies te trekken, die door de motiveering niet volledig worden gedekt. Het doet ons genoegen te hebben kunnen constateeren, dat K. blijkens de kritiek, die hij op verschillende plaatsen in zijn dissertatie uitoefent op de geestesproducten van enkele „grooten“ economen zijn studie in de wiskunde niet alleen dienstbaar heeft gemaakt aan het verwerven van technische vaardigheid in het afleiden van formules etc., die hij voor de mathematische behandeling van de door hem behandelde economische problemen *noodig* had, maar deze gelegenheid ook heeft aangegrepen om zich vertrouwd te maken met de wiskundige denkwijze en de exacte wijze van definieering, redeneering en bewijsvoering, waaraan de wiskunde haar vormende waarde ontleent. Het is deze vormende waarde, het zijn niet de door de wiskunde opgeloste problemen van practischen aard, op grond waarvan gezegd mag worden: „*Mathematica disciplinarum magistra*“.

Wij willen thans overgaan tot een bespreking van de Hoofdstukken III en IV van K.'s dissertatie. Hoofdstuk III handelt over de vraag of het algemeen karakter van het economisch onderzoek mathematische analyse mogelijk en nuttig maakt. Deze vraag wordt door K. bevestigend beantwoord. In hoofdstuk IV worden besproken de bezwaren, die verschillende schrijvers tegen het gebruik van de wiskunde in de economie aanvoeren. Om deze reden kunnen de hoofdstukken III en IV tegelijk worden behandeld.

Het hoofdargument, dat den schrijver er toe brengt de in hoofdstuk III behandelde vraag in bevestigenden zin te beantwoorden, komt hierop neer, dat in de economie talrijke vraagstukken te berde worden gebracht, waarbij functioneele betrekkingen een min of meer belangrijke rol spelen. Als zoodanig beschouwt de schrijver onder meer de volgende problemen:

1. De „vraag“ is de verzameling van de veranderende biedprijzen bij veranderend quantum te verhandelen goederen.

2. Het „aanbod“ is de verzameling van de veranderende laatprijzen bij veranderd quantum te verhandelen goederen.

3. De eerste wet van Gossen. In haar oorspronkelijke kortste formulering luidt deze wet:

„Die Grösse eines und desselben Genusses nimmt, wenn wir mit Bereitung des Genusses ununterbrochen fortfahren, fortwährend ab, bis zuletzt Sättigung eintritt.“

Deze wet definieert dus het in een bepaald tijdsinterval genoten „nut“ als een functie van het in dat tijdsinterval genoten quantum.

4. Van de z.g. onlustfuncties kan hetzelfde gezegd worden.

5. De beschouwingen over de besparingen van de productie in het groot leeren ons, dat de kostprijs per eenheid product verandert (daalt) als de geproduceerde hoeveelheid verandert (toeneemt), d.w.z. de kostprijs wordt hier waargenomen als functie van het geproduceerde quantum.

6. De z.g. „opslag voor indirecte kosten“ definieert een functioneel verband tusschen een bepaalde kostencategorie en een andere bepaalde kostencategorie of een andere aangenomen veranderlijke, b.v. den tijd.

7. De theorie van de belastingen bestaat voor een groot deel uit het onderzoek van allerlei functioneele betrekkingen. Bij wijze van voorbeeld wijzen wij op de theorie van de proportionele en progressieve inkomstenbelasting. Hier gaat het o.a. om het functioneel verband, dat er bestaat tusschen het inkomen van den belastingschuldige en het offer, dat het betalen van een bedrag aan den fiscus voor hem beteekent.

8. De theorie van den samenhang van de wisselkoersen, zooals die het eerst is geformuleerd door Cournot, is niet anders dan een theorie van functioneele verbondenheid van een aantal grootheden.

