Mathematik für Anwender

Nicolas Neuß
Institut für Angewandte Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Cauerstraße 11, 91058 Erlangen
neuss@am.uni-erlangen.de

© 2008–
Die Verwendung und Weitergabe dieses Skripts mit Ausnahme der Bilder an den Kapitelanfängen ist unter den Bedingungen der GNU Free Documentation License, Version 1.3 oder jeder neueren Version, erlaubt.

Erstellt: 7. Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

Einführung **i**
1. Was ist Mathematik i

I. Grundlagen 1

1. Logik **3**
1.1. Aussagen 3
1.2. Negation, Konjunktion und Disjunktion 3
1.3. Implikation und Äquivalenz 4
1.4. Aussageformen 6
1.5. Quantoren 7
1.6. Mathematisches Beweisen 8
1.7. Übungsaufgaben 10

2. Mengen **11**
2.1. Grundbegriffe 11
2.1.1. Definition 11
2.1.2. Gleichheit von Mengen 12
2.1.3. Teilmengen 13
2.2. Mengenverknüpfungen 14
2.3. Fundamentale Probleme 16
2.4. Übungsaufgaben 17

3. Funktionen **19**
3.1. Gleichheit von Funktionen 20
3.2. Injektivität und Surjektivität 21
3.3. Umkehrfunktion 23
3.4. Komposition 24
3.5. Elementare reellwertige Funktionen 25
3.6. Funktionen mehrerer Parameter 27
3.7. Relationen 28
3.8. Fortgeschrittener Gebrauch von Funktionen 29
3.9. Übungsaufgaben 30

II. Zahlen 31

4. Natürliche Zahlen 33
4.1. Peano-Axiome . . . 33
4.2. Arithmetische Operationen . . . 34
4.2.1. Addition . . . 34
4.2.2. Multiplikation . . . 34
4.2.3. Ordnung . . . 35
4.3. Natürliche Zahlen mit Null . . . 36
4.4. Vollständige Induktion . . . 36
4.4.1. Beispiel: Summation . . . 37
4.4.2. Variationen und Verallgemeinerungen . . . 38
4.4.3. Rekursive Funktionsdefinition . . . 38
4.4.4. Beispiel: Teilmengen . . . 40

5. Einschub: Gruppen und Kombinatorik 43
5.1. Gruppen . . . 43
5.2. Selbstabbildungen . . . 44
5.3. Permutationen . . . 45
5.4. Anwendungen in der Kombinatorik . . . 47

6. Ganze und rationale Zahlen 49
6.1. Ganze Zahlen . . . 49
6.2. Rationale Zahlen . . . 50
6.3. Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen . . . 51
6.4. Kürzen, ggT und Euklidischer Algorithmus . . . 52
6.5. Körper . . . 55
6.6. Restklassenarithmetik . . . 57
6.7. Ganzzahlen im Computer . . . 60
6.8. Inversion im Restklassenring . . . 60
6.9. Kryptographie . . . 62

7. Reelle Zahlen 65
7.1. Motivation . . . 65
7.2. g-adische Darstellung . . . 65
7.2.1. Darstellung ganzer Zahlen . . . 65
7.2.2. g-adische Darstellung von Brüchen . . . 67
7.2.3. Unendliche g-adische Entwicklung . . . 68
7.3. Konstruktion der reellen Zahlen . . . 69
7.4. Vollständigkeit . . . 69
7.5. Ordnungsrelationen . . . 70

8. Komplexe Zahlen 73
8.1. Konstruktion . . . 73

8.2. Konjugation und Absolutbetrag . . . 74
8.3. Polarkoordinaten . . . 75
8.3.1. Multiplikation in Polarkoordinaten . . . 76
8.3.2. Potenzen . . . 77
8.4. Die komplexe Exponentialfunktion . . . 78
8.4.1. Definition . . . 78
8.4.2. Beziehungen zwischen exp, sin und cos . . . 79
8.4.3. Der komplexe Logarithmus . . . 80
8.5. Polynome . . . 81
8.5.1. Definition . . . 81
8.5.2. Polynomdivision . . . 81
8.5.3. Nullstellen . . . 82
8.5.4. Explizite Nullstellenformeln . . . 83
8.5.5. Reelle Polynome . . . 84
8.6. Anwendungen . . . 85
8.6.1. Federpendel . . . 85
8.6.2. LR-Wechselstromkreis . . . 86
8.7. Noch mehr Zahlen? . . . 87

9. Unendlichkeit **89**
9.1. Hilberts Hotel . . . 89
9.2. Mächtigkeit . . . 90
9.3. Die Mächtigkeit der Zahlenmengen . . . 91
9.4. Kontinuumshypothese . . . 91

III. Lineare Algebra **93**

10. Vektorräume und lineare Abbildungen **97**
10.1. Vektorräume . . . 97
10.2. Lineare Abbildungen . . . 101
10.3. Verkettung und Inversion . . . 103

11. Endlich-dimensionale lineare Algebra **105**
11.1. Grundbegriffe . . . 105
11.1.1. Lineare Abhängigkeit . . . 105
11.1.2. Erzeugendensystem und Basis . . . 107
11.1.3. Die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$ . . . 109
11.1.4. Basiswahl . . . 110
11.2. Lineare Abbildungen in Euklidischen Räumen . . . 111
11.3. Lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^2$ . . . 112
11.4. Multiplikation von Matrizen . . . 113
11.5. Einschub: Die lineare Gruppe . . . 117

12. Matrixinversion und Lösung linearer Gleichungssysteme 119
12.1. Formeln für A^{-1} . . . 119
12.2. Lineare Gleichungssysteme . . . 119
12.3. Gaußsches Eliminationsverfahren . . . 120
12.4. Matrixinterpretation des Verfahrens . . . 123
12.5. Gauß-Jordan-Verfahren . . . 125
12.6. Allgemeine lineare Gleichungssysteme . . . 126
12.7. Kern und Bild allgemein . . . 129

13. Determinanten 131
13.1. Definition . . . 131
13.2. Das Vorzeichen von Permutationen . . . 133
13.3. Die Determinante linearer Abbildungen . . . 136
13.4. Die Determinante von Matrizen . . . 137
13.5. Berechnung von Determinanten . . . 138
13.6. Determinante und Gleichungssysteme . . . 141

14. Eigenwertprobleme 143
14.1. Motivation . . . 143
14.2. Eigenwertprobleme . . . 143
14.3. Berechnung von Eigenräumen . . . 146
14.4. Reelle und komplexe Eigenwerte . . . 147
14.5. Diagonalisierbarkeit . . . 148
14.6. Anwendung: Trägheitstensor . . . 152
14.7. Anwendung: Fibonacci-Zahlen . . . 153
14.8. Anwendung: Page-Rank . . . 155

15. Skalar- und Vektorprodukt 157
15.1. Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ . . . 157
15.1.1. Definition . . . 157
15.1.2. Eigenschaften . . . 157
15.1.3. Euklidische Norm . . . 158
15.1.4. Winkel zwischen Vektoren . . . 159
15.1.5. Orthogonalität . . . 160
15.1.6. Orthogonalisierung . . . 162
15.2. Lineare Abbildungen und Skalarprodukt . . . 164
15.2.1. Orthogonale Matrizen . . . 164
15.2.2. Symmetrische Matrizen . . . 165
15.2.3. Nachtrag . . . 166
15.3. Das Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ . . . 167
15.3.1. Definition und Eigenschaften . . . 167
15.3.2. Die Adjungierte . . . 168
15.3.3. Unitäre Matrizen . . . 168
15.3.4. Hermitesche/selbstadjungierte Matrizen . . . 169

15.4. Vektorprodukt . . . 170
15.4.1. Konstruktion . . . 170
15.4.2. Vektorprodukt und Skalarprodukt . . . 171
15.4.3. Anwendungen . . . 172
15.4.4. Äußeres Produkt . . . 172

IV. Topologie **173**

16. Metriken, Normen und Skalarprodukte **177**
16.1. Metriken . . . 177
16.2. Normen . . . 179
16.3. Skalarprodukte . . . 180

17. Folgen und Reihen **185**
17.1. Folgen . . . 185
17.1.1. Definition . . . 185
17.1.2. Konvergenz . . . 186
17.1.3. Häufungspunkte . . . 189
17.1.4. Teilfolgen . . . 190
17.1.5. Vollständigkeit . . . 191
17.2. Folgen in $\mathbb{R}$ . . . 194
17.2.1. Rechenregeln für Grenzwerte . . . 194
17.2.2. Monotone und beschränkte Folgen . . . 197
17.2.3. Uneigentliche Konvergenz . . . 200
17.2.4. Supremum und Infimum . . . 200
17.2.5. Limes superior und Limes inferior . . . 202
17.3. Reihen . . . 203
17.3.1. Definition und Beispiele . . . 203
17.3.2. Konvergenzkriterien: Einleitung . . . 206
17.3.3. Absolute Konvergenz . . . 207
17.3.4. Divergenz von Reihen . . . 208
17.3.5. Bedingte Konvergenz . . . 209
17.3.6. Rechenregeln für Reihen . . . 212
17.4. Potenzreihen . . . 213

18. Stetigkeit **219**
18.1. Motivation . . . 219
18.2. Stetigkeitsdefinition mit Folgen und Beispiele . . . 221
18.3. Stetigkeitsdefinition mit Umgebungen . . . 223
18.4. Verkettung stetiger Funktionen . . . 226
18.5. Umkehrfunktion . . . 226
18.6. Topologische Grundbegriffe . . . 227
18.6.1. Offene Mengen . . . 227

18.6.2. Abgeschlossene Mengen . . . 228
18.6.3. Beziehung offen/abgeschlossen . . . 229
18.6.4. Rand . . . 230
18.6.5. Beziehung zur Stetigkeit . . . 231
18.6.6. Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen . . . 232
18.6.7. Kompakte Mengen . . . 233
18.7. Der „eindimensionale“ Fall . . . 237
18.8. Stetigkeit im mehrdimensionalen Fall . . . 240
18.8.1. Normäquivalenz . . . 240
18.8.2. Folgerungen . . . 242
18.8.3. Komponentenweise Stetigkeitsanalyse . . . 242
18.8.4. Arithmetik mit stetigen Funktionen . . . 244
18.9. Räume stetiger Funktionen . . . 245
18.10Philosophisches . . . 246

V. Analysis 247

19. Differentialrechnung 249
19.1. Eindimensionale Differentialrechnung . . . 249
19.1.1. Die Ableitung . . . 249
19.1.2. Rechenregeln und weitere Beispiele . . . 252
19.1.3. Stetige Differenzierbarkeit . . . 256
19.1.4. Mehrfache Differenzierbareit . . . 257
19.1.5. Extremalpunkte . . . 258
19.1.6. Mittelwertsatz . . . 260
19.1.7. Die Regel von l'Hospital . . . 262
19.1.8. Taylorentwicklung . . . 264
19.1.9. Das eindimensionale Newton-Verfahren . . . 268
19.2. Mehrdimensionale Differentialrechnung . . . 270
19.2.1. Motivation . . . 270
19.2.2. Definition der mehrdimensionalen Ableitung . . . 271
19.2.3. Partielle Ableitungen . . . 273
19.2.4. Mehrdimensionale Kettenregel . . . 276
19.2.5. Ableitung von Summe und Skalierung . . . 277
19.2.6. Das mehrdimensionale Newton-Verfahren . . . 277
19.2.7. Lokale Umkehrfunktion . . . 278
19.2.8. Höhere Ableitungen und mehrdimensionale Taylorformel . . . 279
19.2.9. Implizit definierte Funktionen . . . 282
19.2.10Reellwertige Funktionen . . . 285
19.2.11Extrema reellwertiger Funktionen . . . 286
19.2.12Extrema unter Nebenbedingungen . . . 288
19.2.13Produktregel . . . 292
19.2.14Kurven . . . 293

20. Eindimensionale Integralrechnung **295**
20.1. Das Riemann-Integral . . . 295
20.1.1. Konstruktion . . . 295
20.1.2. Eigenschaften . . . 298
20.1.3. Einschub: Gleichmäßige Stetigkeit . . . 299
20.1.4. $\mathcal{R}$-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen . . . 299
20.1.5. $\mathcal{R}$-Integrierbarkeit von differenzierbaren Funktionen . . . 300
20.2. Integral und Stammfunktionen . . . 302
20.2.1. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) . . . 302
20.3. Integrationstechniken . . . 303
20.3.1. Bekannte Stammfunktionen . . . 303
20.3.2. Linearität der Integration . . . 304
20.3.3. Partielle Integration . . . 305
20.3.4. Partialbruchzerlegung . . . 308
20.3.5. Schwierigkeiten und Grenzen der exakten Integration . . . 310
20.4. Erweiterungen . . . 310
20.4.1. Uneigentliche Integrale . . . 310
20.4.2. Beziehung zur Summation . . . 312
20.4.3. Ableitung nach Parametern . . . 313
20.4.4. Vektorwertige Integration . . . 314

21. Gewöhnliche Differentialgleichungen **317**
21.1. Grundlagen . . . 317
21.1.1. Definition . . . 317
21.1.2. Lineare und autonome ODEs . . . 319
21.1.3. Ein (nichtlineares) Beispiel aus der Biologie . . . 320
21.1.4. Ein (nichtlineares) Beispiel aus der Physik . . . 320
21.1.5. Eine Anwendung in der Chemie . . . 321
21.1.6. Lokale Lösungstheorie . . . 322
21.1.7. Ein einfaches numerisches Lösungsverfahren . . . 326
21.1.8. Geometrische Veranschaulichung . . . 327
21.2. Die Lösung ausgewählter gewöhnlicher Differentialgleichungen . . . 329
21.2.1. Separable ODEs . . . 330
21.2.2. Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen . . . 332
21.3. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 333
21.3.1. Der skalare Fall . . . 333
21.3.2. Beispiel . . . 335
21.3.3. Lineare Systeme . . . 337
21.3.4. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . 341
21.3.5. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . 343
21.3.6. Anwendungsbeispiel: RLC-Stromkreis . . . 347
21.4. Stabilität und globale Existenz . . . 348
21.4.1. Das Gronwall-Lemma . . . 349
21.4.2. Globale Existenz von Lösungen . . . 349

21.4.3. Variation des Anfangswerts . . . 350
21.4.4. Ableitung nach dem Anfangswert . . . 351
21.5. Stationäre Punkte und Stabilität . . . 353

22. Mehrdimensionale Integralrechnung 357
22.1. Mehrdimensionale Riemann-Integration . . . 357
22.1.1. Mehrdimensionale Intervalle und Gitter . . . 357
22.1.2. Der Satz von Fubini . . . 361
22.1.3. Integration auf allgemeineren Gebieten . . . 363
22.1.4. Beziehung zum Rand . . . 367
22.2. Der Transformationssatz . . . 368
22.2.1. Einführung . . . 368
22.2.2. Der Transformationssatz . . . 369
22.2.3. Anwendung: Polarkoordinaten . . . 370
22.2.4. Anwendung: Zylinderkoordinaten . . . 371
22.2.5. Anwendung: Kugelkoordinaten . . . 372
22.3. Kurvenintegrale . . . 373
22.3.1. Kurven . . . 373
22.3.2. Umparametrisierungen . . . 375
22.3.3. Kurvenintegrale 1. Art . . . 378
22.3.4. Kurvenintegral 2. Art . . . 380
22.3.5. Eigenschaften der Kurvenintegrale . . . 381
22.3.6. Kurvenintegral, Potential und Gradient . . . 382
22.4. Flächenintegrale . . . 386
22.4.1. Volumenberechnung k-dimensionaler Parallelotope . . . 386
22.4.2. Flächenintegrale 1. Art . . . 388
22.4.3. Motivation orientierter Flächenintegrale . . . 391
22.4.4. Hyperebenen, Normalen und Kreuzprodukt . . . 391
22.4.5. Normalenvektoren von Hyperflächen . . . 393
22.4.6. Flächenintegrale 2. Art . . . 394
22.4.7. Eigenschaften der Flächenintegrale . . . 395
22.5. Integralsätze . . . 396
22.5.1. Motivation . . . 396
22.5.2. Der HDI im $\mathbb{R}^n$ . . . 397
22.5.3. Der Gaußsche Integralsatz . . . 398
22.5.4. Der Greensche Integralsatz . . . 399
22.5.5. Der Satz von Stokes . . . 401
22.5.6. Ausblick: Differentialformen . . . 402

23. Funktionentheorie 405
23.1. Einführung . . . 405
23.1.1. Erinnerung . . . 405
23.1.2. Abbildungen in $\mathbb{C}$ . . . 407
23.1.3. Stetigkeit . . . 408

23.1.4. Differenzierbarkeit . . . 408
23.2. Komplexe Kurvenintegrale . . . 411
23.2.1. Homotopie von Kurven . . . 412
23.2.2. Kurvenintegrale und Homotopie von Kurven . . . 414
23.2.3. Stammfunktionen: Der HDI in $\mathbb{C}$ . . . 416
23.3. Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen . . . 417
23.4. Singularitäten . . . 419
23.4.1. Isolierte Singularitäten . . . 419
23.4.2. Laurent-Entwicklung . . . 420
23.4.3. Kurvenintegrale um isolierte Singularitäten . . . 421
23.5. Abschließende Bemerkungen . . . 423

VI. Stochastik **425**

24. Wahrscheinlichkeitstheorie **427**
24.1. Einführung . . . 427
24.2. Grundlagen . . . 428
24.2.1. Grundidee . . . 428
24.2.2. Maße und Wahrscheinlichkeitsräume . . . 430
24.2.3. Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . 432
24.2.4. Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume . . . 435
24.2.5. Beziehung zur Maßtheorie . . . 435
24.2.6. Etwas Zusatzwissen . . . 437
24.3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit . . . 438
24.3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 438
24.3.2. Unabhängigkeit . . . 440
24.3.3. Mehrstufige Zufallsexperimente . . . 441
24.4. Zufallsvariablen . . . 444
24.4.1. Motivation . . . 444
24.4.2. Definition . . . 445
24.4.3. Verteilung, Verteilungsfunktion, Verteilungsdichte . . . 447
24.5. Kenngrößen von Verteilungen . . . 451
24.5.1. Einführung . . . 451
24.5.2. Erwartungswert . . . 452
24.5.3. Varianz und Standardabweichung . . . 452
24.5.4. Integration von Zufallsvariablen . . . 453
24.5.5. Erwartungswert . . . 456
24.5.6. Varianz . . . 456
24.5.7. Diskretes Beispiel . . . 458
24.5.8. Kontinuierliches Beispiel . . . 459
24.5.9. Tschebyscheffsche Ungleichung . . . 459
24.6. Einige wichtige Verteilungen . . . 460
24.6.1. Diskrete Verteilungen . . . 460

24.6.2. Kontinuierliche Verteilungen . . . 463
24.7. Mehrdimensionale Zufallsvariablen . . . 466
24.7.1. Motivation . . . 466
24.7.2. Mehrdimensionale Verteilungen . . . 467
24.7.3. Beispiele mehrdimensionale Verteilungen . . . 471
24.7.4. Randverteilungen . . . 472
24.7.5. Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsvariablen . . . 473
24.7.6. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen . . . 474
24.7.7. Korrelation . . . 477
24.8. Grenzwertsätze . . . 478
24.8.1. Addition von Zufallsvariablen . . . 478
24.8.2. Gesetz der großen Zahlen . . . 479
24.8.3. Der zentrale Grenzwertsatz . . . 482
24.8.4. Zum Beweis des Grenzwertsatzes . . . 484
24.8.5. Ein Ausflug in die Statistik . . . 485

25. Stochastische Prozesse **489**
25.1. Motivation . . . 489
25.2. Grundlegende Definitionen . . . 491
25.2.1. Markov-Prozesse . . . 492
25.3. Parameter für stochastische Prozesse . . . 494
25.4. Stetigkeit im quadratischen Mittel . . . 495
25.5. Stationarität . . . 498
25.6. Nachtrag: Vektorwertige Prozesse und Kreuzkorrelation . . . 500
25.7. Ergodizität . . . 501

Epilog **505**

Index **507**

Einführung

1. Was ist Mathematik

Hierauf gibt es viele hehre Antworten wie etwa „Mathematik ist die Sprache in der Gott die Welt beschreibt“, „Mathematik ist die Königin der Wissenschaften“, . . . , aber auch Antworten wie „sauschwer“, „unbrauchbar“, . . .
Für mich gilt folgende Antwort:

> Mathematik ist gleichbedeutend mit angewandtem logischen Denken.

Begründung

- Die Gesamtheit der Mathematik lässt sich auf „Selbstverständlichkeiten“ zurückführen.
- Die Struktur der Mathematik ist wesentlich durch die Welt, in der wir leben und die Art und Weise, wie wir diese Welt verstehen, geprägt.

Warum ist Mathematik wichtig?

Die Wichtigkeit der Mathematik steigt mit dem Entwicklungsgrad der Zivilisation:

- Steinzeitmensch: etwas zählen
- Handel (insbesondere Einführung von Geld): Rechnen
- Höhere Architektur: Geometrie
- Verstehen und Kontrollieren physikalischer Phänomene: Gleichungen, Differentialgleichungen, etc
- Verstehen und Kontrollieren „hochkomplexer“ Phänomene: Statistiken, Wahrscheinlichkeiten, etc

Mathematik für uns

Ein ordentliches Verständnis der Mathematik ist heutzutage eine entscheidende Voraussetzung für eine verantwortliche Teilhabe am gesellschaftlichen Leben.

Beispiele

- Warum kann die Wirtschaft nicht mit drei Prozent dauerhaft wachsen?

  „Anyone who believes that exponential growth can go on forever in a finite world is either a madman or an economist."
  (K. E. Boulding, US-Ökonom, 1910-1993)

- Erkennen von Falschmeldungen in Zeitung/Fernsehen wie zum Beispiel:

  Der Euro hat in den letzten 8 Jahren gegenüber dem Dollar 80% an Wert gewonnen. Das sind 10% pro Jahr.

  oder

  Die Verschuldung der USA lag am 29.7.2016 bei 14 Trillionen US-Dollar.

- Erkennen (fast) inhaltsleerer „Aufregermeldungen" wie

  „Die 'Vuvuzela' ist doppelt so laut wie ein startendes Düsenflugzeug."

- Skepsis gegenüber Propaganda/Werbung

  „Journalism is printing what someone else does not want printed: everything else is public relations." (George Orwell)

- Verstehen wichtiger Zusammenhänge:
  - Warum ist die Erderwärmung riskant?
  - Warum sind Massenuntersuchungen auf irgendwelche Krankheiten problematisch?
  - Wie sollte man auf Terroranschläge reagieren?
  - Warum wollen/müssen Geheimdienste und Polizei Computersysteme hacken?
  - Wie funktioniert "Big Data"?
  - Wie können Gerichte auf derselben Gesetzesgrundlage zu unterschiedlichen Urteilen kommen?
  - Warum gibt es kein perfektes Wahlsystem?
  - Was ist problematisch an „Freihandel"?

1.1 Bemerkung: Für sämtliche Natur- und Ingenieurwissenschaften ist die Durchdringung mit Mathematik noch viel weitgehender als in den vorstehenden Beispielen, welche die gesamte Gesellschaft betreffen. Tatsächlich werden fast alle Bereiche der Mathematik innerhalb dieser Wissenschaften irgendwo angewendet, und umgekehrt gibt es kaum einen Bereich innerhalb dieser Wissenschaften, der ohne Mathematik auskommt!

Zu diesem Skript

Dieses Skript ist in folgende Teile gegliedert:

- Grundlagen (Logik, Mengenlehre, Funktionen)
- Zahlen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)
- Lineare Algebra
- Topologie
- Analysis
  - Differentialrechnung
  - Integralrechnung
  - Gewöhnliche Differentialgleichungen
  - Mehrdimensionale Integralrechnung
  - Funktionentheorie
- Stochastik

Wie man schon dieser Aufzählung ansieht, bauen die Teile wesentlich aufeinander auf. Wir folgen damit einer Tradition der Mathematik, keine Definitionen und Aussagen „vom Himmel fallen“ zu lassen. Ganz im Gegenteil hat in der Mathematik *jeder* neue Begriff eine Motivation und *jeder* neue Satz einen Beweis. Weil aber für Anwender der exakte Beweis oftmals nicht so wichtig ist, wurde in diesem Skript des öfteren mit Beweisskizzen vorliebgenommen.
Vor allem in den Teilen „Grundlagen“ und „Zahlen“, aber auch im Teil „Analysis“ wird dabei manches (hoffentlich!) schon aus der Schule bekannt sein. Dies kann zu der Meinung verführen, man könne die Vorlesung versäumen und den Stoff vor der Abschlussklausur leicht nachholen. Dies ist ein schwerwiegendes Missverständnis, weil der Abstraktionsgrad gegenüber dem Schulwissen viel höher ist. Anders ausgedrückt: Wem der Stoff zu leicht erscheint, der hat ihn nicht verstanden.
Der Besuch der zugehörigen Vorlesung ist auch deswegen wichtig, weil das Skript allein nur bedingt als Literaturempfehlung taugt. Dies liegt im wesentlichen an folgendem:

- Auf Bilder wurde fast gänzlich verzichtet, weil diese in der Vorlesung entweder an der Tafel oder durch Demonstrationen am Computer nachgeliefert werden.
- Die Darstellung ist sehr knapp gehalten, weil das Skript fast wortgleich auch für die Erzeugung von Vorlesungsfolien verwendet wird, bei denen das dargestellte ja durch den mündlichen Vortrag ergänzt wird.
- Beweise werden oft nur skizziert, einerseits weil für den Anwender vor allem das Ergebnis wichtig ist, andererseits aber auch, weil manche Beweise sowieso am sinnvollsten an der Tafel vorgeführt oder alternativ selbst mit Papier und Bleistift nachvollzogen werden sollten.

- Je nach Anwendungsgebiet können in der Vorlesung Teile des Skripts weggelassen oder in anderer Reihenfolge behandelt werden. Auch können die Sätze in einer Vorlesung durch den Dozenten je nach ihrer Bedeutung eingeordnet werden, was dem Lernenden durch bloßes Lesen des Skripts normalerweise nicht möglich ist.

Zuletzt möchte ich noch anfügen, dass dieses Skript natürlich auch im Laufe der Zeit wachsen und reifen soll. Ich bin daher für Hinweise auf Fehler und sonstige Anmerkungen und Anregungen sehr dankbar.

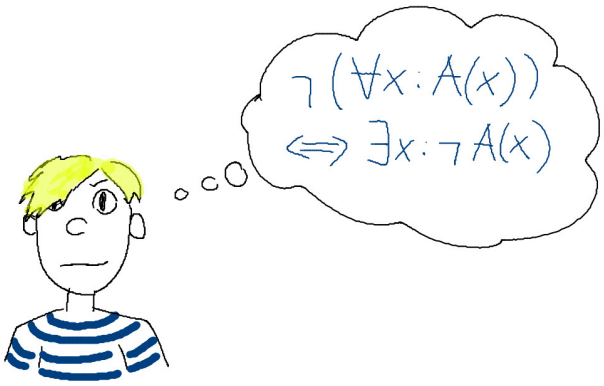
Danksagung

Ich möchte meiner Tochter Elisa für das Zeichnen von einigen einführenden Bildern am Anfang mancher Kapitel danken.

Teil I.

Grundlagen

1. Logik



1.1. Aussagen

1.1.1 Definition: Eine Aussage ist ein Satz, der entweder wahr oder falsch ist. Wenn A eine wahre Aussage ist, so sagen wir, dass A den Wahrheitswert $w(A) = 1$ hat. Analog hat eine falsche Aussage A den Wahrheitswert $w(A) = 0$.

1.1.2 Bezeichnung: Der Einfachheit halber schreibt man manchmal einfach $A = 1$ oder $A = 0$. Und statt 0 und 1 werden oft auch die Buchstaben f und w oder die Worte *falsch* und *wahr* verwendet.

Beispiele

- Es ist 12 Uhr mittags.
- $2 + 2 = 4$

1.2. Negation, Konjunktion und Disjunktion

1.2.1 Definition: A und B seien Aussagen. Dann können wir neue Aussagen mit Hilfe der Operatoren $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und) und $\vee$ (oder) definieren. Deren Wahrheitswerte ergeben sich

aus den Wahrheitswerten von A und B gemäß folgender Wahrheitswert-Tabellen*:

A	$\neg A$
1	0
0	1

sowie

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

1.2.2 Bezeichnung: Die Operationen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ nennt man auch Negation, Konjunktion und Disjunktion.

1.2.3 Bemerkung:

- $\vee$ ist kein exklusives oder! In der Umgangssprache wird „oder“ aber oft exklusiv als „entweder . . . oder“ verstanden.

  Beispiel: Geld her oder Leben!

- Auch die Negation wird oft falsch verstanden, so ist z.B. für die Aussage „Ich benutze immer die Treppe, um in mein Arbeitszimmer zu kommen“ die Negation „Ich benutze nicht immer die Treppe, . . . “ und nicht „Ich benutze nie die Treppe, . . . “!

1.3. Implikation und Äquivalenz

1.3.1 Definition: Für Aussagen A und B definieren wir auch die zusammengesetzten Aussagen $A \Rightarrow B$ (aus A folgt B, A impliziert B) und $A \Leftrightarrow B$ (A ist äquivalent zu B). Diese sind durch folgende Wahrheitswert-Tabellen definiert:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

1.3.2 Bemerkung: Eine falsche Aussage kann offenbar sowohl falsche als auch wahre Aussagen implizieren.† Das macht sogar dann Sinn, wenn man „implizieren“ als „beweisen“ versteht: Zum Beispiel kann man aus der falschen Aussage $2 = 1$ durch Addition von 1 auf beiden Seiten die ebenfalls falsche Aussage $3 = 2$ erhalten, aber auch durch Multiplikation mit 0 die wahre Aussage $0 = 0$.

Beispiele

*In solchen Tabellen sind die Wahrheitswerte von abgeleiteten Aussagen in Abhängigkeit von allen möglichen Wahrheitswerten der Anfangsaussagen dargestellt.

†Auf Latein sagt man dazu: „Ex falso quodlibet“ – Aus Falschem [folgt] Beliebiges.

- Die Aussage „Es regnet“ impliziert (wenigstens für nicht überdachte Straßen) die Aussage „Die Straße ist nass“, ist aber natürlich nicht äquivalent dazu, weil der Regen schon aufgehört haben könnte, die Straße auch mit einem Schlauch hätte nass gemacht werden können, oder vielleicht trotz Regens nicht einmal eine Straße vorhanden sein könnte.
- Die Aussage „Es regnet“ ist äquivalent zur Aussage „Wasser fällt vom Himmel.“
- Aus der Aussage „x ist eine natürliche Zahl“ folgt die Aussage „x^2 ist eine natürliche Zahl“.
- Die Aussage „x ist eine gerade Primzahl“ ist äquivalent mit der Aussage „$x = 2$“.

1.3.3 Bemerkung: Mit Hilfe der Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ lassen sich neue Aussagen bilden. Von besonderem Interesse für logische Denkvorgänge sind Aussagenkombinationen, die unabhängig von den „Eingangsaussagen“ immer wahr sind. Solche Aussagen nennt man Tautologien. Ein Beispiel ist die Aussage $A \vee (\neg A)$, welche unabhängig vom Wahrheitswert von A sicher wahr ist.

1.3.4 Bezeichnung: Um Klammern zu sparen, benutzt man oft die folgenden Vorrangsregeln: $\neg$ hat höchste Priorität, $\vee$ und $\wedge$ haben mittlere Priorität, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ haben die geringste Priorität. Das heißt, ein Ausdruck wie beispielsweise $\neg A \vee B$ wird verstanden als $(\neg A) \vee B$ und nicht als $\neg(A \vee B)$. Wenn man sich über die Priorität von Operationen nicht sicher ist, ist es immer empfehlenswert, Klammern zu setzen.

Beispiele Tautologien sind etwa:

- $A \vee \neg A$ — „tertium non datur“
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $(\neg\neg A) \iff A$ — doppelte Verneinung
- $A \wedge A \iff A$ — Vereinfachung
- $A \vee A \iff A$ — Vereinfachung
- $A \wedge (A \vee B) \iff A$ — Vereinfachung
- $A \vee (A \wedge B) \iff A$ — Vereinfachung
- $\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$ — de Morgansche Regel 1
- $\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$ — de Morgansche Regel 2
- $(A \wedge B) \iff \neg(\neg A \vee \neg B)$ — drückt $\wedge$ durch $\vee$ und $\neg$ aus
- $(A \vee B) \iff \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — drückt $\vee$ durch $\wedge$ und $\neg$ aus
- $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$ (drückt $\Rightarrow$ durch $\vee$ und $\neg$ aus)

- $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (z.B. A=„Es regnet“, B=„Die Straße ist nass“) — Widerspruchsbeweis
- $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
- $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ — Kettenschluss in Beweisen
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \iff (A \Leftrightarrow B)$ — Beweis in zwei Richtungen
- $A \wedge (B \wedge C) \iff (A \wedge B) \wedge C$ — Assoziativität von $\wedge$
- $A \vee (B \vee C) \iff (A \vee B) \vee C$ — Assoziativität von $\vee$
- $A \wedge B \iff B \wedge A$ — Kommutativität von $\wedge$
- $A \vee B \iff B \vee A$ — Kommutativität von $\vee$
- $A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ — Distributivität 1
- $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — Distributivität 2

1.3.5 Bemerkung: Eine besondere Art von Tautologien entsteht, wenn die linke Seite über die rechte neu definiert wird. Diese bezeichnet man oft mit „ $:\iff$ “. Beispiel: Es regnet $:\iff$ Wasser fällt vom Himmel. Durch solche neu eingeführten Begriffe kann man auch neue Operationen erzeugen und Gedankengänge oft entscheidend verkürzen.

1.4. Aussageformen

1.4.1 Definition: Eine Aussageform $A(x_1, \ldots)$ ist eine Aussage, die von einer oder mehreren Variablen $x_1, \ldots$ abhängt. Erst durch Einsetzen der Variablen wird es zu einer Aussage.

Beispiele

- $A(x, y)$ sei die Aussage $x^2 + y^2 \leqslant 1$ (also der Punkt (x, y) liegt in der Einheitskreisscheibe). $A(2, 1)$ ist dann eine falsche Aussage, $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ eine wahre.
- Man kann die Tautologien des vorigen Abschnitts als Aussageformen betrachten, die wahr sind, egal welche Aussagen A, B, C man einsetzt.

1.5. Quantoren

1.5.1 Definition: Sei $A(x)$ eine Aussageform, die von einer Variablen x abhängt. Dann definieren wir Aussagen

- $(\forall x : A(x))$ — „Für alle x gilt $A(x)$." Diese Aussage ist wahr, wenn $A(x)$ für alle x gilt.
- $(\exists x : A(x))$ — „Es gibt ein x mit $A(x)$." Diese Aussage ist wahr, wenn $A(x)$ für mindestens ein x gilt.
- $(\exists_1 x : A(x))$ — „Es gibt genau ein x mit $A(x)$." Diese Aussage ist wahr, wenn $A(x)$ für genau ein x gilt. (Diese Variante wird nur selten gebraucht.)

1.5.2 Bezeichnung: $\forall, \exists, \exists_1$ nennt man Quantoren ($\forall$: All-Quantor, $\exists$: Existenz-Quantor).

1.5.3 Bemerkungen:

- All-Quantor und Existenz-Quantor hängen wie folgt zusammen:

$$\neg(\forall x : A(x)) \iff \exists x : \neg A(x)$$

und

$$\neg(\exists x : A(x)) \iff \forall x : \neg A(x)\,.$$

- Hieraus ersieht man auch, dass man den einen Quantor durch den anderen ausdrücken kann:

$$(\forall x : A(x)) \iff \neg(\exists x : \neg A(x))$$

und

$$(\exists x : A(x)) \iff \neg(\forall x : \neg A(x))\,.$$

- Wenn $A(x, \ldots)$ von mehr Variablen als nur x abhängt, so bleibt auch $(\forall x : A(x, \ldots))$ noch immer eine Aussageform in den anderen Variablen.

Beispiele

- Die unbedingte Wahrheit der Tautologie $A \vee \neg A$ kann man mit $\forall$ wie folgt ausdrücken:

$$\forall A : A \vee \neg A\,.$$

- Die Existenz eines Punktes in der Einheitskreisscheibe könnte man als

$$\exists x : \exists y : x^2 + y^2 \leqslant 1$$

schreiben.

1.5.4 Bemerkung: Im nächsten Abschnitt werden wir auch die Varianten $\forall x \in M : A(x)$ und $\exists x \in M : A(x)$ kennenlernen, mit der man die erlaubten x vorab etwas besser spezifiziert. Das ist nützlich, weil ja die Aussageform $A \vee \neg A$ des ersten Beispiels nur Sinn macht, wenn A eine Aussage ist und die Aussageform $x^2 + y^2 \leqslant 1$ des zweiten Beispiels nur dann, wenn x und y reelle Zahlen sind.

1.6. Mathematisches Beweisen

1.6.1 Definition:
- Ein mathematischer Satz ist einfach eine Aussage, die im Kontext der Mathematik formuliert ist.
- Ein Beweis des Satzes geschieht, indem man bereits bekannte Aussagen durch Anwendung logischer Tautologien in die gesuchte Aussage überführt.

1.6.2 Bemerkungen:
- „Bereits bekannt“ hängt dabei vom Kontext und der Leserschaft ab.
- Die Anwendung der logischen Tautologien geschieht der angenehmeren Lesbarkeit halber oft mittels Redewendungen und selten durch strikte Anwendung logischer Symbole.

1.6.3 Beispiel: Unter Verwendung von aus der Schule bekannten Eigenschaften von ganzen und rationalen Zahlen wollen wir zeigen:

(A) Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

- Der Kontext dieser Aussage sei die elementare Logik (L) sowie folgendes Wissen:

(K1) Rationale Zahlen sind von der Form $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$. Die Darstellung ist eindeutig, wenn p und q keinen gemeinsamen Teiler $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geqslant 2$ besitzen, was wir im folgenden annehmen.

(K2) Die üblichen Rechenregeln für $\cdot$ und $+$ und $=$ in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$.

(K3) Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist entweder gerade ($:\Longleftrightarrow$ es lässt sich als $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$ schreiben) oder ungerade ($:\Longleftrightarrow$ es lässt sich als $n = 2m - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ schreiben).

- Zuerst zeigen wir

(B) Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, so ist auch n^2 gerade.

- Dies geschieht mittels

$$
\begin{aligned}
n \text{ gerade} &\overset{(K3)}{\Longleftrightarrow} && \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m \\
&\overset{(K2)+(L)}{\Rightarrow} && \exists m \in \mathbb{N} : n^2 = (2m)^2 = 2 \underbrace{(2m^2)}_{=m' \in \mathbb{N}} \\
&\overset{(K2)+(L)}{\Rightarrow} && \exists m' \in \mathbb{N} : n^2 = 2m' \\
&\overset{(K3)}{\Longleftrightarrow} && n^2 \text{ gerade}
\end{aligned}
$$

- Dann zeigen wir

(C) Wenn $n \in \mathbb{N}$ ungerade ist, so ist auch n^2 ungerade.

- Dies geschieht mittels

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade} \quad &\overset{(K3)}{:\Longleftrightarrow} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n = 2m - 1 \\ &\overset{(K2)+(L)}{\Rightarrow} \quad \exists m \in \mathbb{N} : n^2 = (2m-1)^2 = 2\underbrace{(2m^2 - 2m + 1)}_{=m' \in \mathbb{N}} - 1 \\ &\overset{(K2)+(L)}{\Rightarrow} \quad \exists m' \in \mathbb{N} : n^2 = 2m' - 1 \\ &\overset{(K3)}{\Longleftrightarrow} \quad n^2 \text{ ungerade} \end{aligned}$$

- Nun verschärfen wir (B), indem wir zeigen, dass auch die Umkehrung gilt:

  (B') $\forall n \in \mathbb{N}$: n^2 gerade $\Rightarrow$ n gerade.

- Der Beweis geschieht mit Hilfe von (C) durch Widerspruch: Wenn

  ($\neg$B') $\exists n \in \mathbb{N}$: n^2 gerade und n ungerade.

  wahr wäre, so würde man für dieses n folgern können:

$$n \text{ ungerade} \quad \overset{(C)}{\Rightarrow} \quad n^2 \text{ ungerade}$$

  was offenbar ein Widerspruch zu ($\neg$B') ist.

- Folglich muss ($\neg$B') falsch und (B') wahr sein.

- Nun zeigen wir die ursprüngliche Aussage

  (A) Es gibt keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

  und zwar ebenfalls mit einem Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass $\neg A$ wahr ist, und zeigen, dass daraus ein Widerspruch folgt.

- Wir nehmen also an

  ($\neg$ A) Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

  oder (wegen (K3) äquivalent)

  ($\neg$ A) Es gibt teilerfremde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

- Für diese p, q folgt dann aber:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad &\overset{(K2)+(L)}{\Longleftrightarrow} \quad p^2 = 2q^2 \qquad (D) \\ &\overset{(K1)}{\Longleftrightarrow} \quad p^2 \text{ gerade} \\ &\overset{(B')}{\Rightarrow} \quad p \text{ gerade} \qquad (E) \\ &\overset{(K1)}{\Longleftrightarrow} \quad \exists m : p = 2m \\ &\overset{(D)+(K1)+(K2)}{\Rightarrow} \quad \exists m : 2q^2 = p^2 = (2m)^2 = 4m^2 \\ &\overset{(K2)}{\Rightarrow} \quad \exists m : q^2 = 2m^2 \\ &\overset{(B')}{\Rightarrow} \quad q \text{ gerade} \qquad (F) \end{aligned}$$

- (E) und (F) bedeuten aber, dass p und q den gemeinsamen Teiler 2 haben. Sie sind daher nicht teilerfremd und wir haben einen Widerpruch hergeleitet.
- Also muss ($\neg$ A) falsch sein und somit (A) wahr.

1.6.4 Bemerkung:

- Diese sehr genaue Ausarbeitung eines Beweises ist für alle Anwender und auch die meisten Mathematiker zu langwierig.
- Normalerweise wird man daher in solchen Beweisen etliche Schritte auslassen und auch nicht immer alle Voraussetzungen genau spezifizieren (Rechenregeln in $\mathbb{Q}$, etc.).
- Die im Beweis gezeigten Arten des logischen Schließens treten aber auf jeder Abstraktionsebene auf. Aus diesem Grund ist es empfehlenswert, sie möglichst gut zu verstehen.
- Man sollte sich auch klarmachen, dass sich die Mathematik gegenüber allen anderen Wissenschaften dadurch auszeichnet, dass sie sich in ihrer Gesamtheit in derselben exakten und unwiderlegbaren Weise aus elementaren und „selbstverständlichen“ Definitionen herleiten lässt.
- Auch wenn die Mathematik in dieser Weise ausgezeichnet ist: Der menschliche Wissenserwerb geschieht generell in sehr ähnlicher Weise. Nur muss man sich im Klaren sein, dass man außerhalb der Mathematik eigentlich nie von einem widerspruchsfreien Fundament aus argumentiert, und daher selbst durch korrektes Schließen zu widersprüchlichen Ergebnissen kommen kann.

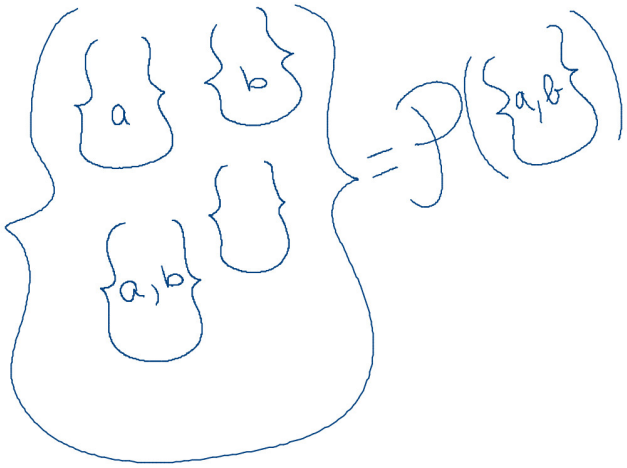
1.7. Übungsaufgaben

1.7.1 Aufgabe: Stellen Sie das exklusive oder $\veebar$, das durch die Wahrheitswert-Tabelle

A	B	$A \veebar B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

definiert ist, unter Verwendung der Operatoren $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ dar.

2. Mengen



2.1. Grundbegriffe

2.1.1. Definition

2.1.1 Definition: (Cantor) Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlbestimmter und wohlunterschiedener Objekte (genannt Elemente) zu einem Ganzen.
Man sagt $x \in M$, genau dann wenn x ein Element der Menge M ist, andernfalls gilt $x \notin M$ (also $x \notin M \ :\Longleftrightarrow \ \neg(x \in M)$).

2.1.2 Definition: Mengen können in folgender Weise konstruiert werden

1. Durch Aufzählung ihrer Elemente: $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ ist die Menge, die aus den Elementen $m_1, \ldots, m_n$ besteht. Für die so definierte Menge gilt dann

$$x \in M \iff (x = m_1 \vee \ldots \vee x = m_n)$$

   Die Reihenfolge der Aufzählung ist dabei egal.

2. Durch Einschränkung mittels einer Aussageform *Eigenschaft*(x):

$$M = \{x \mid \textit{Eigenschaft}(x)\}$$

bezeichnet die Menge aller x, für welche die Aussage *Eigenschaft*(x) wahr ist. Für die so definierte Menge gilt

$$x \in M \iff \textit{Eigenschaft}(x)\,.$$

3. Oft tritt folgender Spezialfall auf, bei dem Elemente einer bestimmten Eigenschaft aus einer Obermenge N ausgewählt werden:

   $$M = \{x \mid (x \in N) \wedge \textit{Eigenschaft}(x)\}\,.$$

   Hierfür schreibt man kürzer

   $$M = \{x \in N \mid \textit{Eigenschaft}(x)\}\,.$$

4. Und auch folgendes Konstrukt ist oft nützlich:

   $$M = \{\textit{Ausdruck}(x) \mid \textit{Eigenschaft}(x)\}\,.$$

   Hier gilt

   $$y \in M \iff (\exists x : \textit{Eigenschaft}(x) \wedge (y = \textit{Ausdruck}(x)))\,.$$

Beispiele

- Wenn $M = \{\text{Angela}, \text{Guido}, \text{Horst}\}$, so ist Angela $\in M$, aber Sigmar $\notin M$.
- $M = \{x \mid x \text{ studiert in Erlangen}\}$ ist die Menge der Erlangener Studenten.
- $M = \{n \mid \exists k : k \in \mathbb{N} \wedge k^2 = n\}$ ist die Menge aller Quadratzahlen.
- $M = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist eine kürzere Möglichkeit, die Menge der Quadratzahlen zu bezeichnen.
- Die Nullstellen der Sinusfunktion sind die Menge $\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- Die Nullstellen der Kosinusfunktion sind die Menge $\{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Die Menge $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1\}$ bezeichnet alle „Punkte“ (x, y) die auf dem Einheitskreis der Ebene liegen.

2.1.2. Gleichheit von Mengen

2.1.3 Definition: Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. In Formeln

$$M = N :\iff \forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$$

Erinnerung Das Zeichen $:\Longleftrightarrow$ bedeutet, dass die Aussage auf der linken Seite durch die Aussage auf der rechten Seite definiert wird (also sozusagen eine Kurzform der rechten Seite ist).

2.1.4 Bemerkung: Die obige Definition lässt sich zwar einfach hinschreiben, sie ist aber in dieser Form nicht anwendbar (weil man unendlich viele Tests durchführen müsste). Tatsächlich kann es beliebig schwierig oder sogar unmöglich sein, die Gleichheit zweier auf unterschiedliche Weise definierter Mengen M und N zu beweisen oder zu widerlegen!

2.1.5 Beispiel: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ hat sich Fermat gefragt, ob gilt*

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \mid a^n + b^n = c^n\} = \{\}\,?$$

ÜBUNG: Für $n = 1, 2$ ist die Antwort einfach. Und zwar?

2.1.3. Teilmengen

2.1.6 Definition: M heißt Teilmenge von N, geschrieben $M \subset N$, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. In Formeln:

$$M \subset N \;:\Longleftrightarrow\; \forall x : (x \in M \Rightarrow x \in N)$$

2.1.7 Schreibweise:

- Für Aussagen der Form $\forall x : (x \in M \Rightarrow A(x))$ Seite führen wir auch die prägnantere und kürzere Schreibweise $\forall x \in M : A(x)$ ein.

  In Worten sagt oder schreibt man dies als „Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$“ oder manchmal auch mit Umstellung „$A(x)$ gilt für alle $x \in M$“.

- Auch Aussagen der Form $\exists x : (x \in M \wedge A(x))$ kommen häufig vor, und wir schreiben dafür kurz $\exists x \in M : A(x)$.

  In Worten drückt man dies aus als „Es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$“ oder aber auch „$A(x)$ gilt für ein $x \in M$“.

2.1.8 Anwendung: Die Teilmengendefinition würde damit lauten:

$$M \subset N \;:\Longleftrightarrow\; \forall x \in M : x \in N\,.$$

2.1.9 Bemerkung: Aus den Definitionen ersehen wir leicht:

- Es gibt genau eine leere Menge $\{\}$, die keine Elemente enthält. Wir bezeichnen sie mit $\varnothing$.
- Diese leere Menge ist Teilmenge jeder beliebigen Menge.
- Für jede Menge gilt $M \subset M$ (Reflexivität von $\subset$).
  (Manche Autoren schreiben daher (in Analogie zu $\leqslant$ und $<$) $\subseteq$ für unser $\subset$, und $\subset$ nur für den Fall einer echten Inklusion $M \subset N$ mit $M \neq N$). Diese echte Inklusion wird aber viel seltener gebraucht, und wir werden sie daher —wenn nötig— mit $\subsetneq$ bezeichnen.)

*Die Notation (a,b,c) bezeichnet ein Tupel, welches wir bald definieren.

- Für Mengen L, M, N gilt die Transitivität der Teilmengenbeziehung:

$$(L \subset M) \wedge (M \subset N) \quad \Rightarrow \quad L \subset N\,.$$

2.2. Mengenverknüpfungen

2.2.1 Definition: Wenn M und N Mengen sind, so definieren wir

- Die Vereinigung

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}\,.$$

  Wir verwenden hier und im folgenden die Bezeichnung $:=$ um zu kennzeichnen, dass die rechte Seite den Ausdruck auf der linken Seite definiert (analog zu den Programmiersprachen der Pascal-Familie).

- Den Schnitt $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$.

- Die Differenz (oder genauer: Mengendifferenz) als

$$M \backslash N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} = \{x \in M \mid x \notin N\}\,.$$

- Das kartesische Produkt als

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}\,.$$

  Die Elemente dieses Produkt liegen weder in M noch in N sondern sind Paare (x, y) bestehend aus je einem Element $x \in M$ und einem Element $y \in N$.

- Die Potenzmenge

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subset M\}\,,$$

  die genau die *Teilmengen* von M als *Elemente* enthält.

Beispiele

- Sei $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3\}$. Dann ist $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ und $M \cap N = \{2\}$, $M \backslash N = \{1\}$, $M \times N = \{(1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ und $\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

- Wenn $M = \{\text{Einwohner Erlangens}\}$ und $N = \{\text{Restaurants in Erlangen}\}$, so kann man die Information, welches Restaurant von wem schon besucht wurde, als Teilmenge $X \subset M \times N$ charakterisieren: $(E, R) \in X$, falls E schon mal in R war.

- Wenn $M = N = \mathbb{R}$, so ist $M \times N = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, was wir auch als $\mathbb{R}^2$ oder den zweidimensionalen Euklidischen Raum oder die Euklidische Zahlenebene bezeichnen.

- Allgemeiner kann man den n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ definieren als das n-fache Produkt

$$\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

  Die Verallgemeinerung $(x_1, \ldots, x_n)$ des Paars bezeichnet man als n-Tupel. Im Gegensatz zur Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ können beim Tupel Komponenten x_i doppelt vorkommen. Außerdem ist die Reihenfolge wichtig.

  NOTATION: Der $\mathbb{R}^n$ (und andere Zahlenräume wie $\mathbb{C}^n$) sind in den Anwendungen so wichtig, dass man für deren Elemente oft die auffallendere Vektornotation $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ anstelle der Tupelnotation $(x_1, \ldots, x_n)$ verwendet.

- $A = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ist die Einheitskreisscheibe in der Euklidischen Ebene (d.h. Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Radius 1).

- $B = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 15\}$ ist eine Vereinigung von zwei Streifen:[†] $([-4, -2] \times \mathbb{R}) \cup ([2, 4] \times \mathbb{R})$. Hierbei bezeichnet:
  - $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (abgeschlossenes Intervall).
  - $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall).
  - $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ und $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (halboffene Intervalle).

- Wenn M die Menge aller Studierenden (männlich oder weiblich) unserer Vorlesung ist, und N die Menge aller Studentinnen (weiblich) in Erlangen, so ist $M \cap N$ die Menge aller Studentinnen unserer Vorlesung und $M \backslash N$ die Menge aller (männlichen) Studenten dieser Vorlesung.

Beobachtung

- Die Definitionen der Mengenoperationen $=$, $\subset$, $\cap$, $\cup$ basieren jeweils auf den logischen Operationen $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ und die Definition der Mengendifferenz verwendet die Negation.

- Aus diesem Grund übertragen sich viele logische Tautologien sehr einfach in für Mengenoperationen gültige Beziehungen.

[†] Die Ungleichungskette $3 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 15$ ist dabei als Konjunktion $(3 \leqslant x^2 - 1) \wedge (x^2 - 1 \leqslant 15)$ zweier Ungleichungen zu verstehen.

2.2.2 Satz: Für alle Mengen L, M, N gilt

- Assoziativität 1: $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$
- Assoziativität 2: $L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N$
- Kommutativität 1: $M \cap N = N \cap M$
- Kommutativität 2: $M \cup N = N \cup M$
- Distributivität 1: $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$
- Distributivität 2: $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$

(In den Übungen werden auch noch weitere Beziehungen bewiesen.)

Beweis Wir beweisen exemplarisch eine der Distributivitätsbeziehungen:

$$\begin{aligned} x \in L \cap (M \cup N) &\iff x \in L \wedge x \in M \cup N \\ &\iff x \in L \wedge (x \in M \vee x \in N) \\ &\iff (x \in L \wedge x \in M) \vee (x \in L \wedge x \in N) \\ &\iff (x \in L \cap M) \vee (x \in L \cap N) \\ &\iff x \in (L \cap M) \cup (L \cap N) \end{aligned}$$

BEMERKUNG: Etwas sauberer hätte man in der vorstehenden Kette von Äquivalenzen vielleicht die Elementbeziehungen $x \in L$, $x \in M$, etc mit Klammern versehen können. Wenn aber L, M, N Mengen sind und $x \in \ldots$ Aussagen, so machen die Ausdrücke nur in einer Weise Sinn, so dass man sich hier die Klammern auch sparen kann.

