Der Erwartungswert bei symmetrischen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

Harald Schröer

2019

Wir setzen eine beim Punkt a symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion f(a+x)=f(a-x) (für x aus den reellen Zahlen) voraus. Wir bilden den Erwartungswert:

$a \in R$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x \cdot f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Nun führen wir für das erste Integral die Substitution a-x und für das zweite Integral die Substitution a+x ein. Nach der Substitutionsregel ergibt sich:

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} (a-x) \cdot f(a-x)\,dx + \int_{0}^{\infty} (a+x) \cdot f(a+x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left[(a+x) \cdot f(a+x) + (a-x) \cdot f(a-x) \right] dx$$

Nun nutzen wir die Symmetrie f(a+x)=f(a-x):

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} \left[(a+x) \cdot f(a+x) + (a-x) \cdot f(a+x) \right] dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} f(a+x) \cdot (a+x+a-x)\,dx$$

$$E(x) = \int_0^\infty 2a \cdot f(a+x)\,dx = 2 \cdot a \cdot \int_0^\infty f(a+x)\,dx$$

$$E(x) = 2 \cdot a \cdot \int_0^\infty f(a+x)\,dx$$

* Das Integral hat wegen f(a+x)=f(a-x) den Wert ½. Also rechnen wir weiter:

$$E(x) = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} = a$$

Wir haben also E(x)=a q.e.d.

* WEIL $f(x)$ WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTEFUNKTION IST.