9. Bij bedrijven met onregelmatigen afzet zal men zoodanig op voorraad werken, dat de algebraïsche som van de kosten, het houden van den voorraad en de indirecte productiekosten een minimum wordt. Men bedenke hierbij, dat de indirecte productiekosten zelf een functie van de productiegrootte kunnen zijn.

10. Het vraagstuk van de prijsvorming bij monopolie is naar zijn aard een maximumvraagstuk. Immers de monopolist zoekt het maximum van het product, dat ontstaat door vermenigvuldiging van omzet en winst per eenheid. Deze winst is zelf weer het verschil tusschen opbrengst en productiekosten, welke laatste twee grootheden weer functies van het geproduceerde en afgezette quantum zijn.

Aangezien nu in de wiskunde het begrip „functie“ in vrijwel alle onderdeelen van deze wetenschap doorlopend een overwegende rol speelt, ligt het voor de hand in deze coincidentie een aanknooppingspunt te zoeken van de wiskunde met de economie. Deze in den grond reeds aanwezige oorzaak krijgt nog meer beteekenis, doordien het in de niet-mathematische economie reeds vele jaren de gewoonte is een of ander betoog of redeneering te verduidelijken of te illustreeren met een grafische voorstelling, waarin gebogen lijnen (in de wiskunde aan geduid als „krommen“) optreden. Aangezien men nu in de differentiaalrekening een methode bezit om het verloop van een kromme tot in bijzonderheden te onderzoeken, ligt reeds hierin opgesloten, dat het toepassen van de wiskunde op economische problemen vermoedelijk de mogelijkheid schept althans van dit onderdeel van de mathematica een vruchtbaar gebruik te maken. Met verschillende voorbeelden wordt nu door K. aangetoond, dat het inderdaad mogelijk is om door de wiskunde te hulp te roepen, in tal van gevallen een veel scherpere probleemstelling te geven. Als eerste voorbeeld geeft K. enkele inleidende beschouwingen omtrent het bekende probleem van de elasticiteit van de vraag, waarop hij later in hoofdstuk V nog zeer uitvoerig terugkomt. Daarbij voert hij den term „elasticiteits-coëfficiënt“ in, waarvan met behulp van mathematisch teekenschrift een korte en afdoende definitie is te geven.

Tot het invoeren van dit begrip is K. gekomen op grond van de volgende redeneering.

Een bepaalde prijsdaling bij een prijs a heeft een andere beteekenis dan dezelfde prijsdaling bij een prijs b. Men is er daarom in de economie toe overgegaan om te vragen of de verhouding, die er bij een gegeven aanbod (hetwelk weer den prijs bepaalt) bestaat tusschen prijs en quantum, grooter of kleiner is dan de verhouding, die er bestaat tusschen de vermindering (negatieve vermeerdering) van den prijs, die correspondeert met een bepaalde vermeerdering van de hoeveelheid en deze vermeerdering zelve. De in de wiskunde gebruikelijke symbolen vormen nu in de eerste plaats een middel, om deze vraag op veel eenvoudiger wijze te formuleeren. Zij het aangeboden quantum aanvankelijk  $q$  en de daarmee corresponderende prijs  $p$ . Stijgt dit aangeboden quantum met een hoeveelheid, voorgesteld door  $\Delta q$  en daalt daardoor de prijs met een bedrag voorgesteld door  $-\Delta p$ , dan komt de hierboven gegeven vraagstelling hierop neer, dat men zich

afvraagt of het quotient  $\frac{p}{q}$  kleiner dan, gelijk aan of groter dan  $\frac{-\Delta p}{\Delta q}$  is, of, indien men  $\Delta q$  (en dus ook  $\Delta p$ ) tot nul laat naderen of

$$\frac{p}{q} < - \frac{dp}{dq}$$

waarvoor ook geschreven kan worden

$$- \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} < 1.$$

Onder de elasticiteits-coëfficiënt van de vraag verstaat K nu den vorm

$$- \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}$$

welke hij verder aanduidt met de Grieksche letter  $\eta$ .