2.2.3 Bemerkung: Wie auch die logischen Operationen $\wedge$ und $\vee$ sind die Mengenoperationen $\cap$ und $\cup$ assoziativ. Hieraus folgt insbesondere, dass Ausdrücke der Form

$$M_1 \cap \ldots \cap M_n \quad \text{bzw.} \quad M_1 \cup \ldots \cup M_n$$

für eine endliche Zahl von Mengen $M_1, \ldots, M_n$ ohne Klammersetzung wohldefiniert sind (für das Ergebnis ist es egal, wie die Klammern gesetzt werden).

2.3. Fundamentale Probleme

Beobachtung

- Die naive Anwendung der Mengenkonstruktion kann zu Problemen führen.
- Das Russellsche Paradoxon konstruiert etwa

$$R = \{x \mid x \notin x\}.$$

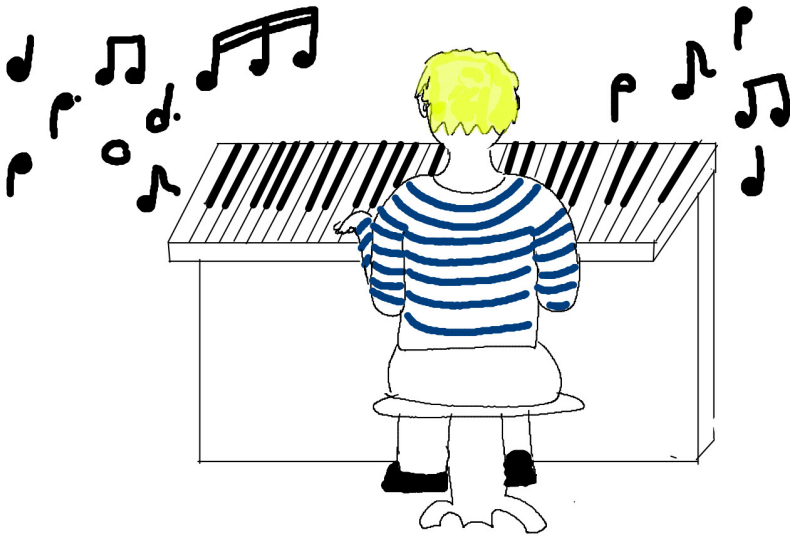
- Eine solche Menge kann es aber nicht geben, weil sowohl $R \in R$ als auch $R \notin R$ zu Widersprüchen führen.
- Eine mögliche Abhilfe besteht darin, dass man die zulässigen Aussageformen $A(x)$ in der Mengenkonstruktion geeignet einschränkt, so dass das obige Paradoxon nicht mehr erlaubt ist.
- Der Bereich der Mathematik, der diese Zusammenhänge genauer untersucht, heißt Mengenlehre.

2.4. Übungsaufgaben

2.4.1 Aufgabe: Berechne $\mathcal{P}(\varnothing)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.

2.4.2 Aufgabe: Es seien A und B zwei beliebige Mengen mit $A \subset B$. Zeigen Sie die Beziehung $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ für die Potenzmengen.

3. Funktionen



3.0.1 Definition: M und N seien beliebige Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) $f : M \to N$ einer Menge M in eine Menge N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ zuordnet. Dieses y bezeichnen wir dann mit $f(x)$. M heißt Definitionsbereich oder Definitionsmenge von f, N heißt Zielbereich, Wertebereich oder Zielmenge von f.

3.0.2 Notation: Wenn die Berechnungsvorschrift von f explizit bekannt ist, werden wir oft schreiben

$$f : M \to N\,, \quad x \mapsto \textit{Berechnungsvorschrift}(x)\,.$$

3.0.3 Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2 + x + 1\,.$$

3.0.4 Bemerkung: Relativ oft findet man in der Literatur auch die Schreibweise

$$f : M \to N\,, \quad f(x) = \textit{Berechnungsvorschrift}(x)\,.$$

In diesem Skript wird sie aber nur selten verwendet.

3.0.5 Definition: Weitere Begriffe sind:

- Für beliebige $A \subset M$ definieren wir das Bild $f(A)$ von A unter f als

  $$f(A) := \{y \in N \mid \exists x \in A : f(x) = y\}\,.$$

  Die Menge $\mathrm{Bild}(f) := f(M)$ nennt man das Bild von f.

- Für $B \subset N$ definieren wir das Urbild $f^{-1}(B)$ von B unter f als

$$f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\}\,.$$

- Die Menge

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in M \times N \mid f(x) = y\}$$

nennt man den Graph von f.

Warnung Die Notation $f^{-1}(B)$ für das Urbild einer Menge B hat *überhaupt nichts* mit dem Kehrwert $(f(x))^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ zu tun! Der Kehrwert macht ja für allgemeine Zielbereiche N nicht einmal Sinn!

Beispiele

- Für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

ist $f([-1, 2]) = [0, 4]$ und $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$.

Bemerkung: Allgemein gilt für $A \subset M$ immer $A \subset f^{-1}(f(A))$ (Satz folgt später), aber –wie man hier sieht– nicht immer $A = f^{-1}(f(A))$.

- Sei M die Menge aller Menschen, F die Menge aller Farben und *Augenfarbe* : $M \to F$ die Funktion, die jedem Menschen seine Augenfarbe zuordnet. Dann bezeichnet $\mathit{Augenfarbe}^{-1}(\{\mathit{blau}\})$ die Menge aller Menschen mit blauer Augenfarbe.

3.1. Gleichheit von Funktionen

3.1.1 Definition: Zwei Funktionen $f_1 : M_1 \to N_1$ und $f_2 : M_2 \to N_2$ heißen gleich, wenn die Definitions- und Zielbereiche übereinstimmen und für alle $x \in M_1 = M_2$ gilt $f_1(x) = f_2(x)$. In Formeln:

$$f_1 = f_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad (M_1 = M_2) \wedge (N_1 = N_2) \wedge (\forall x \in M_1 : f_1(x) = f_2(x))\,.$$

3.1.2 Bemerkung: Gleichheit hängt nicht von „unsichtbaren“ Eigenschaften wie der Syntax der Funktionsbeschreibung oder der Effizienz des verwendeten Algorithmus ab. Die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (\sin(x))^2 + (\cos(x))^2\,,$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad z \mapsto (\sin(z))^2 + (\cos(z))^2$$

und

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 1$$

bezeichnen daher ein- und dieselbe Funktion, d.h. es gilt $f_1 = f_2 = f_3$.

3.1.3 Schreibweise:

- Oft enthält eine Funktionsvorschrift auch Fallunterscheidungen der Form

$$f : M \to N\,, \quad x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & A_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & A_n(x) \end{cases}$$

- Dies bedeutet, dass $f(x)$ den Wert $f_k(x)$ erhält, falls die Aussageform $A_k(x)$ wahr ist.
- Normalerweise wird dabei verlangt, dass für jedes $x \in M$ genau eine der Aussagen $\{A_i(x)\}_{i=1,\dots,n}$ wahr ist.
- Alternativ könnte man aber auch die Priorität der Regeln nach ihrer Reihenfolge festlegen, was aus praktischen Gründen in vielen Computersprachen geschieht (die erste wahre Bedingung legt den Wert fest).
- Es ist auch oft bequem, für die letzte Regel „sonst“ anstelle von

$$\neg(A_1(x) \vee \dots \vee A_{n-1}(x))$$

zu schreiben.

3.1.4 Beispiel: Die Betragsfunktion (oft auch einfach „Betrag“ oder „Absolutbetrag“) lässt sich definieren als

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

3.1.5 Bemerkung:

- Statt $x < 0$ hätte man hier auch „sonst“ schreiben können.
- Die Notation $|x|$ hat nicht die übliche „Präfix“-Form $f(x)$. Wenn man trotzdem vom Betrag als Funktion sprechen will, so setzt man (wie oben getan) oft einen Punkt anstelle des Arguments.
- Alternativ könnte man auch den Funktionsnamen abs verwenden, wie es viele Computersprachen tun: $\mathrm{abs}(x) := |x|$.

3.2. Injektivität und Surjektivität

3.2.1 Definition: Eine Funktion $f : M \to N$ heißt

- surjektiv (überdeckend), wenn $f(M) = N$
  $\iff$ jedes $y \in N$ ist Bild *mindestens eines* $x \in M$
  $\iff \forall y \in N : \exists x \in M : f(x) = y.$
- injektiv, falls jedes $y \in N$ Bild höchstens eines $x \in M$ ist
  $\iff$ jedes $y \in f(M)$ ist Bild genau eines $x \in M$
  $\iff \forall x_1, x_2 \in M : (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2),$

- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist
  $\Longleftrightarrow$ jedes $y \in N$ ist Bild genau eines $x \in M$.

Beispiele

- Die oben erwähnte Funktion *Augenfarbe* ist weder injektiv noch surjektiv (einerseits gibt es viele Menschen mit blauer oder brauner Augenfarbe, andererseits gibt es auch Farben wie rosa, die kein Mensch als Augenfarbe hat).

- Die Funktion f mit der Vorschrift $x \mapsto x^2$ ist
  - weder surjektiv noch injektiv, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
  - nur surjektiv, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$,
  - nur injektiv, wenn $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
  - und bijektiv (surjektiv, injektiv), wenn $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$.

  Hierbei bezeichnet $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$. Wir sehen, dass Injektivität und Surjektivität entscheidend vom Definitions- und Wertebereich von f abhängen.

3.2.2 Satz: Wenn $f : M \to N$, so gilt $\forall A \subset M : A \subset f^{-1}(f(A))$.

Beweis Sei $A \subset M$ beliebig. Dann gilt

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad f(x) \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad x \in f^{-1}(f(A))$$

nach den Definitionen von Bild und Urbild. Dies bedeutet aber $A \subset f^{-1}(f(A))$.

3.2.3 Satz: f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\forall A \subset M : A = f^{-1}(f(A))$.

Beweis „$\Leftarrow$“: Wir zeigen zuerst, dass aus $\forall A \subset M : A = f^{-1}(f(A))$ die Injektivität folgt. Dazu wählen wir für beliebiges $x_1 \in M$ die Menge $A = \{x_1\}$ und erhalten $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{f(x_1)\}) = \{x_1\}$, woraus wir ersehen, dass kein weiteres x_2 auf $f(x_1)$ abgebildet wird. Dies bedeutet aber gerade Injektivität.
„$\Rightarrow$“: Dies beweisen wir mit Widerspruch: Wir nehmen an, dass es ein A gäbe mit $A \subsetneq f^{-1}(f(A))$. Dann existiert aber ein $x_1 \in f^{-1}(f(A)) \backslash A$. Nach Definition des Urbilds gilt für dieses x_1 aber $f(x_1) \in f(A)$, woraus folgt, dass es noch ein zweites $x_2 \in A$ geben muss mit $f(x_1) = f(x_2)$. Also ist f nicht injektiv.

3.2.4 Bemerkung: Analog kann man für $f : M \to N$ zeigen:

- Für alle $B \subset N$ gilt $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

- f surjektiv $\Longleftrightarrow$ für alle $B \subset N$ gilt $f(f^{-1}(B)) = B$.

3.3. Umkehrfunktion

3.3.1 Definition: Die Funktion $f : M \to N$ sei bijektiv. Dann gilt für alle $y \in N$, dass $f^{-1}(\{y\})$ aus genau einem Element $x \in M$ besteht. In einem solchen Fall existiert die sogenannte Umkehrfunktion oder Inverse von f, welche man wieder mit f^{-1} bezeichnet, sogar als Abbildung von N nach M:

$$f^{-1} : N \to M\,, \quad y \mapsto x \text{ mit } f(x) = y$$

Für alle $x \in M$ und $y \in N$ gilt dann die Äquivalenz

$$x = f^{-1}(y) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y\,.$$

Warnung Die Notation f^{-1} wird hier ein weiteres Mal in einem anderen Sinn verwendet, was nicht ganz glücklich, aber leider üblich ist. Normalerweise ergibt sich die Bedeutung des Ausdrucks $f^{-1}(P)$ aus dem Zusammenhang:

- Für $P \subset N$ (!) ist die für beliebige f definierte mengenwertige Urbildfunktion gemeint, welche Teilmengen von N auf Teilmengen von M abbildet (d.h. f^{-1} kann als Abbildung von $\mathcal{P}(N)$ auf $\mathcal{P}(M)$ aufgefasst werden).

- Für $P \in N$ (!) und bijektives f ist hingegen die punktwertige Umkehrfunktion gemeint ist, die N auf M abbildet.

Beispiele

- Die Abbildung
$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+\,, \quad x \mapsto x^2$$
ist (für diese Wahl von Definitions- und Wertebereich) bijektiv und besitzt die Inverse
$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+\,, \quad x \mapsto \sqrt{x}\,.$$

- Die Abbildung
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\,, \quad x \mapsto e^x$$
ist bijektiv und besitzt die Inverse
$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \ln(x)\,.$$

3.4. Komposition

3.4.1 Definition: Es seien $f : M \to N$ und $g : N \to P$ Funktionen. Dann definieren wir die Komposition (alternativ Zusammensetzung, Verkettung) $g \circ f$ als

$$g \circ f : M \to P\,, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))\,.$$

3.4.2 Bemerkung: Man beachte die Reihenfolge! $g \circ f$ wendet zuerst f an.

Beispiele

- Wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^2$, so ist $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$.
- Auch Beispiele aus dem täglichen Leben gibt es viele: Wenn beispielsweise eine Funktion $Konten$ eine Menge bestehend aus P gehörenden Bankkonten liefert und eine Funktion $Kontosumme$ die Bilanzen dieser Kontenmenge addiert, so wäre $Kontosumme \circ Konten$ etwas wie $Geldvermögen$.

3.4.3 Satz: Falls man zusätzlich noch eine Abbildung $h : P \to Q$ hat, so gilt das Assoziativgesetz

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)\,.$$

Beweis Beide Seiten sind offenbar Funktionen von M nach Q. Außerdem gilt nach der Definition von $\circ$ für jedes $x \in M$

$$((h \circ g) \circ f)(x) \overset{\text{Def}}{=} (h \circ g)(f(x)) \overset{\text{Def}}{=} h(g(f(x))) \overset{\text{Def}}{=} h((g \circ f)(x)) \overset{\text{Def}}{=} (h \circ (g \circ f))(x)\,.$$

Gleichheit für alle $x \in M$ bedeutet aber gerade Gleichheit der Funktionen.

3.4.4 Anwendung: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche definiert sind durch

$$f : x \mapsto e^{x^4+x^2-1}\,, \quad g : x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}\,, \quad h : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2\,.$$

FRAGE: Welchen Wert hat $h(g(f(\sqrt{2})))$?

3.4.5 Bemerkung: (Umkehrfunktion und Verkettung) Wenn $f : M \to N$ bijektiv ist und $f^{-1} : N \to M$ die Umkehrfunktion bezeichnet, so gilt

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M\,, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_N\,.$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{id}_M : M \to M$, $x \mapsto x$ die Identitätsabbildung (oder einfach Identität) in M und id_N die entsprechende Identität in N.

Beweis Wenn man $y = f(x)$ wählt und in die äquivalente Gleichung $x = f^{-1}(y)$ einsetzt, erhält man $x = f^{-1}(f(x))$ für alle $x \in M$. Analog führt das Einsetzen von $x = f^{-1}(y)$ in $y = f(x)$ zu $y = f(f^{-1}(y))$ für alle $y \in N$.

3.4.6 Bemerkung: Zuletzt beobachten wir, dass man die Verkettung $g \circ f$ auch dann genauso definieren kann, wenn der Wertebereich N von $f : M \to N$ nicht gleich sondern nur eine Teilmenge des Definitionsbereichs N' der Funktion $g : N' \to P$ ist. Allerdings ist das keine wesentliche Verallgemeinerung, da man ja genauso f als Funktion $f : M \to N'$ hätte auffassen können.

3.5. Elementare reellwertige Funktionen

- Affin-lineare Funktionen haben die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto mx + b\,, \quad m, b \in \mathbb{R}$$

  Beachte: Oft nennt man solche Funktionen einfach linear. Wir haben hier das Wort „affin“ hinzugefügt, weil wir später in dieser Vorlesung unter linearen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur Abbildungen der Form $x \mapsto mx$ sowie deren mehrdimensionale Verallgemeinerungen (Drehungen, Streckungen, Spiegelungen, Scherungen, etc.) verstehen werden.

- Polynome haben die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0\,, \quad n \in \mathbb{N}_0,\, a_i \in \mathbb{R}$$

  Wenn $a_n \neq 0$, so nennt man n den Grad des Polynoms.

- Die Exponentialfunktion zur Basis a hat die Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\,, \quad x \mapsto a^x\,, \quad a > 0$$

  Bemerkungen:
  - Im Ausdruck a^x nennen wir a Basis und x Exponent.
  - Es gilt $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.
  - Außerdem gelten für $x, y \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{und} \quad a^{xy} = (a^x)^y\,.$$

  - Wie wir später sehen werden, spielt die Basis

$$e := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots = 2.718\ldots$$

    eine ausgezeichnete Rolle. Die zugehörige Exponentialfunktion wird mit exp bezeichnet.

- Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$ nennt man den Logarithmus zur Basis a:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \log_a(x)$$

  Bemerkungen:

  - Es gelten die Beziehungen $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ und $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$, die man aus den entsprechenden Beziehungen der Exponentialfunktion ersehen kann.
  - Für $a = e$ erhält man den natürlichen Logarithmus $\ln(x) := \log_e(x)$.

- Trigonometrische Funktionen: Die Koordinaten eines Punkts (x, y) auf dem Einheitskreis $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ in Abhängigkeit vom Winkel φ liefern die Funktionen $x = \cos(\varphi)$ (Kosinus) und $y = \sin(\varphi)$ (Sinus). Der Winkel wird dabei in Mathematik und Naturwissenschaften normalerweise im Bogenmaß ausgedrückt, welches die Länge des Kreisbogens vom Punkt $(1, 0)$ zu (x, y) angibt:

φ	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

  Diese Zahlen sollten Sie sich merken*, weil Sie sich damit Sinus und Kosinus für viele wichtige Winkel schnell herleiten können. Zahlenmäßig ist $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\ldots$ und $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots$.

  Aus der geometrischen Darstellung kann man unter anderem folgende Beziehungen ablesen:

  1. $(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = 1$
  2. $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$, $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$
  3. $\cos(\varphi) = \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi)$
  4. 2π-Periodizität: $\sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)$, $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)$
  5. Additionstheoreme (ergeben sich geometrisch aus einer Argumentation mit Hilfe verschiedener rechtwinkliger Dreiecke):

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\varphi + \psi) &= \sin(\varphi)\cos(\psi) + \sin(\psi)\cos(\varphi) \end{aligned}$$

  6. Für kleine im Bogenmaß gemessene Winkel φ gilt $\sin(\varphi) \approx \varphi$ und $\cos(\varphi) \approx 1$ (oder genauer: $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$).
  7. Die Umrechnung von Grad ins Bogenmaß geschieht mit $1° = \frac{\pi}{180}$.

3.5.1 Anwendung: FRAGE: Wie unterscheidet sich die mittägliche Sonneneinstrahlung auf eine horizontale Fläche am längsten und kürzesten Tag des Jahres?
ANTWORT: Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlung gegenüber der Vertikalen ist am Äquator bei Tag- und Nachtgleiche $0°$, in Erlangen ist es die geographische Breite, also $\approx 50°$. Am längsten/kürzesten Tag ändert sich dieser Winkel um $\pm 23°$ (die Neigung der Erdachse

*Das ist auch gar nicht so schwierig, weil erstens die beiden Zeilen gegenläufig sind, und zweitens die Zahlen die Form $\sqrt{n}/2$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ haben.

gegenüber der Ekliptik). Für die Energie $E(\varphi)$ pro horizontaler Fläche gilt (warum?) in Abhängigkeit vom Einfallswinkel φ gegenüber der Vertikalen:

$$E(\varphi) \sim \cos(\varphi)$$

so dass man erhält

$$\frac{E(\varphi_{\text{längster Tag}})}{E(\varphi_{\text{kürzester Tag}})} = \frac{\cos(50^\circ - 23^\circ)}{\cos(50^\circ + 23^\circ)} = \frac{\cos(27^\circ)}{\cos(73^\circ)} \approx \frac{0.891}{0.292} \approx 3$$

Die Sonnenstrahlung auf ein Flächenstück am Mittag ist also im Winter um den Faktor 3 geringer. (Wenn man wirklich an der mittleren Gesamtenergie pro Tag interessiert wäre, müsste man zudem noch berücksichtigen, dass die Zeit der Sonneneinstrahlung im Winter viel kürzer ist, erstens wegen der kürzeren Tage und zweitens wegen langen Nebel/Hochnebel-Perioden.) Mit dem obigen Wissen und den groben Approximationen $\pi \approx 3$ und $\sqrt{3} \approx 1.7$ könnte man dann im Kopf schätzen:

$$\frac{\cos(27^\circ)}{\cos(73^\circ)} \approx \frac{\cos(30^\circ)}{\cos(75^\circ)} = \frac{\cos(30^\circ)}{\sin(15^\circ)} \approx \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{\pi}{12}} \approx 2\sqrt{3} \approx 3.4\,.$$

3.5.2 Bemerkung: Um eine größere Zahl von Symbolen zur Verfügung zu haben, benutzen Mathematiker oft diejenigen Zeichen des griechischen Alphabets, die sich von den lateinischen unterscheiden. Dies sind vor allem die folgenden:

Alpha α	Beta β	Gamma γ,Γ	Delta δ,Δ	Epsilon ε
Zeta ζ	Eta η	Theta θ,Θ	Iota ι	Kappa κ
Lambda λ,Λ	My μ	Ny ν	Xi ξ	Pi π,Π
Rho ρ	Sigma σ,Σ	Tau τ	Phi φ, Φ	Chi χ
Psi ψ, Ψ	Omega ω,Ω			

3.5.3 Bezeichnung: In der mathematischen Fachliteratur findet man bei der Anwendung trigonometrischer oder logarithmischer Funktionen manchmal folgende Kurzschreibweisen:

- Anstelle von „$\sin(\varphi)$“ wird „$\sin\varphi$“ geschrieben (manchmal ist es sogar noch mehrdeutiger, z.B. „$\sin\omega t$“ anstelle von „$\sin(\omega t)$“).
- Anstelle von „$(\sin(\varphi))^2$“ wird „$\sin^2(\varphi)$“ oder sogar „$\sin^2\varphi$“ geschrieben.

3.6. Funktionen mehrerer Parameter

Beobachtung Es treten in der Praxis sehr oft Funktionen auf, die von mehreren Eingangsgrößen (auch Parameter oder Argumente genannt) abhängen.

Beispiele

- Die Dichte eines Gases hängt nach dem allgemeinen Gasgesetz von der Art des Gases, dem Druck und der Temperatur ab.

- Der Gewinn bei Verkauf eines Produkts berechnet sich aus dem Endpreis abzüglich der Einzelkosten der Komponenten, den Herstellungskosten, der Lieferkosten und eventuell diversen Steuern.
- Die Summe oder das Produkt von zwei Zahlen ist eine Funktion von zwei Parametern.

3.6.1 Bemerkung: Solche Funktionen sind in unserem Funktionsbegriff bereits enthalten! Der Definitionsbereich M einer Funktion $f : M \to N$ kann nämlich auch ein kartesisches Produkt $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ sein. Damit hängt die Funktion dann von n Parametern ab:

$$f : M \to N\,, \quad (m_1, \ldots, m_n) \mapsto f((m_1, \ldots, m_n))\,.$$

3.6.2 Schreibweise: Beim letzten Ausdruck spart man oft Klammern ein und schreibt einfach $f(m_1, \ldots, m_n)$.

3.7. Relationen

3.7.1 Definition: Eine Relation (Beziehung) zwischen Elementen zweier Mengen M und N ist eine wahrheitswertige Abbildung $\sim\colon M \times N \to \{0, 1\}$. Man verwendet anstelle von $\sim(a, b) = 1$ normalerweise die „Infix"-Schreibweise $a \sim b$.[†]
Wenn $N = M$, so nennt man $\sim$ eine Relation „auf" M.

Beispiele Bisher sind uns unter anderem folgende Relationen begegnet:

- die Elementbeziehung $\in$ und die Teilmengenbeziehung $\subset$,
- die Gleichheit $=$ für Mengen, Funktionen und Zahlen,
- und die Ordnungsrelationen $<$, $>$, $\leqslant$, $\geqslant$ für Zahlen.

3.7.2 Bemerkung:

- Manchmal treten auch mehrstellige Relationen auf, welche eine Beziehung mehrerer Objekte $m_1, \ldots, m_n$ beschreiben.
- Beispiele hierfür wären:
  - „Der Punkt mit Koordinaten (x, y) liegt auf dem Kreis mit Radius r". Dies könnte man als Relation

    $$R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \to \{0, 1\}\,, \quad (x, y, r) \mapsto w(x^2 + y^2 = r^2)$$

    auffassen (w bezeichnet den Wahrheitswert).
  - Student X hört Vorlesung Y bei Dozent Z.
- Solche mehrstelligen Relationen sind Grundlage vieler Datenbanken.

[†]Man unterscheidet Präfix-, Infix- und Postfix-Notation, je nachdem ob der Operator am Anfang, in der Mitte oder am Ende steht. In der Mathematik werden allesamt verwendet: $\sin(x)$, $x = y$, $n!$, ...

3.7.3 Bemerkung: Die Begriffe Menge, Funktion und Relation sind gleich fundamental, weil man jeden von ihnen zur Definition der anderen verwenden könnte:

1. Eine Relation kann als Teilmenge $A \subset M \times N$ aufgefasst werden:
   $a \sim b \ :\Longleftrightarrow \ (a,b) \in A$
2. Eine Funktion kann als spezielle Relation aufgefasst werden, bei der $a \sim b$ für genau ein b gilt. (Dieses b könnte man dann mit $\sim(a)$ bezeichnen.)
3. Mengen M könnten über ihre „charakterististischen Funktionen“
   $$\chi_M : x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   definiert werden.

3.8. Fortgeschrittener Gebrauch von Funktionen

Beobachtung In den vorherigen Abschnitten haben wir schon gesehen, dass unser Funktionsbegriff sehr allgemein war, was vor allem daher rührte, dass die Mengen M und N beliebig sein durften. Es hindert uns daher nichts, für M und N Mengen zu verwenden, die wiederum aus Funktionen bestehen. Beispiele sind:

- M sei die Menge aller Aussageformen $A(x)$.
- M sei die Menge aller Polynome $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- M sei die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Auf solchen Funktionsmengen können nun wieder Funktionen definiert werden. Beispiele sind:

- M sei die Menge aller Aussageformen $A(x)$, N sei die Menge aller Aussagen. Dann kann „$\forall x$:“ als Funktion $M \to N$ angesehen werden.
- Sei $M := \{$„integrierbare“ Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}\}$ und
  $$I : M \to \mathbb{R}\,, \quad f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$
- Sei $M := \{$„ableitbare“ Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $N := \{$alle Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und
  $$D : M \to N\,, \quad f \mapsto f'\,.$$
- Auch die Verkettung $(f : M \to N, g : N \to P) \mapsto g \circ f : M \to P$ kann als Abbildung eines Produkts zweier Funktionsmengen in eine dritte Funktionsmenge aufgefasst werden.

3.8.1 Bemerkung: Das in dieser allgemeinen Weise verstandene Funktionskonzept kann (ebenso wie der Begriff der Menge) als Fundament von Mathematik und Informatik dienen. Um 1936 zeigte Alonzo Church nämlich, dass bereits Funktionsdefinition und Funktionsauswertung ausreichen, um einen „Kalkül“ (Programmiersprache) zu erhalten, der Turing-äquivalent (äquivalent zur Turingmaschine) ist, so dass sich alles „intuitiv berechenbare“ damit berechnen lässt (Church-Turing-These). Dieser sogenannte Lambda-Kalkül ist die Grundlage von funktionalen Programmiersprachen wie etwa Scheme/Lisp, Haskell oder ML.

3.9. Übungsaufgaben

3.9.1 Aufgabe:
1. Geben Sie elementare Definitionen der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv im Falle einer Funktion $f : X \to Y$.
2. Geben Sie eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ sowie ihre Umkehrung $g = f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ an.

3.9.2 Aufgabe: Welche der Funktionen

1. $x \mapsto \sin(x)$, 2. $x \mapsto \exp(x)$, 3. $x \mapsto x^3$

sind injektiv und/oder surjektiv als Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$?

3.9.3 Aufgabe: Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x+2 & x < -1 \\ -x & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-2 & x > 1 \end{cases}$$

Stellen Sie f unter Zuhilfenahme der Betragsfunktion durch einen einzigen, für alle $x \in \mathbb{R}$ gültigen Ausdruck dar. Beweisen Sie auch die Gültigkeit Ihrer Darstellung.

3.9.4 Aufgabe: Es sei $A = \mathbb{R}\backslash\{-\frac{5}{2}\}$. Wie muss $B \subset \mathbb{R}$ gewählt werden, damit

$$f : A \to B\,, \quad x \mapsto \frac{3x-4}{2x+5}$$

bijektiv ist, und wie lautet die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A$ von f?

3.9.5 Aufgabe: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$. Zeigen Sie, dass bei Verkettung $f \circ g \neq g \circ f$ gilt.

3.9.6 Aufgabe: Ausgehend von den Additionstheoremen

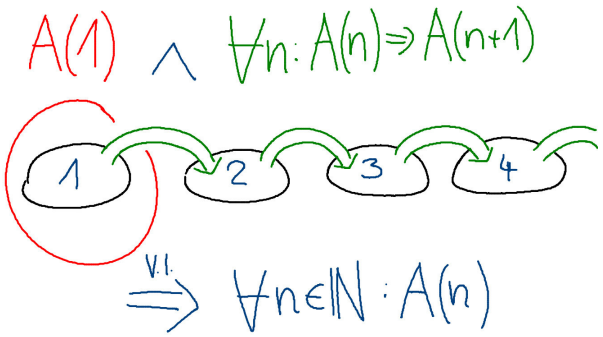
$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \end{aligned}$$

leiten Sie Formeln für die Größen $\cos(2\alpha)$ und $\sin(2\alpha)$ her, d.h. schreiben Sie auch diese als Ausdrücke in $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$. Warum folgt hieraus $\sin(30^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$?

Teil II.

Zahlen

4. Natürliche Zahlen



Für eine ausreichend mächtige Mathematik fehlt uns nach dem Grundlagenteil über Logik, Mengen und Funktionen nur noch eines: Wir brauchen eine genügend große Menge, mit deren Elementen wir in geeigneter Weise arbeiten können.

4.1. Peano-Axiome

4.1.1 Definition: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind eine Menge definiert durch die folgenden Axiome (Axiome von Peano):

1. $1 \in \mathbb{N}$.
2. Es gibt eine Nachfolgerfunktion $\mathrm{Succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für welche gilt:
3. Succ ist injektiv, d.h. $\mathrm{Succ}(x) = \mathrm{Succ}(y) \Rightarrow x = y$.
4. $1 \notin \mathrm{Bild}(\mathrm{Succ})$
5. Vollständige Induktion: Wenn für eine Aussageform $A(n)$ gilt
   a) $A(1)$ und
   b) $\forall n \in \mathbb{N} : (A(n) \Rightarrow A(\mathrm{Succ}(n)))$,

   so gilt die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$.

4.1.2 Bemerkungen:

- Mittels des Axioms der vollständigen Induktion lässt sich sofort folgern, dass jede natürliche Zahl von der 1 ausgehend durch wiederholtes Anwenden der Funktion Succ erreicht werden kann.
- Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat einen neuen Nachfolger, so dass $\mathbb{N}$ aus *unendlich vielen* Elementen besteht. Die Existenz einer solchen *unendlichen* Menge ist genau genommen sogar die Essenz der Peano-Axiome.

- Zusammen mit Grundaxiomen der Logik und der Mengenlehre kann man hieraus die *gesamte* Mathematik aufbauen: der Rest besteht nur noch aus Definitionen und beweisbaren mathematischen Sätzen.
- Der Mathematiker Leopold Kronecker formulierte das in etwa so: *Die natürlichen Zahlen hat Gott gemacht; alles andere ist Menschenwerk.*

4.2. Arithmetische Operationen

Mittels der obigen Axiome können auf $\mathbb{N}$ arithmetische Operationen definiert werden.

4.2.1. Addition

4.2.1 Definition: Wir definieren die Summe $m + n$ von $m, n \in \mathbb{N}$ als n-faches Ausführen von Succ auf $m \in \mathbb{N}$. In Formeln

$$m + n := \begin{cases} \mathrm{Succ}(m) & n = 1 \\ \mathrm{Succ}(m) + k & n = \mathrm{Succ}(k)\,. \end{cases}$$

oder alternativ mit Hilfe von $\mathrm{Pred} := \mathrm{Succ}^{-1}$

$$m + n := \begin{cases} \mathrm{Succ}(m) & n = 1 \\ \mathrm{Succ}(m) + \mathrm{Pred}(n) & n \in \mathbb{N}, n \neq 1\,. \end{cases}$$

4.2.2 Bemerkung: Man kann zeigen, dass für das so definierte $+$ folgende Regeln gelten:

- Assoziativgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativgesetz: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a + b = b + a$

4.2.3 Bemerkung: Wegen des Assoziativgesetzes sind Ausdrücke wie

$$a + b + c\,, \quad a_1 + \ldots + a_n$$

auch ohne Klammersetzung wohldefiniert. Man definiert für den letzteren Ausdruck auch die Abkürzung:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + \ldots + a_n\,.$$

4.2.2. Multiplikation

4.2.4 Definition: Für $m, n \in \mathbb{N}$ definieren wir das Produkt $m \cdot n$ als

$$m \cdot n := \sum_{k=1}^{n} m\,,$$

oder elementarer als

$$m \cdot n := \begin{cases} m & n = 1 \\ (m \cdot k) + m & n = \mathrm{Succ}(k) \end{cases}\,.$$

4.2.5 Bemerkung: Man kann zeigen, dass das Produkt $\cdot$ folgendes erfüllt:

- Assoziativgesetz: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kommutativgesetz: $\forall a, b \in \mathbb{N} : a \cdot b = b \cdot a$
- Neutrales Element: Es gibt genau ein Element $e \in \mathbb{N}$ (nämlich $e = 1$), so dass $a \cdot e = e \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

Wieder ist der Ausdruck $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ wohldefiniert, und man schreibt ihn als

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \,.$$

4.2.6 Bemerkung: Bei der Multiplikation hat es sich eingebürgert, den Punkt wegzulassen, wenn keine Verwirrung entsteht, z.B. $ab = a \cdot b$. Das ist insbesondere deswegen möglich, weil Mathematiker meist einbuchstabige Namen für Variablen und Funktionen verwenden.

4.2.7 Bemerkung: Addition und Multiplikation sind in $\mathbb{N}$ verbunden durch das Distributivgesetz

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : \; a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \,.$$

4.2.8 Bemerkung: Assoziativgesetz und Kommutativgesetz sind keine Selbstverständlichkeiten. Sie gelten zum Beispiel nicht bei Subtraktion, Division oder bei der durch

$$m^n := \begin{cases} m & n = 1 \\ m^k \cdot m & n = \mathrm{Succ}(k) \end{cases} .$$

definierten Potenzbildung. Auch die später auftretende Matrizenmultiplikation wird assoziativ, aber nicht kommutativ sein.

4.2.9 Bemerkung: Auch die Mengenoperationen $\cup$, $\cap$ sind assoziativ (und kommutativ). Insofern machen auch hier die folgenden Abkürzungen Sinn:

$$\bigcup_{k=1}^{n} M_k := M_1 \cup \ldots \cup M_n \,,$$
$$\bigcap_{k=1}^{n} M_k := M_1 \cap \ldots \cap M_k \,.$$

4.2.3. Ordnung

4.2.10 Definition: Für Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ ist m *kleiner als* n ($m < n$), wenn

$$m < n \;:\Longleftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} : m + k = n \,.$$

Davon abgeleitet setzen wir auch noch

1. $m \leqslant n \;:\Longleftrightarrow\; (m < n) \vee (m = n)$ („kleiner oder gleich“),
2. $m > n \;:\Longleftrightarrow\; (n < m)$ („größer“) und
3. $m \geqslant n \;:\Longleftrightarrow\; n \leqslant m$ („größer oder gleich“).

4.3. Natürliche Zahlen mit Null

Beobachtung Im Gegensatz zur Multiplikation fehlt der Addition in $\mathbb{N}$ ein neutrales Element.

Abhilfe Man führt ein Element 0 ein mit $\mathrm{Succ}(0) = 1$ und setzt $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Man zeigt auch, dass man $+$ und $\cdot$ auf $\mathbb{N}_0$ wie folgt erweitern kann:

$$0 + n = n \quad \text{und} \quad 0 \cdot n = 0\,.$$

Kommutativität, Assoziativität und Distributivität bleiben dabei erhalten.

4.3.1 Bemerkung: 0 ist auch der „richtige“ Wert für die „leere“ Summe $\sum_{k=1}^{0} a_k$, weil dann die Rekursion

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) + a_n & n > 0 \end{cases}$$

gilt. Aus dem gleichen Grund ist 1 der „richtige“ Wert für das „leere“ Produkt $\prod_{k=1}^{0} a_k$.

4.3.2 Bemerkung: Historisch erhielt die Null —wenigstens in Europa— erst sehr spät die ihr gebührende Bedeutung. Durch Einführung des Dezimalsystems* wurde sie aber unentbehrlich.

4.4. Vollständige Induktion

Das Axiom der vollständigen Induktion kann nicht nur zum Beweis von Grundlagen (wie der Eigenschaften von Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$) verwendet werden, sondern ist auch auf höherer Ebene zu gebrauchen.

Beweisstruktur der vollständigen Induktion Ein Beweis mit Hilfe von vollständiger Induktion sieht wie folgt aus:

1. Induktionsanfang: Es gilt die Eigenschaft $A(1)$.
2. Induktionsschritt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Wenn beides erfüllt ist, so liefert das Axiom der vollständigen Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (Induktionsschluss).

4.4.1 Bemerkung: Zur Verdeutlichung hebt man oft auch die Annahme von $A(n)$ innerhalb des Induktionsschritts hervor und bezeichnet es als Induktionsannahme oder Induktionsvoraussetzung.

*Dieses stammt ursprünglich aus Indien und gelangte dann über die arabische Welt nach Europa.

4.4.1. Beispiel: Summation

4.4.2 Beispiel: Dem Schüler Carl Friedrich Gauß wurde einmal von einem Lehrer die Aufgabe erteilt, die Zahlen von $1, \ldots, 100$ aufzusummieren. Der Lehrer war sehr erstaunt, als ihm Gauß nach kurzem Nachdenken die Lösung 5050 mitteilte. Dieser hatte nämlich einfach verwendet, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

4.4.3 Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis Die Aussageform $A(n)$ ist hier offenbar

$$A(n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $A(1)$, nämlich $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$.

2. Induktionsannahme: Wir nehmen an, dass die Aussage $A(n)$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt, also $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Induktionsschritt: Dann gilt $A(n+1)$ wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \\
&\overset{\text{Verwende } A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&\overset{\text{Hauptnenner}}{=} \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&\overset{\text{Ausklammern}}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

4. Induktionsschluss: Weil das obige $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, können wir durch vollständige Induktion schließen, dass $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist.

4.4.4 Bemerkung: Der Hauptnachteil der vollständigen Induktion ist, dass man den vorliegenden Zusammenhang (die Aussageform A) zuerst erraten muss, bevor man einen Beweis dafür führen kann. Manchmal (meist?) gibt es alternative Beweise, die auch die Aussage

konstruktiv liefern. So hat auch Gauß die obige Beziehung wahrscheinlich auf andere Weise „gesehen“, wie zum Beispiel folgende Umsortierung:

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+100 &= \underbrace{(1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51)}_{\text{50-mal}} \\ &= 50\cdot 101 = 5050 \end{aligned}$$

Andererseits: Eine exakte Formulierung dieser Argumentation würde wieder das Induktionsaxiom benötigen.

4.4.2. Variationen und Verallgemeinerungen

4.4.5 Bemerkung: Die vollständige Induktion kann man auf verschiedene Weisen verallgemeinern:

- Wenn man die Induktion bei 0 anfängt, kann man eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zeigen.
- Manchmal ist es notationsmäßig angenehmer, $A(n-1)$ anzunehmen und $A(n)$ zu schließen.
- Manchmal gilt eine Aussage erst ab einem bestimmten $n_* \in \mathbb{N}$. In diesem Fall lässt man die Induktion statt bei 1 einfach bei n_* anfangen. Das Resultat ist die Gültigkeit der Aussage für die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_*\}$.
- Manchmal verwendet der Induktionsschritt nicht nur $A(n)$ sondern die Gültigkeit von $A(1), \ldots, A(n)$. Wie man leicht sieht, ist das auch erlaubt. (Beweis: Man verwendet die alte Formulierung mit der modifizierten Aussageform $\tilde{A}(n) = (\forall k \leqslant n : A(k))$.)

4.4.6 Übung: (Geometrische Summe) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,.$$

4.4.7 Übung: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2\,.$$

4.4.3. Rekursive Funktionsdefinition

4.4.8 Bemerkung: Aus dem Axiom der vollständigen Induktion ergibt sich auch, dass eine Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0$) rekursiv definiert werden kann. Dies geschieht wie folgt:

1. Man legt Werte für $f(1), \ldots, f(k)$ fest.

2. Man gibt eine Vorschrift an, wie man für $n > k$ den Wert $f(n)$ aus den Werten $f(1), \ldots, f(n-1)$ berechnet.

Beispiele

- Wenn man genau hinschaut, so sind die rekursiven Definitionen von $\sum_{k=1}^{n} a_k$ oder $\prod_{k=1}^{n} a_k$ genau von dieser Form.
- Die Fakultät ist als Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert als

$$n \mapsto n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases} .$$

- Die Fibonacci-Zahlen erhält man durch

$$\mathrm{Fib} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 , \quad n \mapsto \mathrm{Fib}(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 , \\ 1 & n = 1 , \\ \mathrm{Fib}(n-1) + \mathrm{Fib}(n-2) & n \geqslant 2 . \end{cases}$$

4.4.9 Beispiel: Etwas anders aussehend, aber doch im wesentlichen das gleiche, ist die rekursive Definition des sogenannten Binomialkoeffizienten $B_{n,k} = \binom{n}{k}$ für $n \geqslant 0$ und $0 \leqslant k \leqslant n$ über das „Pascalsche Dreieck“. Diese lautet

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & k \in \{0, n\} \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & 1 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases} .$$

Bemerkung: Auch diese Rekursion fällt in den bisherigen Rahmen, indem man entweder die $B_{n,k}$ für $0 \leqslant k \leqslant n$ zu einem Tupel B_n zusammenfasst oder alternativ die Paare $P = \{(n,k) \mid n, k \in \mathbb{N}_0 \wedge 0 \leqslant k \leqslant n\}$ geeignet durch eine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \to P$ „abzählt“.)

4.4.10 Aufgabe: Stellen Sie das Pascalsche Dreieck im Bereich $n = 0, \ldots, 5$ dar. (Hierbei schreibt man die Binomialkoeffizienten so übereinander, dass sich jeder als Summe der über ihm stehenden ergibt. Jede Zeile des Dreiecks enthält die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ für ein bestimmtes n.)

4.4.11 Aufgabe: Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} .$$

4.4.4. Beispiel: Teilmengen

4.4.12 Definition: Für eine endliche Menge M bezeichne $|M|$ die Zahl ihrer Elemente.

4.4.13 Satz: Für eine endliche Menge M gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$.

Beweis Wir führen eine Induktion nach $n := |M|$:

- Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n = |M| = 0$, weil $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.
- Induktionsannahme: Wir nehmen nun an, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ für alle n-elementigen Mengen gilt. Solche haben die Form $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ mit paarweise verschiedenen m_i (d.h. $m_i \neq m_j$ für $i \neq j$).
- Induktionsschritt: Sei nun M' eine $n+1$-elementige Menge der Form $M' = \{m_1, \ldots, m_{n+1}\} = M \cup \{m_{n+1}\}$. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M') = \underbrace{\{A \subset M' \mid m_{n+1} \notin A\}}_{=:X} \cup \underbrace{\{A \subset M' \mid m_{n+1} \in A\}}_{=:Y}$$

- Die Menge X ist aber offenbar gerade $\mathcal{P}(M)$ und die Menge Y ist das Bild von X unter der bijektiven Abbildung $\Phi : X \to Y$, $A \mapsto A \cup \{m_{n+1}\}$, woraus wir schließen, dass $|Y| = |X| = |\mathcal{P}(M)| = 2^n$.
- Weil zudem $X \cap Y = \varnothing$, gilt

$$|\mathcal{P}(M')| = |X| + |Y| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\,.$$

- Folglich gilt die Formel auch für alle $n+1$-elementigen Mengen und der Induktionsschritt ist bewiesen.
- Axiom der vollständigen Induktion: Hierauf kann man sich nun berufen und folgern, dass die Behauptung für alle endlichen Mengen (d.h. für alle M mit $|M| = n \in \mathbb{N}$) gilt.

4.4.14 Bemerkung: Auch hier gibt es alternative Beweise oder anschauliche Begründungen, wie zum Beispiel die folgende: Jede Teilmenge $A \subset M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ entspricht eineindeutig einem n-Tupel $(k_1, \ldots, k_n)$, mit $k_i \in \{0, 1\}$, wobei $k_i = 1$, wenn $m_i \in A$ und $k_i = 0$, wenn $m_i \notin A$. Von solchen Tupeln gibt es aber 2^n verschiedene.

4.4.15 Satz: Die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge M ist gegeben als $\binom{n}{k}$.

Beweis Für $k = 0$ und $k = n$ ist die Aussage richtig (es gibt nur eine solche Menge, nämlich die leere Menge oder die gesamte Menge). Für $1 \leqslant k \leqslant n-1$ zerlegt sich die Menge der k-elementigen Teilmengen von $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ dagegen in zwei disjunkte Teile, nämlich:

1. $\binom{n-1}{k-1}$ Teilmengen, die jeweils aus m_n und einer $k-1$-elementigen Teilmenge von $\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$ bestehen,
2. sowie $\binom{n-1}{k}$ k-elementigen Teilmengen von $\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$.

Folglich erfüllt die Zahl k-elementiger Teilmengen von n-elementigen Mengen dieselbe Rekursionsvorschrift wie die Binomialkoeffizienten und muss deshalb gleich diesen sein.

4.4.16 Bemerkung: Der Name Binomialkoeffizient rührt daher, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Wenn man hier $a = b = 1$ setzt, erhält man $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (was ja auch wegen der Interpretation von $\binom{n}{k}$ als Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge Sinn macht).

4.4.17 Anwendung:

- Interessant ist auch die Betrachtung der Zerlegung

$$1 = (p + (1-p))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

für $p \in [0, 1]$.

- Hier ist der Term $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ nämlich gerade die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem Bernoulli-Experiment mit Eintrittswahrscheinlichkeit p gerade k positive Ergebnisse bei n-maligem Durchführen erhält.
- Man kann dann zeigen†, dass die relative Häufigkeit $\frac{k}{n}$ für große n mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 70% innerhalb des Intervalls $[p-\delta, p+\delta]$ mit $\delta = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ liegt.
- Bei Meinungsumfragen ist dieser statistische Fehler, der nur relativ langsam mit wachsendem n abnimmt (z.B. gilt $\delta \approx 1\%$ für $p = 20\%$ und $n = 1500$ Stichproben), immer zu erwarten!
- Dazu kommen dann noch etliche systematische Fehler, wie etwa unterschiedliche Erreichbarkeit bzw. Antwortbereitschaft von angerufenen Testpersonen.

4.4.18 Satz: Man kann für $\binom{n}{k}$ auch eine explizite Berechnungsformel angeben, nämlich

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Beweis Der Beweis geschieht wieder durch vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist die Aussage wegen $\frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1$ richtig, und wir nehmen die Gültigkeit der Darstellung für n und alle $0 \leqslant k \leqslant n$ an.

†Wir werden später im Stochastik-Teil noch einmal darauf eingehen.

Für den Induktionsschritt müssen wir die entsprechende Aussage für $n+1$ und $0 \leqslant k \leqslant n+1$ zeigen. Für $k = 0$ und $k = n + 1$ ist die Aussage wegen

$$1 = \frac{(n+1)!}{0! \cdot (n+1)!}$$

richtig, und für $1 \leqslant k \leqslant n$ ergibt sie sich wegen

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &\overset{\text{Definition}}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
&\overset{\text{Induktionsannahme}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\
&\overset{\text{Hauptnenner}}{=} (n+1-k)\frac{n!}{k!(n+1-k)!} + k\frac{n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= (n+1)\frac{n!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}
\end{aligned}$$

5. Einschub: Gruppen und Kombinatorik

5.1. Gruppen

Beobachtung Viele wichtige Mengen besitzen eine Struktur, die durch Operationen mit gewissen Eigenschaften definiert wird. Es ist wichtig, solche einheitlichen Muster zu (er)kennen, weil man sich dadurch Denk- und Erinnerungsarbeit sparen kann!

5.1.1 Bemerkung: Im objektorientierten Programmieren bezeichnet man solche Strukturen als abstrakter Datentyp (ADT), dessen Implementation dann zu Klassen und Methoden führt.

5.1.2 Definition: G sei eine Menge, auf der eine Verknüpfung

$$* : G \times G \to G\,, \quad (a,b) \mapsto a * b$$

definiert ist.

1. $(G,*)$ heißt Halbgruppe, wenn das Assoziativgesetz gilt:
$$\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)\,.$$
2. Die Halbgruppe $(G,*)$ heißt Monoid, wenn es ein neutrales Element $e \in G$ gibt mit
$$\forall a \in G : \quad a*e = e*a = a\,.$$
3. Das Monoid $(G,*)$ heißt Gruppe, wenn zu jedem $a \in G$ ein inverses Element $a' \in G$ existiert mit
$$a*a' = a'*a = e\,.$$
4. Wenn in einer (Halb-)Gruppe $(G,*)$ das Kommutativgesetz
$$\forall a,b \in G : \quad a*b = b*a\,.$$
gilt, so nennt man $(G,*)$ Kommutative oder Abelsche (Halb-)Gruppe.

Beispiele

- $\mathbb{N}$ ist eine kommutative Halbgruppe bezüglich der Addition $+$ und ein kommutatives Monoid bezüglich der Multiplikation $\cdot$.

- $\mathbb{Z}$ ist eine kommutative Gruppe bezüglich $+$ und ein kommutatives Monoid bezüglich $\cdot$.
- Die Zahlenmengen $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind kommutative Gruppen bezüglich der Addition, die Zahlenmengen $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ oder $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ sind kommutative Gruppen bezüglich der Multiplikation.
- Die bijektiven Abbildungen einer Menge M auf sich selbst bilden eine nicht-kommutative Gruppe bezüglich der Verkettung $\circ$.
- Viele Operationen liefern aber auch keine (Halb-)Gruppe, wie z.B. die Rechenoperationen minus $-$, und geteilt $/$.
- Auch die Gleitkomma-Zahlen und die Gleitkomma-Addition, wie sie in Taschenrechnern und Computern verwendet wird, bilden aufgrund von Rundungsfehlern nicht einmal eine (Halb-)Gruppe.

5.1.3 Aufgabe: 1. Es sei G eine Menge und $* : G \times G \to G$. Was muss erfüllt sein, damit $(G, *)$ eine Gruppe ist?

2. Nun sei $G = \{e, a, b\}$ und $*$ genüge der Verknüpfungstabelle

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	a
b	b	a	e

Warum ist $(G, *)$ keine Gruppe?

5.1.4 Aufgabe: Finden Sie auf Ihrem Taschenrechner ein Beispiel für die Verletzung des Assoziativgesetz bei Gleitkommaoperationen.

5.2. Selbstabbildungen

5.2.1 Bezeichnung: Es sei M eine Menge. Die Menge der Selbstabbildungen von M bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Selbst}(M) := \{f \mid f : M \to M\}.$$

Die Teilmenge der bijektiven Selbstabbildungen bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Bijektiv}(M) := \{f \mid f : M \to M \text{ bijektiv}\}.$$

5.2.2 Satz: Es bezeichne $\circ$ die Verknüpfung (Hintereinanderausführung) von Funktionen. Für jede Menge M ist $(\mathrm{Selbst}(M), \circ)$ ein Monoid und $(\mathrm{Bijektiv}(M), \circ)$ eine Gruppe.

Beweis Das Assoziativgesetz hatten wir bereits gezeigt, die Identität $\mathrm{id}_M : M \to M,\ x \mapsto x$ ist das neutrale Element, und zu $f \in \mathrm{Bijektiv}(M)$ ist die Umkehrfunktion $f^{-1} \in \mathrm{Bijektiv}(M)$ das inverse Element mit $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_M$.

5.2.3 Bemerkung: Sowohl $\mathrm{Selbst}(M)$ als auch $\mathrm{Bijektiv}(M)$ sind normalerweise *nicht* kommutativ!

5.2.4 Beispiel: Seien $M = \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x + 1$. Dann gilt $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

5.2.5 Aufgabe: Definieren Sie den Begriff einer „kommutativen Gruppe". Geben Sie für $M = \{1, 2\}$ die Gruppe $\mathrm{Bijektiv}(M)$ explizit an. Ist $\mathrm{Bijektiv}(M)$ kommutativ?

5.2.6 Definition: (Potenzen von Selbstabbildungen) Zu $f \in \mathrm{Selbst}(M)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die k-te Potenz $f^k \in \mathrm{Selbst}(M)$ als

$$f^k := \begin{cases} \mathrm{id}_M & k = 0 \\ f \underbrace{\circ \cdots \circ}_{k-\text{mal}} f & k > 0 \end{cases}$$

Wenn $f \in \mathrm{Bijektiv}(M)$ und $f^{-1} \in \mathrm{Bijektiv}(M)$ die zugehörige Umkehrfunktion bezeichnet, so können wir Potenzen $f^{-k} \in \mathrm{Bijektiv}(M)$ auch für negative ganze Zahlen definieren als

$$f^k := \begin{cases} f^{-1} & k = -1\,, \\ f^{-1} \underbrace{\circ \cdots \circ}_{(-k)-\text{mal}} f^{-1} & k \in \mathbb{Z} \text{ mit } k < -1\,. \end{cases}$$

5.2.7 Bemerkung: Für Potenzen von $f \in \mathrm{Selbst}(M)$ gelten die üblichen Rechenregeln

$$\begin{aligned} f^k \circ f^l &= f^{k+l}\,, \\ (f^k)^l &= f^{kl}\,, \end{aligned}$$

wobei $k, l \in \mathbb{N}_0$ sein darf.
Für $f \in \mathrm{Bijektiv}(M)$ gilt dasselbe sogar für $k, l \in \mathbb{Z}$.

Warnung Wegen der fehlenden Kommutativität von $\circ$ gilt aber im Falle $f \neq g$ normalerweise nicht $f^k \circ g^k = (f \circ g)^k$!

5.3. Permutationen

5.3.1 Definition: Eine Permutation $\pi \in S_n := \mathrm{Selbst}(\{1, \ldots, n\})$ ist eine bijektive Selbstabbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Eine Permutation π bezeichnet man durch

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \pi(1) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Damit π bijektiv ist, muss $\pi(i) \neq \pi(j)$ für $i \neq j$ sein.