Beteekent dit op zichzelf reeds een vooruitgang ten opzichte van de niet-mathematische behandeling van het elasticiteitsprobleem, van nog veel meer beteekenis wordt deze methode doordien K, tegelijkertijd doet zien, dat het mogelijk is om aan het begrip elasticiteits-coëfficiënt een veel algemeener beteekenis te geven en daardoor de oorspronkelijke beperkte probleemstelling sterk te generaliseeren. De in een formule uitgedrukte definitie van de elasticiteits-coëfficiënt wijst onmiddellijk aan, dat voor ieder punt van onverschillig welke curve van een elasticiteits-coëfficiënt in den aangegeven zin kan worden gesproken en dat er derhalve geen sprake van is, dat alleen de „vraagcurve” voor een onderzoek met behulp van deze grootheid vatbaar zou zijn. Daardoor is het mogelijk om een aantal problemen van zeer uiteenloopenden aard, die in de economie voorkomen, wat hun formeel oplossing betreft, tot eenzelfde groep van vraagstukken te vereenigen. Als zoodanig noemt de schrijver o.m. (zie pag. 45A).

1. Besparingen te verkrijgen door productie in het groot, kunnen wij uitdrukken door de verhouding van de relatieve toeneming van de productie en de corresponderende relatieve daling van den kostprijs per eenheid product.

2. Wetten van de quantitative verhoudingen kunnen wij uitdrukken door de verhouding van de relatieve toeneming van een productiefactor uit een complex van productiefactoren en de corresponderende relatieve toeneming van het product.

3. De problemen, die opgesloten zijn in de bedrijfseconomische begrippen van progressieve en degressieve kosten.

Het voordeel hiervan is in de eerste plaats, dat de enkele erkenning van de formeel gelijkheid van de problemen het inzicht meer algemeen maakt. Ten tweede ligt hierin een aanknooppunt voor een (formeel) systematische indeeling van de stof. En ten derde duidt toch steeds een formeel gelijkheid op een zekere materiele verwantschap. Deze materiele verwantschap is uit het bovenstaande reeds gebleken en is juist en alleen door het formeel wiskundig onderzoek aan het licht gekomen.

Dit gedeelte van de dissertatie, hoewel beperkt van omvang, achten wij een van de best geslaagde. Het is van groote importantie voor de waardeering van het zeer uitgebreide hoofdstuk V, waarop wij hieronder nader zullen ingaan, en waarin K. verschillende van de meest uiteenloopende problemen zoowel uit de theoretische als uit de toegepaste economie aan de orde stelt. Wie verzuimen zou de bladzijden 42 t/m 45 met aandacht te lezen en zich bij lezing van het boek dadelijk zou werpen op de meer positieve en uitgebreidere behandeling van diverse op zichzelf interessante vraagstukken, die allicht bij een vluchtige inzage van het boek in de eerste plaats de aandacht trekken, loopt gevaar hoofdstuk V te gaan beschouwen als een soort mengselwerk, waarbij ieder verband

ontbreekt en op grond van dezen indruk de conclusie te trekken, dat de wiskunde in de economie alleen incidenteel toepassing kan vinden. Dit gevaar verdwijnt, indien men eerst de zoeven genoemde pagina's zorgvuldig doorleest.

Hoofdstuk IV bevat een weerlegging van de bezwaren, die tegen het gebruik van de wiskunde in de economie worden aangevoerd. Een zeer bekend bezwaar is, dat, hoewel bij vele problemen functioneële betrekkingen te onderkennen zijn, geen nut van deze omstandigheid kan worden verwacht, omdat deze functies zonder meer niet in den gewonen mathematischen vorm zijn te gieten.

Tegen dit bezwaar voert K. twee o.i. steekhoudende argumenten aan. Het eerste argument wordt als volgt geformuleerd: (zie pag. 46, 47).