5.3.2 Beispiel: Die Permutation $\pi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit

n	1	2	3
$\pi(n)$	2	3	1

würde man als $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ schreiben.

5.3.3 Anwendungen: Sehr viele: Mischen von Karten, Sortieralgorithmen, Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, ...
Ein erster Einblick wird im folgenden Abschnitt über Kombinatorik gegeben.

5.3.4 Bemerkung: Wie *alle* bijektiven Selbstabbildungen bilden die Permutationen eine Gruppe. Man kann sie also verketten, so ist zum Beispiel für $\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\pi^2 = \pi \circ \pi &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}\\ \pi^3 = \pi \circ (\pi \circ \pi) &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \mathrm{id}\end{aligned}$$

Das Inverse zu π ist daher offenbar $\pi^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix} [= \pi^2]$. Allgemein erhält man π^{-1}, indem man π „von unten nach oben“ liest und dabei umordnet.

5.3.5 Bemerkung: Für Permutationen gibt es eine alternative Darstellung durch sogenannte Zykel. Diese erhält man, indem man

$$\pi = \big(k_1 \quad \pi(k_1) \quad \pi^2(k_1) \quad \cdots\big)_{\circlearrowleft} \big(k_2 \quad \pi(k_2) \quad \pi^2(k_2) \quad \cdots\big)_{\circlearrowleft} \cdots$$

schreibt, wobei alle Zahlen in diesen Ketten verschieden sein müssen. 1-Zykel (Zahlen, die von π auf sich selbst abgebildet werden) lässt man dabei normalerweise weg. Diese Zykelschreibweise ist insbesondere für die Berechnung von Potenzen π^k sehr praktisch.

5.3.6 Bezeichnung: Die Darstellung $(\ldots)_{\circlearrowleft}$ finde ich hübsch, sie ist allerdings eine Erfindung von mir. Andere Literatur bezeichnet Zykel einfach mit $(\ldots)$, was sich dann aber natürlich mit Tupeln und Zeilenvektoren überlappt.

5.3.7 Beispiel: Die Permutation

n	1	2	3	4	5	6
$\pi(n)$	5	4	1	2	3	6

könnten wir zum Beispiel als $\pi = \big(1 \quad 5 \quad 3\big)_{\circlearrowleft} \big(2 \quad 4\big)_{\circlearrowleft}$ schreiben. Hieraus sieht man, dass die wiederholte Anwendung von π die Elemente 1, 5 und 3 zyklisch mit Periode 3 vertauscht, ebenso die Elemente 2 und 4 mit Periode 2. Offenbar muss dann π^6 wieder die Identität sein. Die Gesamtperiode 6 ergibt sich dabei als das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelperioden aller Zykel.

5.3.8 Bemerkung: Der Begriff Permutation wird auch oft in einem etwas anderen Sinn verwendet. Wenn man nämlich ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben hat, so definiert jedes $\pi \in S_n$ ein Tupel $(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$, welches man dann ebenfalls als Permutation von $(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet. In diesem Sinne wäre also das Tupel (Tisch, Teller, Tasse) eine Permutation des Tupels (Tasse, Teller, Tisch).

5.4. Anwendungen in der Kombinatorik

5.4.1 Satz: Es gibt genau n^k verschiedene Abbildungen einer k-elementigen Menge M in eine n-elementige Menge P.

Beweis Beweis mit Induktion nach k (sehr ähnlich zum Beweis für $\mathcal{P}(M) = 2^{|M|}$ oder auch zum Beweis des folgenden Satzes).

5.4.2 Folgerung: Wenn P eine n-elementige Menge ist, so gilt $|P^k| = n^k$. (Es gibt n^k verschiedene k-Tupel $(p_1, \ldots, p_k) \in P^k$.)

5.4.3 Folgerungen:

- Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, um k Personen auf n Plätze zu verteilen.
- Die Zahl aller n-Permutationen ist $|S_n| = n!$.
- Wenn P eine n-elementige Menge ist, so gibt es $\frac{n!}{(n-k)!}$ Tupel $(p_1, \ldots, p_k) \in P^k$ mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$.

Erinnerung Die Zahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist gegeben durch den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

(Beachte: Dies sind um den Faktor $\frac{1}{k!}$ weniger als die Zahl der k-Tupel mit verschiedenen Elementen. Der Grund ist, dass es bei Mengen im Gegensatz zu Tupeln nicht auf die Reihenfolge ankommt.)

5.4.4 Anwendung: Wir wollen den „Erwartungswert“ des Gewinns beim Lotto „6 aus 49“ bestimmen (dies ist der „mittlere“ Gewinn, der sich ergibt, wenn man sehr oft spielt).

- Die Wahrscheinlichkeit für sechs Richtige im Lotto „6 aus 49“ ist

$$\frac{\text{Zahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Zahl aller Möglichkeiten}} = \frac{1}{\text{Zahl aller 6-elementigen Teilmengen}}$$
$$= \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{14 \cdot 10^6}\,.$$

- Für k Richtige ist die Zahl der günstigen Möglichkeiten offenbar gegeben als

$$\binom{6}{k} \cdot \binom{43}{6-k}$$

(Zahl der k-elementigen Teilmengen, die man aus den 6 richtigen Zahlen bilden kann, mal der Zahl der $6-k$ Teilmengen, die man aus den 43 falschen Zahlen bilden kann).

Als Tabelle ergibt sich:

k	6	5	4	3
N	1	258	13545	246820

was natürlich jeweils durch $1.4 \cdot 10^7$ geteilt werden muss, um die Wahrscheinlichkeiten zu erhalten. Für 3 Richtige ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von etwa 1.8 Prozent.

- Die durchschnittliche Ausschüttung pro Tipp erhält man nun, indem man noch die Ausschüttungssummen einberechnet. Im Internet habe ich z.B. folgende Zahlen gefunden:

Richtige	Gewinn in Euro
6	1 Million
5	2600
4	40
3	10

Hieraus erhält man für den mittleren Gewinn

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 10^6 + 2600 \cdot 258 + 13545 \cdot 40 + 246820 \cdot 10}{14 \cdot 10^6} \\ = \quad & \frac{1.000.000 + 670.800 + 541.800 + 2.468.200}{14 \cdot 10^6} \\ \approx \quad & \frac{4.7 \cdot 10^6}{14 \cdot 10^6} \approx 0.33[\text{Euro}]\,. \end{aligned}$$

Man sieht, dass die durchschnittliche Ausschüttung pro Tipp bei etwa 33 Cent liegt. Ein Tipp kostet aber ungefähr 80 Cent, was eine Rückgabequote von nur 40% bedeutet.

5.4.5 Aufgabe: Wir betrachten eine zufällig ausgewählte Gruppe von N Personen.

1. Wie groß muss N sein, damit mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit zwei Personen der Gruppe am gleichen Tag Geburtstag haben?

2. Ab welcher Gruppengröße N ist die Wahrscheinlichkeit etwa 50%, dass eine Person der Gruppe an einem vorgegebenen Jahrestag Geburtstag hat?

6. Ganze und rationale Zahlen

6.1. Ganze Zahlen

Beobachtung Gleichungen wie etwa $5 + n = 2$ besitzen keine Lösung $n \in \mathbb{N}_0$. (Und Probleme dieser Art sind auch praktisch relevant. Beispiele?)

Abhilfe Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $-n$ als die Lösung von $n + (-n) = 0$. Die Menge der ganzen Zahlen ist dann

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-1, -2, \ldots\}\,.$$

6.1.1 Bemerkung:

- Addition und Multiplikation von $\mathbb{N}$ lassen sich unter Beibehaltung von Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz so auf $\mathbb{Z}$ erweitern, dass $\mathbb{Z}$ eine (kommutative) Gruppe bezüglich der Addition ist. Unter anderem gilt dann

$$n + (-1) \cdot n = 1 \cdot n + (-1) \cdot n = (1 + (-1)) \cdot n = 0 \cdot n = 0\,,$$

  woraus wir sehen, dass gilt $-n = (-1) \cdot n$.

- Auch die Ordnungsoperationen $<,\leqslant,>,\geqslant$ können auf $\mathbb{Z}$ erweitert werden.

6.1.2 Bezeichnung: Das Minuszeichen kann generell als Bezeichnung für ein additives Inverses verwendet werden, so dass gilt $-(-n) = n$. Außerdem führen wir auch das binäre Minus ein als $a - b := a + (-b)$. BEACHTE: Dieser Operator erfüllt weder Assoziativ- noch Kommutativgesetz.

6.1.3 Definition: Wir definieren auch den Absolutbetrag

$$\mathrm{abs} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0\,, \quad z \mapsto |z| := \begin{cases} z & z \in \mathbb{N}_0 \\ -z & z \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

sowie das Signum (Vorzeichen) als

$$\mathrm{sign} : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}\,, \quad z \mapsto \begin{cases} 1 & z \in \mathbb{N} \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

6.2. Rationale Zahlen

Beobachtung Gleichungen wie $3 \cdot k = 2$ besitzen keine Lösung $k \in \mathbb{Z}$. Und natürlich sind auch solche Gleichungen in der Praxis wichtig...

6.2.1 Definition:

- Es sei $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
- Wir definieren die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als die Menge aller Brüche

$$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\},$$

wobei folgende Gleichheit gelten soll:

$$\frac{m_1}{n_1} \overset{\mathbb{Q}}{=} \frac{m_2}{n_2} :\Longleftrightarrow m_1 n_2 \overset{\mathbb{Z}}{=} m_2 n_1 .$$

BEDEUTUNG: Beispielsweise soll $\frac{2}{3}$ dieselbe Zahl bezeichnen wie $\frac{4}{6}$.

- Addition und Multiplikation von Brüchen wird wie folgt definiert:

$$\frac{m_1}{n_1} \overset{\mathbb{Q}}{+} \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} n_2 \overset{\mathbb{Z}}{+} m_2 \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} n_1}{n_1 \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} n_2}, \qquad \frac{m_1}{n_1} \overset{\mathbb{Q}}{\cdot} \frac{m_2}{n_2} := \frac{m_1 \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} m_2}{n_1 \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} n_2}.$$

BEDEUTUNG: Wieder definiert man neue Operationen durch bereits bekannte.

- Die Ordnungsoperation $<$ definieren wir als

$$\frac{m_1}{n_1} \overset{\mathbb{Q}}{<} \frac{m_2}{n_2} :\Longleftrightarrow m_1 n_2 \overset{\mathbb{Z}}{<} m_2 n_1 ,$$

wobei wir annehmen, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sind.* Ausgehend von $<$ und $=$ können dann wieder $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ abgeleitet werden.

6.2.2 Bemerkung:

- Die Menge $\mathbb{Z}$ kann man in $\mathbb{Q}$ „einbetten“ durch die injektive Abbildung $I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}} : m \mapsto \frac{m}{1}$.
- Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ vertragen sich dabei mit $I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}$ gemäß

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}(m \overset{\mathbb{Z}}{+} n) &\overset{\mathbb{Q}}{=} I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}(m) \overset{\mathbb{Q}}{+} I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}(n) \\ I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}(m \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} n) &\overset{\mathbb{Q}}{=} I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}(m) \overset{\mathbb{Q}}{\cdot} I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}(n) . \end{aligned}$$

- Dies kann man wie folgt in einem sogenannten kommutativen Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \xrightarrow{+ \text{ oder } \cdot \text{ in } \mathbb{Z}} & \mathbb{Z} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}\times I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle I_{\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}}} \\ \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \xrightarrow{+ \text{ oder } \cdot \text{ in } \mathbb{Q}} & \mathbb{Q} \end{array}$$

*Alternativ kann man auch die immer gültige Bedingung $m_1 n_1 n_2^2 < m_2 n_2 n_1^2$ verwenden (warum?).

- Kommutativität des Diagramms bedeutet dabei, dass die vorstehenden Formeln gelten und man daher zum gleichen Ergebnis kommt, egal auf welchem Weg man im Diagramm von links oben nach rechts unten gelangt.

- In solch einer Situation kann man die Notation vereinfachen und die Operatoren $\overset{\mathbb{Z}}{+}, \overset{\mathbb{Q}}{+}, \overset{\mathbb{Z}}{\cdot}, \overset{\mathbb{Q}}{\cdot}, \overset{\mathbb{Z}}{=}, \overset{\mathbb{Q}}{=}, \ldots$ einfach mit $+, \cdot, =, \ldots$ bezeichnen.

Beobachtung

- Jedes $q \neq 0$ hat ein multiplikatives Inverses: Wenn $q = \frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, so ist

$$q^{-1} = \frac{n}{m}$$

das multiplikative Inverse zu q wegen

$$\frac{m}{n} \overset{\mathbb{Q}}{\cdot} \frac{n}{m} \overset{\mathbb{Q}}{=} \frac{m \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} n}{n \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} m} \overset{\mathbb{Q}}{=} \frac{1}{1} \overset{\text{vereinfachte Notation}}{=} 1\,.$$

- Tatsächlich kann man sogar zeigen, dass $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ eine kommutative Gruppe bezüglich der Multiplikation ist.

6.3. Äquivalenzrelationen und Äquivalenzklassen

6.3.1 Definition: Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist eine (binäre) Relation auf M mit folgenden Eigenschaften:

1. Reflexivität: $\forall x \in M : x \sim x$
2. Symmetrie: $\forall x, y \in M : (x \sim y) \Leftrightarrow (y \sim x)$
3. Transitivität: $\forall x, y, z \in M : ((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \Rightarrow (x \sim z)$

Beispiele

- Die übliche Gleichheit in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$.
- Sei $M = \{\text{alle Menschen}\}$. Dann könnte man definieren:

$$m_1 \sim m_2 :\Longleftrightarrow m_1 \text{ ist so groß (wiegt so viel) wie } m_2.$$

- Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ ist auf $\mathbb{Z}$ folgende Äquivalenzrelation nützlich:

$$\begin{aligned} k_1 \equiv_n k_2 \quad &:\Longleftrightarrow \quad k_1 - k_2 \text{ ist durch } n \text{ teilbar} \\ &:\Longleftrightarrow \quad \exists l \in \mathbb{Z} : k_1 - k_2 = l \cdot n\,. \end{aligned}$$

SPRECHWEISE: Man sagt dazu „k_1 *ist kongruent zu* k_2 *modulo* n“.

- Auf der Menge aller Paare $(m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})$ kann man definieren

$$(m_1,n_1) \sim_{\mathbb{Q}} (m_2,n_2) :\iff m_1 n_2 = m_2 n_1 \,.$$

  Beobachtung: Offenbar entspricht dies —abgesehen vom Unterschied zwischen Paar- und Bruch-Notation— genau der Gleichheit $\overset{\mathbb{Q}}{=}$ von Brüchen.

6.3.2 Definition: Es sei M eine Menge und $\sim\colon M \times M \to \{0,1\}$ eine Äquivalenzrelation. Dann ist

$$[x]_\sim := \{y \in M : y \sim x\}$$

die Äquivalenzklasse von $x \in M$. Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $M/_\sim$. Ein Element einer Äquivalenzklasse $z \in M/_\sim$ nennen wir einen Repräsentanten von z. Es gibt ferner offenbar eine surjektive Abbildung

$$M \to M/_\sim\,, \quad x \mapsto [x]_\sim\,,$$

die jedem x seine Äquivalenzklasse zuordnet.

Beispiele

- Für $M = \{0,1,2,3\}$ und die Äquivalenzrelation $\equiv_2$ gilt

$$[0] = [2] = \{0,2\}\,, \quad [1] = [3] = \{1,3\}\,, \quad M/_{\equiv_2} = \{\{0,2\},\{1,3\}\}\,.$$

  (Da keine Verwechslungsgefahr besteht, wurde hier einfach $[\cdot]$ statt $[\cdot]_{\equiv_2}$ geschrieben.)

- Für $M = \mathbb{Z}$ und die Äquivalenzrelation $\equiv_2$ ist $[0]$ die Menge der geraden Zahlen und $[1]$ die Menge der ungeraden Zahlen.

- Mathematisch sauber kann man die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ definieren als

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\}))\,/_{\sim_{\mathbb{Q}}}\,.$$

6.4. Kürzen, ggT und Euklidischer Algorithmus

6.4.1 Satz: (Division mit Rest) Es sei $m \in \mathbb{Z}$ beliebig und $n \in \mathbb{N}$. Dann kann man m schreiben als

$$m = s \cdot n + r$$

wobei $s \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0,\ldots,n-1\}$.

Beweisidee Falls $m \geqslant 0$, ziehe n so oft von m ab, bis das Ergebnis im gewünschten Bereich liegt. Falls $m < 0$, addiere n so oft, bis das Ergebnis nicht mehr negativ ist.

6.4.2 Bezeichnung: Den obigen Rest r der Division von m durch n bezeichnet man als $\mathrm{mod}(m,n)$ oder öfter noch mit der Infix-Notation „$m \bmod n$“.

6.4.3 Definition: Wir sagen „n teilt m“ ($n|m$), wenn $m \bmod n = 0$.

6.4.4 Definition: Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von $m, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist das größte $d \in \mathbb{N}$ mit $d|m$ und $d|n$. Wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, so nennt man m und n teilerfremd.

6.4.5 Anwendung: Eine rationale Zahl $q = \frac{m}{n}$ wird normalerweise in gekürzter Form mit teilerfremden $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ angegeben (also $\frac{2}{3}$ anstelle von $\frac{4}{6}$).

Frage Wie findet man den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier natürlicher Zahlen?

Antwort Eine Möglichkeit (und für das Kopfrechnen mit kleinen Zahlen das angenehmste) zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(m, n)$ ist, die Primfaktorzerlegungen von m und n zu bilden und daraus den ggT herauszulesen. Z.B. $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, also ist $\mathrm{ggT}(60, 72) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

6.4.6 Definition: $n \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, wenn sie genau durch zwei Zahlen teilbar ist: die 1 und sich selbst.

6.4.7 Bemerkung: 1 ist also *keine* Primzahl, 2 hingegen schon!

6.4.8 Satz: (Fundamentalsatz der Arithmetik) Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine *eindeutige* Zerlegung

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{l_i}$$

mit p_i prim, $l_i \in \mathbb{N}$, und $p_i < p_j$ für $i < j$.

Beweis Die Existenz der Zerlegung ist klar: wenn n keine Primzahl ist, kann man es als Produkt kleinerer Faktoren schreiben, die man dann weiter zerlegen kann, bis man bei Primfaktoren angelangt ist. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, n sei die kleinste Zahl, bei der keine Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung vorliegt, und es gäbe zwei Zerlegungen

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{l_i} = \prod_{i=1}^{m} q_i^{s_i}$$

mit Primzahlen p_i und q_i. Aus der folgenden Übung folgt dann, dass p_1 eines der q_i teilen muss. Weil diese prim sind, muss ein q_i gleich p_1 sein. Daher kann man durch ein $p_1 = q_i$ teilen und erhielte die kleinere Zahl $\frac{n}{p_1}$, für welche die Eindeutigkeit ebenfalls verletzt wäre.

6.4.9 Übung: (Lemma von Euklid) Wenn p eine Primzahl ist und es gilt

$$k \cdot p = a \cdot b$$

mit $a, b, k \in \mathbb{Z}$, so gilt $p|a$ oder $p|b$.

6.4.10 Lösung: Wir gehen wieder mit Induktion vor. Die Aussage ist offenbar für $n = ab = 1$ erfüllt. Es sei nun $n = a \cdot b$ die kleinste Zahl, für welche die Aussage nicht erfüllt ist, ebenso sei p die kleinste Primzahl p, für welche das bei gegebenem n gilt. Division mit Rest ergibt dann $a = k_a p + r_a$, $b = k_b p + r_b$ und die Multiplikation ergibt

$$kp = a \cdot b = (k_a k_b p + r_a k_b + r_b k_a)p + r_a r_b$$

Hieraus folgt, dass auch für $r_a \cdot r_b \leqslant a \cdot b$ eine solche Zerlegung vorliegen würde. Weil aber $a \cdot b$ die kleinste solche Zahl ist, muss $k_a = k_b = 0$ gelten. Nun unterscheiden wir die Fälle

1. Wenn $p = a$ oder $p = b$, so ist unsere Behauptung richtig.
2. $p < a$ oder $p < b$: Dies ergäbe einen Widerspruch zu $k_a = k_b = 0$.
3. $p > a$ und $p > b$: Hier muss $k < p$ gelten. Dann hätte k aber eine Primfaktorzerlegung mit Faktoren $p_i < p$, mit denen man kürzen könnte (weil p ja als die kleinste Problemprimzahl angenommen war). Nach Kürzen mit diesen Faktoren hätte man aber eine kleinere Zahl $n' = a'b'$, für welche $a' < p$, $b' < p$ und $a'b' = p$ gilt. Dies kann nicht sein, weil p Primzahl ist.

6.4.11 Problem: Für große Zahlen (z.B. 1000 Dezimalstellen) ist die Primfaktorzerlegung — wenigstens mit den bisher bekannten Methoden— nicht schnell durchführbar! Im Folgenden werden wir daher einen anderen Weg beschreiten, um den ggT sehr großer Zahlen schnell zu berechnen.

Idee (Zur schnellen Berechnung von $\mathrm{ggT}(m,n)$)

- Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Dann gilt nach Division mit Rest

$$m = s \cdot n + r\,,$$

  woraus man ersieht $\mathrm{ggT}(m,n) = \mathrm{ggT}(n,r)$.
- Weil $m > n > r$, sollte $\mathrm{ggT}(n,r)$ einfacher zu berechnen sein als $\mathrm{ggT}(m,n)$.

6.4.12 Algorithmus: Euklidischer Algorithmus (EA)

$$\mathrm{ggT}(m,n) = \begin{cases} m & n = 0 \\ \mathrm{ggT}(n, \mathrm{mod}(m,n)) & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele

- Wir wollen $\mathrm{ggT}(72,60)$ berechnen. Der EA führt folgende Divisionen mit Rest durch

$$\begin{aligned} 72 &= 1 \cdot 60 + 12 \\ 60 &= 5 \cdot \underline{12} + 0 \end{aligned}$$

  Also ist $\mathrm{ggT}(72,60) = \mathrm{ggT}(60,12) = \mathrm{ggT}(12,0) = 12$.
- Wir wollen $\mathrm{ggT}(-42,87)$ berechnen. Der EA führt folgende Divisionen mit Rest durch

$$\begin{aligned} -42 &= -1 \cdot 87 + 45 \\ 87 &= 1 \cdot 45 + 42 \\ 45 &= 1 \cdot 42 + 3 \\ 42 &= 14 \cdot \underline{3} + 0 \end{aligned}$$

  Also ist $\mathrm{ggT}(-42,87) = 3$.

6.4.13 Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Zahl der EA-Schritte höchstens proportional *zur Anzahl der Stellen* der Zahlen m und n wächst (siehe Übung).

6.4.14 Satz: Für $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $d := \mathrm{ggT}(m, n)$. Dann gibt es Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ mit

$$d = k \cdot m + l \cdot n\,.$$

Beweis Wenn man den EA von hinten her liest, ergibt sich die gewünschte Darstellung.

6.4.15 Beispiel: Aus der EA-Berechnung von $\mathrm{ggT}(-42, 87) = 3$ lesen wir ab:

$$3 = 45 - 42 = 45 - (87 - 45) = 2 \cdot 45 - 87 = 2(-42 + 87) - 87 = 2 \cdot (-42) + 1 \cdot 87\,.$$

6.4.16 Aufgabe: Bestimmen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $a = 20622$ und $b = 13314$.

6.4.17 Aufgabe: Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$. Zeigen Sie: zwei hintereinander ausgeführte Schritte des Euklidischen Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(m, n)$ führen mindestens zu einer Halbierung der Zahlen m und n.

6.5. Körper

6.5.1 Definition: Ein Körper $\mathbb{K}$ ist eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ so operieren, dass gilt

1. $\mathbb{K}$ ist eine kommutative Gruppe bezüglich $+$ (das neutrale Element bezeichnen wir mit 0). Genauer gilt
   - (K1) $\forall a, b \in \mathbb{K}: \; a + b = b + a$ (Kommutativität $+$)
   - (K2) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität $+$)
   - (K3) $\exists 0 \in \mathbb{K}$ mit $\forall a \in \mathbb{K}: \; a + 0 = a$ (neutrales Element $+$)
   - (K4) $\forall a \in \mathbb{K}: \; \exists -a \in \mathbb{K}$ mit $a + (-a) = 0$ (inverses Element $+$)
2. $\mathbb{K}\backslash\{0\}$ ist eine kommutative Gruppe bezüglich $\cdot$ (das neutrale Element bezeichnen wir mit 1). Genauer gilt
   - (K5) $\forall a, b \in \mathbb{K}: \; a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativität $\cdot$)
   - (K6) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativität $\cdot$)
   - (K7) $\exists 1 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ mit $\forall a \in \mathbb{K}: \; a \cdot 1 = a$ (neutrales Element $\cdot$)
   - (K8) $\forall a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}: \; \exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = 1$ (inverses Element $\cdot$)
3. Es gilt
   - (K9) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}: \; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz) .

Beispiele

- $\mathbb{Q}$ ist ein Körper.
- Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind Körper.
- Die Menge $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ ist mit folgenden Verknüpfungen ein Körper:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

  (Dies ist der kleinstmögliche Körper, da nach Definition jeder Körper wenigstens die neutralen Elemente der Addition und Multiplikation enthalten muss.)
- Allgemeiner: Wenn n eine Primzahl ist, so ist $\mathbb{Z}_n$ mit Modulo-n-Arithmetik ein Körper (siehe nächster Abschnitt).

6.5.2 Sprechweise: Die Eigenschaften $(K1)$–$(K9)$ nennt man auch Körperaxiome.

6.5.3 Bemerkung:
- Viele Aussagen lassen sich allein durch die Körperaxiome $(K1)$–$(K9)$ beweisen.
- Diese Aussagen sind dann automatisch für alle Körper gültig, egal ob diese $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{Z}_2$ heißen!
- Es ist eine entscheidende Stärke der Mathematik (und allgemeiner des abstrakten Denkens), dass Resultate oft in einem allgemeinen Kontext entwickelt werden und nicht für jeden Spezialfall einzeln!

6.5.4 Beispiel:
- Wir wollen zeigen, dass die Gleichung

$$ax = b$$

  für $a, b \in \mathbb{K}$ und $a \neq 0$ immer eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{K}$ hat.
- Wegen $(K8)$ gibt es ein multiplikatives Inverses $a^{-1} \in \mathbb{K}$.
- Multiplikation der Gleichung mit diesem Inversen liefert dann aber

$$a^{-1}b = a^{-1}(ax) \overset{(K6)}{=} (a^{-1}a)x \overset{(K8)}{=} 1 \cdot x \overset{(K7)}{=} x\,.$$

- Hieraus ersieht man sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit eines solchen $x \in \mathbb{K}$.
- Weil nur die Körperaxiome verwendet wurden, gilt die Aussage für $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. Sie gilt aber auch für $\mathbb{Z}_p$ (p prim), was unter anderem für die später vorgestellte Kryptographieanwendung wichtig ist.

6.6. Restklassenarithmetik

6.6.1 Definition:

- Wir betrachten die auf $\mathbb{Z}$ definierte Äquivalenzrelation[†]

$$\begin{aligned} a \equiv_n b \quad &:\Longleftrightarrow \quad n|(a-b) \\ &:\Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : a - b = kn \\ &\Longleftrightarrow \quad a \bmod n = b \bmod n \end{aligned}$$

- Dann definieren wir $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/_{\equiv_n}$, wobei $\mathbb{Z}/_{\equiv_n}$ wieder die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet.
- $\mathbb{Z}_n = \{[0]_{\equiv_n}, \ldots, [n-1]_{\equiv_n}\}$, wobei die Äquivalenzklassen die Form

$$[k]_{\equiv_n} = k + n\mathbb{Z} = \{k + nl | l \in \mathbb{Z}\}$$

  haben und auch Restklassen genannt werden.

- Notation:
  - Wenn klar ist, welches $\mathbb{Z}_n$ gemeint ist, kann man auch einfach $[k]$ statt $[k]_{\equiv_n}$ schreiben.
  - Wenn man ausschließlich in $\mathbb{Z}_n$ arbeitet, schreibt man meist sogar nur k anstelle von $[k]$.

Beobachtung

- Falls $[k], [l] \in \mathbb{Z}_n$ und $a = k + rn \in [k]$ und $b = l + sn \in [l]$ beliebige Repräsentanten dieser Restklassen sind, so folgen aus

$$a + b = k + l + (r+s)n\,, \quad a \cdot b = k \cdot l + (r + s + rsn)n$$

  die Beziehungen

$$\begin{aligned} [a \overset{\mathbb{Z}}{+} b] &= [k \overset{\mathbb{Z}}{+} l]\,, \\ [a \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} b] &= [k \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} l]\,. \end{aligned}$$

- Daher kann man Addition/Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ auf eindeutige Weise definieren, indem man einfach beliebige Repräsentanten addiert/multipliziert und danach erneut die Äquivalenzklasse bildet:

$$\begin{aligned} [k] \overset{\mathbb{Z}_n}{+} [l] &:= [k \overset{\mathbb{Z}}{+} l] \\ [k] \overset{\mathbb{Z}_n}{\cdot} [l] &:= [k \overset{\mathbb{Z}}{\cdot} l] \end{aligned}$$

- Der Einfachheit halber schreibt man auch für Addition/Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ wieder nur $+$ bzw. $\cdot$.

[†]Die Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität sind nicht schwer nachzuweisen.

Beispiele Es ergeben sich beispielsweise folgende Verknüpfungstabellen für $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_4$ (mit Notationsvereinfachung $k = [k]$):

- $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

  HINWEIS: In diesen Tabellen ist Schulwissen kodiert, wie zum Beispiel „ungerade mal ungerade liefert ungerade“.

- $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$:

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

6.6.2 Bemerkung:

- Für die oben definierte Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ gelten Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz wie in $\mathbb{Z}$.
- Das neutrale Element der Addition ist $[0]$, das neutrale Element der Multiplikation ist $[1]$.
- Es gibt auch zu jedem Element $[k] \in \mathbb{Z}_n$ ein *additives* Inverses (welches?), so dass $\mathbb{Z}_n$ eine additive Gruppe ist.
- Eine Struktur mit solchen Eigenschaften nennen die Mathematiker Ring (genauer: „kommutativer Ring mit Eins“). $\mathbb{Z}_n$ wird daher auch Restklassenring genannt.
- Falls n prim ist, so gibt es für jedes $[k] \neq [0]$ auch ein multiplikatives Inverses und $\mathbb{Z}_n$ ist ein Körper.

Beobachtung

- Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_n$ wurden gerade so definiert, dass für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} [a + b] &= [a] + [b] \\ [a \cdot b] &= [a] \cdot [b] \,. \end{aligned}$$

- Mehrfache Anwendung der zweiten Beziehung liefert auch

$$[a^k] = [a]^k \quad \text{für beliebige } a \in \mathbb{Z} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

6.6.3 Anwendung:
- Wenn wir uns für den Rest der Zahl $k = 58^{2018} + 17^{2019}$ bei Division durch 3 interessieren, müssen wir die Restklasse $[k]_{\equiv_3}$ berechnen.
- Dies geschieht durch folgende Rechnung in $\mathbb{Z}_3$:

$$[58^{2018} + 17^{2019}] \overset{\mathbb{Z}_3}{=} [58]^{2018} + [17]^{2019} \overset{\mathbb{Z}_3}{=} [1]^{2018} + [-1]^{2019} \overset{\mathbb{Z}_3}{=} [1] + [-1] \overset{\mathbb{Z}_3}{=} [0]\,,$$

wobei in der Mitte ausgenutzt wurde, dass $58 \equiv_3 1$ und $17 \equiv_3 -1$.

6.6.4 Bemerkung:
- Die Notation kann man noch weiter vereinfachen, wenn man die Restklassen-Klammern weglässt, und zur Kennzeichnung der Rechnung in $\mathbb{Z}_n$ ein Zeichen wie $\equiv_n$ verwendet.
- Die obige Rechnung sähe dann so aus:

$$58^{2018} + 17^{2019} \equiv_3 1^{2018} + (-1)^{2019} \equiv_3 0\,.$$

- Alternativ zur „Gleichheit in $\mathbb{Z}_n$“ könnte man $\equiv_n$ dann sogar einfach als „Gleichheit in $\mathbb{Z}$ bis auf Vielfache von n“ ansehen.
- Wenn man diese Interpretation wählt, bräuchte man $\mathbb{Z}_n$ an dieser Stelle nicht unbedingt, da sich die obigen Rechnungen auch elementarer begründen lassen: Beispielsweise sieht man ja aus der Binomialentwicklung

$$17^{2019} = (-1 + (6 \cdot 3))^{2019} = (-1)^{2019} + \ldots\,,$$

dass alle Terme in $\ldots$ den Faktor 3 enthalten und nichts zum Modulo-3-Ergebnis beitragen können.

Warnung
- Der Exponent darf in solchen $\mathbb{Z}_n$-Rechnungen *nicht* modulo n vereinfacht werden![‡]
- Beispielsweise gilt in $\mathbb{Z}_3$

$$2^4 \equiv_3 1 \not\equiv_3 2^1\,.$$

6.6.5 Bemerkung:
- Immerhin gilt die Rechenregel $a^{b \cdot c} \equiv_n (a^b)^c$.
- Diese kann beispielsweise verwendet werden, um $a^k \bmod n$ auch für großes $k \geqslant 0$ rekursiv zu berechnen:

$$a^k \bmod n := \begin{cases} 1 & \text{wenn } k = 0 \\ (a^2 \bmod n)^l \bmod n & \text{wenn } k = 2l \text{ gerade} \\ a \cdot (a^2 \bmod n)^l \bmod n & \text{wenn } k = 2l+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Der Aufwand ist dann proportional zur Anzahl der Stellen von k.

[‡] Tatsächlich ist auch eine Exponentenreduktion möglich, aber *nicht* modulo n, sondern modulo der sogenannten Euler-Charakteristik $\varphi(n)$, die mit Hilfe der Primfaktorzerlegung von n berechnet werden kann.

6.6.6 Beispiel: Für $a = 3$, $k = 1234$ und $n = 16$ gilt

$$3^{1234} \equiv_{16} 9^{617} \equiv_{16} 9 \cdot 81^{308} \equiv_{16} 9 \cdot 1^{308} = 9\,.$$

6.7. Ganzzahlen im Computer

6.7.1 Bemerkung: Die $\mathbb{Z}_n$-Restklassen-Arithmetik wird in maschinennahen Computersprachen (Assembler, C, C++, ...) oft für Ganzzahlen verwendet. Dabei ist n normalerweise eine Zweierpotenz. Beispielsweise gibt es die Zahlentypen `char`, `short`, `int` in C, die auf einer 32-Bit-Architektur $n = 2^8$, $n = 2^{16}$, bzw. $n = 2^{32}$ entsprechen. Statt einer unendlichen Restklasse $[k] \in \mathbb{Z}_n$ wird in Computern natürlich nur ein Repräsentant (z.B. eine Zahl aus $k \in \{0, \ldots, n-1\}$) abgespeichert.

6.7.2 Beispiel:

- Für den 16 Bit langen Datentyp `unsigned short` in der Programmiersprache C ist $n = 2^{16}$ und die Repräsentanten werden aus $\{0, \ldots, 2^{16} - 1\} = \{0, \ldots, 65535\}$ ausgewählt. Die Addition von $2^{15} + 2^{15} = 32768 + 32768$ liefert hier das Ergebnis 0!

- Für den ebenfalls 16 Bit langen Datentyp `short` werden die Repräsentanten aus der Menge $\{-2^{15}, \ldots, 2^{15}-1\}$ ausgewählt. Die Addition von $2^{14}+2^{14}$ hat dann das negative Ergebnis -2^{15}!

- Ein solcher Überlauf von arithmetischen Rechenoperationen führte 1996 zum Absturz der europäischen Rakete *Ariane 5* mit einem Schaden von 500 Millionen Dollar!

6.8. Inversion im Restklassenring

Frage Wie steht es um das multiplikativ inverse Element zu $a \in \mathbb{Z}_n$?

Beobachtungen Es gibt multiplikative Inverse in $\mathbb{Z}_n$, aber nicht für jedes a:

- $a = 0$ hat in keinem $\mathbb{Z}_n$ ein multiplikatives Inverses.
- $a = 1$ und $a = 2$ sind in $\mathbb{Z}_3$ zu sich selbst invers.
- $a = 2$ hat in $\mathbb{Z}_5$ das multiplikativ Inverse $a^{-1} = 3$ wegen

$$2 \cdot 3 \equiv_5 1\,.$$

- 2 hat in $\mathbb{Z}_4$ kein multiplikatives Inverses.

6.8.1 Satz: $a \in \mathbb{Z}_n$ besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_n$, wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Das Inverse kann mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus (EA) berechnet werden.

Beweis Der EA zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ liefert $s,t\in\mathbb{Z}$ mit

$$s\cdot a+t\cdot n=1\,.$$

Modulo n bedeutet dies aber gerade

$$s\cdot a\equiv_n 1$$

so dass (die Äquivalenzklasse von) s gerade das multiplikative Inverse zu a in $\mathbb{Z}_n$ ist. Wenn umgekehrt $d:=\mathrm{ggT}(a,n)>1$, so gilt für $b:=n/d$ in $\mathbb{Z}_n$ die Gleichung $ab=0$. Multiplikation mit einem Inversen $a^{-1}\in\mathbb{Z}_n$ würde dann aber ergeben $b=a^{-1}\cdot 0=0$, was nicht sein kann.

6.8.2 Folgerung: $\mathbb{Z}_n$ ist ein Körper, genau dann wenn n eine Primzahl ist.

Beweis Wenn n eine Primzahl ist, so gilt $\mathrm{ggT}(a,n)=1$ für jedes $a\in\mathbb{Z}_n\backslash\{0\}$ und a hat ein multiplikatives Inverses. Umgekehrt gilt für ein zusammengesetztes $n=pq$ in $\mathbb{Z}_n$ die Gleichung

$$p\cdot q=0\,.$$

Wenn nun multiplikative Inverse p^{-1} und q^{-1} existierten, so erhielte man durch Multiplikation mit ihnen $1=0$, was ein Widerspruch zur Körperdefinition ist.

6.8.3 Definition: Wir definieren die Eulersche φ-Funktion als $\varphi(n)=|\mathbb{Z}_n^\times|$, wobei

$$\mathbb{Z}_n^\times:=\{a\in\mathbb{Z}_n\mid \mathrm{ggT}(a,n)=1\}$$

die multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}_n$ bezeichnet. Diese bilden eine multiplikative Gruppe.

6.8.4 Satz: Man kann $\varphi(n)$ aus der Primfaktorzerlegung $n=\prod_{i=1}^k p_i^{l_i}$ gemäß

$$\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})$$

berechnen.

Beweis Abzählen. Wir führen den Beweis nicht aus, da uns die in den nachfolgenden Beispielen besprochenen Spezialfälle für das weitere ausreichen.

Beispiele

1. Wenn n Primzahl ist, so ist $\mathbb{Z}_n^\times=\mathbb{Z}_n\backslash\{0\}$ und somit $\varphi(n)=n-1$.
2. Wenn $n=pq$ ein Produkt zweier verschiedener Primzahlen p und q ist, so ist

   $$\mathbb{Z}_n^\times=\mathbb{Z}_n\backslash(\{kp\mid 0<k<q\}\cup\{kq\mid 1<k<p\})$$

   und somit $\varphi(n)=(p-1)(q-1)$.

3. Wenn $n = p^k$ für eine Primzahl p, so ist

$$\mathbb{Z}_n^\times = \mathbb{Z}_n \backslash \{lp \mid 0 < l < p^{k-1}\}$$

und somit $\varphi(n) = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1) = p^k(1-\frac{1}{p})$.

6.8.5 Satz: (Fermat-Euler) Wenn $\mathrm{ggT}(a,n) = 1$, so gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv_n 1\,.$$

Beweis Weil a ein multiplikatives Inverses in $\mathbb{Z}_n$ besitzt, ist die Abbildung

$$\mathbb{Z}_n^\times \to \mathbb{Z}_n^\times\,, \quad x \mapsto a \cdot x$$

bijektiv. Somit gilt

$$r := \prod_{k\in\mathbb{Z}_n^\times} k \equiv_n \prod_{k\in\mathbb{Z}_n^\times} (ak) \equiv_n a^{\varphi(n)} \prod_{k\in\mathbb{Z}_n^\times} k \equiv_n a^{\varphi(n)} r\,.$$

Nun ist aber $r \in Z_n^\times$ invertierbar, so dass man diese Äquivalenz mit r^{-1} multiplizieren kann und die Behauptung erhält.

6.8.6 Aufgabe: Berechnen Sie das multiplikative Inverse in $\mathbb{Z}_{64}$ zu $a = 27$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

6.8.7 Aufgabe: Berechnen Sie

1. $2^{1000} \bmod 3$,
2. $3^{1000} \bmod 7$.

6.8.8 Aufgabe: Geben Sie Additions- und Multiplikationstabelle von $\mathbb{Z}_n$ im Fall $n = 3$ und $n = 4$ an. Welches der beiden ist ein Körper und welches nicht (mit Begründung)?

6.9. Kryptographie

6.9.1 Beispiel: Von Cäsar wurde einst folgendes Schlüsselsystem verwendet: Die Buchstaben $\{A, \ldots, Z\}$ des lateinischen Alphabets werden mit den Zahlen $\{0, \ldots, 25\}$ kodiert, und die Verschlüsselung ist durch die Funktion

$$\sigma : \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{26}\,, \quad k \mapsto k + 3 \bmod 26$$

gegeben, und die Entschlüsselung geschieht durch

$$\sigma^{-1} : \mathbb{Z}_{26} \to \mathbb{Z}_{26}\,, \quad k \mapsto k - 3 \bmod 26\,.$$

Aus dem Wort „Hallo“ wird dabei „Kdoor“, aus „Zug“ wird „Cxj“.

6.9.2 Bemerkung: Diese einfach zu durchschauende Technik kann natürlich durch kompliziertere Abbildungen von ganzen Buchstabengruppen ersetzt werden.

6.9.3 Problem: Beide Seiten verwenden im Wesentlichen denselben Algorithmus für Verschlüsselung und Entschlüsselung (symmetrisches Kryptoverfahren). Dieses Wissen muss ausgetauscht werden, was ein erhebliches Sicherheitsproblem darstellt.

Idee Ist es möglich, die Kenntnis von Verschlüsselungs- und Entschlüsselungsalgorithmus zu trennen (asymmetrisches Kryptoverfahren)?

Antwort

- Theoretisch nein, weil bei Kenntnis des Verschlüsselungsalgorithmus jede damit verschlüsselte Nachricht durch einfaches Probieren auch entschlüsselt werden kann.
- Praktisch ja, weil es ausreichend ist, wenn aus einem öffentlich bekannten Verschlüsselungsalgorithmus σ die Inverse σ^{-1} nicht *schnell genug* berechnet werden kann.

6.9.4 Geschichte: Ab dem Jahr 1970 wurden zuerst im militärischen Bereich, dann auch im zivilen Bereich Verschlüsselungsfunktionen entdeckt, die das Gewünschte leisteten. Der erste veröffentlichte Algorithmus war das im Jahr 1978 von Rivest-Shamir-Adleman veröffentlichte RSA-Verfahren, das im folgenden kurz beschrieben wird.

6.9.5 Verfahren:

- Man findet zwei große Primzahlen p und q und setzt $n = pq$.
- Man veröffentlicht n und ein nicht zu kleines e mit $\mathrm{ggT}(e, \varphi(n)) = 1$ (z.B. eine geeignete Primzahl). Der Verschlüsselungsalgorithmus ist dann durch

$$\sigma : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n\,, \quad x \mapsto y = x^e$$

  gegeben.
- Für den Entschlüsselungsalgorithmus berechnet man das multiplikative Inverse $f = e^{-1}$ in $\mathbb{Z}_{\varphi(n)}$ und setzt

$$\sigma^{-1} : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n\,, \quad y \mapsto y^f\,.$$

- Dies ist tatsächlich die Umkehrfunktion, weil wegen des Satzes von Fermat-Euler gilt

$$\sigma^{-1} \circ \sigma(x) = (x^e)^f \equiv_n x^{e\cdot f} = x^{1+k\varphi(n)} \equiv_n x\,.$$

6.9.6 Beispiel: Wir wählen $p = 31$ und $q = 47$. Damit ergibt sich $N = 1457$ und $\varphi(n) = 1380$. Dann wählen wir $e = 11$. Dieses hat die Inverse $f = 251$ modulo 1380. Als Botschaft wählen wir nun die Zahl $x = 100$, was verschlüsselt zu $y := 100^{11} \bmod 1457 = 578$ führt. Die Rücktransformation liefert tatsächlich $y^{251} \bmod 1457 = 100$.

6.9.7 Bemerkung: Das RSA-Verfahren steht und fällt mit folgenden Punkten:

1. Man kann sehr schnell mit hoher Wahrscheinlichkeit feststellen, ob eine Zahl Primzahl ist (dies geschieht übrigens wieder mit dem Satz von Fermat-Euler!).

2. Die Potenzabbildung $x \mapsto x^e$ in $\mathbb{Z}_n$ ist für großes n und e mit $\mathrm{ggT}(e,n) = 1$ eine gute Verschlüsselungsfunktion: benachbarte x werden auf völlig verschiedene Bilder geworfen.

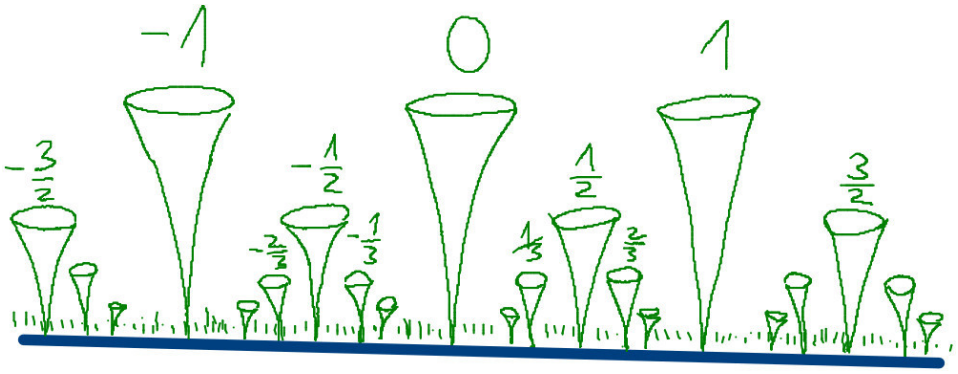
3. Man kennt keinen Weg, die Inverse dieser Potenzabbildung ohne Kenntnis von $\varphi(n)$ schnell zu berechnen, ebenfalls kennt man keinen Weg, $\varphi(n)$ aus n zu erhalten, ohne n in seine Primfaktoren zu zerlegen.

4. Es ist kein Weg bekannt, mit dem eine große (z.B. 1000-stellige) Zahl $n = pq$ schnell in ihre Primfaktoren p und q zerlegt werden kann. (Man kann nur schnell feststellen, dass sie keine Primzahl ist. Falls dagegen die Zerlegung schnell möglich wäre, könnte man aus n sofort $p, q, \varphi(n)$ und zuletzt $f = e^{-1}$ berechnen.)

5. Das Verfahren benötigt an einigen Stellen „zufällig“ gewählte Zahlen, wofür in der Praxis oft Pseudo-Zufallsgeneratoren verwendet werden. Schwächen in diesen Generatoren können das RSA-Verfahren zu Fall bringen (und solch ein Fehler ist tatsächlich im Jahr 2008 in der Debian-Version des OpenSSL-Pakets entdeckt worden!).

6.9.8 Bemerkung: Zuletzt sei noch bemerkt, dass die Berechnungen des RSA-Verfahrens relativ aufwendig sind und es daher in der Praxis nur zum Austausch eines Schlüssels für ein symmetrisches Kryptoverfahren verwendet wird.

7. Reelle Zahlen



7.1. Motivation

Beobachtung Es gibt wichtige Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π, die keine Darstellung der Form $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ besitzen. Nichtsdestoweniger entsprechen sie geometrisch konstruierbaren Längen oder Flächen. So ist z.B. $\sqrt{2}$ die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats und π die Hälfte des Umfangs oder die Fläche des Einheitskreises.

7.1.1 Satz: Es gibt keine Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

Beweis Schon bekannt.

7.1.2 Bemerkung: Etwas komplizierter erhält man auch für alle Nicht-Quadratzahlen $n \in \mathbb{N}$, dass $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

7.2. g-adische Darstellung

7.2.1. Darstellung ganzer Zahlen

7.2.1 Definition: Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geqslant 2$. Dann kann man jedes $n \in \mathbb{N}$ schreiben als

$$\sum_{i=0}^{k} a_i g^i, \quad a_i \in \{0, \ldots, g-1\}$$

Die Zahl wird dann als

$$a_k a_{k-1} \ldots a_0 \quad \text{(kein Produkt!)}$$

geschrieben.

7.2.2 Bezeichnung: Die Zahl g nennt man die Basis und die $a_i \in \{0, \ldots, g-1\}$ nennt man Ziffern. Die Art der Darstellung heißt g-adische Darstellung oder Stellenwertsystem zur Basis g.

7.2.3 Beispiel:

1. $g = 10$: Dies liefert das übliche Dezimalsystem. Ziffern sind $\{0, \ldots, 9\}$.
2. $g = 2$: Dies liefert das Dualsystem mit den Ziffern $\{0, 1\}$.
3. In der Informatik interessant sind noch Oktalsystem ($g = 8$, Ziffern $\{0, \ldots, 7\}$) und Hexadezimalsystem ($g = 16$, Ziffern $\{0, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F\}$).

7.2.4 Aufgaben:

- Rechne die Dezimalzahl 100 in Dual-, Oktal- und Hexadezimalsystem um: Es gilt die Zerlegung $100 = 64 + 32 + 4 = 2^6 + 2^5 + 2^2$. Somit ist die Dualdarstellung 1100100. Auch gilt $100 = 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$, somit ist die Oktaldarstellung 144. Zuletzt gilt $100 = 6 \cdot 16 + 4$, somit ist die Hexadezimaldarstellung 64.

- Rechne die Hexadezimalzahl FD in Dezimal- und Dualsystem um: Im Dezimalsystem ist es $15 \cdot 16 + 13 = 253$, im Dualsystem kann man wegen $16 = 2^4$ die Dualdarstellungen 1111 von F und 1101 von D einfach hintereinanderhängen, so dass sich als Dualdarstellung insgesamt 11111101 ergibt.

7.2.5 Bemerkung:

- Allgemein kann die Umrechnung einer im Dezimalsystem gegebenen Ganzzahl in eine g-adische Darstellung durch sukzessive Division mit Rest geschehen:

  Setze $n_0 = n$, $k = 0$.
  Solange $n_k > 0$ führe durch:
  Division mit Rest: $n_k = n_{k+1} \cdot g + a_k$.
  $k := k + 1$

  Die dabei erhaltenen Reste a_k sind die Ziffern der g-adischen Darstellung.

- Insbesondere für die Umrechnung ins Dualsystem ist es allerdings einfacher, wenn man die Potenzen 2^k berechnet, und dann von oben beginnend die größtmöglichen Potenzen subtrahiert.

7.2.6 Beispiel: Um $n = 1234_{10}$ in die Hexadezimaldarstellung umzurechnen, führen wir durch:

$$\begin{aligned} 1234 &= 16 \cdot 77 + \underline{2} \\ 77 &= 16 \cdot 4 + \underline{13} \\ 4 &= 0 \cdot 16 + \underline{4} \end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir $n = 1234_{10} = 4D2_{16}$.

7.2.7 Aufgabe: Man berechne die Hexadezimaldarstellung von $n = 11259375_{10}$.

7.2.8 Aufgabe: Man beweise: Eine Zahl gegeben durch die Dezimalziffern $a_n \ldots a_0$ ist genau dann durch 3 (bzw. 9) teilbar, wenn ihre Quersumme $s = \sum_{k=0}^{n} a_n$ durch 3 (bzw. 9) teilbar ist. Man wende dann diese Regel auf die Zahl 123456 an.

7.2.9 Lösung: Weil $10 \equiv_3 1$ gilt

$$(a_n \dots a_0)_{10} = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 10^k \equiv_3 \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 1^k \equiv_3 \sum_{k=0}^{n} a_k \,.$$

Anwendung auf 123456 ergibt

$$123456 \equiv_3 1+2+3+4+5+6 = 21 \equiv_3 2+1 = 3 \equiv_3 0 \,.$$

Analog argumentiert man für Teilbarkeit durch 9.

7.2.10 Aufgabe: Man finde eine ähnliche Regel für die Teilbarkeit durch 11 und wende sie auf die Zahl 8157952 an.

7.2.2. g-adische Darstellung von Brüchen

7.2.11 Definition: Wir verallgemeinern die g-adische Darstellung in folgender Weise:

$$\pm a_n \dots a_0 \overset{\text{Dezimalpunkt}}{\cdot} a_{-1} \dots a_{-n'} := \pm \sum_{k=-n'}^{n} a_k g^k \,.$$

Beobachtung Mit solchen endlichen g-adischen Darstellungen kann man diejenigen rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ exakt darstellen, für welche q die Zahl $g^{n'}$ für ein $n' \in \mathbb{N}$ ohne Rest teilt.*

Beweis Dies ersieht man aus der Beziehung

$$\exists k \in \mathbb{N} : qk = g^{n'} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} : \frac{p}{q} = \frac{pk}{g^{n'}} = pk \cdot g^{-n'} \,.$$

Letzteres bedeutet aber gerade, dass n' Nachkommastellen ausreichen.

Beispiele

- $\frac{1}{3} = 0.3333\dots$ besitzt keine endliche Darstellung im Dezimalsystem.
- $\frac{1}{3}$ besitzt aber die endliche Darstellung 0.1 im Dreiersystem ($g = 3$).
- $\frac{1}{125}$ besitzt wegen $125 = 5^3$ und $5^3 | 10^3$ eine endliche Darstellung im Dezimalsystem: $\frac{1}{125} = \frac{8}{1000} = 0.008$.
- Allgemein hat $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ genau dann eine endliche Dezimaldarstellung, wenn der Nenner q nur die Primfaktoren 2 und 5 enthält.

*Erinnerung: Man schreibt $a|b$, falls $a \in \mathbb{Z}$ die Zahl $b \in \mathbb{Z}$ ohne Rest teilt (d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} : b = ka$).

7.2.3. Unendliche g-adische Entwicklung

7.2.12 Definition: Eine Folge mit Werten in einer Menge M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$ (manchmal auch $\mathbb{N}_0 \to M$). Man schreibt dafür $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch einfach (x_n).

7.2.13 Definition: Eine g-adische Zahl $\pm a_N \dots a_0 \,.\, a_{-1}a_{-2}\dots$ mit unendlich vielen Nachkommastellen interpretieren wir als eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{Q}$, welche folgendermaßen definiert ist:

$$x_n := \sum_{k=-n}^{N} a_k g^k \,.$$

Beobachtung (oder auch „Idee“) Eine solche Folge approximiert einen bestimmten Wert mit beliebiger Genauigkeit.

7.2.14 Beispiel:

- Die unendliche Dezimalentwicklung $0.\bar{3} = 0.3333\dots$ entspricht der Folge

  $$x_0 = 0,\ x_1 = 0.3 = \frac{3}{10},\ x_2 = 0.33 = \frac{33}{100},\ x_3 = 0.333 = \frac{333}{1000},\ \dots$$

  was $q = \frac{1}{3}$ beliebig genau approximiert.

- Die Zahl 1.5 mit endlicher Dezimalentwicklung entspricht der Folge

  $$x_0 = 1,\ x_1 = 1.5 = \frac{3}{2},\ x_2 = 1.50 = \frac{3}{2},\ \dots$$

  Diese „approximiert“ offenbar die Zahl $q = \frac{3}{2}$.

- Die Zahl $1.4\bar{9}$ entspricht der Folge

  $$x_0 = 1,\ x_1 = 1.4,\ x_2 = 1.49,\ x_3 = 1.499,\ \dots$$

  welche ebenfalls $q = \frac{3}{2}$ beliebig genau approximiert.

- Die Dezimaldarstellung $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$ entspricht dieser Folge:

  $$x_0 = 1\,, \quad \forall k \geqslant 1 : x_k = x_{k-1} + a_{-k} \cdot 10^{-k}$$

  mit $a_{-k} \in \{0, \dots, 9\}$ so, dass $x_k^2 < 2 < (x_k + 10^{-k})^2$.

7.2.15 Bemerkung: Die g-adischen Nachkommastellen einer rationalen Zahl q mit $0 < q < 1$ kann man berechnen, indem man wiederholt mit g multipliziert, und die entstehenden Ganzzahlteile als Ziffern abspaltet.

7.2.16 Beispiel: (Berechnung der Dezimal-Nachkommastellen von $\frac{1}{6}$)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} \cdot 10 &= \frac{10}{6} = \mathbf{1} + \frac{4}{6} \\
\frac{4}{6} \cdot 10 &= \frac{40}{6} = \mathbf{6} + \frac{4}{6} \\
\frac{4}{6} \cdot 10 &= \frac{40}{6} = \mathbf{6} + \frac{4}{6} \\
&\dots
\end{aligned}$$

7.2.17 Aufgabe: Man berechne die unendliche Dualdarstellung von $0.1_{10} = \frac{1}{10_{10}}$.

7.3. Konstruktion der reellen Zahlen

7.3.1 Definition: Wir setzen (für eine beliebige Basis g, z.B. $g = 10$)

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\text{alle unendlichen } g\text{-adischen Entwicklungen}\} \\ &= \{\pm a_n \cdots a_0 \centerdot a_{-1}a_{-2}\cdots \mid \\ &\qquad n \in \mathbb{N}_0,\ \forall i : a_i \in \{0,\ldots,g-1\},\ a_n \neq 0 \text{ falls } n > 0\}\end{aligned}$$

wobei zwei g-adische Entwicklungen als äquivalent betrachtet werden, d.h.

$$a_n \cdots a_0 \centerdot a_{-1}a_{-2}\cdots \overset{\mathbb{R}}{=} a'_n \cdots a'_0 \centerdot a'_{-1}a'_{-2}\cdots,$$

wenn entweder $a'_i = a_i$ für alle $i \leqslant n$ oder wenn $a'_i = a_i$ für $n \geqslant i > k$ und

$$(a'_k = a_k - 1) \wedge (\forall i < k : a_i = 0) \wedge (\forall i < k : a'_i = g - 1)$$

oder umgekehrt.

7.3.2 Bemerkung: Die umständlich formulierte Äquivalenzrelation $\overset{\mathbb{R}}{=}$ identifiziert zum Beispiel Dezimalentwicklungen wie z.B. 1.5 und $1.4\bar{9}$ oder 0.14 und $0.13\bar{9}$.

7.4. Vollständigkeit

7.4.1 Bemerkungen:

- Die nach der Konstruktion des vorigen Abschnitts entstehende Menge $\mathbb{R}$ besteht aus Grenzwerten von approximierenden Folgen in $\mathbb{Q}$.
- Wir werden diesen Prozess später noch einmal in einem allgemeineren Rahmen (Stichworte: Konvergenz von Folgen, Vervollständigung metrischer Räume, Stetigkeit) betrachten.
- Aus dieser späteren Betrachtung wird auch hervorgehen, dass die so konstruierte Menge unabhängig von der Basis g ist, und dass $\mathbb{R}$ alle möglichen Grenzwerte enthält.
- $\mathbb{R}$ hat daher keine „Löcher“ mehr. Man sagt, $\mathbb{R}$ ist vollständig.
- Man kann Addition und Multiplikation von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ fortsetzen. Die Idee dabei ist, dass man das Ergebnis $a + b$ oder $a \cdot b$ beliebig genau approximieren kann, indem man a und b approximiert.
- In ähnlicher Weise kann man die Ordnungsoperation $<$ (und die davon abgeleiteten Operationen $\leqslant$, $>$, $\geqslant$) von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ fortsetzen.
- Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ führt dazu, dass viele wichtige Funktionen wie $x \mapsto \sqrt{|x|}$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto e^x$ Sinn machen (was mit $\mathbb{Q}$ nicht möglich ist!).

- Jedes $q \in \mathbb{Q}$ entspricht einer unendlichen g-adischen Darstellung, die ab einer bestimmten Stelle periodisch wird. Dies schließt abbrechende Darstellungen wie $1.5 = 1.5\bar{0}$ als Spezialfall ein.

7.5. Ordnungsrelationen

7.5.1 Definition:

- $\lhd$ sei eine transitive Relation auf M, d.h. es gilt
  - Transitivität: $\forall x, y, z \in M : ((x \lhd y) \wedge (y \lhd z)) \Rightarrow (x \lhd z)$.
- $\lhd$ heißt Halbordnung, wenn zusätzlich gilt
  - Antisymmetrie: $\forall x, y \in M : (x \lhd y) \wedge (y \lhd x) \Rightarrow x = y$.

  sowie eine der beiden sich gegenseitig ausschließenden Eigenschaften:
  - Reflexivität: $\forall x \in M : x \lhd x$.
  - Irreflexivität: $\forall x \in M : \neg(x \lhd x)$.

  Im ersten Fall bezeichnet man $\lhd$ als reflexive Halbordnung, im zweiten als irreflexive Halbordnung.
- $\lhd$ heißt (reflexive oder irreflexive) Ordnung, falls gilt:
  - $\lhd$ definiert entweder eine reflexive oder eine irreflexive Halbordnung.
  - Totalität: $\forall x, y \in M : (x \lhd y) \vee (y \lhd x) \vee (x = y)$.

7.5.2 Aufgabe: Machen Sie sich die obigen Bedingungen für eine Relation (z.B. $<$, $\leqslant$ oder $\subset$) auf einer drei- oder vier-elementigen Menge M klar. Kennzeichnen Sie dazu in einer zweidimensionalen Tabelle durch 0 und 1, zwischen welchen Elementen von M die Relation gilt und zwischen welchen nicht. Was bedeuten dann die obigen Bedingungen für die Verteilung von 0 und 1 in einer solchen Tabelle?

7.5.3 Bemerkungen:

- Gerne kennzeichnet man Reflexivität durch einen an ein Gleichheitszeichen erinnernden Unterstrich, wie etwa bei $\leqslant$ oder $\geqslant$. Wir werden daher im Folgenden auch $\trianglelefteq$ bzw. $\trianglerighteq$ schreiben, wenn es reflexive Relationen sind.
- Zu jeder irreflexiven Ordnung $\lhd$ auf einer Menge M gehört genau eine reflexive Ordnung definiert durch
$$m \trianglelefteq n :\iff (m \lhd n) \vee (m = n)\,.$$
- Umgekehrt definiert jede reflexive Ordnung $\trianglelefteq$ auf M eine zugehörige irreflexive Ordnung $\lhd$ mittels
$$m \lhd n :\iff (m \trianglelefteq n) \wedge \neg(m = n)\,.$$

7.5.4 Schreibweise: Ausgehend von $\trianglelefteq$ und $\lhd$ kann man „umgedrehte“ Ordnungsrelationen $\trianglerighteq$ und $\rhd$ definieren durch:
$$m \trianglerighteq n :\iff n \trianglelefteq m$$
sowie
$$m \rhd n :\iff n \lhd m\,.$$

Beispiele

- Sei $M = \{\text{alle Menschen}\}$. Dann könnte man definieren:

$$m_1 \trianglelefteq m_2 : \Longleftrightarrow \; m_1 \text{ ist kleiner oder gleich groß wie } m_2.$$

  Diese Relation ist transitiv und reflexiv, aber keine Halbordnung, weil es verschiedene Menschen gleicher Größe gibt.

- Die Teilmengenrelation $\subset$ ist eine reflexive Halbordnung auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Es ist aber keine Ordnung, weil z.B. für $A = [0, 1]$ und $B = \mathbb{Q}$ weder $A \subset B$ noch $B \subset A$ gilt.

- Die lexikographische Ordnung deutscher Wörter ist eine totale Ordnung.

- Für $M = \mathbb{Z}$ definieren wir die irreflexive Ordnung $<$ als

$$m < n : \Longleftrightarrow \; (\exists k \in \mathbb{N} : m + k = n)\,.$$

  $\leqslant$ ist dann definiert als die zugehörige reflexive Ordnung, d.h.

$$m \leqslant n \; :\Longleftrightarrow \; m < n \vee m = n\,.$$

- Für rationale Zahlen $q_1 = \frac{m_1}{n_1}$ und $q_2 = \frac{m_2}{n_2}$ mit $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$q_1 < q_2 : \Longleftrightarrow \; m_1 n_2 < m_2 n_1\,,$$

  Wieder bezeichne $\leqslant$ die zugehörige reflexive Ordnung.

- Die Ordnungsrelationen $<$ und $\leqslant$ in $\mathbb{R}$ kann man durch Vergleich von Dezimaldarstellungen definieren.

7.5.5 Definition: Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$. $<$ sei eine irreflexive und totale Ordnung, d.h. es gelte

(O1) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$: aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

(O2) $\forall a, b \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Beziehungen $a < b$, $a = b$, $b < a$.
(Diese Formulierung beinhaltet Irreflexivität, Antisymmetrie und Totalität.)

$<$ ist mit den Körperoperationen $+$,$\cdot$ verträglich, wenn gilt:

(O3) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$: aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$

(O4) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ aus $a < b$ und $0 < c$ folgt $ac < bc$

Man nennt die Kombination $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ dann einen geordneten Körper.

Beispiele

- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind mit den oben definierten Ordnungen geordnete Körper.

- Auf den endlichen Körpern $\mathbb{Z}_p$ (p Primzahl) gibt es dagegen keine solchen Ordnungen (warum?).
- Auch die komplexen Zahlen sind kein geordneter Körper im obigen Sinn.

7.5.6 Aufgabe: Es sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ ein geordneter Körper. Man zeige, dass für beliebige $x, y, z \in \mathbb{K}$ mit $z \leqslant 0$ gilt:

$$x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad zx \geqslant zy\,.$$

(Dies ist die bekannte Regel: „Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt die Ordnungsrelation um.“)

8. Komplexe Zahlen

Inhalt

- In diesem Abschnitt werden wir die reelle Zahlen*gerade* $\mathbb{R}$ zur komplexen Zahlen*ebene* $\mathbb{C}$ erweitern.
- In $\mathbb{C}$ hat jede polynomiale Gleichung $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$ für nichtkonstante Polynome (mindestens) eine Lösung.
- $\mathbb{C}$ hat im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie $\mathbb{R}$: $\mathbb{C}$ ist ein Körper und $\mathbb{C}$ ist „vollständig“, d.h. es hat keine „Löcher“ (wie etwa $\mathbb{Q}$ bei $\sqrt{2}$).
- Eine Eigenschaft von $\mathbb{R}$ geht verloren: $\mathbb{C}$ ist kein geordneter Körper mehr, d.h. man kann keine Ordnungsoperationen $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$ mit den im Falle $\mathbb{R}$ gewohnten Eigenschaften definieren.

8.1. Konstruktion

Beobachtung Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$.

Beweis Weil $\mathbb{R}$ geordneter Körper ist, gilt für alle $x \in \mathbb{R}$: $x^2 = x \cdot x \geqslant 0$.

Abhilfe Wir nehmen an, dass es ein Element $\boldsymbol{i} \notin \mathbb{R}$ gibt, mit $\boldsymbol{i}^2 = -1$.

Beobachtung Mit Zahlen der Form $a + b\boldsymbol{i}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ kann man wunderbar rechnen:

- Addition: $(5 + 3\boldsymbol{i}) + (2 - 4\boldsymbol{i}) = 7 - \boldsymbol{i}$
- Multiplikation: $(5 + 3\boldsymbol{i}) \cdot (2 - 4\boldsymbol{i}) = 10 + 6\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{i} - 12 \underbrace{\boldsymbol{i}^2}_{=-1} = 22 - 14\boldsymbol{i}$.
- Division:

$$\frac{5 + 3\boldsymbol{i}}{2 - 4\boldsymbol{i}} = \frac{(5 + 3\boldsymbol{i})(2 + 4\boldsymbol{i})}{(2 - 4\boldsymbol{i})(2 + 4\boldsymbol{i})} = \frac{-2 + 26\boldsymbol{i}}{4 + 16} = \frac{-2 + 26\boldsymbol{i}}{20} = \frac{-1}{10} + \frac{13}{10}\boldsymbol{i}$$

8.1.1 Definition: Wir definieren die komplexen Zahlen als

$$\mathbb{C} = \{a + b\boldsymbol{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Wenn $z = a+b\boldsymbol{i}$, so nennen wir $a = \mathfrak{Re}(z)$ den Realteil von z, und $b = \mathfrak{Im}(z)$ den Imaginärteil von z. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn Real- und Imaginärteil übereinstimmen.* Die reellen Zahlen kann man als die Teilmenge $\{z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C} \mid b = \mathfrak{Im}(z) = 0\}$ auffassen. Die Rechenregeln in $\mathbb{C}$ ergeben sich aus denen von $\mathbb{R}$ zusammen mit der Beziehung $\boldsymbol{i}^2 = -1$ und den Forderungen des Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned}
(a + b\boldsymbol{i}) + (c + d\boldsymbol{i}) &= (a + c) + (b + d)\boldsymbol{i} \\
(a + b\boldsymbol{i}) \cdot (c + d\boldsymbol{i}) &= (ac - bd) + (ad + bc)\boldsymbol{i} \\
\frac{a + b\boldsymbol{i}}{c + d\boldsymbol{i}} &= \frac{(a + b\boldsymbol{i})(c - d\boldsymbol{i})}{(c + d\boldsymbol{i})(c - d\boldsymbol{i})} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,\boldsymbol{i}
\end{aligned}$$

$\mathbb{C}$ ist mit diesen Operationen ein Körper (das neutrale Element der Addition ist $0 + 0\boldsymbol{i}$, das der Multiplikation $1 + 0\boldsymbol{i}$).

8.1.2 Bemerkung: Geometrisch lassen sich die komplexen Zahlen als Punkte der komplexen Ebene bzw. der Gaußschen Zahlenebene darstellen, d.h. wir können $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auffassen, wobei Addition, Multiplikation und Division von Paaren wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
(a, b) + (c, d) &:= (a + c, b + d) \\
(a, b) \cdot (c, d) &:= (ac - bd, ad + bc) \\
(a, b)/(c, d) &:= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)
\end{aligned}$$

Die Addition entspricht dabei offenbar gerade der Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$.
Die Menge $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ („x-Achse“) entspricht in dieser Darstellung dann den reellen Zahlen.

8.1.3 Bemerkung: Das Vorgehen bei Multiplikation und Division ist analog zum Rechnen mit Zahlen der Form $a + b\sqrt{n}$. Zum Beispiel:

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{7 + 5\sqrt{2}}{9 - 8} = 7 + 5\sqrt{2}$$

8.2. Konjugation und Absolutbetrag

8.2.1 Definition: Zu $z = x + y\boldsymbol{i}$ bezeichne $\overline{z} := x - y\boldsymbol{i}$ die zu z konjugiert komplexe Zahl. Geometrisch entspricht die Abbildung $z \mapsto \overline{z}$ einer Spiegelung an der x-Achse.

8.2.2 Eigenschaften:

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ und $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\boldsymbol{i}}$.

*Dies ist also einfacher als bei $\mathbb{Q}$, wo ja jede Zahl viele Darstellungen als Bruch hat.

- $z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0 \iff z = \overline{z}$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Beweis Leichte Rechnungen.

8.2.3 Definition: Zu $z = x + y\boldsymbol{i}$ definieren wir $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$. Geometrisch entspricht dies der Länge des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

8.2.4 Beispiel: $|2 + 3\boldsymbol{i}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

8.2.5 Eigenschaften:

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, d.h. $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$.
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
4. $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
5. Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Beweis (1),(2),(4) sind klar. (3) folgt aus der Polarkoordinatendarstellung im nächsten Abschnitt, (5) ist dasselbe wie die Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}^2$, die wir später mit Hilfe des Skalarprodukts beweisen werden.

8.3. Polarkoordinaten

8.3.1 Definition: Jede komplexe Zahl $z = x + y\boldsymbol{i} \neq 0$ lässt sich als

$$z = r(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$$

mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ schreiben.[†] Die Zahlen (r, φ) nennt man Polarkoordinaten. $r = |z|$ nennt man (wie gehabt) den Betrag und φ das Argument (manchmal auch die Phase) der komplexen Zahl z. Die obige Darstellung heißt Polardarstellung.

Beobachtungen

- Für $z = 0$ ist $r = 0$ zusammen mit beliebigem φ eine mögliche Darstellung.
- Für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ ist $r = |z|$. Weil $\cos$ und $\sin$ die Periode 2π haben, ist das Winkelargument aber nur bis auf Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π bestimmt.

[†] Die Zahl $\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi$ liegt wegen $(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = 1$ auf dem komplexen Einheitskreis und wird mit dem Faktor r skaliert.

- Wenn man sich auf einen Winkelbereich wie etwa $W = [0, 2\pi[$, $W =]-\pi, \pi]$ oder $W = [-\pi, \pi[$ einschränkt, so wird die Polarkoordinatendarstellung

$$\mathbb{R}^+ \times W \to \mathbb{C}\backslash\{0\}\,, \quad (r, \varphi) \mapsto z = r(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$$

  eindeutig.

8.3.2 Aufgabe: Gegeben sei $z = x + y\boldsymbol{i} \neq 0$. Berechne zugehörige Polarkoordinaten (r, φ).

8.3.3 Lösung: Zuerst berechnen wir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Um danach den Winkel zu erhalten, können wir beispielsweise wie folgt vorgehen: Es gilt offenbar

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}\,, \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r}\,.$$

Wenn nun $\arccos := \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ (Arcuskosinus) die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ bezeichnet, so gilt

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & y \geqslant 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}) & y < 0 \end{cases}\,.$$

Alternativ hätte man auch mit $\arcsin(\frac{y}{r})$ oder mit $\arctan(\frac{x}{y})$ bzw. $\arctan(\frac{y}{x})$ arbeiten können (beides mit geeigneten Fallunterscheidungen nach den Vorzeichen von x und/oder y).

8.3.4 Bezeichnungen: Wenn man Definitionsbereich und Wertebereich der trigonometrischen Funktionen $\sin$, $\cos$, $\tan$ geeignet einschränkt (so dass sie bijektiv sind), so existieren die zugehörigen Umkehrfunktionen.
Meist definiert man diese mit den folgenden Winkelbereichen:

- Arcuskosinus $\arccos = \operatorname{acos} = \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ bezeichnet die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$.
- Arcussinus $\arcsin = \operatorname{asin} = \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bezeichnet die Umkehrfunktion des Sinus $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.
- Arcustangens $\arctan = \operatorname{atan} = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ bezeichnet die Umkehrfunktion des Tangens $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$.

8.3.1. Multiplikation in Polarkoordinaten

Beobachtung Wenn $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \boldsymbol{i}\sin\varphi_2)$, so gilt wegen der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\ &\quad \boldsymbol{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Die komplexe Multiplikation multipliziert also einfach die Beträge und addiert die Argumente!

8.3.5 Bemerkung: Analog liefert die Division von z_1 und z_2 in Polarkoordinaten

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\,.$$

Die Beträge werden also dividiert und die Argumente subtrahiert!

8.3.2. Potenzen

8.3.6 Folgerung: Für $z = r(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$ ergibt sich z^n für $n \in \mathbb{N}$ (und sogar $n \in \mathbb{Z}$) als

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(n\varphi))\,.$$

Beweis Wiederholtes Anwenden der Multiplikationsregel.

8.3.7 Beispiel: $z = (1+\boldsymbol{i})^{20}$ hat den Betrag $|z| = |1+\boldsymbol{i}|^{20} = (\sqrt{2})^{20} = 2^{10} = 1024$ und das Argument $\arg(z) = 20 \cdot \frac{\pi}{4} = 5\pi \equiv_{2\pi} \pi$. Folglich ist $z = -1024$.

Frage Welche Zahlen $z \in \mathbb{C}$ erfüllen $z^n = 1$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$?

Antwort Für eine Lösung $z = r(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$ muss gelten

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(n\varphi)) = 1$$

Hieraus ersehen wir $r = 1$ und $n\varphi = 2\pi k \iff \varphi = 2\pi\frac{k}{n}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wegen der 2π-Periodizität entsprechen die unendlich vielen Argumente $\varphi_k = 2\pi\frac{k}{n}$ nur n verschiedenen Zahlen $\zeta_k \in \mathbb{C}$, nämlich

$$\zeta_k = \cos(\frac{2\pi k}{n}) + \boldsymbol{i}\sin(\frac{2\pi k}{n})\,, \quad k = 0, \ldots, n-1\,.$$

Diese nennt man die n-ten Einheitswurzeln.

8.3.8 Beispiel:

- $z^2 = 1$ besitzt die Lösungen

$$z_0 = 1 + 0\boldsymbol{i} = 1\,, \quad z_1 = \cos(\pi) + \boldsymbol{i}\sin(\pi) = -1\,.$$

- $z^3 = 1$ besitzt die Lösungen

$$\begin{aligned} z_0 &= 1\,, \\ z_1 &= \cos(\frac{2\pi}{3}) + \boldsymbol{i}\sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\,, \\ z_2 &= \cos(\frac{4\pi}{3}) + \boldsymbol{i}\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}\,. \end{aligned}$$

8.3.9 Aufgabe: Welche komplexen Zahlen erfüllen $z^2 = 2\boldsymbol{i}$?

8.3.10 Lösung: In Polarkoordinatendarstellung muss für eine Lösung gelten

$$r^2(\cos(2\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(2\varphi)) = 2\boldsymbol{i}\,.$$

Dies gilt falls $r = \sqrt{2}$ und wenn für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi k\,.$$

Dies ergibt für $k = 0$ den Wert $\varphi_1 = \frac{1}{4}\pi$ und für $k = 1$ den Wert $\varphi_2 = \frac{5}{4}\pi$. Alle anderen Werte von k liefern keine neuen komplexen Zahlen, weil sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π von φ_1 oder φ_2 unterscheiden. In Standarddarstellung entsprechen $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\varphi_2 = \frac{5}{4}\pi$ (zusammen mit $r = \sqrt{2}$) den Zahlen $z_1 = 1 + \boldsymbol{i}$ und $z_2 = -z_1 = -1 - \boldsymbol{i}$.

8.4. Die komplexe Exponentialfunktion

8.4.1. Definition

8.4.1 Bemerkung: Es gilt:

$$\begin{aligned}
e^x = \exp(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

Solche unendlichen Summen nennt man Reihen, und man definiert sie genau wie die unendlichen g-adischen Entwicklungen als approximierende Folgen.

Beweisskizze Zuerst stellt sich die Frage, ob und was man hier beweisen muss. Schließlich könnte man die Definitionen $\exp$, $\sin$, $\cos$ ja einfach so hinnehmen... Allerdings ist es nicht ganz selbstverständlich, dass solche unendlichen Summen wohldefinierte Zahlen liefern. Später (siehe Potenzreihen) werden wir sehen, warum das in diesen Fällen klappt. Außerdem sollte man wenigstens die Beziehung zur geometrischen Bedeutung von Sinus und Kosinus im Einheitskreis beweisen. Auch dies verschieben wir auf später, weil wir im Augenblick nicht einmal den Begriff „Länge eines Kreisbogens“ (so waren ja Winkel definiert!) in ausreichender Genauigkeit zur Verfügung haben.

Beobachtung Man kann die obigen Reihen ohne irgendwelche Schwierigkeiten auch für komplexe Werte auswerten, weswegen $\exp$, $\sin$, $\cos$ auf natürliche Weise als Funktionen von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ betrachtet werden können.

8.4.2 Eigenschaften:

- Später werden wir aus der Reihendarstellung von $\exp$ die Beziehung

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)\,, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

herleiten.

- Aus den obigen Reihendarstellungen sieht man sofort

$$\exp(0) = 1\,, \quad \cos(0) = 1\,, \quad \sin(0) = 0$$

- sowie[‡]

$$\cos(-z) = \cos(z)\,, \quad \sin(-z) = -\sin(z)\,.$$

8.4.2. Beziehungen zwischen $\exp$, $\sin$ und $\cos$

Beobachtungen

- Wenn man in die Exponentialreihe als Argument das Produkt $\boldsymbol{i}z$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{i}z} = \exp(\boldsymbol{i}z) &= 1 + \boldsymbol{i}z - \frac{z^2}{2!} - \boldsymbol{i}\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} \pm \dots \\ &= \cos z + \boldsymbol{i}\sin z\,. \end{aligned}$$

- Man errechnet dann auch leicht

$$\cos z = \frac{e^{\boldsymbol{i}z} + e^{-\boldsymbol{i}z}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z = \frac{e^{\boldsymbol{i}z} - e^{-\boldsymbol{i}z}}{2\boldsymbol{i}}\,.$$

- Wenn man reelle Zahlen $\varphi \in \mathbb{R}$ in die obige Formel einsetzt, erhält man

$$e^{\boldsymbol{i}\varphi} = \cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi\,,$$

  was man auch Eulersche Formel nennt.

- Entscheidend ist nun, dass (für $\varphi \in \mathbb{R}$!) sowohl $\cos(\varphi)$ als auch $\sin(\varphi)$ reelle Zahlen sind (auch dies sieht man aus den Potenzreihen). Diese sind dann offenbar gerade Realteil und Imaginärteil von $e^{\boldsymbol{i}\varphi}$.

- Wegen der Symmetrieeigenschaften von $\sin$ und $\cos$ gilt auch

$$\overline{e^{\boldsymbol{i}\varphi}} = \overline{\cos(\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi)} = \cos(\varphi) - \boldsymbol{i}\sin(\varphi) = e^{-\boldsymbol{i}\varphi}\,.$$

- Für $\varphi \in \mathbb{R}$ liegt $z := e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ auf dem komplexen Einheitskreis, was man z.B. aus

$$|z|^2 = |e^{\boldsymbol{i}\varphi}|^2 = (\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2 = 1$$

  oder (unter Verwendung von $e^{z+w} = e^z e^w$ und $e^0 = 1$) aus

$$|z|^2 = z\overline{z} = e^{\boldsymbol{i}\varphi}e^{-\boldsymbol{i}\varphi} = e^{\boldsymbol{i}\varphi - \boldsymbol{i}\varphi} = e^0 = 1$$

  ersehen kann.

[‡]Weil die $\cos$-Reihe nur gerade Potenzen enthält und die $\sin$-Reihe nur ungerade Potenzen.

- Tatsächlich ist $e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ gerade der zum Argument/Winkel φ gehörende Punkt auf dem komplexen Einheitskreis. §
- Für den Spezialfall $\varphi = \pi$ erhält man

$$e^{\boldsymbol{i}\pi} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{\boldsymbol{i}\pi} + 1 = 0\,.$$

- Die rechte Gleichung liefert eine interessante Beziehung zwischen den fünf wichtigsten Konstanten der Analysis und wird daher manchmal als die schönste Gleichung der Analysis bezeichnet.

8.4.3 Folgerung: Die Polarkoordinatendarstellung von $z \in \mathbb{C}$ kann somit sehr kurz und bequem als

$$z = |z| \cdot e^{\boldsymbol{i}\arg(z)}$$

geschrieben werden.

8.4.4 Folgerung: Auch bemerken wir, dass man die komplexe Exponentialfunktion mit Hilfe der reellen Versionen $\exp_{\mathbb{R}}$, $\cos_{\mathbb{R}}$, $\sin_{\mathbb{R}}$ wie folgt berechnen kann:

$$\exp(x + y\boldsymbol{i}) = \exp_{\mathbb{R}}(x)(\cos_{\mathbb{R}}(y) + \boldsymbol{i}\sin_{\mathbb{R}}(y))\,.$$

8.4.5 Bemerkung: Wenn man sich die Additionstheoreme nicht merken kann oder will, so kann man sie sich einfach wie folgt herleiten:

1. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{\boldsymbol{i}(\alpha+\beta)} = e^{\boldsymbol{i}\alpha+\boldsymbol{i}\beta} = e^{\boldsymbol{i}\alpha} \cdot e^{\boldsymbol{i}\beta}$.
2. Ausnutzen der Eulerschen Formel und Ausmultiplizieren ergibt daher

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) + \boldsymbol{i}\sin(\alpha+\beta) &= e^{\boldsymbol{i}(\alpha+\beta)} = e^{\boldsymbol{i}\alpha}e^{\boldsymbol{i}\beta}\\ &= (\cos(\alpha) + \boldsymbol{i}\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + \boldsymbol{i}\sin(\beta))\\ &= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta))\\ &\quad + \boldsymbol{i}(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta))\,.\end{aligned}$$

3. Der Vergleich der Real- und Imaginärteile beider Seiten liefert offenbar gerade die Additionstheoreme.

8.4.3. Der komplexe Logarithmus

Beobachtungen

- Die komplexe Exponentialfunktion bildet ein $z = x + y\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ auf den Punkt $w = e^{x+y\boldsymbol{i}} = e^x e^{y\boldsymbol{i}} \in \mathbb{C}$ ab, welcher den Betrag $|w| = e^x$ und (bis auf Vielfache von 2π) das Argument $\arg(w) = y$ hat.

§Ein wirklicher Beweis dieser Aussage kann erst später erfolgen, wenn wir die Länge von Kurven berechnen können.

- Das Bild dieser Abbildung ist $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
- Weil die Abbildung 2π-periodisch in der (imaginären) y-Richtung ist, hat jeder Punkt in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ unendlich viele Urbilder.
- Wenn man den Definitionsbereich der Exponentialfunktion geeeignet einschränkt, z.B.

$$\exp : \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant y < 2\pi\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

so ist sie bijektiv, und es existiert die Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant y < 2\pi\}\,, \quad z \mapsto \ln|z| + \boldsymbol{i}\arg(z)\,.$$

Für diese gilt dann $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

8.4.6 Bezeichnung: $\log$ ist also die Umkehrfunktion der (komplexen) Exponentialfunktion $\exp$. $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bezeichnet die „Einschränkung“ von $\log$ auf die positive reelle Achse. Logarithmen zu anderen Basen a bezeichnen wir mit $\log_a$.

8.5. Polynome

8.5.1. Definition

8.5.1 Definition: Ein komplexes Polynom n-ten Grades ist eine Funktion

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, \quad z \mapsto a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$. Den Grad n bezeichnen wir mit $\operatorname{grad}(p)$. Das Nullpolynom $p(z) = 0$ bezeichnen wir wieder mit 0 und setzen dafür formal $\operatorname{grad}(0) = -\infty$ (mit der Konvention $-\infty < k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$).

8.5.2. Polynomdivision

8.5.2 Definition: (Polynomdivision) Es seien $p = p(x)$ und $q = q(x)$ reelle oder komplexe Polynome und es sei $q(x) \neq 0$. Dann gibt es Polynome s und r mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(q)$, so dass

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x)\,.$$

Wir sagen „q teilt p“ ($q|p$), wenn in dieser Gleichung r das Nullpolynom ist.

8.5.3 Beispiel: Dividiere das Polynom $p(x) = x^2 + x + 1$ durch $q(x) = x - \boldsymbol{i}$:

$$x^2 + x + 1 = (x - \boldsymbol{i})(x + (1 + \boldsymbol{i})) + \boldsymbol{i}$$

8.5.4 Bemerkung: Bei Polynomen höheren Grades kann die Polynomdivision sehr aufwendig sein und wird daher nur selten mit der Hand ausgeführt.

8.5.5 Bemerkung: Analog zum Euklidischen Algorithmus (EA) für natürliche Zahlen gibt es auch eine Version des EA für Polynome, mit der man einen größten gemeinsamen Teiler für zwei Polynome p und q berechnet, die nicht beide 0 sind: dies ist ein Polynom d maximalen Grades mit $d|p$ und $d|q$.
Man beachte: Das Polynom d ist offenbar nur bis auf einen Faktor $\alpha \in \mathbb{C}$ bestimmt. Man kann es eindeutig machen, wenn man fordert, dass sein führender Koeffizient 1 ist.

8.5.6 Beispiel: Seien $p(x) = x^2 + x + 1$ und $q(x) = x - \boldsymbol{i}$ wie oben. Den ersten Schritt des EA hatten wir bereits durchgeführt:

$$\underbrace{x^2 + x + 1}_{p} = \underbrace{(x - \boldsymbol{i})}_{q}(x + (1 + \boldsymbol{i})) + \underbrace{\boldsymbol{i}}_{r_0} .$$

Der nächste Schritt liefert bereits

$$\underbrace{x - \boldsymbol{i}}_{q} = \underbrace{\boldsymbol{i}}_{r_0}(-\boldsymbol{i}x - 1) + 0 .$$

Folglich ist der größte gemeinsame Teiler $d(x) = \boldsymbol{i}$ oder ein beliebiges komplexes Vielfaches davon, z.B. $d(x) = 1$. p und q sind daher teilerfremd: außer komplexen Zahlen haben sie keine gemeinsamen Teiler.

8.5.3. Nullstellen

8.5.7 Definition: $\zeta \in \mathbb{C}$ heißt Nullstelle des Polynoms $p(z)$, wenn $p(\zeta) = 0$.

8.5.8 Satz: (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes Polynom mit Grad $n \geqslant 1$ hat (wenigstens) eine Nullstelle $\zeta \in \mathbb{C}$.

Beweisskizze Das folgende wird im Analysisteil bzw. in den Übungen genauer ausgeführt:

- Für große $|z|$ wird auch $|p(z)|$ groß. Weil $\mathbb{C}$ vollständig ist (keine Löcher hat) und das Polynom p stetig ist, muss p dann an einem Punkt z_* in $\mathbb{C}$ ein Betragsminimum annehmen, d.h.
$$\exists z_* \in \mathbb{C}: \quad \forall z \in \mathbb{C}: \quad |p(z_*)| \leqslant |p(z)| .$$
- Wenn $|p(z_*)| > 0$ und damit $b_0 := p(z_*) \neq 0$ wäre, so erhält man durch sukzessive Polynomdivision (Entwicklung um z_*) für irgendein $1 \leqslant k \leqslant n$ die Darstellung
$$p(z) = b_0 + b_k(z - z_*)^k + \ldots + b_n(z - z_*)^n$$
mit $b_k \neq 0$.
- Die Wahl $z = z_* + \varepsilon \sqrt[k]{-\frac{b_0}{b_k}}$ (hier kann man eine beliebige der k-ten Wurzeln nehmen) mit kleinem $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ führt dann aber zu
$$|p(z)| \approx (1 - \varepsilon^k)|b_0| < |b_0| = |p(z_*)| ,$$
was ein Widerspruch zur Definition von z_* ist.

8.5.9 Folgerung: Jedes Polynom p mit $n := \operatorname{grad}(p) \geqslant 0$ kann man schreiben als

$$p(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} (z - \zeta_k), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathbb{C}.$$

BEACHTE: Für $n = 0$ ist das Produkt leer und damit nach Definition gleich 1. Außerdem müssen die ζ_k nicht alle verschieden sein.

Beweis Dies kann per Induktion bewiesen werden:

- Für $n = 0$ ist die Behauptung richtig.
- Für $n \geqslant 1$ hat $p(z)$ nach dem Fundamentalsatz eine Nullstelle $\zeta_n \in \mathbb{C}$.
- Die Polynomdivision liefert nun

  $$p(z) = \tilde{p}(z)(z - \zeta_n) + q(z)$$

  mit $\operatorname{grad}(q) < \operatorname{grad}(z - \zeta_n) = 1$.
- Daher muss $q(z) = c$ sein mit $c \in \mathbb{C}$, und wegen $p(\zeta_n) = 0$ folgt $c = 0$.
- Also ist $p(z) = \tilde{p}(z)(z - \zeta_n)$, wobei natürlich $\operatorname{grad}(\tilde{p}) = n - 1$.
- Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\tilde{p}(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n-1}(z - \zeta_k)$, woraus die Behauptung folgt.

8.5.10 Bemerkungen:

- In $\mathbb{C}$ kann also jede polynomiale Gleichung $p(z) = 0$ gelöst werden — obwohl wir anfangs nur die Lösbarkeit der speziellen quadratischen Gleichung

  $$z^2 + 1 = 0$$

  gefordert hatten!
- Wenn man mit Systemen wie Maple oder Matlab die Lösungen polynomialer Gleichungen vom Polynomgrad $n \geqslant 2$ ausrechnet, muss man mit komplexen Lösungen rechnen, *selbst wenn alle Koeffizienten reell sind*.

8.5.4. Explizite Nullstellenformeln

8.5.11 Satz: Es gilt:

- Wenn $p(z) = c \in \mathbb{C}$ konstant ist, so hat $p(z)$ für $c \neq 0$ keine und für $c = 0$ unendlich viele Nullstellen.
- Wenn $p(z) = bz + c$ linear ist mit $b \neq 0$, so hat p die Nullstelle $z = -\frac{c}{b}$.

- Wenn $p(z) = az^2 + bz + c$ ein quadratisches Polynom ist, so berechnen sich die Nullstellen gemäß der „Mitternachtsformel“

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

  wobei $\pm\sqrt{w}$ für $w \in \mathbb{C}$ stehen soll für „beide Quadratwurzeln von w“.

- Für kubische Polynome (d.h. $\operatorname{grad}(p) = 3$) gibt es die sogenannten Cardano-Formeln.

- Auch für quartische Polynome (d.h. $\operatorname{grad}(p) = 4$) gibt es (noch kompliziertere) Lösungsausdrücke.

- Für Polynome höheren Grades gibt es im allgemeinen keine expliziten Formeln, welche die Nullstellen als irgendwelche Wurzelausdrücke darstellen. Nullstellen solcher Polynome müssen daher meist numerisch berechnet werden.

Beweis Die ersten zwei Behauptungen sind klar. Die Mitternachtsformel folgt einfach mittels quadratischer Ergänzung:

$$\begin{aligned}
& az^2 + bz + c = 0 \\
\iff \quad & z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \\
\iff \quad & z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\
\iff \quad & \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
\iff \quad & z + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Die weiteren Aussagen findet man in Büchern der Algebra.

8.5.5. Reelle Polynome

8.5.12 Bemerkung: Wenn $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ nur Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ hat, so gilt der Fundamentalsatz natürlich immer noch. Man kann aber noch mehr aussagen:

- Wenn $\zeta \in \mathbb{C}$ Nullstelle von p ist, so ist auch $\overline{\zeta}$ Nullstelle von p.

- Jedes reelle Polynom p besitzt die Darstellung

$$p(z) = \alpha \prod_{k=1}^{l} (z - \lambda_k) \cdot \prod_{k=1}^{m} (z^2 + b_k z + c_k).$$

  Hierbei sind alle auftretenden Konstanten $\alpha, \lambda_k, b_k, c_k$ reell. Außerdem gilt $b_k^2 - 4c_k < 0$ für $k = 1, \ldots, m$.

- Wenn $\mathrm{grad}(p)$ ungerade ist, so besitzt p mindestens eine *reelle* Nullstelle.

Beweis

- Es gilt
$$p(\overline{\zeta}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\zeta}^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^k} = \overline{0} = 0\,.$$
- Wenn $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle ist, so kann man im Fall $\zeta \in \mathbb{R}$ den linearen Faktor $z - \zeta$ und im Fall $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ den quadratischen Faktor
$$(z-\zeta)(z-\bar{\zeta}) = z^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\zeta) z + |\zeta|^2$$
mittels Polynomdivision abspalten. Per Induktion folgt dann die Behauptung.
- Dies folgt sofort aus dem vorigen, weil $\mathrm{grad}(p) = 2m + l$ nur für $l \neq 0$ ungerade sein kann.

8.6. Anwendungen

8.6.1. Federpendel

8.6.1 Modell: Wir betrachten ein Federpendel mit Masse m, Federkonstante D und Reibungskoeffizient β. Die Auslenkung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion der Zeit und ergibt sich als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + Dx(t) = 0\,.$$

Hierbei stehen die Punkte für Ableitungen nach der Zeit t, d.h. $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$.

8.6.2 Definition: Eine gewöhnliche Differentialgleichung für eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liefert für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}$ eine Beziehung, die die erste oder höhere Ableitungen von $x(t)$ enthält. Die Bedeutung der Variablen t ist dabei in den meisten Anwendungsfällen die Zeit.

8.6.3 Bemerkung: Gleichungen wie die obige treten in sehr vielen Situationen auf. Ihre Lösungen sind gedämpfte Schwingungen. Eine Anwendung in der Wirtschaft wäre etwa die Modellierung der Beziehung von Angebot und Nachfrage, eine Anwendung in der Elektrotechnik die Modellierung von Wechselstromkreisen.

8.6.4 Lösung: Zur Lösung machen wir den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$! Wenn man dies einsetzt, erhält man
$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + \beta\lambda e^{\lambda t} + De^{\lambda t} = 0$$
Weil $e^{\lambda t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ können wir dadurch teilen und erhalten
$$m\lambda^2 + \beta\lambda + D = 0$$

woraus wir

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mD}}{2m}$$

erhalten. Weil die obige Differentialgleichung „linear“ ist, ergibt sich die (allgemeine) Lösung der Differentialgleichung zu

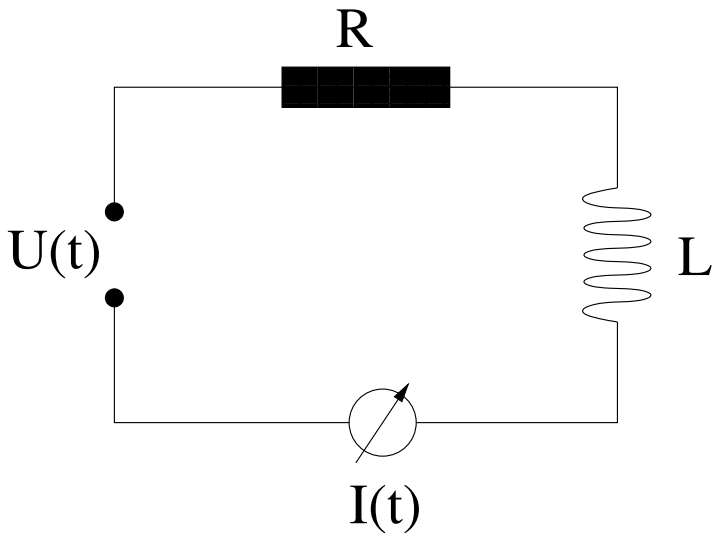
$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} .$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ werden nun normalerweise so bestimmt, dass gegebene Anfangsbedingungen für die Auslenkung $x(0)$ und Geschwindigkeit $\dot{x}(0)$ erfüllt sind. Wir sehen auch, dass λ_1, λ_2 für kleine Reibung ($\beta^2 < 4mD$) komplex sind und für große Reibung reell.

8.6.5 Bemerkung: Die Lösung $x(t)$ kann für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ scheinbar komplexwertig sein. Wenn aber die Konstanten c_1 und c_2 für reelle Anfangsbedingungen richtig berechnet wurden, so muss sie reellwertig sein! Dies ist möglich, weil allgemein gilt $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ (warum?), und daher auch wegen $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ gilt $e^{\lambda_2 t} = \overline{e^{\lambda_1 t}}$. Somit kann eine geeignete „Linearkombination“ beider Funktionen Realteil und Imaginärteil liefern, was beides reelle Funktionen sind.

8.6.2. LR-Wechselstromkreis

Eine Wechselspannungsquelle gibt in einem Stromkreis die Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ vor, in Reihe geschaltet sind noch der Widerstand R und eine Induktivität L:



Aufgrund der Beziehungen

$$U_R(t) = RI(t)\,, \quad U_{\text{ind}}(t) = -L\dot{I}(t)\,, \quad U(t) + U_{\text{ind}}(t) = U_R(t)$$

ergibt sich eine Differentialgleichung für die Stromstärke $I(t)$:

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t) = U_0 \cos(\omega t)\,.$$

Zwar kann man diese Differentialgleichung auch nur unter Verwendung reeller Funktionen lösen, viel bequemer ist es aber, wenn man komplex rechnet. Dazu betrachten

wir $U(t)$ als Realteil der komplexen Funktion $U^*(t) = U_0 e^{\boldsymbol{i}\omega t}$ und $I(t)$ als Realteil einer komplexen Funktion $I^*(t) = I_0^* e^{\boldsymbol{i}\omega t}$ mit $I_0^* \in \mathbb{C}$. Wenn die obige Differentialgleichung dann für $U^*(t)$ und $I^*(t)$ gelten soll, so erhalten wir durch Einsetzen

$$L I_0^* \boldsymbol{i}\omega e^{\boldsymbol{i}\omega t} + R I_0^* e^{\boldsymbol{i}\omega t} = U_0 e^{\boldsymbol{i}\omega t}\,,$$

was wegen $e^{\boldsymbol{i}\omega t} \neq 0$ impliziert

$$I_0^* = \frac{U_0}{R + L\omega\boldsymbol{i}} =: \frac{U_0}{R^*} \text{ mit } R^* = R + L\omega\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}\,.$$

Die Größe R^* (die oft mit Z bezeichnet wird) nennt man Wechselstromwiderstand oder Impedanz. Sie kann in Polarkoordinaten als $R^* = |R^*|e^{\boldsymbol{i}\alpha}$ mit $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ geschrieben werden. $|R^*| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ nennt man hier Scheinwiderstand und α die Phasenverschiebung. Damit gilt dann

$$I^*(t) = \frac{U_0}{|R^*|} e^{-\boldsymbol{i}\alpha} e^{\boldsymbol{i}\omega t} =: I_0 e^{\boldsymbol{i}(\omega t - \alpha)}\,.$$

Der physikalisch messbare Strom $I(t)$ ist der Realteil dieser Größe, also $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$. Wir sehen, dass $I(t)$ gegenüber der angelegten Spannung $U(t)$ verzögert ist.

8.7. Noch mehr Zahlen?

Frage Lässt sich die komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ zu einem noch umfassenderen Körper erweitern?

Antwort Nein, bzw. man muss dann erhebliche Einschränkungen in Kauf nehmen. So ist die Multiplikation bei den 4-dimensionalen Quaternionen nicht mehr kommutativ und für die 8-dimensionalen Oktaven (auch Oktonionen oder Cayleyzahlen genannt) nicht einmal mehr assoziativ.[¶] Diese Zahlenmengen sind daher nur in Spezialfällen nützlich.

Auslassung
↓

[¶] Im vorstehenden Absatz ist die Dimension der Zahlenmengen als Vektorraum über $\mathbb{R}$ gemeint, was später genauer definiert wird.

9. Unendlichkeit

Zitat (Antoine de Saint-Exupéry)

> Wenn Du ein Schiff bauen willst, so beginne nicht damit, Holz zu beschaffen, Werkzeuge vorzubereiten und Aufgaben zu verteilen, sondern lehre die Menschen die Sehnsucht nach dem weiten endlosen Meer.

9.1. Hilberts Hotel

Beobachtung

- Unendliche Mengen wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sind wichtig, um reale Phänomene in einfacher Weise beschreiben zu können.*
- Andererseits haben unendliche Mengen Eigenschaften, die in der realen Welt nicht auftreten und der Intuition widersprechen.

9.1.1 Beispiel: (Hilberts Hotel) Angenommen wir haben ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern, nummeriert als $1, 2, \ldots$. Jedes Zimmer ist belegt: Zimmer i durch Gast G_i.

1. Ein neuer Gast G kommt an. Der Wirt bringt ihn unter, indem er jedem Gast G_i sagt, er solle in das Zimmer $i + 1$ wechseln. Nach diesem Wechsel kann G in Zimmer 1 untergebracht werden.

2. Analog kann man auch n neue Gäste unterbringen.

3. Unendlich viele neue Gäste $G'_1, G'_2, \ldots$ kommen an. Der Wirt bringt sie alle unter, indem er jedem alten Gast G_i sagt, er solle in Zimmer $2i$ wechseln. Nach diesen Wechseln sind alle Zimmer mit ungeraden Zimmernummern $1, 3, 5, \ldots$ frei und die neuen Gäste könnnen dort untergebracht werden (Gast G'_i in Zimmer $2i - 1$).

*Was sind denn die Alternativen? Eine willkürliche Obergrenze von $\mathbb{N}$? Eine maximale Feinheit von $\mathbb{Q}$? Diese Varianten findet man tatsächlich in sogenannten Maschinenzahlen, deren Verhalten deutlich komplizierter ist als das von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Q}$ und der realen Welt auch nicht entspricht.

9.2. Mächtigkeit

Frage Wann hat eine Menge A mehr, weniger oder gleichviel Elemente wie eine Menge B? Wie ist das insbesondere für unendlich große Mengen wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$?

Antwort Eine mögliche Antwort wäre die Verwendung der Teilmengenrelation: Wenn $A \subset B$ gilt, so hat A weniger Elemente als B, wenn $B \subset A$, so hat A mehr Elemente als B. Wenn beides gilt, so ist $A = B$ und sie haben gleich viele Elemente. Wenn keins von beiden gilt, so sind A und B nicht vergleichbar.

Aber Diese Antwort ist nicht sehr nützlich, weil wir dann nicht einmal sagen können, dass $\{1, 2, 3\}$ gleich viel Elemente hat wie $\{\text{Tasse}, \text{Teller}, \text{Stuhl}\}$.

9.2.1 Definition:

- Eine Menge A heißt gleich mächtig wie B, wenn es eine Bijektion $A \to B$ gibt. Wir schreiben dafür $A \sim B$.
- A heißt weniger oder gleich mächtig als B, wenn es eine Injektion $A \to B$ gibt. Dafür schreiben wir $A \preceq B$.
- A heißt weniger mächtig als B, wenn $(A \preceq B) \wedge \neg(A \sim B)$. Dafür schreiben wir $A \prec B$.
- Wenn $A \sim \{1, \ldots, n\}$ so ist A eine endliche Menge mit $|A| = n$.
- Wenn $A \sim \mathbb{N}$, so nennen wir A abzählbar unendlich.
- Wenn $\mathbb{N} \prec A$, so nennen wir A überabzählbar.

9.2.2 Satz: Wenn $A \neq \varnothing$, so ist die Existenz einer Injektion $f : A \to B$ äquivalent zur Existenz einer Surjektion $g : B \to A$.

Beweis

- Wenn $f : A \to B$ injektiv ist, so ist $f : A \to \text{Bild}(A)$ eine Bijektion, und

$$g : B \to A\,, \quad b \mapsto \begin{cases} (f|_{\text{Bild}(A)})^{-1}(b) & b \in \text{Bild}(A) \\ a_* & \text{sonst} \end{cases},$$

  mit beliebigem $a_* \in A$ ist surjektiv.
- Wenn umgekehrt $g : B \to A$ surjektiv ist, so nimmt die Abbildung

$$\tilde{f} : A \to \mathcal{P}(B)\,, \quad a \mapsto g^{-1}(\{a\})$$

  nie den Wert $\varnothing$ an.
- In dieser Situation kann man dann das sogenannte Auswahlaxiom (Axiom of Choice, AC) anwenden:

A, B seien Mengen und $\tilde{f}$ sei eine mengenwertige Funktion $\tilde{f} : A \to \mathcal{P}(B)\backslash\{\varnothing\}$. Dann gibt es eine Funktion $f : A \to B$ mit $\forall a \in A : f(a) \in \tilde{f}(a)$, d.h. f wählt zu jedem a ein Element aus der Menge $\tilde{f}(a)$ aus.

- Dadurch erhält man ein $f : A \to B$, welches injektiv sein muss, weil für alle $a \in A$ die Beziehung $g(f(a)) = a$ gilt.

9.2.3 Satz: $(A \preceq B \wedge B \preceq A) \Rightarrow A \sim B$.

Beweis Siehe z.B. Friedrichsdorf/Prestel „Mengenlehre für den Mathematiker".

9.3. Die Mächtigkeit der Zahlenmengen

9.3.1 Satz: $\mathbb{N}$ ist offenbar abzählbar. Außerdem gilt:

- $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$. Eine mögliche Bijektion ist $k \mapsto k + 1$.
- $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Eine Bijektion erhält man als die Folge $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots)$.
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$. Eine Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ erhält man beispielsweise, indem man vom Punkt $(0, 0)$ ausgehend spiralförmig nach außen zählt.
- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Hier zählt man Brüche $\frac{m}{n}$ mit $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ähnlich wie im vorigen Beispiel durch, wobei man aber die Punkte mit $\mathrm{ggT}(m, n) \neq 1$ auslässt.

9.3.2 Satz: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, d.h. es gibt viel mehr Zahlen in $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ als in $\mathbb{Q}$ selbst.

Beweis (Cantorsches Diagonalverfahren) Wir nehmen an, wir hätten eine Aufzählung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto x_k \in \mathbb{R}$ sämtlicher reeller Zahlen in Form ihrer Dezimaldarstellungen gegeben. Dann definieren wir die Dezimaldarstellung einer neuen reellen Zahl $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$ wie folgt

$$a_k = \begin{cases} 2 & \text{wenn die } k\text{-te Nachkommastelle von } x_k \text{ gleich } 1 \text{ ist} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Zahl ist offenbar nicht in der Liste, weil sie sich von jedem x_k an irgendeiner Nachkommastelle unterscheidet.

9.4. Kontinuumshypothese

9.4.1 Hypothese: (Cantor 1878, Hilbert 1900) Es gibt keine Menge M mit

$$\mathbb{N} \prec M \prec \mathbb{R}\,.$$

9.4.2 Satz: Es gilt $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Beweisidee

- Einfach sieht man $\mathbb{R} \sim]0,1[$ (eine mögliche Bijektion ist zum Beispiel $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}})$) und $]0,1[\sim [0,1]$ (Hilberts Hotel).
- Jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ definiert genau eine reelle Zahl $x \in [0,1]$, wenn man A als die Nachkommastellen ansieht, bei denen die Dualdarstellung von x eine Eins hat. Diese Abbildung ist surjektiv, und abgesehen von den abzählbar vielen Doppeldeutigkeiten der Dualdarstellung auch injektiv. Diese Doppeldeutigkeiten kann man wieder analog zu Hilberts Hotel unterbringen.