„Als het waar is, dat de wiskundige economie met functies werkt en dat het een bezwaar is, dat de concrete gedaanten van deze functies tot heden onbekend zijn, dan zal de conclusie niet mogen luiden, dat wij nu ook maar de wiskunde overboord moeten werpen, maar veeleer, dat wij voor de groote taak staan om te trachten nu ook deze functies geheel of in een bepaald interval — te definieeren. Inplaats van een terugwijzen van de wiskunde, moet dit argument leiden tot een betoog voor de noodzakelijkheid om naar de correlatierekening (de z.g. wiskundige statistiek) te grijpen, teneinde ons mathematisch onderzoek meer volkomen te maken. De correlatierekening n.l. is een wiskundige toepassing in de statistiek, die het ons mogelijk maakt om uit een voldoende groot aantal waarnemingen allerlei z.g. onbekende functies met een groote mate van nauwkeurigheid te benaderen. M.a.w. het geopperd bezwaar moet leiden tot een perfectionneeren van de wiskundige analyse, niet tot een terugwijzen ervan.

Een tweede overweging is, tot welke conclusies men zou komen <sup>1)</sup> als het wiskundig onderzoek nu eens zou uitwijzen, dat de theorie met functies werkt, die ook van geval tot geval op geen enkele manier zouden zijn te bepalen? Dan zou dit ook niets tegen het wiskundig onderzoek als zoodanig bewijzen. Integendeel, de wiskunde zou dan immers aantoonen, dat in de economie slechts van geheel incidenteele gevallen sprake is en dat generaliseerende wetenschap of zelfs een algemeene methode van onderzoek onmogelijk is. Bovendien stellen wij vast, dat als het werkelijk waar is, dat de wiskundige analyse steriel is omdat onze functies onbepaalbaar zijn, dan ditzelfde in precies dezelfde mate tegen de niet-wiskundige analyse geldt, want ook zij werkt dan met ondefinieerbare functies. Het merkwaardige is nu, dat men volhoudt dat de wiskundige analyse steriel is op grond van de ondefinieerbaarheid van de functies, terwijl men tezelfder tijd met allerlei woordredeneeringen, die men over deze ondefinieerbare functies opzet, denkt belangrijke resultaten te verkrijgen. Dit moge voldoende zijn om aan te toonen, hoe weinig doordacht de critiek zich soms ten aanzien van de wiskundige methode gedraagt.”

In het kort geresumeerd komt de kwestie dus hier op neer, dat als het waar zou zijn, dat de mathematische economische analyse uithoofde van de onbepaaldbaarheid van de functies tot steriliteit is gedoemd, dat dan evenzoo geldt voor ieder theoretisch economisch onderzoek, dat zich met dezelfde functioneële betrekking bezig houdt, een conclusie, waarmee wij ons volkomen kunnen vereenigen.

Gaan wij thans over tot een bespreking van de hoofdstukken V, VI en VII. Hoofdstuk V bevat in hoofdzaak toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening. Hoofdstuk VI geeft een toepassing van de theorie der determinanten,

<sup>1)</sup> Hier zijn door ons zes woorden ingelascht, die bij K. ontbreken. Het woordje „dat” is door ons weggelaten.

hoofdstuk VII laat zien, van welk belang de kansrekening is, speciaal voor diverse problemen uit de bedrijfseconomie. Het zou de grenzen van een boekbespreking verre overschrijden, indien wij ten aanzien van elk der in deze drie hoofdstukken ter sprake gebrachte problemen in een beschouwing zouden treden van de wijze, waarop deze onder toepassing van de wiskunde door K. worden behandeld. Met een relatief kort overzicht, hier en daar voorzien van enkele opmerkingen, meenen wij te kunnen volstaan.