Erinnerung Es gilt immer $M \prec \mathcal{P}(M)$.

Beweis Siehe Übungsaufgabe. Wenn wir ein beliebiges $f : M \to \mathcal{P}(M)$ haben, so ist die Teilmenge

$$A := \{x \in M : x \notin f(x)\} \subset M$$

wohldefiniert. A kann aber nie als Bild $f(\xi)$ eines $\xi \in M$ auftreten, da die Annahmen $\xi \in A$ und $\xi \notin A$ beide zu einem Widerspruch führen. Somit ist f nicht surjektiv. Die Existenz einer injektiven Abbildung ist dagegen klar ($m \mapsto \{m\}$).

Beobachtung

- Für $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit $n \geqslant 1$ ist die Aussage

  $$\exists M : X \prec M \prec \mathcal{P}(X)$$

  wahr, weil $|X| = n$ und $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.
- Die Kontinuumshypothese vermutet also, dass dies für die unendliche Menge $X = \mathbb{N}$ nicht mehr gilt!

Antwort (Gödel 1938, Cohen 1960) Die Kontinuumshypothese lässt sich im Rahmen der „üblichen Mathematik“ weder beweisen noch widerlegen! Stattdessen kann die Existenz (oder auch Nichtexistenz) solcher Mengen als neues Axiom angenommen werden.

9.4.3 Bemerkungen:

- Kurt Gödel hat 1931 gezeigt (Unvollständigkeitssatz), dass solche Aussagen in jedem widerspruchsfreien und hinreichend ausdrucksfähigen Formalismus auftreten.
- Im Bereich der theoretischen Informatik gibt es verwandte Sätze:
  - Es gibt keine auf *beliebige* Programme anwendbare Methode, um zu entscheiden, ob das Programm terminiert (Halteproblem).
  - Es gibt keine auf *beliebige* Programme anwendbare Methode, um deren Korrektheit festzustellen.

↑ Ende Auslassung

Teil III.

Lineare Algebra

Einführung

- Die lineare Algebra ist die Theorie der linearen Räume und der linearen Abbildungen.
- Lineare Räume, auch Vektorräume genannt, beschreiben Objekte der realen Welt nur *approximativ*. (Beispiel: Ebene als Approximation eines Stücks der gekrümmten Erdoberfläche.)
- Ebenso sind lineare Abbildungen zwischen solchen Vektorräumen meist *Approximationen* von allgemeineren nichtlinearen Abbildungen.
- Obwohl die Anwendungen fast immer auf nichtlineare Probleme führen, ist die lineare Theorie von großer Wichtigkeit, weil
  1. man lineare Probleme mit Hilfe der Grundrechenarten exakt lösen kann[†],
  2. *jedes* gutartige nichtlineare Problem *lokal* durch lineare Probleme approximiert werden kann (Differenzierbarkeit), und
  3. die Lösung linearer Probleme oft für die Lösung eines nichtlinearen Ausgangsproblems notwendig ist (Newton-Verfahren).

[†]Im Gegensatz dazu ist für die meisten nichtlinearen Probleme eine exakte Lösung nicht möglich! Bereits die Lösung $x = \sqrt{2}$ der nichtlinearen Gleichung $x^2 = 2$ ist ja eine unendlich lange und nicht-periodische reelle Zahl, welche durch Approximation überhaupt erst definiert wird!

10. Vektorräume und lineare Abbildungen

10.1. Vektorräume

Erinnerung Wir hatten den $\mathbb{R}^n$ als Menge von n-Tupeln definiert. Normalerweise werden solche n-Tupel in der Form $(x_1, \dots, x_n)$ geschrieben. Weil der „euklidische Raum“ $\mathbb{R}^n$ so wichtig ist, verwendet man für seine Elemente eine besondere Darstellung, nämlich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ein solches $x \in \mathbb{R}^n$ nennt man einen Vektor, und die x_i nennt man die Komponenten des Vektors.

Beobachtung Elemente des $\mathbb{R}^n$ kann man addieren und skalieren, z.B. im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Andere nützliche Operationen, die wieder ein $\mathbb{R}^n$-Ergebnis liefern, sind hingegen nicht sichtbar.

10.1.1 Definition: Ein Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) ist eine Menge, für die folgende Operationen definiert sind:

1. Vektoraddition: Es gibt eine Operation

   $$+ : V \times V \to V, \quad (v, w) \mapsto v + w,$$

   sodass $(V, +)$ eine kommutative (Abelsche) Gruppe ist. Das neutrale Element 0_V heißt Nullvektor.

2. Multiplikation mit Skalaren (Skalierung): Es gibt eine Operation

   $$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \,[= \alpha v],$$

   sodass für alle $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:*

*Im wesentlichen bedeutet das Folgende, dass man mit $+$ und $\cdot$ so rechnen kann wie von $\mathbb{R}$ her gewohnt, sofern die Ausdrücke Sinn machen. (Keinen Sinn macht z.B. der Ausdruck $v \cdot w$ für Vektoren $v, w \in V$.)

a) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

b) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$

d) $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$.

e) $0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V$.

BEMERKUNG: Die letzte Eigenschaft folgt bereits aus denen davor: Wegen

$$v = 1_{\mathbb{K}} \cdot v = (0_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}) \cdot v = 0_{\mathbb{K}} \cdot v + 1_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_{\mathbb{K}} \cdot v + v$$

sieht man, dass $0_{\mathbb{K}} \cdot v$ das neutrale Element 0_V der Addition in V ist.

10.1.2 Bezeichnung: Die Elemente eines Vektorraums nennt man Vektoren, die des zugehörigen Körpers $\mathbb{K}$ nennt man Skalare.

10.1.3 Bezeichnungen:

- Vektornotation:
  - In manchen Büchern werden Vektoren generell fett gedruckt, unterstrichen oder mit einem Pfeil gekennzeichnet: $\mathbf{v}$, $\underline{v}$, $\vec{v}$.
  - Wir werden das nicht oder nur sehr selten tun, weil sich erstens die Bedeutung normalerweise leicht aus dem Zusammenhang ergibt, und wir zweitens eine abstraktere Sicht eines Vektorraums fördern wollen.
  - Nur die Pfeilnotation $\vec{v}$ werden wir hin und wieder für den Spezialfall von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ verwenden.
- Den Nullvektor bezeichnen wir im Folgenden meist mit 0 anstatt 0_V.
- Skalare bezeichnen wir meist mit griechischen Buchstaben $\alpha, \beta, \cdots$.
- Auch den Punkt für die Skalierung lässt man oft weg: $\alpha v = \alpha \cdot v$.

Beispiele Vektorräume über $\mathbb{R}$ sind:

- Die Euklidischen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ für $n \geqslant 1$
- $\mathbb{R}$ selbst
- Der Polynomraum

$$\mathcal{P}^N := \{p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{R},\ n \leqslant N\}$$

(alle Polynome mit reellen Koeffizienten und Grad $n \leqslant N$).

- Alle Polynome $p(x)$ von beliebigem Grad,

- Für jede Menge M ist die Menge

$$\mathrm{Fkt}(M, \mathbb{R}) := \{f \mid f \text{ ist Funktion } M \to \mathbb{R}\}$$

aller reellwertigen Funktionen ein Vektorraum, wenn man Addition und Skalierung von Funktionen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}(f+g) : M \to \mathbb{R}\,, &\qquad x \mapsto f(x) + g(x)\,,\\ (\lambda \cdot f) : M \to \mathbb{R}\,, &\qquad x \mapsto \lambda \cdot f(x)\,.\end{aligned}$$

BEMERKUNG: Analog kann man dies für die Menge $\mathrm{Fkt}(M, V)$ der Abbildungen einer Menge M in einen Vektorraum V durchführen.

BEMERKUNG: Auf $\mathrm{Fkt}(M, \mathbb{R})$ kann man (analog zur Addition) auch eine Multiplikation zwischen zwei *Funktionen* (=*Vektoren* in $\mathrm{Fkt}(M, \mathbb{R})$) definieren (wie?).

Weiter gilt

- $\mathbb{Q}^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{C}^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$
- $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ ist auch ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ (dieser hat allerdings eine sehr unschöne Struktur und ist für die Praxis irrelevant)
- $\mathbb{C}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$.

Gegenbeispiele Keine Vektorräume sind beispielsweise:

- $\mathbb{Z}$, weil man keinen passenden Körper findet
- $\mathbb{Q}$ ist kein VR über $\mathbb{R}$, weil nicht mit allen Elementen aus $\mathbb{R}$ skaliert werden kann, ohne $\mathbb{Q}$ zu verlassen
- Polynome vom Grad genau gleich n, weil die Summe von Polynomen n-ten Grades kleineren Grad als n haben kann

  (GEGENBEISPIEL: $p(x) = x^2 + 1$ und $q(x) = -x^2 + 2x + 1$)

10.1.4 Bemerkung: Zwar kann man Vektorräume über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$ betrachten, der weitaus wichtigste Fall ist aber $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Wir werden daher im Folgenden im wesentlichen nur diesen Fall betrachten und den Zusatz „über $\mathbb{R}$“ einfach weglassen.

10.1.5 Übung: Was ist der kleinstmögliche Vektorraum über $\mathbb{R}$?

10.1.6 Bemerkung:
- Auf manchen Vektorräumen wie zum Beispiel dem Raum aller reellwertigen Polynome oder allgemeiner dem Raum aller Funktionen kann man auch das Produkt zweier Funktionen definieren.

- Man beachte, dass dies eine andere Operation ist als die Skalierung, obwohl bei beiden ein Punkt als Notation verwendet wird, der auch bei beiden oft weggelassen wird!
- Und obwohl solche Räume offenbar noch zusätzliche Struktur haben (eine Multiplikation zwischen Vektoren), ist es trotzdem sinnvoll, sie für Anwendungen, die nur die Vektoroperationen benötigen, als einfache Vektorräume zu betrachten!

10.1.7 Definition: Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum (UVR), wenn U den Nullvektor enthält und abgeschlossen unter Anwendung von $\underset{V}{+}$ und $\underset{V}{\cdot}$ ist, d.h.

1. $0_V \in U$
2. $u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 \underset{V}{+} u_2 \in U$
3. $\lambda \in \mathbb{R}, u \in U \Rightarrow (\lambda \underset{V}{\cdot} u) \in U$

Bemerkung: Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass U zusammen mit den „Einschränkungen“ der Operationen $\underset{V}{+}$ und $\underset{V}{\cdot}$ auf $U \subset V$ wieder ein Vektorraum ist.

Beispiele

- $U = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^2$, weil $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ und für Punkte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in U$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} z = x + y \quad &\Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \\ &\qquad (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad z \in U \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} z = \lambda x \quad &\Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda 0 = 0 \\ &\Rightarrow \quad z \in U\,. \end{aligned}$$

- Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Die Sphäre

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

ist dann kein UVR des $\mathbb{R}^n$, weil sie[†]:

1. den Nullvektor nicht enthält,
2. nicht abgeschlossen gegenüber Skalierungen ist,
3. nicht abgeschlossen gegenüber der Addition ihrer Elemente ist.

[†]Natürlich reicht einer dieser Mängel als Begründung.

- Der Polynomraum $\mathcal{P}^N$ (Polynome vom Grad $\leqslant N$) ist ein UVR des VR aller Polynome $\mathcal{P}$.
- Der Raum $U = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (C steht für „continuous“) ist ein UVR des Vektorraums $\mathrm{Fkt}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

10.2. Lineare Abbildungen

10.2.1 Definition: Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W heißt linear, wenn gilt:

1. $\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 \underset{V}{+} v_2) = f(v_1) \underset{W}{+} f(v_2)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in V : f(\alpha \underset{V}{\cdot} v) = \alpha \underset{W}{\cdot} f(v)$

Diese beiden Bedingungen kann man wie folgt zusammenfassen:

- Für alle $v_1, v_2 \in V$ und alle $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\alpha_1 \underset{V}{\cdot} v_1 \underset{V}{+} \alpha_2 \underset{V}{\cdot} v_2) = \alpha_1 \underset{W}{\cdot} f(v_1) \underset{W}{+} \alpha_2 \underset{W}{\cdot} f(v_2)\,.$$

10.2.2 Bemerkung:

- Aus der Skalierungs-Bedingung folgt

$$f(0_V) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0_W\,.$$

  Wir sehen also, dass 0_V in 0_W abgebildet werden muss.

- Mit vollständiger Induktion kann man leicht zeigen, dass —wenn f linear ist— auch für endliche Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ gilt

$$f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n)\,.$$

Beobachtung Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ vertauscht mit den Vektorraumoperationen $+$ und $\cdot$ (zuerst f und dann $\underset{W}{+}$ ergibt dasselbe wie zuerst $\underset{V}{+}$ und dann f, ebenso mit $\cdot$). Sie ist somit strukturerhaltend (homomorph), man bezeichnet sie daher manchmal auch als Homomorphismus von Vektorräumen.
Bemerkung: Man kann das auch wieder schematisch in den folgenden *kommutativen Diagrammen* darstellen:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \xrightarrow{+ \text{ in V}} & V \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W \times W & \xrightarrow{+ \text{ in W}} & W \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \xrightarrow{\cdot \text{ in V}} & V \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{R} \times W & \xrightarrow{\cdot \text{ in W}} & W \end{array}$$

10.2.3 Bezeichnung: Die Menge aller linearen Abbildungen eines Vektorraums V in einen Vektorraum W bezeichnen wir mit $\mathrm{Lin}(V,W)$. Sie ist eine Teilmenge von $\mathrm{Fkt}(V,W)$ (=alle Funktionen, die V auf W abbilden).

Beispiele Lineare Abbildungen sind:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ für eine (x-unabhängige) Konstante $a \in \mathbb{R}$. Tatsächlich haben sogar *alle* linearen Abbildungen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diese Gestalt.
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ wobei $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wieder beschreibt dies *alle* linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Allgemeiner:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

  für Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

10.2.4 Bemerkung: Auch hier werden wir sehen, dass *jede* lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ als

$$f(x) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. Somit ist sie durch ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

eindeutig charakterisiert. Ein solches Schema nennt man eine Matrix (Mehrzahl: *Matrizen*). Außerdem definiert man zur Abkürzung des obigen Ausdrucks für $f(x)$ das sogenannte Matrix-Vektor-Produkt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

und kann dann einfach schreiben $f(x) = Ax$, wobei A die zu f gehörende Matrix ist.
HINWEIS: Machen Sie sich klar, wie dieses Produkt berechnet wird! Es wird bald wieder auftauchen.

Beispiele (Lineare Abbildungen)

- Drehungen, Spiegelungen, Streckungen, Projektionen, die 0 in sich abbilden, sind lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

- Die Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist linear.

  FRAGE: Was macht sie mit einem gegebenen Vektor $x \in \mathbb{R}^2$?

- Das Integral $C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ mit $f \mapsto \int_0^1 f(x)\,dx$ ist linear.
- Die Ableitung $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$ ist linear.

Gegenbeispiele Keine linearen Abbildungen sind etwa:

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \alpha \cdot x + b$ wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2$
- abs, $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sqrt{\cdot}$, ...
- ...

10.2.5 Übung: Warum muss jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gestalt $f(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ haben?

10.2.6 Übung: Geben Sie folgende Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ explizit an:

1. Drehung um $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn (um den Ursprung),
2. Projektion in x_2-Richtung auf die x_1-Achse,
3. Spiegelung an der Geraden $x_1 = x_2$.

Geben Sie auch jeweils die zugehörigen Matrizen an.

10.3. Verkettung und Inversion

10.3.1 Satz: Es seien U, V, W Vektorräume und es seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist auch $h := g \circ f$ linear.

Beweis Es gilt mit $u_1, u_2 \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$h(u_1 + u_2) = g(f(u_1 + u_2)) = g(f(u_1) + f(u_2)) = \\ g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = h(u_1) + h(u_2)\,,$$

sowie mit $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$h(\lambda u) = g(f(\lambda u)) = g(\lambda f(u)) = \lambda g(f(u)) = \lambda h(u)\,.$$

10.3.2 Satz: Seien V und W Vektorräume und sei $f : V \to W$ linear und bijektiv. Dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ linear und bijektiv.

Beweis Seien $w_1, w_2 \in W$. Weil f bijektiv ist, gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_i) = w_i$. Wegen der Linearität von f folgt $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$. Durch Anwendung von f^{-1} folgt hieraus

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)\,.$$

Analog zeigt man $f^{-1}(\lambda w) = \lambda f^{-1}(w)$.

10.3.3 Bezeichnung: Seien V und W Vektorräume und sei $f : V \to W$ linear und bijektiv. Wir haben gesehen, dass dann auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ linear und bijektiv ist. Man nennt ein solches f manchmal auch einen linearen Isomorphismus (isomorph=gleiche Struktur).

10.3.4 Übung: $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine Spiegelung an der x_1-Achse in x_2-Richtung, $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Rotation um 90° um den Ursprung im Uhrzeigersinn.

1. Geben Sie φ_1 und φ_2 explizit an.
2. Berechnen Sie $\varphi_1 \circ \varphi_2$, $\varphi_2 \circ \varphi_1$, φ_1^{-1} und φ_2^{-1}.
3. Geben Sie für jede der oben auftretenden Abbildungen die sie beschreibende Matrix an.

11. Endlich-dimensionale lineare Algebra

11.1. Grundbegriffe

11.1.1. Lineare Abhängigkeit

11.1.1 Bezeichnung: Es sei V ein Vektorraum $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet man einen Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

als Linearkombination der Vektoren v_i.

11.1.2 Definition: Gegeben seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$. Die Menge *aller* Linearkombinationen der v_i

$$\{v \in V \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\} =: \mathrm{Spann}(v_1, \ldots, v_n)$$

ist ein Untervektorraum von V. Man bezeichnet ihn als den von $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannten Untervektorraum oder kürzer, den Spann oder die lineare Hülle der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$.

Beispiele

1. Sei $n = 1$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann besteht $\mathrm{Spann}(v_1)$ aus allen Vielfachen von v_1 und bildet einen UVR des $\mathbb{R}^2$.
2. Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

   $$\mathrm{Spann}(v_1, v_2) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$$

   ein UVR des $\mathbb{R}^3$.
3. Auch $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen denselben UVR auf,

4. und das gleiche gilt für $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Wir haben also

$$\mathrm{Spann}(v_1, v_2, v_3) = \mathrm{Spann}(v_1, v_2) = \mathrm{Spann}(v_1, v_3)\,.$$

11.1.3 Definition:

- Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißen linear abhängig, wenn es eine lineare Beziehung

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

gibt, bei der nicht alle α_i verschwinden (eine solche nennt man auch „nichttrivial“).

- Umgekehrt heißen $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind. Äquivalent dazu ist die folgende Bedingung:

$$\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0\,.$$

11.1.4 Übung:

1. Schreiben Sie auch die Bedingung der linearen Abhängigkeit als logischen Ausdruck.
2. Zeigen Sie durch logische Umformungen, dass lineare Unabhängigkeit die Negation der linearen Abhängigkeit ist.
3. Eliminieren Sie auch die Punktenotation „...“.

11.1.5 Beispiel:

1. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, weil

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0\,.$$

2. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear abhängig, weil offenbar gilt $v_1 + v_2 - v_3 = 0$.
3. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ sind wiederum linear unabhängig.

11.1.6 Bemerkung: Eine nichttriviale lineare Beziehung der Form

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

gibt es genau dann, wenn man einen der Vektoren als Linearkombination

$$v_k = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ i\neq k}} \lambda_i v_i$$

der anderen darstellen kann.

Beweisskizze Zum Beweis der Richtung $\Rightarrow$ wählt man ein k mit $\alpha_k \neq 0$ und teilt die Linearkombination durch α_k. Zum Beweis der Richtung $\Leftarrow$ bringt man einfach v_k auf die rechte Seite.

11.1.7 Satz: Seien $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Dann ist diese Darstellung eindeutig, d.h. wenn zusätzlich $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, so folgt $\beta_i = \alpha_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Beweis Aus

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) v_i = 0$$

und somit wegen der linearen Unabhängigkeit $\beta_i - \alpha_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

11.1.2. Erzeugendensystem und Basis

11.1.8 Definition: (Erzeugendensystem) Der Vektorraum V heißt endlich erzeugt, wenn es $\mathcal{E} := \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ gibt mit $V = \mathrm{Spann}(v_1, \ldots, v_n)$. $\mathcal{E}$ heißt dann Erzeugendensystem (ES) von V.

11.1.9 Definition: (Basis) Ein Erzeugendensystem $\mathcal{E}$, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht, heißt Basis.

11.1.10 Folgerung: Die Darstellung von Vektoren bezüglich einer Basis ist eindeutig.

Beispiele

- $\{1, -1, 2\}$ ist ein Erzeugendensystem für $\mathbb{R}$ (als VR über $\mathbb{R}$ betrachtet!); $\{1\}$, $\{-1\}$ oder $\{2\}$ wäre eine Basis.
- Die Menge $\{1, x, 1+x, x^2\}$ ist ein ES für die Polynome vom Grad $\leqslant 2$. Eine Basis wäre $\{1, x, x^2\}$ (oder auch $\{1, 1+x, x^2\}$ bzw. $\{x, 1+x, x^2\}$).
- $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ ist ein ES des $\mathbb{R}^2$, $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$ oder $\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ oder $\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ sind allesamt Basen des $\mathbb{R}^2$.

11.1.11 Bemerkung: Erzeugendensysteme und Basen sind auch im Alltag allgegenwärtig. So kann man Längen etwa in Metern, Kilometern, Ångstrøm, Meilen, Lichtjahren und vielen anderen Einheiten ausdrücken — je nach Anwendung ist die eine oder andere Einheit praktisch. Wirklich notwendig wäre aber nur eine der Einheiten, zum Beispiel Meter, weil man die anderen daraus ableiten kann.
ZUSATZBEISPIEL: Ein ähnliches Phänomen in zwei Dimensionen ist beispielsweise die Wahl von Ausrichtung und Maßstab bei Landkarten.
Es folgen einige wichtige Sätze, deren Beweise zwar nicht schwierig, aber etwas technisch sind, und die wir daher nicht ausführen werden.

11.1.12 Satz: (Basisexistenzsatz) Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.

Beweisskizze Man geht von einem Erzeugendensystem $\{v_1, \ldots, v_n\}$ für V aus. Wenn es eine nichttriviale Beziehung $\sum_{k=1} \alpha_k v_k = 0$ gibt, so kann man ein v_k weglassen, bei dem $\alpha_k \neq 0$ ist, ohne dass sich der aufgespannte Vektorraum ändert. Dies kann man wiederholen, solange die verbleibenden Vektoren linear abhängig sind. Man behält letztendlich eine Menge linear unabhängiger Vektoren zurück, die V aufspannen, also eine Basis.

11.1.13 Satz: (Ersetzungssatz) Es sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V und $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ mit $\alpha_k \neq 0$ für ein k. Dann ist auch $B' = \{b_1, \ldots, b_{k-1}, v, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V.

Beweisskizze Erstens wird V von B' aufgespannt, weil man b_k offenbar durch v und alle anderen b_i mit $i \neq k$ darstellen kann. Zweitens besteht B' aus linear unabhängigen Vektoren, weil eine nichttriviale Linearkombination für die Vektoren aus B' durch Einsetzen des Ausdrucks für v eine nichttriviale Linearkombination der Vektoren in B ergeben würde.

11.1.14 Satz: (Dimension eines Vektorraums) Für einen endlich erzeugten Vektorraum V ist die Zahl der Basisvektoren für alle Basen gleich. Man nennt diese Zahl die Dimension des Vektorraums.

Beweisskizze Man nimmt an, es gäbe Basen $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ und $B' := \{b'_1, \ldots, b'_m\}$ mit $m < n$. Dann ersetzt man die b'_k nacheinander für $k = 1, \ldots, m$ durch geeignete Vektoren $b_{i(k)}$, wobei man darauf achtet, dass $\{b_{i(1)}, \ldots, b_{i(k)}, b'_{k+1}, \ldots, b'_m\}$ immer noch V aufspannen. Die Prozedur endet dann mit einer m-elementigen Teilmenge $B'' := \{b_{i(1)}, \ldots, b_{i(m)}\}$ von B, die immer noch ganz V aufspannt. Dies ist aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der b_i, weil man dann auch einen Vektor aus $B \backslash B''$ durch die Vektoren aus $B'' \subsetneq B$ darstellen könnte.

11.1.15 Satz: (Basisergänzungssatz) Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Wenn $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig sind, so muss $k \leqslant n$ sein. Ferner gibt es Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$, so dass $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis ist.

Beweisskizze Auch hier hilft der Ersetzungssatz, indem man geeignete Elemente einer beliebigen Basis durch die v_i ersetzt.

11.1.16 Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann kann man jeden beliebigen Vektor $v_2 \in \mathbb{R}^2$ hinzunehmen, der nicht ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, und erhält eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

11.1.3. Die Standardbasis im $\mathbb{R}^n$

11.1.17 Definition: Im $\mathbb{R}^n$ selbst gibt es zwar auch viele Basen, aber eine ist besonders einfach: die sogenannte Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ mit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beobachtung Die Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ der Standardbasis haben die Komponenten $(e_i)_j = \delta_{ij}$, wobei

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

das sogenannte Kronecker-Delta bezeichnet.

11.1.18 Bemerkung:

- Man kann δ_{ij} als Kurzschreibweise für $\delta(i, j)$ verstehen, wobei

$$\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{0, 1\}, \quad (i, j) \mapsto \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Beim Rechnen mit dem Kronecker-Delta verwendet man oft, dass für beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ folgendes gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ik} = a_k .$$

11.1.19 Bemerkung: Das $\mathcal{E} := \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis ist, sieht man wie folgt:

1. $\mathcal{E}$ ist ein Erzeugendensystem, weil man jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bezüglich $\mathcal{E}$ darstellen kann:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

2. Die Vektoren aus $\mathcal{E}$ sind linear unabhängig, weil die Einsen an verschiedenen Stellen sitzen und daher keines der e_i durch die anderen linear kombiniert werden kann.

11.1.20 Folgerung: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

11.1.4. Basiswahl

Beobachtung Die Wahl einer Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in einem Vektorraum V induziert einen Vektorraumisomorphismus (d.h. eine lineare und bijektive Abbildung)

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{V} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} V\,, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

Die Komponenten x_i nennt man dann die Komponenten oder Koordinaten des Punktes $v \in V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

11.1.21 Folgerung: Jeder Vektorraum V der Dimension n ist somit isomorph zum $\mathbb{R}^n$.

11.1.22 Bemerkung: Solch ein Isomorphismus durch Einführung eines Koordinatensystems ist *immer* notwendig, sobald man irgendetwas (z.B. die Position oder die Geschwindigkeit eines Objekts) messen und die entstehenden Daten quantitativ verarbeiten will.

11.1.23 Beispiel: Zum Arbeiten mit dem Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich 4 verwendet man oft die Monombasis $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Alternativ könnte man aber auch die Basis $\{1, x-1, \ldots, (x-1)^4\}$ verwenden. Je nach Anwendung ist die eine oder die andere Basis von Vorteil.

11.1.24 Beispiel: Die Lösung der Federpendelgleichung hatte die Gestalt

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,.$$

Man kann sie als Linearkombination* der Funktionen $\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\}$ auffassen, welche im Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$ eine Basis des Lösungsraums der Pendelgleichung bilden. BEMERKUNG: Im Sonderfall $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ enthält $\mathrm{Spann}(e^{\lambda t})$ nicht alle Lösungen. Stattdessen zeigt eine eingehendere Untersuchung, dass eine Basis des Lösungsraums hier durch $\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}\}$ gegeben ist.

Beobachtung

- Es seien V und W Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. In V sei die Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und in W die Basis $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ gegeben.
- Jede Abbildung $f : V \to W$ (die nicht unbedingt linear sein muss) entspricht eindeutig einer Abbildung

$$\tilde{f} := (\Phi_{\mathcal{C}}^{W})^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{V} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,.$$

- Dies kann man wieder durch ein kommutatives Diagramm darstellen, in dem man dieselbe Abbildung auf verschiedenen Wegen erhalten kann:

*Die Linearkombination muss komplex angesetzt werden, falls $\lambda_i \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so reicht hingegen ein Ansatz mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad f \quad} & W \\ (\Phi_{\mathcal{B}}^V)^{-1} \downarrow \uparrow \Phi_{\mathcal{B}}^V & & \Phi_{\mathcal{C}}^W \uparrow \downarrow (\Phi_{\mathcal{C}}^W)^{-1} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\quad \tilde{f} \quad]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

- Wenn $f : V \to W$ linear ist, so ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ als Verkettung linearer Abbildungen wieder linear.

11.1.25 Bemerkung: Weil sie zum Rechnen wichtig sind, werden wir uns im Folgenden besonders für die euklidischen Vektorräume und die linearen Abbildungen zwischen ihnen interessieren.

11.2. Lineare Abbildungen in Euklidischen Räumen

Beobachtung Es seien V und W Vektorräume und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sei eine Basis in V. Dann ist jede lineare (!) Abbildung $\varphi : V \to W$ wegen der Beziehung

$$\varphi(\underbrace{v}_{=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i}) = \varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(b_i)$$

bereits durch die n Vektoren $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n) \in W$ eindeutig bestimmt!

11.2.1 Definition: Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $e_1, \ldots, e_n$ bezeichne die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann ist φ durch die n Bilder der Standardbasisvektoren

$$a_1 := \varphi(e_1), \quad a_2 := \varphi(e_2), \quad \ldots \quad a_n := \varphi(e_n) \in \mathbb{R}^m$$

eindeutig bestimmt! Wenn man nun die Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ nebeneinander schreibt, und $a_{ij} := (a_j)_i$ (die i-te Komponente des Vektors $a_j = \varphi(e_j)$) setzt, so kann man φ durch das folgende rechteckige Zahlenschema charakterisieren:

$$(a_1 \mid \cdots \mid a_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =: A\,.$$

Ein solches Schema nennt man Matrix (Mehrzahl: Matrizen). Den Raum aller Matrizen der Zeilenzahl m und der Spaltenzahl n bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m\times n}$. Die Zahl in Zeile i und Spalte j einer Matrix A bezeichnen wir als Matrixelement oder Matrixeintrag a_{ij}.[†] Die Anwendung

[†]Eine gute Merkregel für die Reihenfolge der Indices ist übrigens: **Z**eile **z**uerst, **S**palte **s**päter.

von φ auf $x \in \mathbb{R}^n$ kann dann mit Hilfe von A als

$$\varphi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i a_i = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{=:Ax}$$

schreiben. Den Ausdruck auf der rechten Seite nennt man das Matrix-Vektor-Produkt von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ und schreibt es als Ax. Es hat die Komponenten

$$(Ax)_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant m\,.$$

11.2.2 Bemerkungen:
- Für Matrizen verwenden wir im Folgenden möglichst die Großbuchstaben A, B und C.
- Jedes $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ entspricht „eineindeutig“ (=bijektiv) einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und man erhält die zu φ gehörende Matrix A, indem man die Bilder $\varphi(e_i)$ der Standardbasisvektoren e_i als Spaltenvektoren nebeneinander schreibt.

11.2.3 Übung: Welche lineare Abbildung gehört zur Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Matrixeinträgen $(\mathbb{1}_{n\times n})_{ij} = \delta_{ij}$?

11.2.4 Übung: Man berechne die Wirkung der zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ gehörenden linearen Abbildung auf den Vektor $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

11.2.5 Übung: Wie lautet die Matrix für eine Drehung um 30 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn im $\mathbb{R}^2$? Man wende diese Drehmatrix auf $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

11.3. Lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^2$

11.3.1 Definition: Eine lineare Selbstabbildung eines Vektorraums V ist eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$.

Erinnerung Die linearen Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^1$ sind die Skalierungen $x \mapsto \alpha x$. Die zugehörigen Matrizen sind daher einfach $(\alpha) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiele Interessanter sind die linearen Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^2$. Die folgenden Matrizendarstellungen lassen sich einfach herleiten, indem man sie aus den Bildern der Standardbasisvektoren zusammensetzt:

- Eine Drehung um den Winkel α entgegen dem Uhrzeigersinn (um den Nullpunkt) hat die Matrix
$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,.$$

- Spezialfälle von Drehungen sind auch:
  1. Für $\alpha = 0$ ergibt sich die Einheitsmatrix $A(0) = \mathbb{1}_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, welche zur Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : x \mapsto x$ gehört.
  2. Für $\alpha = \pi$ ergibt sich die Punktspiegelung am Nullpunkt mit Matrix
  $$A(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$
  Ihre Wirkung entspricht einer Skalierung mit dem Faktor -1.
- Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$
mit $r \in \mathbb{R}$ entspricht einer Skalierung mit dem Faktor r.
- Die Spiegelung an der x-Achse hat die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$
- Die Projektion auf die x_1-Achse in x_2-Richtung hat die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$
- Eine Scherung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (in Richtung der x_1-Achse) hat die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

11.4. Multiplikation von Matrizen

Beobachtung Wir wissen bereits, dass $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ein Vektorraum ist.[‡] Die Addition und skalare Multiplikation von linearen Abbildungen übersetzt sich in die Addition und skalare Multiplikation der zugehörigen Matrizen, d.h., wenn die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ durch $\varphi_1(x) = A_1 x$ und $\varphi_2(x) = A_2 x$ gegeben sind, so ist die Summe $\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$ gegeben als $\varphi_3(x) = A_3(x)$ mit $A_3 = A_1 + A_2$ (Addition der Matrizen). Bei dieser Matrix-Addition werden einfach die entsprechenden Einträge der Matrizen addiert. Dazu müssen

[‡]Es ist ein Untervektorraum des Vektorraums *aller* Funktionen, die $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ abbilden.

die Summanden dasselbe Format haben (d.h. $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$) und auch das Ergebnis hat dasselbe Format. In Formeln lautet dies

$$(A_1 + A_2)_{ij} = (A_1)_{ij} + (A_2)_{ij}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant m,\, 1 \leqslant j \leqslant n\,.$$

Ein Beispiel wäre etwa

$$\varphi_1(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=A_1} x\,, \quad \varphi_2(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{=A_2} x$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_3(x) = (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{=A_1+A_2} x\,.$$

Ebenso ist für $\varphi(x) = Ax$ die zu der mit $\lambda \in \mathbb{R}$ skalierten Abbildung $(\lambda\varphi)$ gehörende Matrix einfach $B := \lambda A$, wobei B aus A entsteht, indem jedes Matrixelement mit λ multipliziert wird. Ein Beispiel ist etwa

$$\varphi(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{=A} x\,, \qquad \Rightarrow \quad (3\varphi)(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}}_{=3A} x\,.$$

Mit dieser Addition und Skalierung von Matrizen wird der Raum $\mathbb{R}^{m\times n}$ aller $m \times n$-Matrizen zu einem Vektorraum.

Frage Oft wichtiger als Addition und Skalierung linearer Abbildungen ist aber deren Verkettung durch $\circ$. Wie übersetzt sich diese Operation in Matrizensprache?
Genauer: Die Verkettung einer linearen Abbildung $\varphi_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ mit einer linearen Abbildung $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine lineare Abbildung $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$. Wie hängen die zugehörigen Matrizen $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}, A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}, A_3 \in \mathbb{R}^{m\times p}$ zusammen?

Antwort Die k-te Spalte $y := A_3 e_k = \varphi_3(e_k)$ von A_3 ergibt sich als

$$y = \varphi_3(e_k) = (\varphi_2 \circ \varphi_1)(e_k) = \varphi_2(\varphi_1(e_k)) = \varphi_2(A_1 e_k) = A_2(\underbrace{A_1 e_k}_{=:x})\,,$$

also indem man A_2 auf die k-te Spalte $x := A_1 e_k$ von A_1 anwendet. Für ein einzelnes Element $(A_3)_{ik}$ bedeutet dies

$$(A_3)_{ik} = y_i = \sum_{j=1}^{n} (A_2)_{ij} \underbrace{x_j}_{=(A_1)_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} (A_2)_{ij}(A_1)_{jk}\,.$$

Man erhält das Matrixelement $(A_3)_{ik}$ also, indem man entsprechende Elemente der i-ten *Zeile* von A_2 mit denen der k-ten *Spalte* von A_1 multipliziert und die Produkte aufsummiert.

11.4.1 Definition: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Dann definieren wir das Matrixprodukt (oder genauer Matrix-Matrix-Produkt) $C = A \cdot B = AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$ als

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant m\,, 1 \leqslant k \leqslant p\,.$$

Wenn φ_A und φ_B die zu A und B gehörenden linearen Abbildungen sind, so gehört C zu der linearen Abbildung $\varphi_C = \varphi_A \circ \varphi_B$.

11.4.2 Bemerkung: Damit das Produkt $A \cdot B$ von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m_a\times n_a}$ und $B \in \mathbb{R}^{m_b\times n_b}$ definiert ist, muss die Spaltenzahl n_a von A gleich der Zeilenzahl m_b von B sein!

Beispiele

- Hier ein recht willkürliches Beispiel:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 10\\ 8 & 11\\ 9 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 7+2\cdot 8+3\cdot 9 & 1\cdot 10+2\cdot 11+3\cdot 12\\ 4\cdot 7+5\cdot 8+6\cdot 9 & 4\cdot 10+5\cdot 11+6\cdot 12\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}50 & 68\\ 122 & 167\end{pmatrix}$$

  FRAGE: Dies entspricht einer Verkettung von linearen Abbildungen zwischen $\varphi_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ und $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit welchen $m, n, p \in \mathbb{N}$?

- Die allgemeine Drehstreckung im $\mathbb{R}^2$ erhält man als

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\cos\alpha & -r\sin\alpha\\ r\sin\alpha & r\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

  mit $a = r\cos\alpha$ und $b = r\sin\alpha$.

  BEMERKUNG: Letzterer Ausdruck ist übrigens auch für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ eine Drehstreckung, weil sich dazu passende Parameter $r \geqslant 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ aus der Polarkoordinatendarstellung von $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ ergeben.

11.4.3 Satz: Das Matrixprodukt ist assoziativ, d.h.

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C\,,$$

wobei die Formate von A, B, C so sein müssen, dass die Produkte definiert sind.

Beweis Dies folgt sofort aus der Assoziativität

$$\varphi_A \circ (\varphi_B \circ \varphi_C) = (\varphi_A \circ \varphi_B) \circ \varphi_C$$

der zugehörigen linearen Abbildungen. Man kann es alternativ auch einfach per Hand nachrechnen:

$$(A(BC))_{il} = \sum_j A_{ij}(BC)_{jl} = \sum_j\sum_k A_{ij}B_{jk}C_{kl} = \sum_k (AB)_{ik}C_{kl} = ((AB)C)_{il}\,.$$

11.4.4 Bemerkungen:

- Es gelten auch die Distributivgesetze

$$A(B+C) = AB + AC\,, \quad (A+B)C = AC + BC$$

was man wieder aus den entsprechenden Gesetzen für lineare Abbildungen ersieht.

- Das Matrixprodukt ist aber *nicht* kommutativ, weil
  1. BA nicht einmal definiert sein muss,
  2. selbst wenn AB und BA beide definiert sind, sie nicht dasselbe Format haben müssen,
  3. und auch wenn AB und BA dasselbe Format haben, normalerweise nicht gilt $AB = BA$!

11.4.5 Beispiel: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der Drehung um 90 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der orthogonalen (senkrechten, d.h. in Richtung des Standardbasisvektors e_2) Projektion auf die x_1-Achse. Dann gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA\,.$$

11.4.6 Bemerkungen:

- Wenn man den $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}^{n\times 1}$ auffasst (die anfangs gewählte Spaltenschreibweise legt das sowieso nahe), so ist das früher eingeführte Matrix-Vektor-Produkt ein Spezialfall dieses Matrixprodukts.

- Die Berechnung des Matrix-Matrix-Produkts auf obige Weise benötigt offenbar $m \cdot n \cdot p$ Multiplikationen und $m \cdot (n-1) \cdot p$ Additionen. Im Falle $m = n = p$ wächst also der Aufwand $A(n)$ mit n wie $A(n) \approx Cn^3$ (eine Verdopplung von n vergrößert den Aufwand also etwa um einen Faktor 8).

- Wenn *sehr viele* Operationen (hier: $O(n^3)$) auf *vielen* Daten (hier: $O(n^2)$) ausgeführt werden, ist Cache-Optimierung entscheidend für schnelle Routinen, wie man sie z.B. in Bibliotheken (BLAS/ATLAS) oder Programmen wie Matlab (kommerziell), Octave (frei) und Scilab (frei) findet.

11.4.7 Übung: Jemand fragte mich: Warum definiert man die Matrixmultiplikation zwischen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ nicht einfach als Abbildung $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ durch elementweise Multiplikation (also analog zur Addition)?

11.4.8 Lösung: Eine „Matrixmultiplikation“ durch einfache Multiplikation entsprechender Matrixelemente bei Matrizen gleichen Formats könnte man zwar definieren (in Matlab/Octave/Scilab ist es das Kommando '.*' anstatt '*'). Diese Operation hat allerdings keine interessante geometrische Bedeutung und wird in Anwendungen viel seltener gebraucht.

11.5. Einschub: Die lineare Gruppe

Erinnerung Wir hatten bereits folgende Tatsachen kennengelernt:

1. Die bijektiven Selbstabbildungen $\mathrm{Bijektiv}(M)$ einer beliebigen Menge M bilden eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung $\circ$.
2. Für lineare Abbildungen φ_1 und φ_2 ist $\varphi_1 \circ \varphi_2$ wieder linear.
3. Für eine lineare und bijektive Abbildung $\varphi : V \to W$ ist die Umkehrfunktion φ^{-1} wieder linear. Diese erfüllt

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_V\,, \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_W\,.$$

11.5.1 Bezeichnung: Anstelle von bijektiv verwenden wir im Folgenden auch die Bezeichnungen invertierbar (es existiert eine Umkehrfunktion) oder regulär.

11.5.2 Definition: Eine lineare Selbstabbildung $\varphi : V \to V$ eines Vektorraums V nennt man einen Endomorphismus von V. Wenn φ invertierbar ist, so nennt man es einen Automorphismus von V.

11.5.3 Folgerung: Die Menge

$$\mathrm{Aut}(V) := \{\varphi \in \mathrm{Lin}(V,V) \mid \varphi \text{ invertierbar}\}$$

der Automorphismen eines Vektorraums V ist eine Gruppe bezüglich $\circ$.

11.5.4 Beispiel: Ein fast schon zu triviales Beispiel (später kommen interessantere) ist der Fall des Vektorraums $V = \mathbb{R}$, bei dem $\mathrm{Aut}(V)$ aus allen Multiplikationen mit Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ besteht. Und $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist ja tatsächlich eine Gruppe bezüglich der Multiplikation (das war eine Körpereigenschaft).

11.5.5 Bemerkungen:

- $\mathrm{Aut}(V)$ ist eine Untergruppe[§] der Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen $\mathrm{Bijektiv}(V)$.
- $\mathrm{Aut}(V)$ ist zwar eine Teilmenge, aber *kein* Untervektorraum des Vektorraums $\mathrm{Lin}(V,V)$! (Siehe das nächste Beispiel.)

11.5.6 Beispiel: Für $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = -x$ ist $\varphi_1 + \varphi_2$ die (für $V \neq \{0\}$ nicht invertierbare) Nullabbildung.

11.5.7 Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nennen wir invertierbar oder regulär, wenn die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar ist. Zu φ_A gibt es also eine (eindeutig bestimmte) Umkehrfunktion $\varphi_A^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi_A \circ \varphi_A^{-1} = \varphi_A^{-1} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\,.$$

[§]Teilmenge einer Gruppe, welche selbst eine Gruppe bezüglich derselben Verknüpfung ist

Diese besitzt wieder eine Matrixdarstellung $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für welche gilt

$$AB = BA = \mathbb{1}_{n\times n}\,,$$

wobei $\mathbb{1}_{n\times n}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix mit den Einträgen $(\mathbb{1}_{n\times n})_{ij} = \delta_{ij}$ bezeichnet. Diese (eindeutig bestimmte) Matrix B nennt man die Inverse von A und bezeichnet sie mit A^{-1}.

11.5.8 Folgerung: Die regulären $n \times n$-Matrizen bilden eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Diese bezeichnet man als lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n)$ oder $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

11.5.9 Bemerkungen:

- Für $A, B \in \mathrm{GL}(n)$ gilt also $C = AB \in \mathrm{GL}(n)$. Man kann die Inverse C^{-1} sogar angeben: Für die zugehörigen (linearen) Abbildungen mit $\varphi_C = \varphi_A \circ \varphi_B$ gilt nämlich $\varphi_C^{-1} = \varphi_B^{-1} \circ \varphi_A^{-1}$, was in Matrizensprache liefert

  $$C^{-1} = (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

  Man beachte: Die Reihenfolge kehrt sich um!

- Analog zu oben gilt auch: $\mathrm{GL}(n)$ ist eine Teilmenge, aber *kein* Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$! Insbesondere muss die Summe invertierbarer Matrizen nicht invertierbar sein!

11.5.10 Beispiel:

- Für $n = 1$ ist $\mathrm{GL}(1) = \{(a) \mid 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$. Die Komplementärmenge $\mathbb{R}^{1\times 1}\backslash \mathrm{GL}(1)$ hat nur das Element (0).

- Für $n = 2$ ist (siehe Übung)

  $$\mathrm{GL}(2) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det(A) := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\}\,.$$

- Die Struktur von $\mathrm{GL}(2)$ oder $\mathbb{R}^{2\times 2}\backslash \mathrm{GL}(2)$ ist viel komplizierter als im Fall $n = 1$.

11.5.11 Bemerkung: Später werden wir für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Determinantenfunktion $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ definieren. Mit Hilfe dieser Determinante kann man dann in $\mathrm{GL}(n)$ zwei „zusammenhängende“ Teile identifizieren, die sich durch das Vorzeichen der Determinante (positiv/-negativ) unterscheiden. Getrennt werden diese zwei Teile durch die Menge $\mathbb{R}^{n\times n}\backslash GL(n)$ der nichtinvertierbaren, nichtregulären oder singulären Matrizen, für welche die Determinante 0 ist.

12. Matrixinversion und Lösung linearer Gleichungssysteme

12.1. Formeln für A^{-1}

Frage Wie berechnet man für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Inverse $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

12.1.1 Satz: Wir betrachten den Fall $n = 1$: Hier hat jedes reguläre $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ die Gestalt (a) mit $0 \neq a \in \mathbb{R}$. Die Inverse ist $A^{-1} = (\frac{1}{a})$.

12.1.2 Satz: Wir betrachten den Fall $n = 2$: Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

und $\delta := ad - bc \neq 0$. (Diese Bedingung ist äquivalent dazu, dass keiner der Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ ein Vielfaches des anderen ist.) Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Beweis

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12.1.3 Bemerkung: Diese Formel zur Berechnung von A^{-1} im Fall $n = 2$ lässt sich zur sogenannten Cramerschen Regel verallgemeinern, die auch für $n > 2$ gilt und mit Hilfe von Determinanten formuliert wird. Die Cramersche Regel ist aber hauptsächlich von theoretischem Interesse, da man zur schnellen Berechnung von Determinanten ähnliche Techniken verwenden muss, wie sie im Folgenden zur Berechnung von Inversen und zur Lösung linearer Gleichungssysteme vorgestellt werden.

12.2. Lineare Gleichungssysteme

Beobachtung In Anwendungen wird fast nie die Berechnung von A^{-1} verlangt! Es reicht meist aus, zu gegebenem regulären $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einem $y \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ der Gleichung

$$Ax = y$$

zu finden.

12.2.1 Beispiel: Eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, wenn gilt

$$F(x) - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0) + \text{kleiner Fehler}\,.$$

Hierbei ist $F'(x_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die sogenannte Ableitungs- oder Jacobi-Matrix. Das Newton-Verfahren sucht eine Lösung x_* der nichtlinearen Gleichung $F(x) = 0$, indem es in der obigen Gleichung $F(x) = 0$ setzt und den Fehler vernachlässigt. Man erhält dann das lineare Gleichungssystem

$$F'(x_0)\underbrace{(x - x_0)}_{=v} = -F(x_0)\,,$$

dessen Lösung $v \in \mathbb{R}^n$ dann zur Berechnung einer verbesseren Approximation $x_1 := x_0 + v$ an x_* verwendet wird.

12.2.2 Definition: (Lineares Gleichungssystem, LGS) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $y \in \mathbb{R}^n$. Das Problem: Finde $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = y$$

was mit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ komponentenweise lautet

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array}$$

nennen wir ein lineares Gleichungssystem (LGS). A heißt Systemmatrix, y heißt rechte Seite.

12.2.3 Bemerkungen:

- Wenn A^{-1} bekannt ist, so berechnet sich die Lösung x von $Ax = y$ einfach als $x = A^{-1}y$ (Multiplikation von links mit A^{-1}).
- Umgekehrt gilt aber auch: Wenn man für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die n linearen Gleichungssysteme(!)

  $$Ab_i = e_i\,, \quad i = 1, \dots, n$$

  mit den Standardbasisvektoren als rechten Seiten effizient lösen kann, so erhält man A^{-1} als $A^{-1} = (b_1|\cdots|b_n)$, d.h. die Lösungsvektoren $b_i = A^{-1}e_i$ sind gerade die Spalten von A^{-1}.

12.3. Gaußsches Eliminationsverfahren

12.3.1 Problem: Finde die Lösung des LGS

$$Ax = y$$

für $A \in \mathrm{GL}(n)^*$ und $y \in \mathbb{R}^n$.

*D.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist regulär. Der Fall einer singulären Systemmatrix A, bei dem es entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen gibt, wird später betrachtet.

Idee Wir erlauben folgende Operationen:

(GE_1) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen,

(GE_2) Vertauschen von zwei Zeilen.

(GE_3) Skalieren einer Zeile mit einem Faktor $\lambda \neq 0$.

12.3.2 Bemerkung: Die Operationen (GE_1) und (GE_2) reichen bereits aus, um ein System mit regulärer Systemmatrix $A = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{GL}(n)$ in obere Dreiecksgestalt zu bringen, welche dann von hinten her aufgelöst werden kann. Das entstehende Verfahren heißt Gauß-Elimination (GE) oder Gaußsches Eliminationsverfahren.

12.3.3 Algorithmus: (Gauß-Elimination, Transformation auf Dreiecksgestalt)

Für $k = 1, \dots, n$:
  Wenn $A_{kk} = 0$:
    Finde $i \in \{k+1, \dots, n\}$ mit $A_{ik} \neq 0$ und tausche Zeilen i und k.
  Für $i = k+1, \dots, n$:
    Addiere das $-\frac{A_{ik}}{A_{kk}}$-fache von Zeile k zu Zeile i

12.3.4 Beispiel: Die Transformation des Systems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \end{array}$$

auf Dreiecksgestalt kann man wie folgt durchführen:
Mit Hilfe von $(Z2) = (Z2) + 2(Z1)$, $(Z3) = (Z3) - \frac{3}{2}(Z1)$ erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & -2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & & & 9x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & - & \frac{7}{2}x_3 & = & -\frac{5}{2} \end{array}$$

Ein Tausch der Zeilen (Z2) und (Z3) führt zu

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & - & \frac{7}{2}x_3 & = & -\frac{5}{2} \\ & & & & 9x_3 & = & 3 \end{array}$$

Dies ist bereits die gewünschte (rechte obere) Dreiecksgestalt.

12.3.5 Bemerkungen:
- Falls der Fall auftreten sollte, dass in der ersten Spalte einer „Restmatrix“ alle Elemente verschwinden, so ist bereits die Ausgangsmatrix singulär und das System kann entweder gar nicht oder nicht eindeutig gelöst werden. Solche Fälle betrachten wir später.

- Durch die Verwendung einer Matrixnotation, bei der Systemmatrix und rechte Seite kombiniert werden, verringert sich der Schreibaufwand deutlich:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

12.3.6 Definition: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt rechte obere (bzw. linke untere) Dreiecksmatrix, wenn $A_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$).

12.3.7 Bemerkung: Ein LGS $Rx = z$ mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die alle Diagonalelemente $R_{ii} \neq 0$ sind, lässt sich durch Rückwärtssubstitution lösen.

12.3.8 Algorithmus: (Rückwärtssubstitution, Lösung von $Rx = z$)
Für $k = n, \ldots, 1$ setze $x_k := \dfrac{1}{R_{kk}}\Big(z_k - \sum\limits_{i=k+1}^{n} R_{ki}x_i\Big)$.

12.3.9 Beispiel: Rückwärtssubstitution liefert für das obige Beispiel die Lösung

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{9}\cdot 3 = \frac{1}{3} \\ x_2 &= -\frac{5}{2} + \frac{7}{2}x_3 = -\frac{5}{2} + \frac{7}{6} = \frac{-15+7}{6} = -\frac{4}{3} \\ x_1 &= \frac{1}{2}(1 + 2x_2 - 3x_3) = \frac{1}{2}(1 - \frac{8}{3} - 1) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

12.3.10 Bemerkung: Analog lässt sich ein System $Lx = z$ mit linker unterer Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ einfach durch Vorwärtssubstitution lösen.

Frage Wozu braucht man die Zeilenskalierung (GE_3)?

Antwort

- Diese Operation kann beim Lösen mit der Hand nützlich sein, um auftretende Brüche zu eliminieren oder zu vermeiden.
- Einerseits kann man etwa Zeilen mit ihrem Hauptnenner multiplizieren.
- Alternativ kann man auch schon das Entstehen von Brüchen durch eine Kombination von (GE_1) und (GE_3) vermeiden: Wenn etwa für $i > k$ und $a_{kk} = 3$ und $a_{ik} = 5$ das Element a_{ik} eliminiert werden soll, ersetzt man die i-te Zeile durch die Linearkombination $3 \cdot (Z_i) - 5 \cdot (Z_k)$.
- Bei der GE mit Computer wird Operation (GE_3) normalerweise nicht gebraucht.

12.4. Matrixinterpretation des Verfahrens

Erinnerung

- Eine Permutation oder genauer n-Permutation π ist eine bijektive Selbstabbildung der Menge $\{1, \ldots, n\}$.
- $S_n := \text{Bijektiv}(\{1, \ldots, n\})$ bezeichne die Menge aller n-Permutationen.
- S_n ist eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung $\circ$ durch Hintereinanderausführen von Funktionen:
$$(\pi \circ \sigma)(k) = \pi(\sigma(k)), \quad k = 1, \ldots, n.$$
- Das Inverse π^{-1} zu einem $\pi \in S_n$ ist dann gerade die Umkehrfunktion.
- Um eine einzelne Permutation $\pi \in S_n$ zu spezifizieren, verwenden wir im Folgenden die Notation als Tupel
$$\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(n)).$$

12.4.1 Definition: Eine Permutationsmatrix $P = P(\pi)$ ist eine Matrix der Form

$$P_{ij} = \delta_{i,\pi(j)} = \begin{cases} 1 & i = \pi(j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $\pi \in S_n$ eine Permutation ist und δ das Kronecker-Delta bezeichnet.