K. vangt zijn beschouwingen aan met een nadere behandeling van de reeds in hoofdstuk III ter sprake gebrachte vraagcurve en het daarbij ontwikkelde begrip van elasticiteitscoëfficiënt. Deze beschouwing knoopt hij vast aan *Cournot's* behandelingswijze van de vraag, wanneer het product van prijs en kwantum, door *Cournot* voorgesteld door  $pq$ , waarbij  $q = F(p)$ , een maximumwaarde verkrijgt. Daarvoor is het noodig, dat

$$F(p) + pF'(p) = 0$$

K. laat nu zien, dat deze voorwaarde identiek is met

$$-\frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp} = 1$$

zoodat *Cournot's* conclusie feitelijk neerkomt op de stelling, dat bedoeld maximum bereikt wordt in het punt van de  $q$ -kromme, waarvoor de elasticiteitscoëfficiënt gelijk is aan 1. Daarna gaat K. over tot een nadere behandeling van de vraagcurve in den vorm  $p = F(q)$ . In tegenstelling met de wijze, waarop K. in het verdere gedeelte van zijn boek verschillende problemen behandelt en waarbij hij ook door zijn beknoptheid meermalen zeer hoge eischen stelt aan het intellect van den lezer, betracht hij in dit eerste gedeelte een buitengewone uitvoerigheid, waarbij hij zelfs hier en daar in o.i. onnoodige herhalingen treedt. Uiteindelijk moet hij zich (zie voorlaatste alinea op pag. 55) om aan te toonen, dat op iedere normale vraagcurve een punt ligt, waarvoor de elasticiteitscoëfficiënt gelijk is aan 1, toch nog beroepen op de eenvoudige redeneering, waarmede *Cournot* aantoot, dat  $pq$  altijd ergens op de kromme een maximum bezit (zie pag. 52 bovenaan).

Tot slot licht K. een en ander met een eenvoudig getallen-voorbeeld toe.

Daarna merkt hij op, dat het gebruik van de elasticiteitscoëfficiënt een middel is om een stuk van de theorie der monopolieprijzen te behandelen op vrij wat exacter wijze dan dit geschiedt zonder gebruik te maken van de wiskunde. Verwaarloost namelijk de monopolist in zijn berekening den invloed van de productiekosten dan stelt hij den prijs vast op dat punt van de vraagcurve, waar  $\eta = 1$ ,<sup>1)</sup> m.a.w. op het punt, waar de elasticiteitscoëfficiënt = 1.

Na de mathematische behandeling van de vraagcurve volgt een uitvoerige kritiek van de wijze, waarop *von Wieser* (één der auteurs, die in beginsel afwijzend staan tegenover de mathematische analyse) in zijn „Theorie der gesellschaftlichen Wirtschaft” en *Wolfgang Heller* in zijn „Theoretische Volkswirtschaftslehre” het probleem van de vraagcurve behandelen. De naar het oordeel van K. in verschillende opzichten aanvechtbare conclusies, waartoe deze auteurs komen, worden door K. onder meer toegeschreven aan het ontbreken eener wiskundige scholing bij deze auteurs. Ook uit anderen hoofde oppert hij tegen hun beschouwingen verschillende bezwaren, waarop wij hier niet nader zullen ingaan. Het lijkt ons echter toe, dat dit gedeelte van zijn dissertatie voor de opponenten, die bij zijn promotie tegenwoordig zijn geweest, een zeer

vruchtbaar terrein zal hebben gevormd voor het opperen van bezwaren, ook al is K.'s kritiek o.i. in zekeren zin inderdaad gemotiveerd.

Op de behandeling van het probleem van de vraagcurve volgt een korte beschouwing, waarin K. tracht aan te toonen, dat de techniek van het proces van de prijsvorming beter beschreven kan worden met behulp van de wiskunde dan zonder deze. Van principieel belang is dit stukje van de dissertatie niet. Wij willen slechts één opmerking maken over het slot van dit gedeelte (zie pag. 69), waarin hij drie voordeelen opsomt, die volgens hem de wiskundige methode heeft boven de gebruikelijke. Deze opmerking betreft het door K. genoemde derde voordeel, het vermijden van bewijzen uit het ongerijmde, waartoe de niet-wiskundige analyse, (zulks in tegenstelling met de wiskundige methode)<sup>1)</sup> vaak haar toevlucht neemt.

Wij hopen, dat de eerbied, die K. vrijwel in zijn geheele dissertatie aan den dag legt voor de mathematica, er niet op zal verminderen, indien wij hier stipuleeren, dat ook de wiskunde (en zelfs op zeer groote schaal) gebruik maakt van bewijzen uit het ongerijmde. Wij willen daaraan toevoegen, dat een bewijs uit het ongerijmde op zichzelf in strengheid absoluut niet behoeft achter te staan bij een direct bewijs. Om deze reden had de vermelding van dit „voordeel” o.i. beter achterwege kunnen blijven.

Vervolgens laat K. zien, dat de invoering van het begrip elasticiteitscoëfficiënt ook de gelegenheid opent om het verschil tusschen productie onder afnemende en productie onder toenemende kosten op eenvoudige wijze te formuleeren. Hij doet dit als volgt:

„Al naar mate de elasticiteitscoëfficiënt van de totale kostencurve grooter of kleiner is dan 1, heeft men te doen met productie onder afnemende of toenemende kosten”.

Wij hebben ons afgevraagd of het niet beter ware geweest hier niet van „totale” kostencurve te spreken, maar over „een interval”. Het kan zijn, dat wij aan deze formulering een andere betekenis hebben gehecht dan K. bedoelt, maar in het algemeen ziet men toch het verschijnsel, dat de productie in een bepaald interval geschiedt met afnemende kosten en verder op in de curve, althans voorloopig, overgaat in een productie met toenemende kosten (geval van overbezetting). Beginnende met een productie 0 is de elasticiteitscoëfficiënt dan eerst  $< 1$ , neemt in een bepaald punt de waarde 1 aan en wordt bij verdere vergroting van de productie  $> 1$ . Een nadere toelichting en uitwerking ware hier o.i. op haar plaats geweest.

Op pag. 72 en v.v. geeft K. een bewijs van de wet van *Pareto*, waarbij hij op zeer geslaagde wijze gebruik maakt van het begrip elasticiteitscoëfficiënt. Tot opmerkingen geeft ons dit gedeelte geen aanleiding.

Vervolgens laat hij zien, dat de Nederlandsche mathematicus *Daniel Bernouilli*, in het jaar 1700 in Groningen geboren, feitelijk reeds de eerste wet van *Gossen* heeft ontdekt. Het merkwaardigste daarbij is, dat *Bernouilli* hiertoe gekomen is, toen hij zich zette aan een bestudeering van een geheel ander, zuiver wiskundig probleem. *Bernouilli* onderzocht de juistheid van de tot zijn tijd geldende berekening, volgens welke de waarde van een kans op het winnen van geld gevonden zou worden door ieder van de te winnen bedragen te vermenigvuldigen met het aantal keeren, dat ieder bedrag gewonnen kan worden en deze som te deelen door het totaal van alle mogelijke winstgevallen. Dit onderzoek leidde *Bernouilli* tot de conclusie, dat de waarde van een verworven som geld, behalve van de absolute grootte van het gewonnen bedrag, ook af-

<sup>1)</sup> K. geeft nog een meetkundige interpretatie van deze stelling, waarin echter een zinstorende omissie is geslopen. In regel 3 van deze interpretatie staat namelijk: „Projectie van het raakpunt”, hetgeen moet zijn projectie van de abscis van het raakpunt. De projectie van het raakpunt is uit den aard der zaak een punt en dus nul.

<sup>1)</sup> De tusschen haakjes geplaatste woorden zijn door ons duidelijkheids-halve ingelascht.

hangt van de grootte van het reeds aanwezige vermogen en wel in dien zin, dat deze waarde kleiner is naarmate het reeds aanwezige vermogen grooter was, een conclusie, die volkomen parallel loopt met de eerste wet van Gossen. De verdere beschouwingen over het onderzoek van Bernouilli meenen wij hier achterwege te kunnen laten.