Beispiele Für $n = 2$ gibt es die zwei Permutationsmatrizen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\pi=(1,2)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\pi=(2,1)},$$

und für $n = 3$ gibt es 6 Permutationsmatrizen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\pi=(1,2,3)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\pi=(2,1,3)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\pi=(1,3,2)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\pi=(3,1,2)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\pi=(2,3,1)}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\pi=(3,2,1)}.$$

12.4.2 Bemerkungen: Leicht sieht man folgendes:

- Die 1 der j-ten Spalte steht in Zeile $i = \pi(j)$.
- Die zu $P(\pi)$ gehörende lineare Abbildung bildet daher den Standardbasisvektor e_j auf $e_{\pi(j)}$ ab.

- In jeder Zeile und jeder Spalte einer Permutationsmatrix steht eine 1 und sonst Nullen.
- Für eine Permutationsmatrix P ist $P^{-1} = P^T$, wobei P^T die transponierte Matrix mit den Einträgen
$$(P^T)_{ij} = P_{ji} = \delta_{j,\pi(i)} = \delta_{\pi^{-1}(j),i} = \delta_{i,\pi^{-1}(j)}$$
ist.
- Sie bildet e_k auf $e_{\pi^{-1}(k)}$ ab, also gilt
$$(P(\pi))^{-1} = (P(\pi))^T = P(\pi^{-1})\,.$$
- Die Permutationsmatrizen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n)$. Es gilt
$$P(\pi)P(\sigma) = P(\pi \circ \sigma)\,.$$
- Die Multiplikation einer Matrix A mit der Permutationsmatrix P von links führt zu einem Vertauschen der Zeilen von A.
- Folglich entspricht die Operation (GE_2) einer Multiplikation PA mit einer Permutationsmatrix P.
- Die Multiplikation von rechts mit P würde Spalten vertauschen.

12.4.3 Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}\,.$$

Frage Welcher Matrixoperation entspricht (GE_1)?

12.4.4 Satz: Die Multiplikation einer Matrix A von links mit einer Matrix $S = S(k,l,\alpha)$ mit $k,l \in \{1,\ldots,n\}$ und $k \neq l$ der Form
$$S(k,l,\alpha) = (S_{ij})\,, \quad S_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ \alpha & (i = k) \wedge (j = l) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
addiert das α-fache von Zeile l zu Zeile k.

Beweis Komponentenweise hinschreiben.

12.4.5 Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a + c & \alpha b + d \end{pmatrix}\,.$$

12.4.6 Bemerkungen:
- Es gilt $S(k,l,\alpha)^{-1} = S(k,l,-\alpha)$ (warum?), somit ist $S(k,l,\alpha) \in \mathrm{GL}(n)$.
- Geometrisch ist $S(k,l,\alpha)$ eine Scherung in der (k,l)-Ebene.

- Die Multiplikation von rechts mit $S(k,l,\alpha)$ würde eine entsprechende Spaltenoperation durchführen.

Beobachtung Die GE mit (GE_1) und (GE_2) lässt sich interpretieren als Multiplikation der Gleichung $Ax = b$ von links mit einer Kette von Permutations- und Scherungsmatrizen $T_N \cdots T_1 =: T$, so dass am Ende ein Dreieckssystem

$$TAx = Rx = Tb$$

resultiert. Weil $T_i \in \mathrm{GL}(n)$ für $i = 1, \ldots, N$, ist auch $T \in \mathrm{GL}(n)$.

12.4.7 Bemerkungen:

- Wenn man die durch die Gauß-Elimination entstehende Kette $T_N \cdots T_1$ genauer anschaut[†], sieht man, dass man alle Permutationen in einer Permutationsmatrix P zusammenfassen kann, die gleich am Anfang auf die Ursprungsmatrix A angewendet wird. Man erhält dann eine Zerlegung

  $$PA = LR \iff A = P^T LR\,.$$

  Hierbei ist

  - L eine linke untere Dreiecksmatrix, welche unterhalb einer Einser-Diagonale die bei Operation (GE_1) benötigten Faktoren enthält,
  - R die entstehende rechte obere Dreiecksmatrix
  - und P eine aus den Operationen (GE_2) entstehende Permutationsmatrix.

- Ebenso wie die Gauß-Elimination zur Lösung eines linearen Gleichungssystems hat auch die Berechnung von (P, L, R) „kubischen“ Aufwand, genauer benötigt sie $\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$ Rechenoperationen.[‡]

- Die Kenntnis von (P, L, R) ist dann aber ausreichend, um Gleichungssysteme $Ax = b$ zu beliebigen rechten Seiten $b \in \mathbb{R}^n$ mit $2n^2 + O(n)$ Rechenoperationen zu lösen—also fast genauso schnell wie die Multiplikation eines Vektors mit der inversen Matrix A^{-1}.

- In Matlab kann man ein LGS $Ax = b$ einfach durch `x=A\b` lösen. Eine Zerlegung $A = P^T LR$ erhält man durch den Aufruf `[L,R,P]=lu(A)`, die Inverse A^{-1} als `inv(A)` oder `A^(-1)`.

12.5. Gauß-Jordan-Verfahren

Ziel Direkte Berechnung von A^{-1}.

Idee Schreibe $A \in \mathrm{GL}(n)$ und die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n}$ nebeneinander in der Form $(A \mid \mathbb{1}_{n\times n})$. Wende dann die elementaren Zeilenoperationen (GE_1), (GE_2) und (GE_3) der Gauß-Elimination an, so dass A zu $\mathbb{1}_{n\times n}$ wird. Dieselben Operationen machen $\mathbb{1}_{n\times n}$ zu A^{-1}.

[†] Das wird beispielsweise in der Vorlesung „Numerik für Ingenieure 1“ getan.
[‡] Die Landausche O-Notation werden wir später noch genauer kennenlernen.

12.5.1 Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Beweis (für die Richtigkeit des Gauß-Jordan-Verfahrens) Wenn $T = T_N \cdots T_1$ wieder die Kette der Gauß-Transformationen bezeichnet, so gilt

$$TA = \mathbb{1}_{n\times n} \overset{\cdot A^{-1}}{\Longleftrightarrow} T\mathbb{1}_{n\times n} = A^{-1}\,.$$

(Man beachte, dass auch Operation (GE_3) durch eine einfache Matrix-Multiplikation mit einer Diagonalmatrix *von links* erreicht werden kann.)

12.5.2 Bemerkung:

- Statt der Zeilenoperationen $(\mathrm{GE})_1 - (\mathrm{GE})_3$ kann man im Gauß-Jordan-Verfahren die entsprechenden Spaltenoperationen (addiere ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen, Spaltentausch, Spaltenskalierung mit einem Nichtnull-Faktor) anwenden. Beweisen kann man das analog: die Transformationsmatrizen werden einfach von rechts multipliziert.
- ABER: Man darf keinesfalls Zeilen- und Spaltenoperationen mischen, sonst wird das Ergebnis mit hoher Wahrscheinlichkeit falsch sein!
- MAN BEACHTE AUCH: Spaltenoperationen sind nicht bei der Lösung linearer Gleichungssysteme durch Gauß-Elimination zu gebrauchen, da sie die Lösung verändern können!

12.5.3 Übung: Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Vermischung von Zeilen- und Spaltenoperationen beim Gauß-Jordan-Verfahren zu einem falschen Ergebnis führen kann.

12.6. Allgemeine lineare Gleichungssysteme

Frage Wie geht man vor, wenn im k-ten Schritt der GE die k-te Spalte der „Restmatrix“ verschwindet?

Frage Wie behandelt man allgemeine lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $m \neq n$? Dreiecksform ist dann ja nicht zu erreichen...

Idee Man kann mit der Gauß-Elimination trotzdem weitermachen, um eine sogenannte Stufenform oder Staffelform (englisch: *echelon form*) zu erreichen, von der ausgehend man die Lösungsmenge wieder relativ einfach erhalten kann.

12.6.1 Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ befindet sich in Stufenform (genauer: Zeilenstufenform), falls gilt

1. Wenn $Z_1, \ldots, Z_m$ die Zeilen von A bezeichnen, so sind für ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $r \leqslant m$ die ersten r Zeilen nicht gleich $(0, \ldots, 0)$, die letzten $m - r$ Zeilen hingegen alle gleich $(0, \ldots, 0)$.

2. Wenn man nun für $i = 1, \ldots, r$ setzt

$$\nu_i := \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$$

(ν_i ist der erste Spaltenindex, für den in der i-ten Zeile ein Nichtnullelement auftritt), so gilt für alle $i \in \{1, \ldots, r-1\}$, dass $\nu_{i+1} > \nu_i$.

Beobachtung Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer Matrix A in Stufenform ist einfach zu lösen (bzw. einfach zu sehen, dass es keine Lösung gibt):

1. Das Gleichungssystem hat genau dann mindestens eine Lösung, wenn die Komponenten $b_{r+1} = \ldots = b_m = 0$.
2. Wenn es eine Lösung hat, so sind alle Unbekannten x_j frei wählbar, bei denen keine Stufe auftritt (d.h. es gibt kein ν_i mit $\nu_i = j$).
3. Die anderen Komponenten der Lösung x ergeben sich durch Rückwärtssubstitution aus den Gleichungen, wobei die frei wählbaren als Parameter auftreten.

12.6.2 Algorithmus: (Gauß-Elimination zum Erreichen der Stufenform)

k:=1
Für $l = 1, \ldots, \min(m-1, n)$:
  Falls es ein $i \in \{k, \ldots, m\}$ gibt mit $a_{il} \neq 0$:
    Falls $i \neq k$: Tausche Zeilen i und k.
    Für $j = k+1, \ldots, n$:
      Addiere das $-\frac{a_{jl}}{a_{kl}}$-fache von Zeile k zu Zeile j
    Setze $k := k+1$.

12.6.3 Beispiel:

- FRAGE: Für welches α ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

lösbar? Wie lautet die Lösungsmenge?

- LÖSUNG:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & \alpha \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & \alpha - 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right)$$

- Lösungen kann es offenbar nur im Falle $\alpha = 1$ geben.
- Falls $\alpha = 1$, so ist x_2 ein frei wählbarer Parameter, x_3 muss gleich $\frac{1}{3}$ sein, und x_1 errechnet sich zu

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 1 - 2x_2 - 4x_3 = -\frac{1}{3} - 2x_2\,.$$

- Somit besteht die Lösungsmenge aus den Vektoren

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} - 2x_2 \\ x_2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R}\,.$$

- BEMERKUNG: Geometrisch ist dies eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die nicht durch den Ursprung geht.

12.6.4 Bemerkung:

- Die Stufenform S, die sich durch Anwendung der Gauß-Elimination auf eine Matrix A ergibt, ist nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von der Art ab, wie die Gauß-Elimination durchgeführt wird (wegen des Zeilentauschs und der Möglichkeit von Zeilenskalierungen gibt es da ja viele Varianten).

- Was allerdings eindeutig bestimmt ist, ist die Zahl r der Nichtnullzeilen, die man am Ende bei S ablesen kann! Dieses r ist eine wichtige Größe, die wir im Folgenden genauer betrachten.

12.6.5 Satz: Wenn S eine Stufenform ist, welche man durch Gauß-Elimination aus A erhält, so ist die Zahl r der Nichtnullzeilen gleich mit der Dimension des Bilds von A, welches wir bereits als

$$\mathrm{Bild}(A) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}$$

definiert haben. Sie ist damit eine unabhängig von der Gauß-Elimination definierte Größe, die man den Rang der Matrix A nennt und mit $\mathrm{Rang}(A)$ bezeichnet. Wir können daher ohne Umweg über die GE setzen

$$\mathrm{Rang}(A) := \dim(\mathrm{Bild}(A))\,.$$

Beweisskizze $\mathrm{Bild}(A)$ wird von den Spalten von A aufgespannt, ebenso wird $\mathrm{Bild}(S)$ durch die Spalten von S aufgespannt. Die Gauß-Elimination entspricht —genau wie im vorigen Abschnitt— einer Transformation $S = TA$ mit einem $T \in GL(m)$. Weil T invertierbar ist, ändert sich durch die Multiplikation mit T von links zwar das Bild (d.h. normalerweise wird $\mathrm{Bild}(S) \neq \mathrm{Bild}(A)$ gelten), nicht aber die *Dimension* des Bilds (d.h. es gilt $\dim(\mathrm{Bild}(S)) = \dim(\mathrm{Bild}(A))$)! Die Dimension von $\mathrm{Bild}(S)$ ist aber offenbar r, denn die Spaltenvektoren, bei denen sich Stufen von S befinden, bilden eine Basis von $\mathrm{Bild}(S)$.

12.6.6 Bemerkung: Wenn wir den äußerst wichtigen Spezialfall der Anwendung der Gauß-Elimination auf ein *homogenes* Gleichungssystem

$$Ax = 0\,, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}\,, x \in \mathbb{R}^n\,, 0 \in \mathbb{R}^m$$

betrachten, so sehen wir folgendes:

- Die Lösungsmenge kennen wir bereits als Kern von A:

$$\mathrm{Kern}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}\,.$$

- Wenn man die Gauß-Elimination zur Berechnung der Stufenform durchführt, bleibt die rechte Seite immer 0 und braucht nicht mitgeführt zu werden.
- Die Lösungsmengen der Gleichungen $Ax = 0$ und $Sx = 0$ sind natürlich gleich (das war ja der Sinn der Gauß-Elimination), somit gilt $\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}(S)$.
- Die Dimension von $\mathrm{Kern}(S)$ ist aber gerade die Zahl der frei wählbaren Parameter, also gleich $n - r$.
- Folglich gilt
$$n = (n - r) + r = \dim(\mathrm{Kern}(A)) + \dim(\mathrm{Bild}(A)) \,.$$
- Diese Beziehung bezeichnet man als Dimensionssatz, und sie gilt auch für allgemeine lineare Abbildungen (siehe den nächsten Abschnitt).

12.6.7 Bemerkung: In Matlab/Octave kann man die Zeilenstufenform einer Matrix mit Hilfe der Funktion `rref` erhalten (*reduced row echelon form*=reduzierte Zeilenstaffelform). Diese Funktion berechnet eine „reduzierte“ Stufenform, wobei das Wort „reduziert“ einfach bedeutet, dass die Zeilen so skaliert wurden, dass die Matrixelemente an den Stufen 1 sind.

12.7. Kern und Bild allgemein

Beobachtung Kern und Bild kann man für allgemeine lineare Abbildungen $\varphi \in \mathrm{Lin}(V, W)$ analog definieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(\varphi) &:= \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\} \subset V \,, \\ \mathrm{Bild}(\varphi) &:= \{y \in W \mid \exists x \in V : \varphi(x) = y\} \subset W \,. \end{aligned}$$

Wie in den Übungen gezeigt wurde, sind beides Untervektorräume.

12.7.1 Satz: (Dimensionssatz) Für $\varphi \in \mathrm{Lin}(V, W)$ gilt

$$\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim(V) \,.$$

Beweisskizze Wähle eine Basis $v_1, \ldots, v_l$ von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und ergänze sie mit $v_{l+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V. $\{\varphi(v_{l+1}), \ldots, \varphi(v_n)\}$ ist dann eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

12.7.2 Anwendung:

- Es seien V und W Vektorräume, und es sei $\varphi \in \mathrm{Lin}(V, W)$.
- Wenn $\dim(V) > \dim(W)$, so gilt
$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) \geqslant \dim(V) - \dim(W) > 0 \,.$$
Folglich kann φ nicht injektiv sein.

- Wenn $\dim(V) < \dim(W)$, so gilt

$$\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) \leqslant \dim(V) < \dim(W)\,.$$

  Folglich kann φ nicht surjektiv sein.

- Falls $\dim(V) = \dim(W)$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  1. φ ist invertierbar (bijektiv),
  2. $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$ ($\overset{\text{sehr leichter Beweis}}{\Longleftrightarrow}$ φ ist injektiv),
  3. $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = n$ ($\overset{\text{sehr leichter Beweis}}{\Longleftrightarrow}$ φ ist surjektiv).

13. Determinanten

13.1. Definition

13.1.1 Definition: Für Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ ist

$$P(a_1, \ldots, a_n) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ mit } \lambda_i \in [0,1]\}$$

das von $a_1, \ldots, a_n$ aufgespannte Parallelotop.

Frage Wie berechnet man das Volumen eines Parallelotops?

Antwort Im Folgenden werden wir die sogenannte Determinante über ihre Eigenschaften eindeutig definieren. Diese Eigenschaften sind aber (bis auf ein Vorzeichen) genau die, welche man geometrisch von einem Parallelotopvolumen erwarten würde. Daher macht es Sinn, dieses Volumen einfach als Determinante zu definieren.

13.1.2 Definition: Die Determinante (Volumenfunktion) $\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften (genügt folgenden Axiomen):

(D_1) Multilinearität: $\det$ ist in jedem Argument linear (bei Festhalten der restlichen Argumente):

a) Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\det(\ldots, \underbrace{v+w}_{\text{Position i}}, \ldots) = \det(\ldots, \underbrace{v}_{\text{Position i}}, \ldots) + \det(\ldots, \underbrace{w}_{\text{Position i}}, \ldots),$$

b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det(\ldots, \underbrace{\lambda v}_{\text{Position i}}, \ldots) = \lambda \det(\ldots, \underbrace{v}_{\text{Position i}}, \ldots).$$

[Vorsicht: $\det(\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n) = \lambda^n \det(v_1, \ldots, v_n)$!]

(D_2) Die Determinante verschwindet, wenn zwei Argumente gleich sind, d.h.

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = 0 \text{ falls } v_i = v_j \text{ für } i \neq j.$$

(D_3) Normierung: Wenn $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, so gilt

$$\det(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

13.1.3 Folgerungen: Einfache Folgerungen aus diesen Axiomen sind:

- Scherungsinvarianz:

$$\det(\ldots, \underbrace{v}_{\text{Position i}}, \ldots, \underbrace{w}_{\text{Position j}}, \ldots) = \det(\ldots, \underbrace{v+\lambda w}_{\text{Position i}}, \ldots, \underbrace{w}_{\text{Position j}}, \ldots)\,.$$

- Vorzeichenumkehr bei Vertauschen zweier Argumente:

$$\det(\ldots, \underbrace{v}_{\text{Position i}}, \ldots, \underbrace{w}_{\text{Position j}}, \ldots) = -\det(\ldots, \underbrace{w}_{\text{Position i}}, \ldots, \underbrace{v}_{\text{Position j}}, \ldots)$$

- $\det(v_1, \ldots, v_n) = 0$, wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig.

Beweis (Um die Notation kurz und klar zu halten, zeigen wir die ersten beiden Eigenschaften für $n = 2$.)

- $\det(v_1 + \lambda v_2, v_2) = \det(v_1, v_2) + \lambda \det(v_2, v_2) = \det(v_1, v_2)$.
- $0 = \det(v+w, v+w) = \underbrace{\det(v,v)}_{=0} + \det(v,w) + \det(w,v) + \underbrace{\det(w,w)}_{=0}$
- Wenn $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear abhängig sind, so kann man eines von ihnen durch die anderen darstellen, z.B. $v_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i$. Wegen (D_1) und (D_2) gilt aber

$$\begin{aligned}\det(v_1, \ldots, v_n) &= \det(\sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_i, v_2, \ldots, v_n) \\ &= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \underbrace{\det(v_i, v_2, \ldots, v_n)}_{=0} = 0\,.\end{aligned}$$

13.1.4 Bemerkungen:

- Die Determinante liefert offenbar ein vorzeichenbehaftetes Volumen. Wir bezeichnen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als positiv/negativ orientiert, je nach dem Vorzeichen von $\det(v_1, \ldots, v_n)$.
- Das übliche nichtnegative Volumen des von $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops erhält man als Absolutwert $|\det(v_1, \ldots, v_n)|$.
- Geometrisch kann man sich Orientierung wie folgt vorstellen: Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind positiv orientiert, wenn man sie in die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ „stetig“ deformieren kann, ohne dass die lineare Unabhängigkeit auf dem Weg dahin verloren geht.

13.1.5 Satz: Die Axiome (D_1) und (D_2) bestimmen die Determinante bis auf einen multiplikativen Faktor genau. Durch die Normierung (D_3) wird die Definition eindeutig, und es ergibt sich die Berechnungsvorschrift

$$\det(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) (v_1)_{\pi(1)} \cdots (v_n)_{\pi(n)}\,.$$

Beweis Für beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\det(v_1, \dots, v_n) &= \det(\sum_{i_1=1}^{n} (v_1)_{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} (v_n)_{i_n} e_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} (v_1)_{i_1} \cdots (v_n)_{i_n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} (v_1)_{\pi(1)} \cdots (v_n)_{\pi(n)} \det(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) (v_1)_{\pi(1)} \cdots (v_n)_{\pi(n)} \underbrace{\det(e_1, \dots, e_n)}_{=1}
\end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ geht und $\operatorname{sign}(\pi)$ das Signum* der Permutation π bezeichnet.

13.1.6 Bemerkung: Die Idee des Satzes und des zugehörigen Beweises kann man gut an folgendem Beispiel sehen, bei dem wir die Determinante für zwei Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$ berechnen.
Aus den Determinanteneigenschaften (D_1)–(D_3) folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
\det(a, b) &= \det(a_1 e_1 + a_2 e_2, b_1 e_1 + b_2 e_2) \\
&= a_1 b_1 \underbrace{\det(e_1, e_1)}_{=0} + a_1 b_2 \underbrace{\det(e_1, e_2)}_{=1} \\
&\quad + a_2 b_1 \underbrace{\det(e_2, e_1)}_{=-1} + a_2 b_2 \underbrace{\det(e_2, e_2)}_{=0} \\
&= a_1 b_2 - a_2 b_1
\end{aligned}$$

13.2. Das Vorzeichen von Permutationen

Erinnerung S_n bezeichnete die Menge aller Permutationen (bijektive Selbstabbildungen von $\{1, \dots, n\}$).

13.2.1 Schreibweise: Permutationen kann man in verschiedenen Weisen darstellen:

- Zweizeilenform, wie z.B. $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$,
- die kompaktere Tupelschreibweise, wie z.B. $\pi = (4, 5, 1, 3, 2) \in S_5$,
- oder die Zykelschreibweise $\pi = (1 \quad 4 \quad 3)_{\circlearrowleft} (2 \quad 5)_{\circlearrowleft}$, welche bedeutet, dass $1 \overset{\pi}{\mapsto} 4 \overset{\pi}{\mapsto} 3 \overset{\pi}{\mapsto} 1$ und $2 \overset{\pi}{\mapsto} 5 \overset{\pi}{\mapsto} 2$.

*Siehe den folgenden Abschnitt

13.2.2 Bemerkungen:

- Weil man Zykel der Länge 1 (Zahlen, die von π gleich gelassen werden) weglässt, ist die Zykelschreibweise besonders gut geeignet, wenn π nur wenige Zahlen ändert.
- Außerdem kann man aus der Zykel-Schreibweise gut ablesen, wie sich Potenzen π^k (also k-fache Hintereinanderausführung) verhalten.

  FRAGE: Was sind in obigem Beispiel π^{60} und π^{62}?
- Den Subskript $\circlearrowleft$ setzen wir nur zur Unterscheidung der Zykel von Matrizen und Tupeln. Normalerweise wird es in der Literatur weggelassen!

13.2.3 Definition: Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Dann definieren wir die Transposition $\tau_{ij} \in S_n$ gemäß

$$\tau_{ij} : k \mapsto \begin{cases} i & k = j \\ j & k = i \\ k & \text{sonst} \end{cases}.$$

13.2.4 Bemerkung: In der Zykelschreibweise ist $\tau_{ij} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}$.

13.2.5 Definition: Das Vorzeichen oder Signum $\operatorname{sign}(\pi)$ einer Permutation $\pi \in S_n$ ist gleich $(-1)^N$, wenn π als Verkettung von N Transpositionen (Vertauschungen, 2-Zykel) geschrieben werden kann. π heißt gerade, wenn $\operatorname{sign}(\pi) = 1$ und ungerade, wenn $\operatorname{sign}(\pi) = -1$.

Beispiele

- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ ist gerade (ergibt sich durch 0 Vertauschungen).
- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ ist ungerade, weil $\pi = \tau_{13}$.
- $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ ist gerade, wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{12} \circ \tau_{23}\,.$$

(Alternativen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{13} \circ \tau_{12}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{23} \circ \tau_{13}$.)

13.2.6 Satz: Die obige Definition des Signums einer Permutation macht Sinn, denn es gilt:

1. Jedes $\pi \in S_n$ ist Verkettung von Transpositionen.
2. Es gibt folgende alternative Charakterisierung des Signums:[†]

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{|F|} \text{ wobei } F := \{(i, j) \mid (i < j) \wedge (\pi(i) > \pi(j))\}$$

die Menge der sogenannten Fehlstände ist.

[†] Diese Charakterisierung von $\operatorname{sign}(\pi)$ hängt *nicht* von der genauen Wahl der Transpositionen zur Darstellung von π ab, ist aber normalerweise viel unangenehmer zu berechnen.

Beweisskizze Ein möglicher Beweis geht wie folgt:

1. Das sogenannte Bubble-Sort-Verfahren liefert eine Darstellung einer Permutation als Produkt von Nachbarvertauschungen (solche der Form $\tau_{i,i+1}$).
2. Jede Vertauschung ist Verkettung einer ungeraden Anzahl von Nachbarvertauschungen.
3. Jede Nachbarvertauschung erzeugt oder beseitigt genau einen Fehlstand.

Frage Wie stellt man im allgemeinen eine Permutation durch Vertauschungen dar?

Antwort Am einfachsten geht es über die Zykeldarstellung. Man beobachtet nämlich, dass

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}_{\circlearrowleft} = \tau_{i_1 i_n} \circ \cdots \circ \tau_{i_1 i_3} \circ \tau_{i_1 i_2} \,.$$

13.2.7 Folgerung: Das Signum eines einzelnen n-Zykels ist demnach $(-1)^{n-1}$. Falls eine Permutation π mehrere Zykel der Längen $n_1, \ldots, n_k$ enthält, so ist ihr Signum

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{i=1}^{k} (-1)^{n_i - 1} = (-1)^{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)} \,.$$

13.2.8 Beispiel: Für

$$\pi = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft} \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft} \in S_{89}$$

ergibt sich

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{3+1} = 1 \,.$$

13.2.9 Anwendungen: (Im Folgenden verwenden wir die Zykeldarstellung.)

- Sei $n = 2$. Dann ist
$$S_n = \{\mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}\} \,,$$
und somit ist
$$\det(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}) = ad - bc \,.$$
- Für $n = 3$ gilt
$$S_3 = \underbrace{\{\mathrm{id}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}\}}_{\text{gerade}} \cup \underbrace{\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}_{\circlearrowleft}\}}_{\text{ungerade}} \,.$$
Somit folgt
$$\det(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix}) = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd \,.$$
Dies nennt man die Regel von Sarrus, welche geometrisch als Entlanglaufen in den beiden diagonalen Richtungen interpretiert werden kann.

WARNUNG: Diese Regel klappt nur im Fall $n = 3$!

13.2.10 Satz: Es gilt $\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$.

Beweis Aneinanderhängen der Vertauschungsdarstellungen.

13.2.11 Folgerung: Wegen $\pi \circ \pi^{-1} = \mathrm{id}$ folgt $\operatorname{sign}(\pi) = \operatorname{sign}(\pi^{-1})$.

13.3. Die Determinante linearer Abbildungen

13.3.1 Definition: Es sei $\varphi \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann definieren wir die Determinante $\det(\varphi)$ von φ als

$$\det(\varphi) := \frac{\det(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))}{\det(e_1, \ldots, e_n)} = \det(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \,.$$

13.3.2 Interpretation: $\det(\varphi)$ ist das (orientierte) Volumen des Bilds $\varphi([0,1]^n)$ des „Einheitswürfels“ $[0,1]^n$.

13.3.3 Bemerkung: Man beachte, dass man hier wieder einmal (analog zur Bezeichnung von sowohl Urbildsfunktion als auch Umkehrfunktion mit f^{-1}) zwei eng miteinander verwandte, aber doch verschiedene Funktionen gleich (nämlich mit $\det$) bezeichnet.

Beispiele

- Die Determinante der Identität ist 1.
- Eine Streckung $x \mapsto \lambda x$ um den Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ hat die Determinante λ^n.
- Rotationen haben die Determinante 1.

13.3.4 Satz: Statt der Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ kann man jede beliebige Basis $b_1, \ldots, b_n$ des $\mathbb{R}^n$ verwenden:

$$\det(\varphi) := \frac{\det(\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_n))}{\det(b_1, \ldots, b_n)} \,.$$

Unabhängig von $b_1, \ldots, b_n$ ergibt sich dabei immer dieselbe Zahl $\det(\varphi) \in \mathbb{R}$.

Begründung Jedes Parallelotop $P(b_1, \ldots, b_n)$ (und sogar jeder andere „messbare“ Körper) lässt sich durch eine disjunkte Vereinigung kleiner Würfel approximieren. Wenn sich deren (orientiertes) Volumen mit $\det(\varphi)$ verändert, muss es das Gesamtvolumen in gleicher Weise tun.

13.3.5 Satz: $\varphi \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ regulär $\iff \det(\varphi) \neq 0$.

Begründung Die $\{\varphi(e_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ spannen den gesamten $\mathbb{R}^n$ genau dann auf, wenn das zugehörige Parallelotop nicht Volumen 0 hat.

13.3.6 Satz: Es gilt für $\varphi, \psi \in \operatorname{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \cdot \det(\psi) \,.$$

Beweis O.E. sind φ, ψ und $\varphi \circ \psi$ regulär (sonst wären beide Seiten gleich 0). Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\det(\varphi \circ \psi) &= \frac{\det(\varphi(\psi(e_1)), \ldots, \varphi(\psi(e_n)))}{\det(e_1, \ldots, e_n)} \\ &= \frac{\det(\varphi(\psi(e_1)), \ldots, \varphi(\psi(e_n)))}{\det(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))} \cdot \frac{\det(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))}{\det(e_1, \ldots, e_n)} \\ &= \det(\varphi) \cdot \det(\psi)\end{aligned}$$

13.3.7 Folgerung: Wenn $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ regulär ist, so gilt

$$\det(\varphi^{-1}) = (\det(\varphi))^{-1} .$$

13.4. Die Determinante von Matrizen

13.4.1 Definition: Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Determinante $\det(A)$ der Matrix A ist definiert als die Determinante der zugehörigen linearen Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$, also

$$\det(A) := \frac{\det(Ae_1, \ldots, Ae_n)}{\det(e_1, \ldots, e_n)} = \det(a_1, \ldots, a_n) ,$$

wobei $a_i = Ae_i$ die Spalten von A sind.

13.4.2 Bemerkung: Dieselbe Notation $\det$ wird hier nun schon für eine dritte Art des Arguments verwendet, die mit den vorigen (n Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ bzw. $\varphi \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$) zusammenhängt, aber nicht identisch ist.

13.4.3 Satz: Für $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)} .\end{aligned}$$

Beweis Das erste Gleichheitszeichen ist die Definition. Das zweite Gleichheitszeichen errechnet sich wegen der Umordnung

$$a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} = a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n,\pi^{-1}(n)} ,$$

$\mathrm{sign}(\pi) = \mathrm{sign}(\pi^{-1})$ und der Tatsache, dass man anstelle über alle $\pi \in S_n$ auch über alle $\pi^{-1} \in S_n$ summieren kann, weil $\pi \mapsto \pi^{-1}$ bijektiv ist.

13.4.4 Eigenschaften: Es gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1. $\det(A^T) = \det(A)$,

2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$,
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
4. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Beweis $\det(A) = \det(A^T)$ folgt aus dem vorigen Satz. Die anderen Eigenschaften folgen aus den entsprechenden Aussagen für lineare Abbildungen.

Vorsicht Im allgemeinen gilt *nicht* $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$!

13.5. Berechnung von Determinanten

13.5.1 Schreibweise: Wir führen folgende Kurzschreibweise ein:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right).$$

Erinnerung

- Für $n = 2$ gilt
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$
- Für $n = 3$ gilt die Regel von Sarrus
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb\,.$$
- Für allgemeines n gelten die Formeln
$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} \cdots a_{2,\pi(n)}\,. \end{aligned}$$

13.5.2 Satz: (Entwicklung nach der i-ten Zeile bzw. j-ten Spalte) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(S_{[i,j]}A) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(S_{[i,j]}A)\,. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $S_{[i,j]}A$ die $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$-Matrix, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Beweisskizze Man ordne die Terme in

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}$$

geeignet um und klammere die Elemente der i-ten Zeile (bzw. j-ten Spalte) aus.

13.5.3 Beispiel: Die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnet sich als

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 14 - 3 - 14 + 1 = -2 \end{aligned}$$

13.5.4 Bemerkung: Offenbar ist es günstig, nach Zeilen oder Spalten zu entwickeln, in denen viele Nullen vorkommen.

Beobachtung Die Regeln

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

und die Sarrus-Regel

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb \\ &= a(ei - hf) - b(id - fg) + c(dh - eg) \end{aligned}$$

sind Spezialfälle der Entwicklung nach Zeile/Spalte.

13.5.5 Problem:

- Für großes n und Matrizen, die wenig Nullelemente enthalten, ist der Aufwand dieser Formel bei direkter Anwendung mit etwa $O(n \cdot n!)$ Rechenoperationen viel zu hoch!
- Wenn man Zwischenergebnisse für Unterdeterminanten abspeichert, kann man den Rechenaufwand auf circa $O(2^n)$ Operationen reduzieren, was aber immer noch viel zu viel ist (und zudem auch einen $O(2^n)$-Speicheraufwand bedeutet)!
- Übung: Wieviele Dezimalstellen haben $n!$ und 2^n für $n = 100$?

Beobachtung Wenn in der ersten Zeile oder Spalte nur $a_{11} \neq 0$ ist, so ist die Determinante gleich a_{11} mal der Determinante der Restmatrix $(a_{ij})_{i,j=2,\ldots,n-1}$, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

13.5.6 Folgerung: Eine obere Dreiecksmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hat als Determinante das Produkt ihrer Diagonalelemente, d.h.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} \cdots a_{nn} \,.$$

Dasselbe gilt für Diagonalmatrizen (Spezialfall) und auch für untere Dreiecksmatrizen (mit derselben Begründung).

13.5.7 Folgerung: Die in der Gauß-Elimination (Operation (GE_1)) auftretenden Scherungsmatrizen $S(k,l,\alpha)$ mit $k \neq l$ sind für $k < l$ untere und für $k > l$ obere Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale und haben somit Determinante 1. Daher ändern die Operationen „Addiere ein Vielfaches von Zeile k zu Zeile l“ (Matrixoperation: $A_{\text{neu}} := S(k,l,\alpha) \cdot A$), die Determinante nicht. Das gleiche gilt für die entsprechende Spaltenoperation „Addiere ein Vielfaches von Spalte k zu Spalte l“ (Matrixoperation: $A_{\text{neu}} := A \cdot S(k,l,\alpha)$). Bemerkung: Diese letztere Aussage könnte man alternativ auch aus der Scherungsinvarianz der Determinante ersehen, mit Hilfe derer wir die Determinante als Multilinearform zu Beginn des Abschnitts definiert hatten.

13.5.8 Satz: Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation. Die Permutationsmatrix $P_\pi = P(\pi) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche für alle Standardbasisvektoren $P_\pi e_k = e_{\pi(k)}$ erfüllt, hat die Determinante

$$\det(P_\pi) = \operatorname{sign}(\pi) \,.$$

Beweis

$$\det(P_\pi) = \frac{\det(P_\pi e_1, \ldots, P_\pi e_n)}{\det(e_1, \ldots, e_n)} = \frac{\det(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)})}{\det(e_1, \ldots, e_n)} = \operatorname{sign}(\pi)$$

13.5.9 Folgerung: Weil eine einzelne Transposition das Signum -1 hat, führt ein Tausch zweier Zeilen (oder zweier Spalten) einer Matrix A zur Multiplikation der Determinante mit -1.

13.5.10 Algorithmus: (Schnelle Determinantenberechnung) Transformiere die Matrix durch die obigen Scherungen und Vertauschungen in eine Dreiecks- oder Diagonalmatrix, deren Determinante dann das Produkt ihrer Diagonalelemente ist. Die Schreibarbeit kann man noch reduzieren, wenn man $\det(A) = a_{11} \cdot \det(\text{Restmatrix})$ ausnutzt, sobald man $a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$ oder $a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$ erreicht hat.

Beachte

- Man beachte, dass hier sowohl Zeilen- als auch Spaltenoperationen erlaubt sind, anders als bei der Lösung von Gleichungssystemen!
- Bei jedem Zeilen- oder Spaltentausch muss ein Faktor -1 berücksichtigt werden.

13.5.11 Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(Z_4)\leftarrow(Z_4)-(Z_1)}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung nach Spalte 1}}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{(S_1)\leftrightarrow(S_3)}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entwicklung nach Spalte 1}}{=} -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

13.5.12 Bemerkung: Weil die Transformation von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf Dreiecksgestalt nach dem früher gesagten „nur“ $O(n^3)$ Operationen benötigt, ist dies auch der Aufwand für diese Berechnungsmethode von $\det(A)$. Dies bedeutet bereits für moderat großes n einen viel kleineren Aufwand als $O(n\cdot n!)$ bzw. $O(2^n)$ für die früher erwähnten Formeln. ZAHLENBEISPIEL: Für $n = 100$ ist $n \cdot n! \approx 10^{160}$, $2^n \approx 10^{30}$ und $n^3 = 10^6$.

13.6. Determinante und Gleichungssysteme

13.6.1 Satz: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ sind folgenden Aussagen äquivalent:

- A ist invertierbar, d.h. es existiert $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_{n\times n}$.
- Zu beliebigem $b \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.
- $\text{Kern}(A) = \{0\}$ $(\dim(\text{Kern}(A)) = 0)$

- $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$ $(\mathrm{Rang}(A) := \dim(\mathrm{Bild}(A)) = n)$
- Die Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n$ spannen ganz $\mathbb{R}^n$ auf.
- Das Volumen des Parallelotops $P(a_1, \ldots, a_n)$ ist ungleich 0.
- $\det(A) = \det(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$.

Beweis Kombination früherer Sätze und Definitionen.

14. Eigenwertprobleme

14.1. Motivation

14.1.1 Experiment: Wir simulieren das schon früher betrachtete Federpendel mit einer Modifikation: Es gibt eine (oszillierende) Kraft, die das Pendel anregt. Außerdem nehmen wir an, dass wenig Reibung vorhanden ist. Man beobachtet dann Oszillationen des Pendels, die umso größer sind, je näher die Frequenz der anregenden Oszillation bei dem Wert $\lambda = \sqrt{\frac{D}{m}}$ liegt. Diesen Wert kann man über die sogenannten Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{D}{m} & 0 \end{pmatrix}$ berechnen, da die Pendelbewegung mit dem Differentialgleichungssystem $u'(t) = Au(t)$ beschrieben werden kann.*

14.1.2 Bemerkung: Dasselbe Phänomen tritt auch bei komplizierteren mechanischen Systemen wie Fahrzeugen, Gebäuden, etc. auf. Hier ist die Kenntnis und Vermeidung solcher kritischer Frequenzen von höchster Wichtigkeit. Ein abschreckendes Beispiel ist die Tacoma Narrows Bridge.

14.1.3 Bemerkung: Auch in vielen anderen praktisch relevanten Bereichen außerhalb der Mechanik wie zum Beispiel in Elektrotechnik (z.B. Schwingkreise), Chemie, Meteorologie, und sogar in der Wirtschaft oder am Finanzmarkt kann man ähnliche Phänomene beobachten.

14.2. Eigenwertprobleme

14.2.1 Bemerkung:

- Im Folgenden werden wir Vektorräume und Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ betrachten, wobei wir nur die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ im Sinn haben.

- Der Hintergrund ist, dass sich die folgenden Aussagen an manchen Stellen unterscheiden, je nachdem ob man reelle oder komplexe Vektorräume betrachtet. (Die Aussagen sind nämlich für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ einfacher.)

- Im Gegensatz dazu sind die Resultate aller vorhergehenden Abschnitte dieses Kapitels (Matrizen-Multiplikation, LGS, Determinanten) gleichermaßen für Vektorräume und lineare Abbildungen über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Q}$ gültig, so dass wir uns auf den am meisten gebrauchten Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränkt haben.

*Dies ist eine alternative Beschreibung zu dem Zugang am Ende des Kapitels über komplexe Zahlen. Beide werden später noch genauer betrachtet.

14.2.2 Bezeichnung: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ferner sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, womit wir auch meinen, dass wir an der linearen Abbildung

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n\,, \quad x \mapsto Ax$$

interessiert sind. Insbesondere schreiben wir $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ auch für eine Matrix A, die nur reelle Einträge hat, sofern wir an ihrer Anwendung auf beliebige komplexe Vektoren $x \in \mathbb{C}^n$ interessiert sind. Auch die Einheitsmatrix $\mathbb{1}_{n\times n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ wird im folgenden oft vorkommen, und wir bezeichnen sie daher einfach kurz als $\mathbb{1}$.

14.2.3 Definition: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert (EW) von A, wenn es ein $x \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}$ gibt, so dass

$$Ax = \lambda x \qquad [\iff (A - \lambda\mathbb{1})x = 0]\,.$$

Ein solches $x \neq 0$ nennt man Eigenvektor (EV) von A zum Eigenwert λ. Den Unterraum $\mathrm{Kern}(A-\lambda\mathbb{1})$ nennt man dann den Eigenraum zum Eigenwert λ (er enthält alle Eigenvektoren zu λ sowie den Nullvektor). Die Menge aller Eigenwerte nennt man das Spektrum $\sigma(A)$ von A.

Vorsicht

- Der Nullvektor $0 \in \mathbb{R}^n$ ist per Definition kein Eigenvektor, weil sonst wegen $A0 = \lambda 0$ alle $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwerte wären.
- Er gehört allerdings zum Eigenraum $\mathrm{Kern}(A - \lambda\mathbb{1})$, weil dieser sonst kein Vektorraum wäre.

14.2.4 Bemerkung: Die Theorie von Eigenwertprobleme nennt man auch Spektraltheorie. Der Begriff motiviert sich wieder aus der Physik: Ähnlich wie man dort das Lichtspektrum mit einem Prisma auffächert, zerlegt man in der Mathematik die Wirkung von linearen Operatoren $x \mapsto Ax$ in einfachere Bestandteile.

14.2.5 Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte -1 und 2. Zugehörige Eigenvektoren sind die Standardbasisvektoren e_1 und e_2. Das Spektrum ist $\sigma(A) = \{-1, 2\}$.

14.2.6 Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ hat dieselben Eigenwerte/dasselbe Spektrum. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Frage Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A?

Beobachtung

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{K} \text{ Eigenwert von } A &\iff \mathrm{Kern}(A - \lambda\mathbb{1}) \neq \{0\} \\ &\iff \underbrace{\det(A - \lambda\mathbb{1})}_{=:\chi_A(\lambda)} = 0\,. \end{aligned}$$

14.2.7 Definition: Die Abbildung

$$\chi_A : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \lambda \mapsto \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

ist ein Polynom in λ mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$, welches man das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ nennt. Die in $\mathbb{K}$ liegenden Nullstellen dieses Polynoms sind genau die Eigenwerte von A.

Begründung Wenn man $\det(A - \lambda\mathbb{1})$ mit Hilfe der Formel

$$\det(\underbrace{A - \lambda\mathbb{1}}_{=\tilde{A}}) = \det(\tilde{A}) = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\tilde{a}_{\pi(1),1}\cdots\tilde{a}_{\pi(n),n}$$

ausrechnet und den entstehenden Ausdruck nach Potenzen von λ ordnet, sieht man sofort, dass das Ergebnis ein Polynom n-ten Grades ist.

14.2.8 Beispiel: Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\,.$$

14.2.9 Beispiel: Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Dann gilt

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1\,.$$

Falls nun $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gibt es die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm\boldsymbol{i}$, zu denen wir im nächsten Abschnitt auch komplexe Eigenvektoren berechnen werden. Falls hingegen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so hat A keine (reellen) Eigenwerte und keine (reellen) Eigenvektoren. Dies ist ja auch sofort durch die geometrische Bedeutung von A (welche ist das?) einsichtig.

14.2.10 Bemerkung: Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$$

einer $n \times n$-Matrix A erfüllt

- $a_n = (-1)^n$ — also gilt $\operatorname{grad}(\chi_A) = n$,
- $a_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{Spur}(A)$ wobei

  $$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \text{Summe der Diagonalelemente von } A$$

  die sogenannte Spur von A ist,
- $a_0 = \det(A)$.

14.2.11 Folgerung: Für $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ gilt $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{Spur}(A)\lambda + \det(A)$.

14.3. Berechnung von Eigenräumen

14.3.1 Algorithmus: Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sei ein Eigenwert von A. Dann erhält man den Eigenraum (=Menge aller Eigenvektoren samt dem Nullvektor), als Lösungen des singulären Gleichungssystems

$$(A - \lambda\mathbb{1})x = 0\,.$$

14.3.2 Beispiel: (Berechnung von Eigenvektoren)

- Wir hatten die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_{1/2} = \frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$ berechnet.
- Der zu $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$ gehörende Eigenvektor berechnet sich durch Lösung des singulären Systems

$$(A - \lambda_1\mathbb{1})x = \begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 3 & \frac{3-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} x \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Wir addieren nun das $\frac{3\cdot 2}{3+\sqrt{33}}$-fache der ersten Zeile zur letzten und sehen, dass das System wegen

$$\frac{3-\sqrt{33}}{2} + \frac{12}{3+\sqrt{33}} = \frac{3-\sqrt{33}}{2} + \frac{12(3-\sqrt{33})}{-24} = 0$$

zu

$$\begin{pmatrix} \frac{-3-\sqrt{33}}{2} & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird.

- Bemerkung: Eigentlich hätte man sich den vorigen Schritt sparen können, weil die letzte Zeile bei richtiger Rechnung zur Null werden *muss* (die Matrix $A - \lambda\mathbb{1}$ ist ja singulär!), er ist aber ganz gut als Probe geeignet.
- Die Lösungen (der Eigenraum) sind

$$\{s \begin{pmatrix} \frac{4}{3+\sqrt{33}} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} = \{s \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix}\,.$$

- Jeder Vektor aus diesem Eigenraum außer dem Nullvektor ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1.
- Analog erhält man den Eigenraum zu $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$ als

$$\{s \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}\,.$$

14.4. Reelle und komplexe Eigenwerte

14.4.1 Satz: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat mindestens einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis Fundamentalsatz der Algebra: χ_A hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Somit gibt es einen Wert $\lambda \in \mathbb{C}$, für den $\mathrm{Kern}(A - \lambda\mathbb{1})$ nichttrivial ist, also einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ enthält.

14.4.2 Bemerkungen:

- Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ braucht keine reellen Nullstellen zu haben, so dass A keine reellen Eigenwerte/Eigenvektoren haben muss.
- Für dieselbe Matrix aufgefasst als $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es aber auf jeden Fall komplexe Eigenwerte samt zugehörigen komplexen Eigenvektoren.

14.4.3 Beispiel:

- Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ die Matrix einer Drehstreckung.[†]
- Das charakteristische Polynom von A ist
$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - a)^2 + b^2 \,.$$
- Die Nullstellen von χ_A sind offenbar gerade
$$(\lambda - a)^2 = -b^2 \iff \lambda_{1/2} = a \pm b\boldsymbol{i} \,.$$
- Für $b \neq 0$ (die lineare Abbildung ist dann keine bloße Streckung, sondern hat auch einen Drehungsanteil) gibt es daher keine Eigenvektoren in $\mathbb{R}^2$ (was ja auch geometrisch einsichtig ist).
- Andererseits gibt es für dieselbe Matrix A die komplexen Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = a + b\boldsymbol{i}$ und $\lambda_2 = a - b\boldsymbol{i}$.[‡]

14.4.4 Bemerkungen: Unsere früheren Betrachtungen über Polynome mit reellen Koeffizienten liefern folgende Aussagen für reelle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- Für ungerades n hat A (mindestens) einen reellen Eigenwert mit einem zugehörigen reellen Eigenvektor.
- Erlaubt man auch komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren, so ist mit $\lambda = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ auch $\overline{\lambda} = a - b\boldsymbol{i}$ ein Eigenwert von A. Auch die zugehörigen Eigenvektoren sind wegen
$$Av = \lambda v \iff \overline{Av} = \overline{\lambda v} \iff A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$
komplex konjugiert zueinander.

[†]Es gilt $A = \sqrt{a^2 + b^2}\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ mit Konstanten $c, s \in [-1, 1]$, welche man wegen $c^2 + s^2 = 1$ als $c = \cos(\varphi)$ und $s = \sin(\varphi)$ für ein geeignetes $\varphi \in [0, 2\pi[$ interpretieren kann.

[‡]Natürlich gibt es weitere Eigenvektoren, nämlich alle komplexen Vielfachen von v_1 und v_2, außer dem Nullvektor.

14.4.5 Folgerung: Im Gegensatz zu Drehungen des $\mathbb{R}^2$ haben Drehungen im $\mathbb{R}^3$ um eine durch ein $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ gegebene Achse immer Eigenvektoren (welche?).

14.5. Diagonalisierbarkeit

Erinnerung

- Die Wahl einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ in einem VR V über dem Körper $\mathbb{K}$ induziert einen Isomorphismus
$$\Phi : \mathbb{K}^n \to V\,, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i b_i\,.$$
- Erst durch eine solche Basiswahl kann man die Wirkung linearer Selbstabbildungen $\varphi : V \to V$ durch Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ beschreiben. Man wählt dazu die Einträge A_{ij} so, dass gilt $\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} b_i$.

Beobachtung Die Begriffe Eigenwert und Eigenvektoren können für lineare Abbildungen $\varphi : V \to V$ genauso wie für Matrizen definiert werden (man muss in den Definitionen nur $\varphi(x)$ anstelle von Ax schreiben).

Frage Kann man die Basis $b_1, \ldots, b_n$ in V so wählen, dass die Wirkung von φ durch eine besonders einfache Matrix dargestellt wird?

14.5.1 Satz: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\varphi \in \mathrm{Lin}(V,V)$, $b_1, \ldots, b_n \in V$ eine Basis aus Eigenvektoren von φ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, d.h.
$$\varphi(b_i) = \lambda_i b_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$
Die Wahl dieser Basis induziert einen Isomorphismus zum $\mathbb{K}^n$, so dass die φ beschreibende Matrix A_φ Diagonalgestalt hat:
$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}\,.$$

Beweis Offensichtlich.

14.5.2 Folgerung:

- Dasselbe gilt auch im Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$ und $\varphi(x) = Ax$ für ein $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
- Falls es hier eine Basis $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, so wird φ in der Basis $b_1, \ldots, b_n$ durch die Diagonalmatrix
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

beschrieben.

14.5.3 Bemerkung: Normalerweise arbeitet man nicht durchgehend in einer solchen Eigenvektorbasis (sie ist oft recht unhandlich), sondern rechnet die Standardbasisdarstellung nur vorübergehend um. Dazu geht man wie folgt vor:

- Sei T die Matrix, deren Spalten aus den Eigenvektoren $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}^n$ von A zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ bestehen.
- Dann gilt
$$A = \underbrace{T}_{e_i \mapsto b_i} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \underbrace{T^{-1}}_{b_i \mapsto e_i} .$$
- BEDEUTUNG: Die Anwendung von T^{-1} rechnet einen in den Standardbasis-Koordinaten dargestellten Vektor in die Eigenvektorbasis-Koordinaten um. In dieser Darstellung wird dann jede Komponente mit dem entsprechenden Eigenwert skaliert. Zuletzt rechnet die Anwendung von T die Eigenvektor-Koordinaten wieder in die Standardbasis-Koordinaten um.

Beweis Mit den obigen Definitionen von T und D erhält man

$$AT = A\left(b_1 | \cdots | b_n\right) = \left(Ab_1 | \cdots | Ab_n\right) = \left(\lambda_1 b_1 | \cdots | \lambda_n b_n\right) = TD$$

Multiplikation mit T^{-1} von rechts liefert die Behauptung.

14.5.4 Definition: Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn folgende (zueinander äquivalente) Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gibt eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.
2. Es gibt ein $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit
$$AT = TD \quad \Longleftrightarrow \quad A = TDT^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad D = T^{-1}AT\,.$$

Beweis Wie oben gezeigt, definiert die Eigenvektorbasis $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}^n$ ein geeignetes $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Umgekehrt bilden aber auch die Spalten $t_i = Te_i$ einer invertierbaren Matrix T mit $AT = TD$ für diagonales D eine Eigenvektorbasis.

14.5.5 Beispiel: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ des obigen Beispiels sollte wegen der früheren Rechnungen gelten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3+\sqrt{33} & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3+\sqrt{33} & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}^{-1} .$$

Dies kann man mit genügend Arbeit (alternativ: mit Matlab oder einem CAS=Computer-Algebra-System) auch nachrechnen.

14.5.6 Beispiel: Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ besitze die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu den Eigenwerten 1 und 2. Folglich kann man A erhalten als[§]

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:T} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

14.5.7 Bemerkungen:

- Mit Hilfe einer solchen Zerlegung $A = TDT^{-1}$ mit diagonalem D kann man beliebige Potenzen A^k leicht ausrechnen: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} A^k &= (TDT^{-1})(TDT^{-1}) \cdots (TDT^{-1}) \\ &= TD(T^{-1}T)D(T^{-1}T) \cdots (T^{-1}T)DT^{-1} \\ &= TD^kT^{-1} \end{aligned}$$

  und die Potenzen D^k sind einfach zu berechnen:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

- Analog kann man Polynome $p(A) = \sum_{i=0}^{k} c_i A^i$ in A einfach berechnen:

$$p(A) = T \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} T^{-1}.$$

- Dasselbe gilt für sogenannte Potenzreihen, wie zum Beispiel die Exponentialreihe $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$, die man für diagonalisierbares A gemäß

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \exp(A) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}$$

  berechnen kann.[¶]

[§] Man beachte, dass die Eigenvektoren hier der Einfachheit so gewählt wurden, dass $\det(T) = 1$. Dies führt zu einer ganzzahligen Inversen T^{-1}, und weil auch die Eigenwerte ganzzahlig sind, ist auch A ganzzahlig.

[¶] Später werden wir diese Technik zur expliziten Lösung von *Systemen linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen* verwenden.

14.5.8 Satz: Seien $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{K}^n$ Eigenvektoren zu k paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann sind $b_1, \ldots, b_k$ linear unabhängig.

Beweis Wenn $b_1, \ldots, b_k$ linear abhängig wären, so könnte man eines von ihnen (z.B. b_1) als Linearkombination der anderen schreiben, also

$$b_1 = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i b_i \,.$$

Auf diesen Ausdruck wendet man nun das Produkt $\prod_{j=2}^{k}(A - \lambda_j \mathbb{1})$ an und erhält

$$\left(\prod_{j=2}^{k}(\lambda_1 - \lambda_j)\right) b_1 = 0 \,.$$

Wenn die λ_i paarweise verschieden wären, so müsste folglich $b_1 = 0$ sein, was für einen Eigenvektor nicht erlaubt ist.