De pagina's 80 tot en met 89 zijn gewijd aan het probleem, dat wij kortheidshalve aanduiden met de uitdrukking „opslag voor indirecte kosten”. Hiermede betreedt K. het terrein van de bedrijfseconomie. Uitvoerig wordt aandacht gewijd aan de indeeling, die Schmalenbach geeft in proportionele, degressieve en progressieve kosten. K. toont nu aan, dat de kosten-calculation van Schmalenbach niet leidt tot resultaten, die worden bepaald door het werkelijke verloop van de kosten, maar door de toevallige wijze, waarop men de calculation opzet. Verder laat hij zien, dat dezelfde fouten gemaakt zijn door A. E. C. van Saarloos in zijn bewerkingen van het boek van K. G. Simon, *Kostprijsberekening en Administratieve Fabrieksorganisatie*. Dit gedeelte van K.'s dissertatie is ook voor accountants van groot belang.

Hoofdstuk V wordt besloten met een uitvoerige bespreking van het in 1889 verschenen proefschrift van A. J. Cohen Stuart getiteld: „*Bijdrage tot de theorie der progressieve inkomstenbelasting*”. K. heeft hier ons inziens een zeer gelukkige keuze gedaan, wat betreft de door hem in zijn dissertatie behandelde onderwerpen, door den hoofdinhoud van Cohen Stuart's boek daarin op te nemen. Indien iemand nog niet mocht overtuigd zijn geweest van het nut, dat de toepassing der wiskunde kan opleveren voor het oplossen van economische problemen, dan is er inderdaad kans, dat hij na lezing van dit gedeelte bekeerd zal zijn. Bijzonder trof ons ook het citaat uit een artikel van Pierson over progressieve inkomstenbelasting, voorkomende in de Gids van Februari 1888, welk citaat als volgt luidt:

„Gelijkheid van offers is in geen geval te verkrijgen, zelfs dan niet, wanneer de belasting op niemand wordt overgedragen. Doch men verkrijgt haar zeker niet door een gelijk percentage; de progressieve wet van heffing is een middel om haar meer nabij te komen.

Dit althans is tot dusver mijn overtuiging gebleven; een overtuiging echter, ik mag het niet verheelen, waar gewichtige bedenkingen tegenover staan en die ik niet anders durf voordragen dan als een voorloopige uitkomst.

Er schuilt in deze kwestie een ingewikkeld wiskundig probleem. Ik hoop, dat één onzer mathematici het eens ter hand zal nemen; <sup>1)</sup> het zou mogelijk zijn, dat de slotsom van het onderzoek grooten invloed had op onze beschouwingen.”

Hoofdstuk VI geeft een toepassing op het gebied der determinantentheorie. In het reeds vroeger geciteerde werk van Cournot vindt men in hoofdstuk III een analyse van het evenwicht der wisselkoersen. Cournot onderzoekt namelijk het verband, dat er bestaat tussen alle wisselkoersen van de landen, die met elkaar in handelsverkeer zijn getreden en de saldi, die betalingsbalansen van die landen onderling vertoonen. Ten tijde van Cournot bestonden nog geen publicaties over de leer der determinanten. K. geeft nu in zijn dissertatie een behandeling van het zoeven genoemde probleem over het verband tusschen de wisselkoersen, waarbij hij van de leer der determinanten, die sinds jaren algemeen goed is geworden van alle wiskundigen, een dankbaar gebruik maakt. Hij is daardoor in de gelegenheid geweest de door Cournot verkregen resultaten in een algemeen vorm te gieten, terwijl Cournot zich heeft bepaald tot het geval van drie wisselkoersen. Ook dit hoofdstuk vormt o.i. één van de zeer fraaie gedeelten van K.'s dissertatie.

<sup>1)</sup> Cursiveering van ons.