14.5.9 Folgerungen:

- Falls $\chi_A(\lambda)$ n verschiedene (komplexe) Nullstellen hat, so ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ komplex diagonalisierbar (d.h. $A = TDT^{-1}$ mit $T, D \in \mathbb{C}^{n\times n}$, T invertierbar, D diagonal).
- Falls $\chi_A(\lambda)$ n verschiedene reelle Nullstellen hat, so ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell diagonalisierbar (d.h. $A = TDT^{-1}$ mit $T, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, T invertierbar, D diagonal).

14.5.10 Bemerkung: Wenn $\chi_A(\lambda)$ mehrfache Nullstellen hat, d.h. einen oder mehrere Faktoren der Form $(\lambda - \lambda_*)^k$ mit $k > 1$ enthält, so ist eine genauere Untersuchung notwendig, da beide Fälle auftreten können:

1. A kann diagonalisierbar oder sogar schon diagonal sein, wie z.B. bei
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_* & 0 \\ 0 & \lambda_* \end{pmatrix} .$$
2. A ist nicht diagonalisierbar, wie zum Beispiel bei der Scherstreckung
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_* & 1 \\ 0 & \lambda_* \end{pmatrix} ,$$
welche nur den Eigenvektor e_1 (und Vielfache davon) hat. Man beachte, dass dies sowohl im Reellen als auch im Komplexen gilt!

14.5.11 Bemerkung:

- Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist (d.h. $A = A^T$), so wird die Problematik der Scherstreckung ausgeschlossen.
- Es stellt sich dann sogar heraus, dass A in diesem Fall immer *reell* diagonalisierbar ist, und dass obendrein die Eigenvektorbasis immer orthogonal[‖] ist oder wenigstens orthogonal gewählt werden kann.
- Der Fall symmetrischer Matrizen kommt in der Praxis recht häufig vor, und wir werden ihm im nächsten Kapitel noch einmal begegnen.

[‖] Siehe nächstes Kapitel.

14.6. Anwendung: Trägheitstensor

14.6.1 Anwendung: (Physik) Jeder beliebige starre Körper $V \subset \mathbb{R}^3$ mit Dichte $\rho : V \to \mathbb{R}_0^+$ besitzt einen Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$, den man durch ein Volumenintegral

$$S := \int_V \rho(x) x \, dx \in \mathbb{R}^3$$

berechnen kann. Außerdem gibt es auch noch die Trägheitsmatrix („Trägheitstensor“)

$$\Theta := \int_V \rho(x) \left\{ |x - S|^2 \mathbb{1}_{3\times 3} - (x-S)(x-S)^T \right\} \, dx \in \mathbb{R}^{3\times 3} ,$$

welche die „Trägheit“ bezüglich der Drehung um eine gegebene Achse durch S angibt:

$$L = \Theta \cdot \omega .$$

Diese Gleichung ist das Analogon von $p = mv$ (Impuls=Masse mal Geschwindigkeit) für Drehungen: $L \in \mathbb{R}^3$ ist dabei der Drehimpuls, und die Winkelgeschwindigkeit $\omega \in \mathbb{R}^3$ hat die Richtung der Drehachse.
Man sieht leicht, dass der Trägheitstensor $\Theta \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist. Daher gibt es auf jeden Fall drei orthogonal aufeinander stehende Eigenräume zu Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Wenn alle Eigenwerte verschieden sind, z.B. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, so sind diese Eigenräume eindeutig bestimmt und heißen Hauptträgheitsachsen. Man kann dann zeigen, dass

1. Drehungen ohne Krafteinwirkung von außen (z.B. über die Achse) nur in Richtung dieser drei Achsen möglich sind, und dass

2. nur die Drehungen in Richtung der zum kleinsten und zum größten Eigenwert gehörenden Achsen stabil gegenüber Störungen sind. Das zeigt auch ein Experiment mit Streichholzschachtel, Buch oder Ziegelstein.

14.6.2 Bemerkung: Das Volumenintegral $I(f) = \int_V f(x) \, dx$ für einen Integrationsbereich $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen Integranden $f : V \to \mathbb{R}^k$ kann man (für „gutartige“ V und f) *appproximativ* berechnen, indem man

1. V mit einem Gitter der „Maschenweite“ h überdeckt,

2. daraus alle in V enthaltenen Würfel $\{K_i\}_{i=1,\dots,N}$ auswählt

3. und setzt:
$$I_h(f) := \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\mathrm{vol}(K_i)}_{=h^n} f(M_i) = h^n \sum_{i=1}^{N} f(M_i) ,$$
wobei M_i der Mittelpunkt des Würfels K_i ist.

14.7. Anwendung: Fibonacci-Zahlen

14.7.1 Problem: Die Fibonacci-Zahlen kann man mit Hilfe des folgenden diskreten Evolutionsprozesses motivieren:

- Zur Zeit $T = 0$ ist die Insel leer, d.h. $F_0 = 0$.
- Zur Zeit $T = 1$ wird ein (gerade geborenes) Kaninchenpaar auf die Insel gebracht: $F_1 = 1$.
- Zum Zeitpunkt $T = 2$ (nach einer weiteren Zeiteinheit) wird das Paar geschlechtsreif, die Zahl bleibt aber immer noch $F_2 = F_1 = 1$.
- An den Zeitpunkten $T = 3, 4 \ldots$ bekommen alle Tiere, die älter als eine Zeiteinheit sind, jeweils ein neues Paar Kinder, woraus wir schließen:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}\,.$$

- Kein Kaninchen stirbt.

14.7.2 Definition: Die Fibonacci-Zahlen F_k sind für $k \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert als

$$F_k := \begin{cases} 0 & k = 0 \\ 1 & k = 1 \\ F_{k-1} + F_{k-2} & \text{sonst} \end{cases}$$

14.7.3 Aufgabe: Berechne/untersuche die Folge F_k.

Antwort Das Standardvorgehen bei Rekursionen, die von mehr als einem vergangenen Wert abhängen, ist das Umschreiben zu einer Vektoriteration, welche nur von dem letzten vergangenen Wert abhängt:

$$\vec{F}_k := \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

erfüllt nämlich

$$\vec{F}_{k+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{F}_k\,, \quad \vec{F}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

woraus wir sofort sehen, dass

$$\vec{F}_k = A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.7.4 Bemerkung: Diese Formel kann bereits verwendet werden, um Fibonacci-Zahlen (z.B. F_{10^6}) in Langzahlarithmetik sehr genau und schnell zu berechnen (Stichwort: schnelle Exponentiation).

14.7.5 Analyse:

- Das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1\,.$$

- Es hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

- Die zu diesen Eigenwerten $\lambda_{1/2}$ gehörenden Eigenvektoren sind (bis auf Vielfache bestimmt)

$$v_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{1/2} \end{pmatrix}\,.$$

- Also gilt

$$\vec{F}_k = T \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\,.$$

- $T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnet sich nun durch Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\,.$$

- Somit erhalten wir die Lösungsformel:

$$\vec{F}_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\sqrt{5}} \\ \frac{\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\,,$$

- und somit

$$F_k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\sqrt{5}}$$

- Weil $|\lambda_2| < 1$ ist, wird der Beitrag mit λ_2^k sehr schnell kleiner, so dass für große k mit hoher Genauigkeit gilt

$$F_k \approx \frac{\lambda_1^k}{\sqrt{5}}\,.$$

- Wir sehen also ein exponentielles Wachstum mit Rate λ_1.

14.7.6 Bemerkung:

- Diese Analyse linearer n-Term-Rekursionen mit Hilfe von Matrizen und Eigenwerten ist äquivalent zu deren Untersuchung mit einem Ansatz der Form λ^n (siehe Übungsaufgabe).

- Die für die Fibonacci-Folge wichtige Zahl $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$ ist bereits aus dem Altertum als der goldene Schnitt bekannt.

14.8. Anwendung: Page-Rank

14.8.1 Anwendung: Als ein aktuelles Anwendungsbeispiel sei noch eine Methode zum Bewerten von Webseiten erwähnt, wie sie im Kern wohl auch von Google verwendet wird (der zugehörige „Page-Rank“-Algorithmus ist nach Google-Gründer Larry Page benannt). Die Webseiten (nummeriert von $1, \dots, n$) und die Links zwischen ihnen definieren eine Matrix

$$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}\,, \quad a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|\{\text{Links auf Seite j}\}|} & \text{wenn } j \text{ auf } i \text{ verweist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese Matrix wird noch etwas modifiziert (u.a. wird ein kleiner Parameter $\delta > 0$ auf die Matrixeinträge addiert). Die sogenannte Perron-Frobenius-Theorie liefert dann die Existenz eines eindeutig bestimmten positiven Eigenwerts $\lambda > 0$ und eines zugehörigen Eigenvektors $w \in \mathbb{R}^n$ mit positiven Komponenten. Die Größe der Komponenten dieses Eigenvektors liefert dann tatsächlich eine sinnvolle Rangfolge der Webseiten, denn wegen

$$w_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \text{ verweist auf } i} \frac{w_j}{|\{\text{Links auf Seite } j\}|}$$

ist der „Wert“ oder „Rang“ von Webseite i umso größer je mehr hochwertige Webseiten auf sie verweisen.

14.8.2 Bemerkung: Die praktische Lösung solch riesiger Eigenwertprobleme ist Bestandteil der Numerischen Linearen Algebra.

15. Skalar- und Vektorprodukt

15.1. Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

15.1.1. Definition

15.1.1 Definition: Für beliebige Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißt die reelle Zahl

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

das Euklidische Skalarprodukt von a und b. Dabei bezeichnen a_i und b_i die jeweiligen Komponenten von a bzw. b.

15.1.2 Bemerkung: Das Euklidische Skalarprodukt ist kein Produkt im üblichen Sinn, weil die Werte in einer anderen Menge (nämlich $\mathbb{R}$) liegen als die „Faktoren“ (im $\mathbb{R}^n$).

15.1.2. Eigenschaften

Beobachtung Man prüft leicht nach:

(S1) Das Euklidische Skalarprodukt ist bilinear (d.h. linear im ersten und im zweiten Argument): Für Vektoren $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \kappa_1 a_1 + \kappa_2 a_2, b \rangle &= \kappa_1 \langle a_1, b \rangle + \kappa_2 \langle a_2, b \rangle \\ \langle a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \rangle &= \lambda_1 \langle a, b_1 \rangle + \lambda_2 \langle a, b_2 \rangle . \end{aligned}$$

(S2) Das Euklidische Skalarprodukt ist symmetrisch:

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$$

(S3) Das Euklidische Skalarprodukt ist positiv definit:

$$\forall a \neq 0 : \quad \langle a, a \rangle > 0$$

15.1.3 Bemerkung: Im Folgenden werden wir zur Herleitung vieler Aussagen ausschließlich diese Eigenschaften verwenden. Es ist daher naheliegend, (S1)-(S3) als definierende Eigenschaften (Axiome) eines Skalarprodukt-Begriffs zu verwenden, der das Euklidische Skalarprodukt als Spezialfall einschließt.

15.1.4 Definition: Es sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn sie (S1)-(S3) erfüllt.

15.1.5 Bemerkung:

- Das Euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ist somit ein Spezialfall eines Skalarprodukts.
- Auf dem $\mathbb{R}^n$ kann man auch viele andere Skalarprodukte definieren, wie beispielsweise $\langle x, y \rangle_\sim := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$ mit positiven Konstanten α_i.
- Und auch auf anderen Vektorräumen gibt es Skalarprodukte, wie z.B. das für integrierbare Funktionen $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definierte L^2-Skalarprodukt $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, welches wichtig für die sogenannte Fourier-Analysis ist.

15.1.6 Bezeichnung:

- Das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ wird oft mit einem Punkt bezeichnet, d.h. $x \cdot y$ anstelle von $\langle x, y \rangle$.
- Wir verwenden diese Notation nicht*, weil wir erstens den Punkt schon zur Verdeutlichung der normalen Multiplikation und der Skalierung von Vektoren verwenden, und zweitens, weil fast alle Aussagen dieses Abschnitts auch für beliebige andere Skalarprodukte richtig sind.

15.1.3. Euklidische Norm

15.1.7 Definition: Die Euklidische Norm oder Euklidische Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

15.1.8 Bezeichnung: Früher haben wir für die Euklidische Länge einfach die Betragsnotation $|\cdot|$ verwendet. Der Wechsel zu $\|\cdot\|$ geschieht aus zwei Gründen:

1. Da wir keine Spezialnotation für Vektoren verwenden, macht es den Unterschied zwischen Betrag einer Zahl und Länge eines Vektors deutlicher.†
2. Im folgenden Kapitel werden wir auch andere Normen betrachten, und die Notation $\|\cdot\|$ weist darauf hin, dass Aussagen in einem allgemeineren Sinn gültig sind.

15.1.9 Eigenschaften: Für diese Größe gelten folgende Aussagen:

(N1) Definitheit: $\|x\| > 0$ für $x \neq 0$

(N2) Homogenität: $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$

(N3) Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

*Oder wenigstens im Augenblick noch nicht, denn später bei Kurven- und Flächenintegralen werden wir es doch tun.

†Dies ist beispielsweise beim Verständnis der Normeigenschaft (N2) in der folgenden Bemerkung nützlich, wo beide Bedeutungen zusammen auftreten.

Beweis Die ersten zwei Aussagen sind klar. Die dritte (Dreiecksungleichung) werden wir später als Nebenprodukt anderer Aussagen erhalten.

15.1.10 Bemerkung:
- Im Folgenden werden wir viele Aussagen für Normen ausschließlich unter Rückgriff auf die Eigenschaften (N1)-(N3) begründen. Es ist daher naheliegend, sie als Axiome eines weitergehenden Normbegriffs zu verwenden, der die Euklidische Norm als Spezialfall einschließt.
- Skalarprokukte, Normen und ihre Beziehungen werden wir später in Kapitel 16 noch einmal genauer betrachten.

15.1.11 Definition: Mit Hilfe einer Norm kann man einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ wie folgt zerlegen

$$x = \|x\| \hat{x} \,,$$

wobei man $\hat{x} := \frac{1}{\|x\|} x$ die Richtung von x und $\|x\|$ die Länge von x nennt.

15.1.12 Bemerkung: Es gilt $\|\hat{x}\| = \|\frac{1}{\|x\|} x\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$.

15.1.13 Satz: (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) Es besteht folgende Beziehungen zwischen einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der mittels $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ definierten Norm:

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \|y\| \,, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Beweis Dies zeigen wir in Kapitel 2 unter ausschließlicher Verwendung der Skalarprodukteigenschaften. Es folgt aber auch aus der Beziehung zwischen Skalarprodukt und Winkel, die wir gleich vorstellen und etwas später in einem Nachtrag auch geometrisch begründen.

15.1.4. Winkel zwischen Vektoren

15.1.14 Motivation:
- Nach dem Kosinussatz (Geometrie in der Schule) ist

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos(\varphi)$$

wobei $\varphi = \measuredangle(x, y)$ den Winkel zwischen x und y bezeichnet.

- Wenn wir das mit

$$\langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

vergleichen, sehen wir

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\varphi)$$

15.1.15 Definition: Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Dann ist der Winkel $\measuredangle(x, y)$ zwischen x und y definiert als

$$\measuredangle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \right) \in [0, \pi] \,.$$

15.1.16 Bemerkungen:
- Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung liegt das Argument von $\arccos$ im Bereich $[-1, 1]$, so dass der Ausdruck wohldefiniert ist.

- Der Winkel $\measuredangle(x,y)$ zwischen x und y kann nicht negativ sein und ist gleich dem Winkel $\measuredangle(y,x)$ zwischen y und x.

15.1.17 Beispiel:

- Berechne den Winkel zwischen $x = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$.
- Wir berechnen $\|x\| = \sqrt{8}\,, \quad \|y\| = \sqrt{18}\,, \quad \langle x,y\rangle = 6\,.$
- Somit ergibt sich

$$\cos(\measuredangle(x,y)) = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{144}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

- ... und daher

$$\measuredangle(x,y) = \frac{\pi}{3} = 60^\circ\,.$$

15.1.18 Beispiel: Der Winkel zwischen den Vektoren $x = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ berechnet sich wie folgt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

Hieraus berechnet man $\varphi = 1.159\ldots$ im Bogenmaß, was etwa $\varphi \approx 66.42^\circ$ entspricht.

15.1.5. Orthogonalität

15.1.19 Definition: $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen orthogonal (in Zeichen $x \perp y$), wenn

$$\langle x,y\rangle = 0\,.$$

15.1.20 Folgerung: Falls $\|x\| \neq 0$ und $\|y\| \neq 0$, so folgt aus $\langle x,y\rangle = 0$ auch $\cos\measuredangle(x,y) = 0$ und somit $\measuredangle(x,y) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

15.1.21 Beispiel: Für die Vektoren $x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ist $\langle x,y\rangle = 0$. Somit sind sie orthogonal.

Beobachtung Die Einheitsvektoren e_i des $\mathbb{R}^n$ besitzen alle Norm $\|e_i\| = 1$ und sind paarweise orthogonal. Dies kann man kurz schreiben als

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}\,, \quad i,j = 1,\ldots,n \qquad (*)$$

wobei δ_{ij} wieder das Kronecker-Delta ist.
Die Einheitsvektoren $\{e_1,\ldots,e_n\}$ bilden aber sicherlich nicht die einzige Basis des $\mathbb{R}^n$, deren Vektoren die Eigenschaft $(*)$ erfüllen: Schließlich kann man die e_i ja gemeinsam drehen, ohne dass sich an ihrer Länge oder an ihrer Orthogonalität zueinander etwas ändert.

15.1.22 Definition: Eine Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ des VR V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, welche die Bedingung

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{für alle} \quad i, j = 1, \ldots, n$$

erfüllt, heißt Orthonormalbasis (ONB) oder orthonormierte Basis.

15.1.23 Beispiel: Für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ bilden

$$b_1 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

eine ONB im $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ergibt sich für $\varphi = 0$ die Standardbasis e_1,e_2 des $\mathbb{R}^2$, welche natürlich auch eine ONB ist.

15.1.24 Satz: $\{b_1, \ldots, b_n\}$ sei ONB des $\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ besitze die Darstellung

$$x = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

- Den Koeffizienten λ_i erhält man als $\lambda_i = \langle x, b_i \rangle$.
- (Satz von Pythagoras) Für die Länge von x gilt

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Beweis Man „multipliziere“ (mit dem Skalarprodukt) die obige Darstellung von x in der ONB $b_1, \ldots, b_n$ mit b_i bzw. mit x.

15.1.25 Bemerkung: Der Satz von Pythagoras gilt auch in folgender allgemeinerer Form: $v \in \mathbb{R}^n$ besitze eine Zerlegung

$$v = \sum_{i=1}^{k} v_i = v_1 + \ldots + v_k$$

mit Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$, die zueinander orthogonal sind (d.h. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$). Dann gilt

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|v_i\|^2.$$

Beweis Ausrechnen von $\|v\|^2$ und Ausnutzen von $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \|v_i\|^2$.

15.1.6. Orthogonalisierung

15.1.26 Motivation: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ aufgespannter k-dimensionaler Untervektorraum. Wir sind (zum Beispiel) an folgenden Fragestellungen interessiert:

> Welches $\hat{x} \in U$ hat den geringsten Abstand zu einem vorgegebenen $x \in \mathbb{R}^n$? Wie groß ist dieser geringstmögliche Abstand, den wir mit $d(x, U)$ bezeichnen?

Beobachtung Beide Fragen kann man leicht beantworten, falls die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ orthonormal sind, d.h. wenn $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt. Denn in diesem Fall gilt, dass man den x am nächsten liegenden Punkt $\hat{x} \in U := \mathrm{Spann}(v_1, \ldots, v_k)$ sehr bequem berechnen kann als

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i \,.$$

Hiermit kann man dann auch $d(x, U) = \|x - \hat{x}\|$ berechnen.
BEZEICHNUNG: Das oben konstruierte $\hat{x}$ nennt man auch die orthogonale Projektion von x auf U.

Beweis (Man mache sich ein Bild!) Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

1. Zuerst zeigt man die Orthogonalität des Vektors $x - \hat{x}$ zu allen Vektoren in U. Es reicht dazu, die Orthogonalität $x - \hat{x} \perp v_j$ für alle v_j zu zeigen, weil daraus auch die Orthogonalität zu beliebigen Linearkombinationen folgt:

$$\langle x - \hat{x}, v_j \rangle = \langle x, v_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle v_i, v_j \rangle = \langle x, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x, v_i \rangle \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = 0$$

2. Für ein beliebiges $y \in U$ liegt auch $y - \hat{x} \in U$ und nach Pythagoras gilt:

$$\|x - y\|^2 = \|(x - \hat{x}) + (\hat{x} - y)\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 + \|\hat{x} - y\|^2 \,.$$

   Man sieht, dasss $\|x - y\|$ immer größer oder gleich $\|x - \hat{x}\|$ ist und die Gleichheit nur für $y = \hat{x}$ gilt.

Frage Was macht man, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ nicht orthonormiert sind?

Idee Man kann aus einer beliebigen Menge linear unabhängiger Vektoren $v_1, \ldots, v_k \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge $b_1, \ldots, b_k \subset \mathbb{R}^n$ von Vektoren konstruieren, die zueinander orthogonal sind, Länge 1 haben und denselben Teilraum wie $v_1, \ldots, v_k$ aufspannen.

15.1.27 Verfahren: (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

SCHLEIFE $i = 1, \ldots, k$

$\tilde{b}_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, b_j \rangle b_j$ (ORTHOGONALISIEREN)

$b_i := \frac{1}{\|\tilde{b}_i\|} \tilde{b}_i$ (NORMIEREN)

ENDE SCHLEIFE

15.1.28 Bemerkung: Weil $\|\tilde{b}_i\|$ meist ein Wurzelausdruck ist, ist es —wenigstens bei Rechnungen mit der Hand— praktisch, zuerst die Orthogonalisierung ausschließlich mit den $\tilde{b}_i$ durchzuführen und den zweiten Schritt (Berechnung der b_i durch Normierung der $\tilde{b}_i$) in eine nachfolgende Schleife auszulagern. Diese Variante besteht dann aus zwei aufeinanderfolgenden Schleifen:

SCHLEIFE $i = 1, \ldots, k$: $\tilde{b}_i := v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, \tilde{b}_j \rangle}{\|\tilde{b}_j\|^2} \tilde{b}_j$

SCHLEIFE $i = 1, \ldots, k$: $b_i := \frac{1}{\|\tilde{b}_i\|} \tilde{b}_i$

15.1.29 Beispiel: Wir wollen eine Orthonormalbasis für die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene $E = \mathrm{Spann}(v_1, v_2)$ finden. Danach wollen wir den Abstand des Punktes $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu dieser Ebene bestimmen.

Die Orthonormalbasis finden wir wie folgt:

1. Orthogonalisierung

   a) $\tilde{b}_1 = v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Norm davon ist $\|\tilde{b}_1\|^2 = 2$.

   b) $\tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und die Norm davon ist $\|\tilde{b}_2\|^2 = \frac{3}{2}$.

2. Normierung: $b_1 = \frac{\tilde{b}_1}{\|\tilde{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Mit den b_i kann man dann die orthogonale Projektion $\hat{x}$ von x auf E berechnen als[‡]

$$\hat{x} = \langle x, b_1\rangle b_1 + \langle x, b_2\rangle b_2 = \frac{5}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\8\\7\end{pmatrix},$$

woraus sich der Abstand von x zu E ergibt als

$$d(x,E) = \|x - \hat{x}\| = \|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\8\\7\end{pmatrix}\| = \|\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\| = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,.$$

15.2. Lineare Abbildungen und Skalarprodukt

15.2.1. Orthogonale Matrizen

15.2.1 Definition: Eine Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nennen wir orthogonal, wenn die zugehörige lineare Abbildung das Euklidische Skalarprodukt erhält, d.h.

$$\langle Ox, Oy\rangle = \langle x, y\rangle\,, \quad x, y \in \mathbb{R}^n\,.$$

15.2.2 Bezeichnung: Anstatt mit O hätten wir natürlich auch orthogonale Matrizen mit A bezeichnen können. Der Mathematik (oder auch einer Computersprache wie Matlab/Octave) ist das egal, allerdings helfen die unterschiedlichen Buchstaben normalerweise dem menschlichen Leser.

15.2.3 Bemerkung: Äquivalent zur Orthogonalität ist die Forderung der Isometrie (Längenerhaltung)

$$\|Ox\| = \|x\|\,.$$

Beweis

1. „⇒“: Setze $x = y$ in der Orthogonalitätsdefinition.
2. „⇐“: Das Skalarprodukt kann auf verschiedene Weise mit Hilfe der zu ihm gehörenden Norm ausgedrückt werden, wie z.B. durch

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)\,.$$

Beispiele Drehungen und Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$.

15.2.4 Bemerkung: Die Isometrie ist eine stärkere Voraussetzung als das Erhalten des Winkels zwischen zwei beliebigen Vektoren x und y, wie man an einfachen Skalierungen sieht.

[‡]Die Variante $\hat{x} = \frac{\langle x, \tilde{b}_1\rangle}{\|\tilde{b}_1\|^2}\tilde{b}_1 + \frac{\langle x, \tilde{b}_2\rangle}{\|\tilde{b}_2\|^2}\tilde{b}_2$ vermeidet auch hier Wurzelausdrücke während der Rechnung.

15.2.5 Folgerung: Die orthogonalen $n \times n$-Matrizen (oder äquivalent die isometrischen linearen Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^n$) bilden eine Gruppe, die man mit $O(n)$ bezeichnet.

Beweis Erstens ist die Verkettung isometrischer linearer Abbildungen ebenfalls isometrisch. Zweitens ist die Identität isometrisch. Drittens ist der Kern einer isometrischen linearen Abbildung nur der Nullvektor, so dass die Inverse existiert und auch isometrisch ist.

Beobachtung Wenn man Vektoren des $\mathbb{R}^n$ als $n \times 1$-Matrizen und reelle Zahlen als 1×1-Matrizen auffasst, so kann man das ESP als Matrixprodukt schreiben

$$\langle x, y \rangle = x^T y \,.$$

15.2.6 Satz: $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal $\iff O^T O = \mathbb{1} \iff O^T = O^{-1}$.

Beweis Die Orthogonalität bedeutet

$$(Ox)^T Oy = x^T y \iff x^T O^T O y = x^T y \iff x^T(\mathbb{1} - O^T O)y = 0$$

Dies gilt genau dann für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, wenn $\mathbb{1} = O^T O$ ist (wenn man $x = e_i$ und $y = e_j$ setzt, erhält man $(\mathbb{1} - O^T O)_{ij} = 0$). Multiplikation mit O^{-1} von rechts liefert dann die zweite Äquivalenz.

15.2.7 Bemerkung: Wenn die orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Form $(o_1|\ldots|o_n)$ mit den Spalten $o_1, \ldots, o_n$ hat, so kann man $O^T O = \mathbb{1}$ auch als $\langle o_i, o_j \rangle = \delta_{ij}$ interpretieren. Daher gilt: $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal $\iff$ die Spalten bilden eine ONB des $\mathbb{R}^n$.

15.2.2. Symmetrische Matrizen

15.2.8 Definition: Zu $A = (A_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichne A^T die Transponierte zu A mit den Einträgen $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

15.2.9 Satz: Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wieder das ESP im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

sowie

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beweis Dies folgt sofort mit der Darstellung $\langle x, y \rangle = x^T y$. Zum Beispiel

$$\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = (x^T A^T) y = x^T (A^T y) = \langle x, A^T y \rangle \,.$$

15.2.10 Definition: Eine Matrix heißt symmetrisch : $\iff A^T = A$.

15.2.11 Satz: Jede symmetrische Matrix ist orthogonal diagonalisierbar, d.h. es gelten folgende äquivalente Aussagen:

1. es gibt eine ONB $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von A besteht, oder alternativ

2. es gibt eine orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $O^T AO = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Beweis Im folgenden Abschnitt.

15.2.12 Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch. Man rechnet leicht nach, dass sie die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ besitzt. Auch die zugehörigen Eigenräume kann man leicht erhalten als $E_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Wie erwartet gilt $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ für beliebige $v_1 \in E_1$ und $v_2 \in E_2$.

15.2.3. Nachtrag

- Wir hatten am Anfang dieses Abschnitts den Kosinussatz aus der Schule zitiert, um die geometrische Interpretation des Skalarprodukts zweier Vektoren zu erhalten.

- Aus Gründen der Vollständigkeit ist dies unbefriedigend, so dass wir jetzt die Beziehung zu der über den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ definierten Kosinusfunktion auf andere Weise herleiten wollen.

- Erstens sollte der Winkel zwischen zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ von deren Länge unabhängig sein (und ist es mittels unserer Definition auch!). Ohne Einschränkung können wir daher $\|u\| = \|v\| = 1$ annehmen.

- Zweitens kann man u und v durch eine orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so drehen, dass gilt $Ou = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Ov = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $x^2 + y^2 = 1$.

- Damit gilt aber, dass die Größe

$$\langle u, v \rangle = \langle Ou, Ov \rangle = x$$

einfach die erste Komponente eines Einheitsvektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist, und diese Zahl hatten wir ja früher den Kosinus des zugehörigen Winkels genannt.

15.3. Das Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

15.3.1. Definition und Eigenschaften

Beobachtungen

- Wegen $\boldsymbol{i}^2 = -1$ könnte ein komplex-bilineares Skalarprodukt wegen

$$\langle \boldsymbol{i}x, \boldsymbol{i}x\rangle = \boldsymbol{i}^2\langle x, x\rangle = -\langle x, x\rangle$$

  nicht definit sein.

- Auch entspricht dem Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ nicht die Größe $\sqrt{z^2}$, sondern $\sqrt{\overline{z}z}$.

Abhilfe Man fordert die Linearität der Skalierung

$$\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

nur im zweiten Argument, und die sog. Antilinearität (oder konjugierte Linearität)

$$\langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}$$

im ersten Argument. Auch die Symmetrie muss dann in der Form $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ gelten (sonst würde man für $0 \neq x = y$ und $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ sofort Widersprüche erhalten).

15.3.1 Definition:

- Das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ wird dementsprechend definiert als

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i\,.$$

- Die zugehörige Euklidische Norm ist dann

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

15.3.2 Bemerkung: Wenn man Vektoren als $n \times 1$-Matrizen und Zahlen als 1×1-Matrizen auffasst, kann man dies schreiben

$$\langle x, y\rangle = \overline{x}^T y =: x^* y$$

wobei wir $x^* := \overline{x}^T = \overline{x^T}$ gesetzt haben (der Querstrich alleine bedeutet das Konjugieren aller Komponenten von x).

15.3.2. Die Adjungierte

15.3.3 Definition: Es sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Die Matrix $A^* := \overline{A}^T \in \mathbb{C}^{n\times m}$ nennt man die Adjungierte von A. Wegen

$$x^*Ay = \overline{x}^T Ay = \overline{x^T}Ay = \overline{x^T\overline{A}}y = \overline{(\overline{A}^T x)^T}y = \overline{(A^*x)}^T y = (A^*x)^*y$$

erfüllt sie

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle .$$

Ebenso folgt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

15.3.4 Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{i} & 1-2\boldsymbol{i} \\ 0 & 1+\boldsymbol{i} & 3 \end{pmatrix}$$

hat die Adjungierte

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\boldsymbol{i} & 1-\boldsymbol{i} \\ 1+2\boldsymbol{i} & 3 \end{pmatrix}.$$

15.3.3. Unitäre Matrizen

15.3.5 Definition: Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt unitär, wenn sie das komplexe Skalarprodukt erhält:

$$\forall x, y \in \mathbb{C}^n : \quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$$

15.3.6 Bemerkung: Man sieht leicht, dass das in Matrizensprache gerade den Beziehungen $U^*U = \mathbb{1}$ bzw. $U^* = U^{-1}$ entspricht.

Beweis Analog zum Beweis für orthogonale Matrizen (nur muss $\cdot^*$ statt $\cdot^T$ geschrieben werden).

15.3.7 Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{i} \\ -\boldsymbol{i} & 0 \end{pmatrix}$ ist unitär.

15.3.8 Bemerkungen: Eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ erfüllt

- $U^*U = \mathbb{1}$
- $U^{-1} = U^*$
- Wenn $U = (u_1|\dots|u_n)$, so bilden die Spalten $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}^n$ ein Orthonormalsystem, d.h.
$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$
- Alle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ von U haben Betrag 1 (warum?)
- Wenn U nur reelle Einträge hat, so ist U orthogonal.

15.3.4. Hermitesche/selbstadjungierte Matrizen

15.3.9 Definition: Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch oder selbstadjungiert, wenn $A = A^* = \overline{A}^T$. Äquivalent dazu kann man offenbar auch fordern

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \quad \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle .$$

15.3.10 Satz: Für jede hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es ein unitäres $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit *reellen* Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Mit anderen Worten: Jede hermitesche Matrix besitzt eine aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten bestehende unitäre Basis.

Beweisskizze Für eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die lineare Abbildung $\varphi : x \mapsto Ax$ auch symmetrisch in dem Sinne, dass

$$\langle x, \varphi(y)\rangle = \langle \varphi(x), y\rangle .$$

Hieraus folgt:

1. Erstens hat jede lineare Abbildung mindestens einen komplexen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ (Fundamentalsatz der Algebra).
2. Zweitens folgt aus $\varphi(x) = \lambda x$ für einen Eigenvektor $x \neq 0$ und der Symmetrie
$$\lambda\|x\|^2 = \langle \varphi(x), x\rangle = \langle x, \varphi(x)\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2 .$$
Somit gilt sogar $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Dann beobachtet man, dass für einen Eigenvektor $v_1 \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ auch das orthogonale Komplement $v_1^\perp := \{x \in \mathbb{C}^n \mid \langle v_1, x\rangle = 0\}$ unter φ in sich abgebildet wird. Eingeschränkt auf den UVR $v_1^\perp$ ist φ aber wieder symmetrisch, so dass man induktiv $n-1$ weitere Eigenvektoren $v_2, \ldots, v_n$ zu reellen Eigenwerten findet.
4. Die obige Konstruktion sichert, dass die Eigenvektoren v_i paarweise orthogonal sind. Normierung $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$ liefert dann die Spalten der gewünschten unitären Matrix $U = (u_1|\cdots|u_n)$.

15.3.11 Folgerung: Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, so gibt es eine orthogonale Matrix $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $OAO^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Beweis Es ist nur zu zeigen, dass anstelle eines komplexen Eigenvektors $x \in \mathbb{C}^n$ von A, den man aus dem vorigen Satz als Spalte von U erhält, auch ein reeller gewählt werden kann. Nun gilt aber

$$Ax = A\,\mathfrak{Re}(x) + \boldsymbol{i}A\,\mathfrak{Im}(x) = \lambda A\,\mathfrak{Re}(x) + \boldsymbol{i}\lambda A\,\mathfrak{Im}(x) ,$$

so dass auch $\mathfrak{Re}(x) \in \mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{Im}(x) \in \mathbb{R}^n$ in demselben Eigenraum liegen. Weil nicht beide der Nullvektor sein können, folgt die Behauptung.

15.4. Vektorprodukt

15.4.1. Konstruktion

15.4.1 Definition: Für zwei im $\mathbb{R}^3$ liegende Vektoren $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von a und b.

15.4.2 Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 0 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

15.4.3 Bemerkung:

- Zum Vektorprodukt gibt es folgende Merkregel:

$$a \times b = \text{„det“} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad \left[\overset{\text{alternativ}}{=} \text{„det“} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \right]$$

- Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\begin{aligned} a \times b &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

- Man beachte, dass das Kreuzprodukt *zweier* Vektoren nur im $\mathbb{R}^3$ definiert ist.
- Im $\mathbb{R}^n$ für $n \neq 3$ bildet ein Konstrukt entsprechend der obigen Merkregel hingegen $n-1$ Vektoren in einen Ergebnisvektor ab (siehe Abschnitt).

15.4.4 Eigenschaften:

- $\times$ ist bilinear, d.h.

$$\begin{aligned} (a + \tilde{a}) \times b &= a \times b + \tilde{a} \times b \\ a \times (b + \tilde{b}) &= a \times b + a \times \tilde{b} \\ (\lambda a) \times b &= \lambda (a \times b) \\ a \times (\lambda b) &= \lambda (a \times b) \end{aligned}$$

- $a \times a = \begin{pmatrix} a_2 a_3 - a_3 a_2 \\ a_3 a_1 - a_1 a_3 \\ a_1 a_2 - a_2 a_1 \end{pmatrix} = 0$

- Aus $(a+b)\times(a+b)=0$ folgt dann $a\times b=-b\times a$.
- a und b sind genau dann linear abhängig, wenn $a\times b=0$. (Beweis?)
- $\det(a,b,c)=\langle a\times b,c\rangle$ (das sogenannte „Spatprodukt“)
- $\det(a,b,a\times b)=\|a\times b\|^2$
- Folgerung: Für linear unabhängige Vektoren $a,b\in\mathbb{R}^3$ ist $a,b,a\times b$ eine positiv orientierte Basis.
- Rechte-Hand-Regel: Drei Vektoren $a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}^3$ nennen wir positiv orientiert, wenn sie eine Lage wie Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der rechten Hand haben.
- $a\times b$ steht senkrecht auf a und b. (Nachrechnen!)
- Folgerung: Sind u und v orthonormierte Vektoren in $\mathbb{R}^3$, so bilden $u,v,u\times v$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis.
- Beweis: Weil $\det(u,v,u\times v)$ das Volumen des Quaders mit Seitenlängen $\|u\|=1$, $\|v\|=1$ und $\|u\times v\|$ liefert, gilt unter Benutzung einer früheren Eigenschaft $\det(u,v,u\times v)=1\cdot1\cdot\|u\times v\|=\|u\times v\|^2$. Dies kann aber nur sein, wenn $\|u\times v\|=1$.
- Beispiel:

$$u=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\quad u\times v=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}-0\\0-0\\0-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

15.4.2. Vektorprodukt und Skalarprodukt

15.4.5 Satz: $\|a\times b\|^2=\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2$

Beweis Nachrechnen.

15.4.6 Folgerungen:
- (Cauchy-Schwarz-Ungleichung im $\mathbb{R}^3$) Es gilt $|\langle a,b\rangle|\leqslant\|a\|\cdot\|b\|$ mit Gleichheit, falls a und b Vielfache voneinander sind.
- Sind a und b orthogonal, so ist $\|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|$.

15.4.7 Interpretation:
- a und b seien linear unabhängig.
- $\alpha=\sphericalangle(a,b)$ sei der Winkel zwischen a und b.
- Es gilt $\langle a,b\rangle=\|a\|\|b\|\cos\alpha$.
- Somit folgt

$$\|a\times b\|^2=\|a\|^2\|b\|^2(1-(\cos\alpha)^2)=\|a\|^2\|b\|^2(\sin\alpha)^2$$

- Folglich gilt (man beachte, dass $\alpha \in [0, \pi]$)

$$\|a \times b\| = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin(\alpha)\,,$$

was ja ebenfalls eine bekannte Formel für die Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

15.4.3. Anwendungen

- Die Lorentzkraft $\vec{F}$, die auf ein geladenes Teilchen mit Ladung q wirkt, das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch ein magnetisches Feld der Flussdichte $\vec{B}$ bewegt, berechnet sich als

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

- Wenn die Kraft $\vec{F}$ an einem Punkt $\vec{r}$ eines Körpers angreift, so ergibt sich folgendes Drehmoment (um den Ursprung):

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

(Dies bedeutet „Drehmoment gleich Hebelarm mal Kraft“ wenn $\vec{r}$ und $\vec{F}$ senkrecht aufeinander stehen.)

- Im späteren Kapitel über Integrationstheorie werden wir das Vektorprodukt verwenden, um Flüsse durch Flächenstücke zu berechnen.

15.4.4. Äußeres Produkt

Frage Gibt es eine n-dimensionale Verallgemeinerung des Kreuprodukts?

15.4.8 Definition: Zu Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\begin{aligned} \wedge(v_1, \ldots, v_{n-1}) &\overset{\text{formal}}{:=} \begin{vmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{n-1,1} & \vec{e}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & \ldots & v_{n-1,n} & \vec{e}_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \begin{vmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{n-1,1} \\ \vdots & \text{ohne Zeile i} & \vdots \\ v_{1,n} & \ldots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} \vec{e}_i\,. \end{aligned}$$

Den so errechneten Vektor $\wedge(v_1, \ldots, v_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet man als das sogenannte äußere Produkt von $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

15.4.9 Bemerkung: Der Vektor $\wedge(v_1, \ldots, v_{n-1})$ verallgemeinert das Kreuzprodukt des $\mathbb{R}^3$: Er steht senkrecht auf allen v_i und hat eine Länge, die man wieder als $n-1$-dimensionale Fläche ($n-1$-dimensionales Volumen) des von den Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ aufgespannten Parallelotops ansehen kann.

Teil IV.

Topologie

15.4.10 Bemerkung: Der Name Topologie bezeichnet einen Teilbereich der Analysis, der die Begriffe Metrik, Norm, offene und abgeschlossene Mengen, sowie Stetigkeit in großer Allgemeinheit untersucht. Uns interessiert aber nur ein Ausschnitt daraus, der die Grundlagen für die Analysis bereitstellt.

16. Metriken, Normen und Skalarprodukte

16.1. Metriken

16.1.1 Definition: Eine Metrik (Abstands- bzw. Distanzfunktion) auf einer Menge M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}_0^+ = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geqslant 0\}$, für die gilt

1. Definitheit: $\forall x, y \in M : \; d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Symmetrie: $\forall x, y \in M : \; d(x,y) = d(y,x)$
3. Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in M : \; d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Das Paar (M, d) bezeichnet man als metrischen Raum.

16.1.2 Bemerkung: Hin und wieder braucht man die Dreiecksungleichung in der äquivalenten Form

$$\forall x, y, z \in M : \; d(x,y) \geqslant d(x,z) - d(y,z)\,,$$

welche man umgekehrte Dreiecksungleichung nennt.

Beispiele

- Sei die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ definiert als $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. Dann ist

  $$d(x,y) := \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

  eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$.
- Wenn man $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}^1$ ansieht, so ist ein besonders einfacher Spezialfall hiervon die Metrik $d(x,y) = |x - y|$ auf $\mathbb{R}$.
- Wenn $|\cdot|$ die Betragsfunktion in $\mathbb{C}$ bezeichnet, so ist $d(x,y) = |x - y|$ auch eine Metrik in $\mathbb{C}$.
- Generell gilt: Wenn d eine Metrik auf M ist und $M' \subset M$, so ist die Einschränkung von d auf M' eine Metrik auf M'.

  Bemerkung:

  - Die Einschränkung einer Funktion $f : X \to Y$ auf eine Teilmenge $X' \subset X$ ist eine Funktion $f' : X' \to Y$, die $f'(x') = f(x')$ für alle $x' \in X'$ erfüllt.
  - Sie wird oft mit $f|_{X'}$ bezeichnet (f „eingeschränkt auf“ X').
  - Mit der oben erwähnten „Einschränkung der Metrik“ d auf M' ist daher tatsächlich die Funktion $d|_{M' \times M'}$ gemeint.

- Somit ist $d(x, y) = |x - y|$ auch eine Metrik auf beliebigen Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$ oder $M \subset \mathbb{C}$.

- Sei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ der Einheitskreis. Dann ist sowohl

$$d_1(x, y) := \|x - y\| = \text{Euklidischer Abstand im } \mathbb{R}^2$$

  als auch

$$d_2(x, y) := \measuredangle(x, y) = \text{„Winkel zwischen } x \text{ und } y\text{“} \in [0, \pi]$$

  eine Metrik auf der Menge S^1.

- Analog kann man Abstände auf S^2 (Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$) oder auf der Erdoberfläche definieren.

- Sei M eine beliebige Menge. Dann ist

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

  eine Metrik, die man die diskrete Metrik nennt.

- Sei M eine Menge von Kontaktpunkten, zwischen denen ein Netzwerk aus elektrischen Leitungen besteht. Dann ist

$$d(x, y) := \textit{elektrischer Widerstand zwischen Kontakt } x \textit{ und } y$$

  eine Metrik auf M.

- Sei M die Menge aller Bahnstationen in Deutschland und

$$d(x, y) := \textit{minimaler Preis, um mit der Bahn von } x \textit{ nach } y \textit{ zu kommen}$$

  Dies ist eine Metrik (oder sollte es wenigstens sein), weil

  1. jede Bahnfahrt von x nach $y \neq x$ etwas kostet,
  2. die Hinfahrt soviel kostet wie die Rückfahrt und
  3. Umwege eine Strecke nicht billiger machen.

  FRAGE: Stimmt das wirklich?

16.2. Normen

16.2.1 Motivation: Eine Metrik ist ein sehr allgemeiner Begriff, welcher für beliebige Mengen M Sinn macht. Falls die Menge M ein Vektorraum ist, so wünscht man normalerweise, dass die Metrik mit den Vektorraumoperationen harmoniert, d.h. dass $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ und $d(x, x+\lambda y) = |\lambda| d(x, x+y)$ für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Dies erreicht man, indem man die Metrik über eine Norm definiert.

16.2.2 Definition: Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V ist eine Abbildung $V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Definitheit:
$$\forall x \in V: \quad \|x\| \begin{cases} > 0 & x \neq 0_V \\ = 0 & x = 0_V \end{cases}$$
2. Homogenität:
$$\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$$
3. Dreiecksungleichung:
$$\forall x, y \in V: \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

16.2.3 Bemerkung: Jede Norm auf V induziert (definiert) eine Metrik auf V gemäß
$$d(x,y) := \|x - y\| .$$

Beweis Die Definitheit von d folgt offenbar aus der Definitheit von $\|\cdot\|$, und die Symmetrie von d wegen der Homogenität von $\|\cdot\|$. Die Dreiecksungleichung für d ergibt sich aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|$ wegen

$$\begin{aligned} d(x,z) = \|x - z\| = \|(x-y) + (y-z)\| \\ \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z) . \end{aligned}$$

Beispiele

- Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}$. Wegen der Homogenitätseigenschaft ist das bis auf Multiplikation mit positiven Konstanten auch die einzige Norm im Vektorraum $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^1$.
- Auf $\mathbb{R}^2$ (oder allgemeiner $\mathbb{R}^n$) ist die Situation interessanter. Wichtige Normen sind:
  1. Die Euklidische Norm
  $$\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
  Konkret: $\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \|_2 = \sqrt{5} = 2.236\ldots$.

2. Die Maximumsnorm
$$\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i| .$$
Konkret: $\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \|_\infty = 2.$
3. Die Summennorm
$$\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$
Konkret: $\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \|_1 = 3.$
4. Die Euklidische und die Summennorm sind Spezialfälle der p-Normen, die man für $1 \leqslant p < \infty$ definiert als
$$\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$
Konkret: $\| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \|_4 = \sqrt[4]{17} = 2.030\ldots.$

16.2.4 Bemerkungen: In den Übungen wird gezeigt werden:

- Je größer p, umso näher liegt $\|x\|_p$ an $\|x\|_\infty$.
- Für $p < 1$ ist das oben definierte $\|\cdot\|_p$ keine Norm mehr.

16.2.5 Aufgabe: Man skizziere die „Einheitskreise“
$$K_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p = 1\}$$
in den Fällen $p = 1, 2, 3, \infty$, sowie im Fall $p = \frac{1}{2}$ (hier ist die Funktion $x \mapsto \|x\|_p$ keine Norm mehr).

16.3. Skalarprodukte

16.3.1 Motivation: Wie misst man Winkel zwischen Vektoren?

16.3.2 Definition: Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (über $\mathbb{C}$ sieht die Definition etwas anders aus). Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung
$$V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$
mit folgenden Eigenschaften:

1. Definitheit: Für alle $x \in V$ gilt
$$\langle x, x\rangle \quad \begin{cases} > 0 & x \neq 0\,, \\ = 0 & x = 0\,. \end{cases}$$
2. Bilinearität: Für alle $x, y, u, v \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt
$$\langle x + \alpha y, u + \beta v\rangle = \langle x, u\rangle + \alpha\langle y, u\rangle + \beta\langle x, v\rangle + \alpha\beta\langle y, v\rangle\,.$$
3. Symmetrie: Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

Beispiele

- Am wichtigsten ist für uns das Euklidische Skalarprodukt (ESP)
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$
- Ein anderes Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ wäre z.B.
$$\langle x, y\rangle_\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i\,, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$
für beliebige positive reelle Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ oder noch allgemeiner
$$\langle x, y\rangle_A := \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_i y_i\,, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$
für eine symmetrisch positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (A ist symmetrisch und alle Eigenwerte sind positiv).
- Sei $V = C^0([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ ist „stetig“$\}$.
Ein für die (fortgeschrittene) Analysis sehr wichtiges Skalarprodukt auf V ist dann
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,, \quad f, g \in C^0([0,1])\,.$$
Auf diesem Skalarprodukt basiert zum Beispiel die sogenannte Fourier-Analysis.

16.3.3 Bemerkung: Jedes Skalarprodukt induziert (=definiert) eine zugehörige Norm mittels
$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}\,.$$

Beweis Die Definitheit von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ impliziert die Definitheit von $\|\cdot\|$, und $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ folgt aus der Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung wird im nächsten Satz gezeigt.

16.3.4 Bemerkung: Umgekehrt kann man nicht zu jeder Norm ein passendes Skalarprodukt finden. So ist beispielsweise die Euklidische Norm unter den p-Normen im $\mathbb{R}^n$ im Fall $n > 1$ die einzige, die von einem Skalarprodukt herrührt (siehe Übung).

16.3.5 Eigenschaften: Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem VR V und $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ die zugehörige Norm. Dann gilt für alle $x, y \in V$

1. Zwei Verallgemeinerungen des Satzes von Pythagoras:
   a) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
   b) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.

   Bemerkung: Wenn $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet und man $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| \cos \sphericalangle(x, y)$ ausnützt, ist (b) der Kosinussatz im Dreieck.
2. $|\langle x, y \rangle| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$.
3. Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$.
4. Dreiecksungleichung: $\|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
5. Umgekehrte Dreiecksungleichung: $\|x\| \geqslant \|y\| - \|x \pm y\|$.
6. Die Parallelogrammgleichung*
   $$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$
   Diese Beziehung ist gleichzeitig auch ein Test, ob eine Norm von einem Skalarprodukt herrührt.
7. Die Beziehung
   $$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$
   Anwendung: Wenn $\|\cdot\|$ also zu einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gehört, so kann man dieses über seine Norm $\|\cdot\|$ ausdrücken. (Allerdings hätte man dies auch schon mit Hilfe der ersten beiden Gleichungen machen können.)

Beweis

1. Ausmultiplizieren und Ausnutzen von Bilinearität und Symmetrie.
2. Folgt aus Punkt 1 wegen $\|x \pm y\|^2 \geqslant 0$.
3. Wenn $x = 0$ oder $y = 0$, so ist die Aussage klar. Andernfalls haben die Vektoren $\hat{x} := \|x\|^{-1}x$ und $\hat{y} := \|y\|^{-1}y$ die Norm 1, so dass gilt
   $$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle \leqslant \|x\|\|y\| \underbrace{(\frac{1}{2}\|\hat{x}\|^2 + \frac{1}{2}\|\hat{y}\|^2)}_{=1} = \|x\|\|y\| .$$

*Frage/Übung: Warum heißt das wohl so?

4. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \|x \pm y\|^2 &= \|x\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

   und ziehen die Wurzel.

5. Klar.

6. Addieren der Gleichungen aus Punkt 1

7. Subtrahieren der Gleichungen aus Punkt 1.

17. Folgen und Reihen

17.1. Folgen

17.1.1. Definition

17.1.1 Definition: Es sei $X \neq \varnothing$ eine beliebige Menge. Eine Folge (x_n) mit Werten in X ist einfach eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to X\,, \quad n \mapsto x_n$$

Man bezeichnet sie kurz als (x_n) oder genauer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Hin und wieder schreibt man sie auch als „unendliches" Tupel $(x_1, x_2, \ldots)$. Die Folgenglieder x_n können dabei durch eine einfache explizite Vorschrift $x_n = Funktion(n)$ gegeben sein, oder aber auch durch eine rekursive Vorschrift der Form $x_n = Funktion(n, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Vorstellung

- Am besten stellt man sich $\mathbb{N}$ als diskrete Zeit vor. Auch in praktischen Beispielen hat es oft diese Bedeutung.
- Der wichtigste Werteraum für Folgen ist $X = \mathbb{R}$. Gut bildlich vorstellen kann man sich aber auch $X = \mathbb{R}^2$.

Beispiele

- Wenn man den Kontostand K_n eines Girokontos am Ende des n-ten Werktags seit Einrichtung des Kontos aufzeichnet, ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.
- Ein Aktienkurs, der zu den Zeiten $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ (Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$) gemessen wird, liefert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wieder sind beides Folgen in $\mathbb{R}$ (reellwertige Folgen).
- Wenn man die Folgen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kombiniert, so ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := \begin{pmatrix} t_n \\ A_n \end{pmatrix}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$.
- Die Folge $x_n = n!$ ist eine Folge in $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$).
- $x_n = \frac{1}{n}$ ist eine Folge in $\mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$,$\mathbb{C}$).
- $x_n = \boldsymbol{i}^n$ ist eine Folge in $\mathbb{C}$.

- Zu jedem $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist
$$x_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \frac{x_{n-1}}{2} + \frac{a}{2x_{n-1}} & n > 1 \end{cases}$$
eine (rekursiv definierte) Folge in $\mathbb{R}$, welche $\sqrt{a}$ approximiert.
- Zu einem festen Anfangswert $a \in \mathbb{N}$ sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge
$$x_n = \begin{cases} a & n = 1 \\ \frac{x_{n-1}}{2} & n > 1 \wedge (x_{n-1} \text{ gerade}) \\ 3x_{n-1} + 1 & n > 1 \wedge (x_{n-1} \text{ ungerade}) \end{cases}$$
Ob für jedes $a \in \mathbb{N}$ die so definierte Folge irgendwann mit der zyklischen Wiederholung von $4 \to 2 \to 1$ endet, ist unbekannt.

17.1.2 Bezeichnung: In einfachen Fällen schreibt man oft auch nur die Definition der Folgenglieder, so zum Beispiel „Wir betrachten die Folge $x_n = \frac{1}{n}$“, anstelle von „Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Folgenglieder durch $x_n = \frac{1}{n}$ definiert sind“. Diese besonders einfache Schreibweise wird oft verwendet (so auch bereits in einigen der vorstehenden Beispiele).

17.1.3 Bemerkung: Manchmal ist es praktisch, die Indizierung bei 0 oder einer anderen ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z}$ beginnen zu lassen. Dann verwendet man anstelle von $\mathbb{N}$ z.B. $\mathbb{N}_0$ oder die Menge $\{k, k+1, \ldots\}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ als Indexmenge und schreibt dafür $(x_n)_{n\geqslant k}$ oder $(x_n)_{n=k}^{\infty}$.