Hoofdstuk VII geeft toepassingen op het gebied van de kansrekening. Eerst houdt K. zich bezig met de theorie van den kostprijs in het algemeen. Daarna met de theorie van het verbijzonderen van de indirecte kosten. Zijn bedoeling is daarbij geweest om met behulp van de theorie van de Gauss' curve eenig nieuw theoretisch inzicht in het proces van de prijsvorming te geven en vervolgens met behulp van mathematisch-statistische analyse dit inzicht toe te passen op beschikbaar cijfermateriaal en daaruit nieuwe conclusies te trekken. Rechtstreeks sluiten hierbij aan het eerste en tweede aanhangsel opgenomen in Hoofdstuk IX, waarvan het eerste de grondbeginselen van de kansrekening bevat, terwijl het tweede, dat niet minder dan veertig bladzijden van de dissertatie in beslag neemt, daaromtrent uitgebreidere wiskundige beschouwingen geeft, waarin de Gauss'-curve de hoofdrol speelt. Deze aanhangsels maken derhalve geen integreerend deel van de dissertatie uit en kunnen om die reden hier verder buiten beschouwing blijven.

Behalve de twee zoeven genoemde onderwerpen, in het tweede waarvan een toepassing wordt gegeven van de correlatie-rekening, worden nog verdere gevallen vermeld van correlaties in de economie, terwijl tenslotte het onderwerp steekproeven wordt behandeld. Tot deze globale opsomming meenen wij ons hier te kunnen beperken.

Wij willen thans alleen nog iets zeggen omtrent den inhoud van hoofdstuk VIII, dat tot titel draagt: *Samenvatting der verkregen resultaten en iets over de grenzen van de wiskundige methode*. De hoofdinhoud van dit hoofdstuk komt hierop neer, dat K. aan de hand van de in hoofdstuk V, VI en VII uitgewerkte problemen nogmaals naar voren brengt, dat de wiskunde toepassing kan vinden op de meest verschillende onderdeelen van de economie en deze toepassing er in elk geval toe leidt deze problemen op een veel exacter wijze te stellen dan in de niet-mathematische economie vaak het geval is. Daarnaast memoreert hij nogmaals, dat de wiskunde wel waarde heeft als middel om de oorzakelijke analyse te vergemakkelijken en ook in formeel opzicht te completeeren, maar dat zij daarvoor nooit geheel in de plaats zal kunnen treden.

Hierbij meenen wij het te moeten laten. Wij willen echter niet eindigen zonder onze groote waardeering te hebben uitgesproken voor de prestaties, die de Heer Kleerekooper met de samenstelling van zijn dissertatie heeft geleverd. Met de keuze van zijn onderwerp, die hem dwong na de voltooiing van zijn studie van de economie, nog een grondige studie te maken van verschillende onderdeelen der wiskunde, heeft hij het zich niet gemakkelijk gemaakt. Voor de wijze, waarop hij de zich zelf opgelegde zware taak heeft ten einde gebracht, past hier ongetwijfeld een welgemeend *proficiat*.

M. VAN OVEREEM

---

## RIJKSACCOUNTANTS DIENST

---

### Examen-vraagstukken contrôle-leer

DINSDAG, 28 NOVEMBER 1939

9—12 uur

De N.V. „Bouwlust”, gevestigd te X, houdt zich bezig met de aan-neming van woningbouw, alsmede met den aankoop van gronden om daarop zelf woningen te stichten, met het doel deze te verkoopen.

Het betreft in den regel het bouwen van woningcomplexen in verschillende steden des lands. Daarnaast komt ook voor het bouwen van afzonderlijke woningen als villa's, winkelpanden enz.

De materialen worden centraal ingekocht en als regel worden deze door de leveranciers rechtstreeks naar de betrokken werken verzonden.

Voor den bouw der woningen zijn een aantal uitvoerders in dienst, die ter plaatse de noodige werklieden aannemen, nadat daartoe machtiging van de directie is verkregen. De werklieden werken op uurloon.