17.1.2. Konvergenz

17.1.4 Motivation: Wichtig ist oft das Verhalten einer Folge (x_n) für große $n \in \mathbb{N}$ (also das „Langzeitverhalten“, wenn $\mathbb{N}$ die Bedeutung einer diskreten Zeit hat), z.B.

- x_n wird betragsmäßig beliebig groß
- x_n wird betragsmäßig beliebig klein
- x_n springt zwischen verschiedenen Werten hin und her
- x_n kommt einem Punkt x_* immer näher

Insbesondere die letzte Eigenschaft wollen wir nun mathematisch präzisieren.

Voraussetzung Wir müssen Abstände messen können und setzen daher in diesem Abschnitt voraus, dass alle betrachteten Folgen Werte in einem metrischen Raum X haben mit der Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$. Die einfachsten Beispiele dafür sind $X = \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Abstandsfunktion $d(x, y) = |x - y|$ oder $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Abstandsfunktion $d(x, y) = \|x - y\|$, wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet.

Empfehlung Bei den folgenden allgemein formulierten Sätzen sollte man sich die Aussagen im sehr anschaulichen Fall $\mathbb{R}^2$ versehen mit der Euklidischen Metrik klarmachen.

17.1.5 Definition: Es sei (x_n) eine Folge mit Werten in X. Dann konvergiert (x_n) gegen $x_* \in X :\iff$ zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_*) < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$.
Wenn die Folge (x_n) gegen x_* konvergiert, so schreiben wir

$$x_n \to x_* \quad (n \to \infty)$$

x_* nennt man den Grenzwert oder Limes der Folge (x_n) und schreibt daher auch

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \,.$$

Die Folge (x_n) heißt konvergent (in X), wenn es ein $x_* \in X$ gibt, so dass $x_n \to x_*$, ansonsten heißt sie divergent.

17.1.6 Bezeichnung:

- Mit logischen Symbolen könnte man die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_* wie folgt formulieren: *

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 : d(x_n, x_*) < \varepsilon \,.$$

- Dieser Ausdruck ist so zu verstehen, dass n_0 von ε abhängen darf. Daher ist auch die Wahl einer geeigneten Funktion $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ein wichtiger Bestandteil von Konvergenzbeweisen.

17.1.7 Interpretation: Wenn man mit

$$B_\varepsilon(x_*) := \{x \mid d(x, x_*) < \varepsilon\}$$

die ε-Kugel† um x_* bezeichnet, so bedeutet $x_n \to x_*$, dass n_0 so gewählt werden kann, dass die „Restfolge“ $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ in $B_\varepsilon(x_*)$ verläuft.

17.1.8 Bezeichnung: Man beachte auch, dass in der Analysis ε und auch δ fast immer als Bezeichnung für „kleine“ reelle Zahlen verwendet werden, wohingegen $k, l, m, n, n_0, \ldots$ wie bisher natürliche Zahlen bezeichnen.

17.1.9 Beispiel: Es sei $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge konvergiert gegen $x_* = 1$, weil für gegebenes $\varepsilon > 0$

$$d(x_n, 1) = |1 - \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

falls $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Somit können wir $n_0 := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ wählen, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Rundung nach unten auf die nächste ganze Zahl bezeichnet.

---

*Bemerkung: Der Übersichtlichkeit halber könnte man solche komplizierten logischen Ausdrücke auch mit einer geeigneten Indentierung schreiben, ähnlich wie beim Programmieren:

$\forall \varepsilon > 0 :$
  $\exists n_0 \in \mathbb{N} :$
    $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$:
      $d(x_n, x_*) < \varepsilon$.

Das ist allerdings unüblich, weil es zu viel Platz kostet.

†Das B kommt vom englischen “ball”. Manchmal nennt man $B_\varepsilon(x_*)$ auch „ε-Umgebung“ um x_*.

17.1.10 Bemerkung: In der Definition der Folgenkonvergenz ist es nicht wirklich wichtig, ob $n \geqslant n_0$ oder $n > n_0$ geschrieben wird. Wenn Konvergenz in der einen Form gegeben ist, folgt sie auch in der zweiten und umgekehrt (dann mit einem neuen $\tilde{n_0} = n_0 + 1$). Auch ist es oft praktisch, wenn man statt $n_0 \in \mathbb{N}$ einfach einen Ausdruck $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ angeben darf (dann spart man sich die Rundung). So könnte man im vorstehenden Beispiel mit diesen Vereinfachungen einfach schließen mit „für alle $n > \frac{1}{\varepsilon}$“ (wenn man genauer sein will, mit $n > n_0(\varepsilon) := \frac{1}{\varepsilon}$). Diese letztere Vereinfachung funktioniert deshalb, weil es für jede reelle Zahl eine größere natürliche Zahl gibt (sog. Archimedisches Prinzip).

Beobachtung Die Konvergenz einer Folge (x_n) in einem beliebigen metrischen Raum (X, d) gegen ein $x_* \in X$ ist offenbar gleichbedeutend mit der Konvergenz der Abstände

$$\delta_n := d(x_n, x_*)$$

in $\mathbb{R}$ gegen 0 (bezüglich der Betragsmetrik $d_{\mathbb{R}}(x, y) := |x - y|$ in $\mathbb{R}$).

17.1.11 Bezeichnung: Eine gegen 0 konvergente reellwertige Folge nennen wir Nullfolge.

Beispiele Konvergente Folgen sind:

- Die konstante Folge $x_n = 1$ in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen den Punkt 1, weil für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, dass
$$d(x_n, 1) = |1 - 1| = 0 < \varepsilon\,, \quad \forall n \geqslant 1\,.$$
Folglich kann man sogar $n_0 = 1$ für beliebige ε wählen.
- Ebenso konvergiert jede konstante Folge $x_n = x_* \in X$ in einem metrischen Raum X gegen x_*.
- Wir betrachten die Folge
$$x_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \quad n \in \mathbb{N}$$
in $X = \mathbb{R}^2$ (Euklidischer Abstand). Diese Folge konvergiert dann gegen $x_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, weil für $\varepsilon > 0$ gilt
$$d(x_n, x_*) = \left\| \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{n}\,.$$
Hieraus ersieht man $d(x_n, x_*) < \varepsilon$, genau dann wenn $n > \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$.

17.1.12 Bemerkung:
- $x_n \to x_*$ ist eine qualitative Aussage, die nichts darüber aussagt, wie „schnell“ die Konvergenz ist.
- In Anwendungen wird oft auch eine halbwegs gute Abschätzung von $n_0(\varepsilon)$ gewünscht, weil ein großes n_0 oft eine lange Wartezeit und/oder große Kosten bedeutet.

- Dabei muss man beachten, dass der *bestmögliche* Wert von $n_0(\varepsilon)$ oft sehr schwierig zu berechnen ist, wie zum Beispiel, wenn man die Konvergenz der Folge

$$x_n = \frac{n^2 - 3n + 4}{2n^3 + 3n^2 - 2n + 1}$$

gegen 0 nachweisen will.

- Für die qualitative Konvergenzaussage ist allerdings die genaue Größe von n_0 unerheblich, so dass man grob abschätzen kann als

$$|x_n| = \frac{n^2 - 3n + 4}{2n^3 + 3n^2 - 2n + 1} \overset{n^2 \geqslant n}{\leqslant} \frac{n^2 - 3n + 4}{2n^3 + n^2 + 1} < \frac{n^2 + 4}{2n^3} \overset{n^2 \geqslant 1}{\leqslant} \frac{5n^2}{2n^3} \leqslant \frac{5}{2n}\,.$$

- Wenn wir daher sichern

$$\frac{5}{2n} \leqslant \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{5}{2\varepsilon}\,.$$

so erhalten wir für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon) := \frac{5}{2\varepsilon}$:

$$|x_n| < \frac{5}{2n} \leqslant \varepsilon\,.$$

- Natürlich gibt es noch (unendlich) viele weitere zulässige Ausdrücke für $n_0(\varepsilon)$, welche man auf unterschiedlichen Wegen erhalten kann.

- Das Finden guter Kompromisse zwischen Schwierigkeit und Güte derartiger Abschätzungen erfordert viel Erfahrung und Übung!

17.1.13 Übung: Es sei $y_n = \dfrac{n^2 - 3n + 4}{n^2 - 2n + 2}$. Finden Sie zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass $|y_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n > n_0(\varepsilon)$.

17.1.14 Satz: Eine Folge (x_n) in (X, d) besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis Angenommen, es gäbe zwei Grenzwerte $a, b \in X$. Dann gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_a \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_a$ und ein $n_b \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, b) < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_b$. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann aber für ein beliebiges $n \geqslant \max(n_a, n_b)$:

$$d(a, b) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, b) \leqslant 2\varepsilon\,.$$

Weil ε beliebig war, muss auch $d(a, b)$ beliebig klein sein. Das geht aber nur, wenn $d(a, b) = 0$ ist, woraus (Metrikeigenschaft!) $a = b$ folgt.

17.1.3. Häufungspunkte

17.1.15 Motivation: Die durch $x_n = (-1)^n$ definierte reellwertige Folge (x_n) springt zwischen den Punkten 1 und -1 hin und her.

17.1.16 Definition: Ein Punkt x_* heißt Häufungspunkt der Folge (x_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geqslant n_0$ gibt mit $d(x_n, x_*) < \varepsilon$.

17.1.17 Übung: Schreiben Sie die Bedingung für einen Häufungspunkt ausschließlich mit mathematischen Symbolen und vergleichen Sie sie mit der Grenzwertdefinition.
HINWEIS: Zur besseren Lesbarkeit können Sie die Aussage nach einem Quantor auch in eine neue Zeile setzen und einrücken (indentieren).

Beispiele

- Die Folge $x_n = (-1)^n$ hat die zwei Häufungspunkte 1 und -1.
- Die Folge $x_n = n$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$.
- Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0 und hat daher gemäß dem folgenden Satz den Punkt 0 als einzigen Häufungspunkt.
- Die Folge $x_n = \boldsymbol{i}^n$ in $\mathbb{C}$ hat die Häufungspunkte $1, \boldsymbol{i}, -1, -\boldsymbol{i}$.
- Wenn $\alpha := e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ mit einem Winkel φ, der kein rationales Vielfaches von π ist, so ist jeder Punkt des komplexen Einheitskreises Häufungspunkt der Folge $x_n = \alpha^n$.
- Wenn $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist, so ist jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt dieser Folge.

17.1.18 Satz: Der Grenzwert x_* einer konvergenten Folge (x_n) ist ihr einziger Häufungspunkt.

Beweis ‡ Man sieht leicht aus den Definitionen, dass ein Grenzwert auch ein Häufungspunkt ist (die GW-Bedingung impliziert die HP-Bedingung). Angenommen, es gäbe einen zusätzlichen Häufungspunkt $y_* \neq x_*$. Aus den Metrikeigenschaften ergibt sich dann $\delta := d(x_*, y_*) > 0$. Nun setzt man $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$ und wählt $n_0 := n_0(\varepsilon)$ so, dass $d(x_n, x_*) < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$. Dann gilt aber für alle $n \geqslant n_0$, dass

$$d(x_n, y_*) \overset{\text{umgekehrte Dreiecksungleichung}}{\geqslant} d(x_*, y_*) - d(x_n, x_*) > \delta - \varepsilon = \varepsilon\,.$$

Folglich kann y_* kein Häufungspunkt sein.

17.1.4. Teilfolgen

Idee Eine Teilfolge entsteht aus einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ indem man unendlich viele Folgenglieder mit wachsenden Indices auswählt.

17.1.19 Definition: Eine Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (oder $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) heißt monoton wachsend, wenn für $m < n$ auch $\tau(m) \leqslant \tau(n)$ gilt. Sie heißt streng monoton wachsend, wenn für $m < n$ die strikte Ungleichung $\tau(m) < \tau(n)$ gilt.

17.1.20 Bemerkung: Offenbar gilt für eine streng monoton wachsende Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dass $\tau(n) \geqslant n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

‡VORSCHLAG: Malen Sie sich ein Bild!

17.1.21 Definition: Eine Teilfolge einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine neue Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $y_n = x_{\tau(n)}$ mit einer streng monoton wachsenden Funktion $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Man bezeichnet diese Teilfolge dann auch mit $(x_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiele Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ so ergibt sich

- für $\tau(n) = 2n$ die Teilfolge $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_4, x_6 \ldots)$
- für $\tau(n) = 2n - 1$ die Teilfolge $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \ldots)$
- und für $\tau(n) = 10^n$ die Teilfolge $(x_{10^n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{10}, x_{100}, x_{1000}, \ldots)$.

17.1.22 Anwendung: Man kann verschiedene Charakteristika von komplizierten Folgen durch die Auswahl von Teilfolgen aufzeigen.

17.1.23 Satz: x_* ist Häufungspunkt der Folge (x_n) $\iff$ es gibt eine gegen x_* konvergierende Teilfolge von (x_n).

Beweis

$\Rightarrow$ Wir definieren die Teilfolge über die Funktion τ rekursiv wie folgt: Wir setzen $\tau(1) := 1$ und für $n > 1$ wählen wir $\tau(n) \geqslant \tau(n-1) + 1$ mit $d(x_{\tau(n)}, x_*) < \varepsilon = 2^{-n}$ (das geht, weil x_* HP von (x_n) ist). Dann ist $(x_{\tau(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine (sogar sehr schnell) gegen x_* konvergierende Folge.

$\Leftarrow$ Als Grenzwert ist x_* auch Häufungspunkt der Teilfolge $(x_{\tau(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Somit gibt es für beliebige $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n \geqslant n_0$ mit $d(x_{\tau(n)}, x_*) < \varepsilon$. Dies zeigt aber wegen $\tau(n) \geqslant n \geqslant n_0$ die Häufungspunkteigenschaft von x_* bezüglich der Ursprungsfolge (x_n).

17.1.24 Beispiel: Wenn $x_n = (-1)^n$, so konvergiert die Teilfolge $y_n = x_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ trivial gegen 1 und $z_n = x_{2n-1} = -1$ trivial gegen -1.

17.1.25 Satz: Wenn x_* der Grenzwert der Folge (x_n) ist, so konvergiert jede beliebige Teilfolge $(x_{\tau(n)})$ auch gegen x_*.

Beweis Für $(y_n := x_{\tau(n)})$ kann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wegen $\tau(n) \geqslant n$ dasselbe $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt werden wie für (x_n), um $d(y_n, x_*) < \varepsilon$ für alle $n \geqslant n_0$ zu garantieren.

17.1.5. Vollständigkeit

Frage Kann man ohne Kenntnis des Grenzwerts sehen, ob eine Folge konvergent ist?

Beobachtung Jede konvergente Folge hat die sogenannte Cauchy-Eigenschaft:

(CE-1) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n, m \geqslant n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Beweis Wenn (x_n) gegen einen Grenzwert x_* konvergiert, gibt es zu $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, x_*) < \tilde{\varepsilon}$ für alle $n > n_0$. Dann gilt aber auch

$$\forall n, m \geqslant n_0 : \; d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_*) + d(x_*, x_m) < 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \,.$$

17.1.26 Bemerkung: Äquivalent zur obigen Definition der Cauchy-Eigenschaft ist

(CE-2) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geqslant n_0 : d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$.

Beweis

- *(CE-1)* $\Rightarrow$ *(CE-2)* Setze $m = n_0$.
- *(CE-2)* $\Rightarrow$ *(CE-1)* folgt aus der Dreiecksungleichung: Sei ε für *(CE-1)* vorgegeben. Dann wählt man n_0, so dass *(CE-2)* mit $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist und schätzt für $n, m \geqslant n_0$ ab:
$$d(x_n, x_m) < d(x_n, x_0) + d(x_m, x_0) < 2\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \,.$$

17.1.27 Definition: Eine Folge heißt Cauchy-Folge, wenn sie die Cauchy-Eigenschaft erfüllt.

17.1.28 Interpretation: Cauchy-Folgen lassen sich offenbar zur Approximation verwenden: Durch Vergrößerung von n_0 lässt sich der „Fehler“ beliebig klein machen.

Frage Sind alle Cauchy-Folgen konvergent?

Antwort Leider nein. Eine Cauchy-Folge kann nämlich „Löcher“ im metrischen Raum X approximieren.

17.1.29 Beispiel: Wir betrachten für $a \in \mathbb{N}$ die Folge

$$x_1 = 1 \,, \quad x_n = \frac{x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}}{2} \quad (n > 1)$$

im metrischen Raum $X = \mathbb{Q}$. Diese approximiert für gegebenes $a \in \mathbb{N}$ den Wert $\sqrt{a}$, welcher aber nur dann in $\mathbb{Q}$ liegt, wenn a eine Quadratzahl ist.

17.1.30 Beispiel: Wenn man $X =]0, 1]$ wählt, so approximiert die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ einen nicht in X liegenden Grenzwert. Sie ist eine Cauchy-Folge (weil sie ja in $\mathbb{R}$ konvergiert), die aber nicht gegen einen Grenzwert aus X konvergiert.

17.1.31 Definition: Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn *jede* Cauchy-Folge in X gegen einen Grenzwert $x_* \in X$ konvergiert.

Beispiele

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$ (versehen mit einer beliebigen Norm) sind vollständig.
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^n$ oder $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind nicht vollständig.

17.1.32 Folgerung: Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ konvergieren immer.

Frage Was tun, wenn ein Raum nicht vollständig ist?

17.1.33 Definition: (X, d) sei ein metrischer Raum. Dann ist die Vervollständigung $\overline{X}$ von X definiert als

$$\overline{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (x_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } X\}/\sim$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ wie folgt definiert ist:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Longleftrightarrow \quad \delta_n := d(x_n, y_n) \to 0 \ (n \to \infty)\,.$$

17.1.34 Anwendung: $(\mathbb{R} := \overline{\mathbb{Q}})$

- Diese Vorgehensweise ist eine Verallgemeinerung der früheren Definition der reellen Zahlen als unendliche Dezimalzahlen.
- Der Zusammenhang ist einfach, dass eine unendliche Dezimalzahl einer *bestimmten* Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ entspricht, so z.B. $x = 1.4142135\ldots$ der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \ldots)$. Diese Folge ist ein Repräsentant ihrer Äquivalenzklasse.
- Die Dualdarstellung oder die Newton-Approximation von $\sqrt{2}$ wären einfach weitere Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse.
- Man beachte, dass auch bei der früheren Dezimaldarstellungsdefinition bereits Mehrdeutigkeiten identifiziert werden mussten, wie z.B. $1.1\overline{9} = 1.2\overline{0}$.

17.1.35 Anwendung: $(L^p([0,1]) := \overline{C^0([0,1])}^{\|\cdot\|_{L^p([0,1])}})$

- Wir betrachten den Raum

  $$C^0([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ ist „stetig“}\}$$

  mit den Normen

  $$\|f\|_{L^p([0,1])} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{dx}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty$$

  wozu die Metrik $d_p(f,g) = \|f - g\|_{L^p([0,1])}$ gehört.
- Die Vervollständigung von $C^0([0,1])$ bezüglich diesen Metriken liefert dann die für die fortgeschrittene Analysis wichtigen Funktionenräume

  $$L^p([0,1]) := \overline{C^0([0,1])}^{\|\cdot\|_{L^p([0,1])}}\,.$$

17.2. Folgen in $\mathbb{R}$

Erinnerung Die Konvergenz einer Folge (x_n) in einem beliebigen metrischen Raum (X, d) gegen ein $x_* \in X$ ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Abstände $\delta_n := d(x_n, x_*)$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 (bezüglich der Abstandsfunktion $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |x - y|$ in $\mathbb{R}$). Auch daher ist das Studium reellwertiger Folgen von besonderem Interesse.

17.2.1 Bezeichnung: Eine gegen 0 konvergente reellwertige Folge nennen wir Nullfolge.

Voraussetzung In diesem Abschnitt sei (x_n) immer eine Folge in $\mathbb{R}$ (versehen mit der Metrik $d(x, y) := |x - y|$).

17.2.2 Satz: (Vergleichssatz für Nullfolgen) Wenn (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ und (y_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}_0^+$ ist, und es $N \in \mathbb{N}$ und $C \geqslant 0$ gibt, so dass gilt $|x_n| \leqslant C y_n$ für alle $n \geqslant N$, so ist auch (x_n) eine Nullfolge.

Beweis Zu $\varepsilon > 0$ findet man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geqslant n_0 : y_n < \tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{C}$, was dann $\forall n \geqslant \tilde{n_0} := \max(n_0, N) : |x_n| < \varepsilon$ impliziert.

17.2.3 Folgerung: Wir wissen, dass $y_n = \frac{1}{n}$ eine Nullfolge ist. Hieraus kann man folgern, dass auch $x_n = \frac{3(-1)^n}{n^2}$ eine Nullfolge ist. Dazu kann man beispielsweise $C = 3$ und $N = 1$, aber alternativ auch die Kombination $C = 1$ und irgendein $N \geqslant 3$ wählen.

17.2.1. Rechenregeln für Grenzwerte

17.2.4 Satz: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n) + (\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.
2. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.
4. Wenn $0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

17.2.5 Bemerkung: Die ersten beiden Eigenschaften kann man als Linearität der Abbildung

$$\lim : \mathcal{C} \to \mathbb{R}\,, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$$

ansehen, wobei $\mathcal{C}$ den Vektorraum der konvergenten reellwertigen Folgen bezeichnet.

Beweis Beispielhaft beweisen wir nur die dritte Eigenschaft: Wenn a_* und b_* die Grenzwerte von (a_n) und (b_n) bezeichnen, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_*| < \delta$ und

$|b_n - b_*| < \delta$ für $n \geqslant n_0$. Daraus errechnen wir

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a_* b_*| &= |a_n b_n - a_* b_n + a_* b_n - a_* b_*| \\ &\leqslant |a_n b_n - a_* b_n| + |a_* b_n - a_* b_*| \\ &= |(a_n - a_*) b_n| + |a_*(b_n - b_*)| \\ &\leqslant |a_n - a_*|(|b_*| + \delta) + |a_*||b_n - b_*| \\ &= \delta(|a_*| + |b_*| + \delta)\,. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kann man nun $\delta < 1$ wählen als

$$\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{|a_*| + |b_*| + 1})$$

so dass für das entsprechende $n_0 = n_0(\delta)$ gilt

$$|a_n b_n - a_* b_*| \leqslant \frac{\varepsilon}{|a_*| + |b_*| + 1}(|a_*| + |b_*| + 1) = \varepsilon\,.$$

Dies beweist die Konvergenz der Produktfolge gegen $a_* b_*$.

17.2.6 Anwendungen:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = (\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n})^k = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 2n^2 + 1} = 2$, wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 5n + 1}{n^3 + 2n^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3})}{\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3})} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 2$$

- Allgemein sei $p(n) = a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ ein Polynom k-ten Grades und $q(n) = b_l n^l + \ldots + b_1 n + b_0$ ein Polynom l-ten Grades. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^{k-l}\, \frac{a_k + \ldots + a_0 n^{-k}}{b_l + \ldots + b_0 n^{-l}} = \frac{a_k}{b_l} \left(\lim_{n\to\infty} n^{k-l}\right)\,,$$

  woraus man sieht, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)\,, \\ \frac{a_k}{b_k} & \operatorname{grad}(p) = k = \operatorname{grad}(q)\,, \\ \text{divergiert} & \operatorname{grad}(p) > \operatorname{grad}(q)\,. \end{cases}$$

17.2.7 Bemerkung:

- Die Grenzwertsätze sind Spezialfälle eines allgemeinen Prinzips.

- Für stetige Funktionen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) gilt, dass für beliebige konvergente Folgen (x_n) in X gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$

  (So kann man Stetigkeit sogar definieren!)

- Wenn man daher weiß, dass eine Funktion f stetig ist, kann man dieses Wissen auf die Konvergenz von Folgen anwenden!

- Die Grenzwertsätze folgen dann einfach aus der Stetigkeit der Rechenoperationen *Addition*, *Multiplikation* und *Division* in $\mathbb{R}$ (wobei letztere nur stetig ist, wenn der Nenner nicht 0 ist).

Beispiele Wir zeigen später, dass unter anderem Betragsfunktion, Wurzelfunktionen und die Exponentialfunktion stetig sind. Hieraus können wir folgern:

- Weil die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist, gilt für jede konvergente reellwertige Folge x_n:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n| = |x_*|\,.$$

- Aus der Stetigkeit von $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $\mathbb{R}_0^+$ folgt zum Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{2n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

- Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt für beliebiges $a \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \exp(\frac{\ln(a)}{n}) = \exp(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(a)}{n}) = \exp(0) = 1$$

- Es gilt sogar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, was man wie folgt beweisen kann:

  Die Stetigkeit der Exponentialfunktion liefert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n}}$$

  Wir werden aber in einer Übungsaufgabe auch zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0\,,$$

  woraus die Behauptung folgt.

17.2.8 Satz: x_n sei eine konvergente Folge mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n = x_*$. Dann gilt

$$\forall n : x_n \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x_* \geqslant 0\,.$$

Dasselbe gilt, wenn man beide $\geqslant$-Zeichen durch $\leqslant$ ersetzt.

Beweis Wenn $x_* < 0$ wäre, so ist für die Wahl $\varepsilon := |x_*| > 0$ die Aussage $d(x_n, x_*) < \varepsilon$ offenbar sogar für alle $n \in \mathbb{N}$ falsch.

17.2.9 Bemerkung: Am Beispiel $x_n = \frac{1}{n}$ sieht man, dass die strikte Ungleichung $x_n > 0$ bei der Limesbildung nicht erhalten bleiben muss!

17.2.10 Verallgemeinerung: Auch folgende Variationen des Satzes sieht man leicht:

- Man kann im Satz auch $x_n \geqslant a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ fordern, und erhält dann $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant a$.
  BEWEIS: Man wende den Ursprungssatz auf die Folge $y_n := x_n - a$ an.
- Wenn man zwei konvergente Folgen (a_n) und (b_n) betrachtet, die $a_n \leqslant b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n$.
  BEWEIS: Man wende den Ursprungssatz auf die Folge $x_n := b_n - a_n$ an.

17.2.11 Folgerung: (Sandwich-Theorem) Es seien a_n, b_n, c_n Folgen, die für alle $n \in \mathbb{N}$ (oder allgemeiner: für alle $n \geqslant N$) die Beziehung

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

erfüllen. Ferner gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Dann folgt auch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Beweis Wenn man $n_1 \geqslant N$ so wählt, dass $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n_1$, und $n_2 \geqslant N$ so, dass $|c_n - a| \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n_2$, so gilt für $n > n_0 := \max(n_1, n_2)$:

$$a - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \leqslant a + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |b_n - a| \leqslant \varepsilon\,.$$

17.2.2. Monotone und beschränkte Folgen

17.2.12 Motivation:

- Eine Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn das Cauchy-Kriterium erfüllt ist.
- Leider ist das Cauchy-Kriterium oft nur umständlich nachzuweisen.
- Wir sind daher an einfacheren Kriterien interessiert, die sich auf spezielle Folgen (insbesondere in $\mathbb{R}$) anwenden lassen.

17.2.13 Definition: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

- nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_n \leqslant M$
- nach unten beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_n \geqslant M$
- beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}, M \geqslant 0$ gibt mit $|x_n| \leqslant M$
- monoton wachsend, wenn $x_n \leqslant x_{n+1}$
- monoton fallend, wenn $x_n \geqslant x_{n+1}$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

17.2.14 Satz: Sei $M \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$.

- Wenn (x_n) monoton wachsend und nach oben durch M beschränkt ist, konvergiert es gegen ein $x_* \leqslant M$.
- Wenn es monoton fallend und nach unten durch M beschränkt ist, konvergiert es gegen ein $x_* \geqslant M$.

Beweisskizze Wenn (x_n) nicht konvergierte, wäre es (wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$) keine Cauchy-Folge und müsste für ein $\varepsilon > 0$ Distanzen $d(x_n, x_m) > \varepsilon$ für beliebig große Kombinationen $m, n \in \mathbb{N}$ aufweisen. Wegen der Monotonie kann die Folge dann aber nicht beschränkt sein.

17.2.15 Verallgemeinerung: Bei Grenzwertaussagen spielt generell nur eine Rolle, was für große n geschieht. Der gerade gezeigte Satz bleibt daher auch dann richtig, wenn man die Monotonie nur ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ verlangt.

17.2.16 Folgerung: Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{C}$). Falls es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $0 \leqslant q < 1$ gibt mit

$$\forall n \geqslant N: \quad |x_n| \neq 0 \ \wedge \ \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} \leqslant q\,,$$

so ist (x_n) eine Nullfolge.

Beweis Wir zeigen, dass die Folge $y_n := |x_n|$ eine Nullfolge ist. Für $n \geqslant N$ ist die Folge y_n offenbar streng monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt. Sie konvergiert daher gegen einen Grenzwert $y_* \in \mathbb{R}_0^+$. Falls $y_* \neq 0$, so erhielte man einen Widerspruch, indem man n so groß wählt, dass $y_n < y_*(1 + \frac{1-q}{2})$. Im nächsten Schritt wäre dann nämlich $y_{n+1} \leqslant qy_n < y_*$. Das letzte Argument ginge auch eleganter über den Grenzwertübergang

$$y_* = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty} qy_n = q \lim_{n\to\infty} y_n = qy_*\,,$$

woraus man mit $q < 1$ auch sofort $y_* = 0$ schließen kann.

17.2.17 Übung: Eine weitere Beweismöglichkeit des Satzes ist die folgende: Es gilt für alle $n \geqslant N$ offenbar $y_n \leqslant y_N q^{n-N}$. Wenn man die Kenntnis des natürlichen Logarithmus voraussetzt, kann man hieraus zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \geqslant N$ berechnen, so dass für alle $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ gilt $y_n < \varepsilon$.
Wie sieht $n_0(\varepsilon)$ genau aus?

17.2.18 Bemerkungen:

- Satz und Beweis bleiben richtig für Folgen in beliebigen normierten Vektorräumen (z.B. $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm), wenn man den Absolutbetrag durch die Norm ersetzt.
- Vorsicht! Die einfachere Bedingung $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$ garantiert noch nicht, dass (x_n) eine Nullfolge ist! Ein Gegenbeispiel ist die Folge $x_n = \frac{n+1}{n}$, welche gegen 1 konvergiert.

- Die Quotientenbedingung ist insbesondere erfüllt, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q \quad \text{für ein } 0 \leqslant q < 1\,.$$

BEWEIS: Genau wie im Satz, außer dass man am Ende den Grenzwertsatz für das Produkt zweier Folgen verwendet, anstatt dem Grenzwertsatz für die Skalierung einer Folge.

- Die Quotientenbedingung wird uns bald wieder begegnen: Sie ist nämlich so stark, dass sie die Konvergenz der „summierten Folge“ (a.k.a. „Reihe“) $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$ erzwingt.

17.2.19 Anwendungen:

- Die Folge $x_n = n^p z^n$ ist für alle $p \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ eine Nullfolge, weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^p} = |z| < 1\,.$$

INTERPRETATION: Exponentielles Fallen schlägt polynomiales Wachsen.

- Die Folge $x_n = \frac{z^n}{n!}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$ eine Nullfolge, weil gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0\,.$$

Folglich kann man ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass die Bedingung des Satzes beispielsweise für $q = \frac{1}{2}$ erfüllt ist.

17.2.20 Satz: (Bolzano-Weierstraß) Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und (x_n) eine reellwertige Folge mit $x_n \in [a, b]$ für alle n. Dann besitzt (x_n) (wenigstens) einen Häufungspunkt in $[a, b]$.

Beweisskizze Wir konstruieren eine Cauchy-Teilfolge $(x_{\tau(k)})$ induktiv durch eine sogenannte Intervallschachtelung:

- Beginnend mit $a_0 = a$, $b_0 = a$, $\tau(0) = 0$ setze für $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{aligned}
h_k &:= \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} \\
\delta_k &:= h_k \cdot \begin{cases} 0 & |\{n | x_n \in [a_{k-1}, a_{k-1} + h_k]\}| = \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, \\
a_k &:= a_{k-1} + \delta_k\,, \\
b_k &:= b_{k-1} - (h_k - \delta_k)\,, \\
\tau(k) &:= \min\{n \in \mathbb{N} : (n > \tau(n-1)) \wedge (x_n \in [a_k, b_k])\}
\end{aligned}$$

- $(x_{\tau(k)})$ ist eine Cauchy-Folge, weil für beliebige $k_0 \in \mathbb{N}$ alle späteren Folgenglieder $x_{\tau(k)}$ mit $k \geqslant k_0$ im Intervall $[a_k, b_k]$ der Länge $h_k = (b-a)2^{-k_0}$ liegen.

17.2.3. Uneigentliche Konvergenz

Beobachtung Oft ist nicht nur die Konvergenz, sonderen auch das unbeschränkte Wachstum einer Folge interessant.

17.2.21 Beispiel: Wir betrachten die Folgen $A_n = n^2$ und $B_n = 2^n$. Dann gilt: A_n, B_n und $C_n = \frac{B_n}{A_n}$ wachsen unbeschränkt (exponentielles ist schneller als quadratisches Wachstum).

17.2.22 Definition:

- Wir sagen, dass $x_n \to +\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n_0 = n_0(K)$ gibt, so dass $x_n > K$ für alle $n \geqslant n_0$.
- Ebenso sagen wir $x_n \to -\infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n_0 = n_0(K)$ gibt, so dass $x_n < K$ für alle $n \geqslant n_0$.
- Statt $+\infty$ schreiben wir manchmal auch einfach ∞.

17.2.23 Bemerkung: Es ist recht einfach zu sehen, dass sich die Grenzwertsätze auch auf uneigentliche Konvergenz gegen $\pm\infty$ übertragen, wenn man folgende Rechenregeln verwendet:

1. $\infty + \infty = \infty$
2. $a + \infty = \infty$, $a \in \mathbb{R}$
3. $a - \infty = -\infty$, $a \in \mathbb{R}$
4. $\infty \cdot \infty = \infty$
5. $-\infty \cdot \infty = -\infty$
6. $\infty \cdot a = \infty$, $a > 0$
7. $\infty \cdot a = -\infty$, $a < 0$
8. $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $a \in \mathbb{R}$

Die Grenzwertsätze helfen allerdings nicht weiter, wenn sich auf der rechten Seite die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ ergeben. In diesen Fällen muss man die Folge auf der linken Seite genauer untersuchen, zum Beispiel mit dem Satz von l'Hospital, den wir später kennenlernen.

17.2.4. Supremum und Infimum

17.2.24 Definition: Eine Teilmenge $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ heißt

- nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt, d.h. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in A : x \leqslant M$.
- nach unten beschränkt, wenn es eine untere Schranke gibt, d.h. $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in A : x \geqslant m$.
- beschränkt, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.
- $M \in \mathbb{R}$ heißt Supremum oder kleinste obere Schranke von A, wenn M eine obere Schranke von A ist, und es keine kleinere obere Schranke $M' \in \mathbb{R}$ von A gibt.
- Analog definiert man das Infimum als die größte untere Schranke.

17.2.25 Bezeichnung: Man bezeichnet das Supremum einer Menge $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ als $\sup A$, das Infimum mit $\inf A$.

Beispiele

- Für $A = [0, 1]$ gilt $\sup A = 1$ und $\inf A = 0$.
- Für $A =]0, 1[$ gilt dasselbe!
- Auch für $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt dasselbe!
- Die Menge $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ besitzt keine obere Schranke und daher auch kein Supremum in $\mathbb{R}$. Manchmal sagt man dazu auch $\sup A = +\infty$. (Analog sagt man $\inf A = -\infty$ für nach unten unbeschränkte Mengen wie $A = \mathbb{Z}$.)

17.2.26 Satz: Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$. Ebenso besitzt jedes nach unten beschränkte $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Beweisidee Man konstruiert Cauchy-Folgen in A, die gegen das Supremum bzw. das Infimum konvergieren.

17.2.27 Bemerkungen: 1. Dieser Satz benötigt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$! Für $\mathbb{Q}$ als zugrundeliegenden Raum wäre er falsch, weil z.B. die beschränkte Menge

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\} \subset \mathbb{Q}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$ hätte.

2. In $\mathbb{C}$ (oder auch $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$) machen die Begriffe Supremum und Infimum wenig Sinn, weil auf diesen Mengen keine totale Ordnung auf „natürliche“ Weise definiert ist.

   GENAUER: Man kann zwar auch die komplexen Zahlen hintereinander anordnen (z.B. lexikographisch), aber keine solche Ordnung harmoniert in der von $\mathbb{R}$ gewohnten Weise mit den komplexen Rechenoperationen.

17.2.28 Definition:
- Wenn für $A \subset \mathbb{R}$ das Supremum $M := \sup A$ selbst ein Element von A ist, so nennt man M das maximale Element oder Maximum von A (Bezeichnung $M := \max A$).
- Analog nennt man ein in A liegendes Infimum minimales Element oder Minimum von A (Bezeichnung $m := \min A$).

17.2.29 Beispiel: Die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt das Supremum 1, das gleichzeitig auch ein Maximum ist. Sie besitzt das Infimum 0, aber *kein Minimum*!

17.2.5. Limes superior und Limes inferior

17.2.30 Definition:
- Das Supremum aller Häufungspunkte einer reellen Folge (x_n) nennt man den Limes superior von (x_n) und bezeichnet ihn mit $\limsup_{n\to\infty} x_n$.
- Das Infimum aller Häufungspunkte einer reellen Folge (x_n) nennt man den Limes inferior von (x_n) und bezeichnet ihn mit $\liminf_{n\to\infty} x_n$.

17.2.31 Bemerkung: Folgende alternative Charakterisierung ist möglich:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} x_n &:= \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \mid k \geqslant n\}\,,\\ \liminf_{n\to\infty} x_n &:= \lim_{n\to\infty} \inf\{x_k \mid k \geqslant n\}\,.\end{aligned}$$

Beispiele

- Für $a_n = (-1)^n$ ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.
- Für $a_n = n(-1)^n$ ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$.
- Wenn $a_n = \frac{1}{n}$, so ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0$,
- Wenn $a_n = \boldsymbol{i}^n$, so sind die Begriffe nicht definiert (weil $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper ist).

17.2.32 Bemerkungen:
- Für jede beschränkte reelle Folge (x_n) sind $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ wohldefinierte reelle Zahlen.
- Wenn man auch die uneigentlichen Limites $\pm\infty$ als Werte zulässt, sind $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n$ für beliebige reelle Folgen wohldefiniert.
- Wenn die Folge (x_n) konvergiert, so gilt

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

- Falls $\limsup_{n\to\infty} x_n = c \in \mathbb{R}$, so sind für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder x_n größer als $c + \varepsilon$ (sonst könnte man eine Teilfolge extrahieren, die gegen einen größeren Häufungspunkt konvergiert).
- Analog liegen für $c := \liminf_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ zu beliebigem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele x_n unterhalb $c - \varepsilon$.

17.3. Reihen

17.3.1. Definition und Beispiele

17.3.1 Motivation: In Anwendungen entsteht die zu untersuchende Folge sehr oft durch inkrementelle Veränderung des vorhergehenden Folgenglieds.
Ein besonders einfacher Fall ist, wenn das Inkrement nur von n abhängt. Die Folge (S_n) ist dann von der Form

$$S_n = \begin{cases} f_1 & n = 1 \\ S_{n-1} + f_n & n > 1 \end{cases}$$

wobei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\,, n \mapsto f(n) = f_n$ eine vorgegebene Funktion/Folge ist.
Eine solche summierende Folge (S_n) nennt man Reihe, und es gibt dafür eine spezielle Notation.

Beispiele

- Girokonto ohne Verzinsung und Gebühren: Der Kontostand ergibt sich aus der Summe aller bisherigen Ein- bzw. Auszahlungen.
- Die Exponentialfunktion kann man auswerten als Genzwert einer x-abhängigen Reihe

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} S_n\,, \quad S_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ S_{n-1} + \frac{x^n}{n!} & n \geqslant 1 \end{cases}$$

- Entsprechendes gilt für viele andere wichtige Funktionen.

17.3.2 Definition:

- Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann definieren wir die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

als andere Bezeichnung für die Folge

$$(S_n)_{n=1}^{\infty}\,, \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

S_n heißt dabei die n-te Partialsumme.

- Man nennt die Reihe konvergent/divergent, je nachdem, ob die Folge (S_n) konvergiert/divergiert.
- Den Grenzwert einer konvergenten Reihe nennt man auch Reihenwert und bezeichnet ihn ebenfalls mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

17.3.3 Bemerkungen:

- Diese Definition überträgt sich ohne Schwierigkeiten, wenn (a_n) eine Folge in einem vollständigen normierten Vektorraum (sog. Banachraum) ist, wie z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, aber auch die Funktionenräume $L^p([0,1])$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet sowohl die Folge der Partialsummen als auch ihren Grenzwert. Aus dem Zusammenhang geht hervor, was gemeint ist!

Beispiele Wichtige Reihen sind:

- Die (für $|q| < 1$ konvergente) geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{(Achtung: Summation ab } 0\text{!)}$$

- Die (divergente) harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,,$$

- Die (konvergenten) Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ für } k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2\,.$$

- Die (konvergente) alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,,$$

17.3.4 Satz: Die Partialsummen der geometrischen Reihe lassen sich explizit berechnen: Für $q \in \mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{C}$) gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \\ n+1 & q = 1 \end{cases}.$$

Beweis Wir verwenden vollständige Induktion: Die Aussage ist für $n = 0$ offenbar richtig, und wir nehmen an, dass sie für ein beliebiges $n \geqslant 0$ gilt. Dann errechnet man

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = S_n + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}\,.$$

17.3.5 Bemerkung: Die Idee dahinter sieht man besser an folgender Polynom-Multiplikation:

$$(1 + q + \ldots + q^n)(1-q) = 1 - q + q - q^2 \pm \ldots - q^n + q^n - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}\,.$$

17.3.6 Folgerung:

- Für $|q| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe gegen den Reihenwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\,.$$

- Für $|q| \geqslant 1$ divergiert sie.

17.3.7 Satz: Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Beweis Wegen

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,.$$

kann die Folge der Partialsummen keine Cauchy-Folge bilden.

17.3.8 Satz: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

Beweis Die N-te Partialsumme lässt sich abschätzen als

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{N} \leqslant 2$$

Somit sind die Partialsummen eine monoton wachsende und beschränkte Folge, also konvergent.

17.3.9 Bemerkung: Mit Hilfe fortgeschrittener Methoden (z.B. Fourier-Reihen) kann man den Grenzwert sogar exakt berechnen zu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$.

17.3.10 Satz: Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

konvergiert.

Beweisskizze Dieser Satz folgt aus dem Dirichlet-Kriterium, welches wir später zeigen. Ein elementarerer Beweis könnte folgendes ausnutzen:

- Die Teilfolge der Partialsummen mit geraden (ungeraden) Indizes bildet eine monoton wachsende (fallende) Folge.
- Der Abstand beider Folgen strebt gegen Null, somit müssen sie gegen denselben Grenzwert konvergieren.

17.3.11 Bemerkung: Später werden wir auch zeigen, dass der Reihenwert der alternierenden harmonischen Reihe gleich $\ln(2) = 0.69\ldots$ ist.

17.3.2. Konvergenzkriterien: Einleitung

Beobachtung

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist *definiert* als Folge von Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$.
- *Äquivalent* zur Konvergenz der Reihe ist daher (wenigstens in vollständigen normierten Vektorräumen wie $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$), dass S_n eine Cauchy-Folge ist, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit

$$\forall m, n \text{ mit } n_0 < m < n : \ |S_n - S_{m-1}| = |\sum_{k=m}^{n} a_k| \leqslant \varepsilon \,.$$

- Dies nennt man das Cauchy-Kriterium für Reihen.

Frage Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ entsteht durch Summation über die Folge (a_n). Kann man der Folge a_n ansehen, ob die zugehörige Reihe konvergiert?

Beobachtung

- Eine notwendige Bedingung ist, dass (a_n) eine Nullfolge ist (ansonsten ist die Folge der Partialsummen wegen $S_{n+1} - S_n = a_n$ sicher keine Cauchy-Folge).
- Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Überblick In den folgenden Abschnitten werden wir zeigen, dass es im wesentlichen zwei Arten der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gibt:

1. Die Beträge (allgemeiner Normen) der Folgenglieder a_n werden so schnell kleiner, dass sogar gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$
Dies nennt man absolute Konvergenz.

2. Die Beträge der Folgenglieder a_n werden (zu) langsam klein, und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Allerdings wechselt das Vorzeichen (in $\mathbb{R}$) bzw. die Richtung (in $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$) in einer Weise, dass sich Beiträge gegenseitig aufheben können, *falls man sie in der richtigen Reihenfolge summiert.*
Dies nennt man bedingte Konvergenz.

17.3.3. Absolute Konvergenz

Idee Um aufgrund der Folge (a_n) Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ vorhersagen zu können, vergleicht man die Folgenglieder mit denen von Reihen, deren Verhalten bekannt ist.

17.3.12 Satz: (Majorantenkriterium)

- Es sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}_0^+$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
- Ferner sei (b_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$), so dass $|b_n| \leqslant a_n$ für alle $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$.
- $\Rightarrow$ Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent.

Beweis

- Die Partialsummen der b_n-Reihe bilden eine Cauchy-Folge, weil für $n \geqslant n_0$ gilt

$$|\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n_0} b_k| = |\sum_{k=n_0+1}^{n} b_k| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} |b_k| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k$$

- Weil die a_n-Reihe konvergent, und somit das Cauchy-Kriterium erfüllt ist, kann dieser Ausdruck aber durch Wahl von n_0 beliebig klein gemacht werden.

17.3.13 Bezeichnung: Man nennt Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, für die sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, absolut konvergent.

17.3.14 Bemerkung: Das Majorantenkriterium zeigt offenbar *immer* die absolute Konvergenz einer Reihe.

17.3.15 Satz: (Vergleich mit der geometrischen Reihe) Wenn es ein $0 \leqslant q < 1$, $C > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\forall n \geqslant n_0 : \ |a_n| \leqslant C q^n \,,$$

so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergent.

Beweis Anwendung des Majorantenkriteriums und Vergleich mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} C q^n$.

17.3.16 Folgerungen: Die folgenden beiden Kriterien sind hinreichend für die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

- Wurzelkriterium (WK):

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \,.$$

- Quotientenkriterium (QK):

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

Beweisskizze Für das WK kann man wie folgt argumentieren: Wenn der größte Häufungspunkt von $\sqrt[n]{|a_n|}$ echt kleiner als 1 ist, findet man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $q < 1$, so dass für alle $n \geqslant n_0$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant q \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \leqslant q^n \,.$$

Das Majorantenkriterium liefert dann die Behauptung.
Ähnlich argumentiert man im Fall des QK.

17.3.17 Beispiel: Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \,.$$

Beweis Wir hatten schon gezeigt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{z^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \,.$$

17.3.18 Beispiel: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{2n}}$ konvergiert wegen

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^{2n}}} = \frac{1}{4} < 1 \,.$$

17.3.19 Bemerkungen:

- Das QK ist oft bequemer, aber auch etwas schwächer als das WK. Insbesondere kann man damit keine Reihen behandeln, bei denen sich größere und kleinere Summanden abwechseln, wie etwa bei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots \,.$$

- Die Reihe, deren Konvergenz mit Hilfe von WK oder QK untersucht werden soll, muss „geometrisch“ konvergieren (wie eine geometrische Reihe, also relativ schnell).
- *Beide* Kriterien funktionieren daher bei „langsam“ absolut konvergenten Reihen wie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ mit $k \geqslant 2$ nicht!
- Weil wir allerdings die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ schon auf andere Weise gezeigt haben, und weil für $\alpha < -2$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n^{\alpha} \leqslant n^{-2}$, folgt aus dem Majorantenkriterium auch die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ für $\alpha < -2$.

17.3.4. Divergenz von Reihen

17.3.20 Bemerkung: (Minorantenkriterium) Seien (a_n), (b_n) Folgen in $\mathbb{R}$ mit $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, so divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergierte, müsste nach dem Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren.

17.3.21 Anwendung: Es gilt für alle $\alpha > -1$ und $n \in \mathbb{N}$, dass $n^{\alpha} \geqslant n^{-1}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

$\Rightarrow$ Für $\alpha > -1$ divergiert auch $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$.

17.3.22 Bemerkung: Später werden wir durch Vergleich mit $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\, dx$ zeigen, dass $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ auch im uns noch fehlenden Bereich $\alpha \in]-2, -1[$ konvergiert. Damit gilt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \quad \text{ist} \quad \begin{cases} \text{konvergent} & \alpha \in]-\infty, -1[\\ \text{divergent} & \alpha \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

17.3.5. Bedingte Konvergenz

Beobachtungen

- Die alternierende harmonische Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent, weil
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
divergiert (harmonische Reihe).
- Bei einer konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{R}$, die nicht absolut konvergiert, muss gelten
$$S_+ := \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n \geqslant 0} a_n = +\infty\,, \quad S_- := \sum_{n\in\mathbb{N}, a_n < 0} a_n = -\infty\,.$$
(Grund: Wenn S_+, S_- beide endlich wären, so wäre $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = S_+ - S_- < +\infty$, also absolut konvergent; wenn dagegen nur eines der beiden endlich wäre, so könnten sie zusammen keine endliche Summe bilden.)
- Damit ein sinnvoller Grenzwert herauskommt, muss man daher die positiven und negative Teile in geeigneter Reihenfolge aufsummieren!

17.3.23 Definition: Wenn eine konvergente Reihe nur in Abhängigkeit einer bestimmten Summationsreihenfolge konvergent ist, so nennt man sie bedingt konvergent.

17.3.24 Satz: (Umordnungsabhängigkeit bei bedingter Konvergenz) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert. Dann kann man durch

Ändern der Summationsreihenfolge *jeden beliebigen* Grenzwert $\xi \in \mathbb{R}$ erhalten. Genauer: Zu $\xi \in \mathbb{R}$ gibt es eine bijektive Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \xi \,.$$

Beweisskizze Man nimmt von den positiven a_n so viele, bis die Partialsumme größer als ξ ist, dann von den negativen a_n so viele, bis die Partialsumme kleiner als ξ ist, usw.. Dabei verändert man die Reihenfolge negativer/positiver a_n untereinander nicht.

17.3.25 Satz: (Umordnungsunabhängigkeit bei absoluter Konvergenz) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so gilt für alle bijektiven $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \,.$$

Anders ausgedrückt: Der Grenzwert einer absolut konvergenten Reihe ist invariant gegenüber Umordnung.

Beweis Wegen der absoluten Konvergenz kann man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, mit $\sum_{n \geqslant n_0} |a_n| < \varepsilon$. Weiter gibt es aber wegen der Surjektivität von π ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\{1, \ldots, n_0\} \subset \{\pi(1), \ldots, \pi(N_0)\}$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned}
&|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}| \\
&\leqslant \underbrace{|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n|}_{\leqslant \sum_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon} + \underbrace{|\sum_{n=1}^{n_0} a_n - \sum_{n=1}^{N_0} a_{\pi(n)}|}_{\leqslant \sum_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon} + \underbrace{|\sum_{n=1}^{N_0} a_{\pi(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}|}_{\leqslant \sum_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon} \\
&\leqslant 3\varepsilon
\end{aligned}$$

17.3.26 Folgerung: Nach den vorhergehenden beiden Sätzen ist eine Reihe genau dann absolut konvergent, wenn ihr Grenzwert unabhängig von der Summationsreihenfolge ist.

17.3.27 Bezeichnung: Im Fall absolut konvergenter Reihen schreibt man daher auch hin und wieder $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$, was eine beliebige Summationsreihenfolge suggeriert.

17.3.28 Satz: (Dirichlet-Kriterium) Es gelte

1. Die Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei beschränkt.
   (Beachte: Die Reihe muss dafür *nicht* konvergieren!).
2. $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine *monoton fallende (reelle) Nullfolge*.

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k c_k)$ konvergent.§

Beispiele

- Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (Partialsummen von $\sum a_n$ für $a_n = (-1)^{n+1}$ sind $(1,0,1,0,\ldots)$)
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{i}^n}{n}$ (die Partialsummen von $\sum a_n$ für $a_n = \boldsymbol{i}^n$ sind $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}-1, -1, 0, \boldsymbol{i}, \ldots)$)
- Allgemein: Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$ sind die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ beschränkt wegen

$$\left|\sum_{n=1}^{N} z^n\right| = \left|\frac{1-z^{N+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}\,.$$

  Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ für alle solchen z.

Beweis

- Zuerst eine Beobachtung:

$$\forall n : |S_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad \forall m < n : |\sum_{k=m}^{n} a_k| = |S_n - S_{m-1}| < 2M$$

- Wir wollen dass Cauchy-Kriterium für Reihen zeigen, d.h. dass zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\forall m, n \text{ mit } n_0 < m < n : \sum_{k=m}^{n}(a_k c_k) < \varepsilon$$

- Für $k = m, \ldots, n$ gilt $c_k = c_n + \sum_{i=m}^{k-1}(c_i - c_{i+1})$
- Und daher:

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k c_k| = |c_n \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} a_k \sum_{i=m}^{k-1}(c_i - c_{i-1})| =$$
$$|c_n \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{i=m}^{n-1}(c_i - c_{i-1}) \sum_{k=m}^{i+1} a_k| \leqslant 2M(c_n + \sum_{i=m}^{n-1}(c_i - c_{i-1})) = 2Mc_m$$

- Weil $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, wird dies aber durch die Wahl einer geeigneten unteren Schranke n_0 beliebig klein.

§Dass die Konvergenz nur „bedingt“ und nicht sogar „absolut“ ist, wird nicht ausgesagt! Allerdings ist der Satz vor allem zur Anwendung auf bedingt konvergente Reihen von Interesse, weil die absolute Konvergenz –wenn sie denn vorliegt– eine wichtige Information ist, die man normalerweise auch zeigen möchte.

17.3.29 Bemerkungen:

- Das Dirichlet-Kriterium für den Fall $a_n = (-1)^n$ ist das (wesentlich bekanntere) Leibniz-Kriterium: Für eine monoton fallende (reelle) Nullfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n c_n$ konvergent.
- Zwar kann man das Dirichlet-Kriterium anwenden, um beispielsweise die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$ zu erhalten. Es ist hier aber nicht nötig und liefert auch nicht die bestmögliche Information, denn diese Reihe ist ja nach Wurzel- oder Quotientenkriterium sogar absolut konvergent.

17.3.6. Rechenregeln für Reihen

17.3.30 Satz: (Linearität) Für beliebige konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gilt immer

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$,
2. $\lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n)$.

Beweis Folgt sofort aus der Definition der Reihen als Folgen von Partialsummen und den Grenzwertsätzen für Folgen (Linearität der Grenzwertbildung).

Beobachtung

- Ausmultiplizieren eines Produkts zweier Reihen liefert formal

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{l=0}^{\infty} b_l) = a_0b_0 + a_0b_1 + a_1b_0 + a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 + \dots$$

- NOTATION: Hier und im folgenden Abschnitt über Potenzreihen ist eine Summation von 0 anfangend praktisch.
- FRAGE: In welcher Reihenfolge soll man die Einzelterme aufsummieren, damit das gewünschte Ergebnis (welches?) herauskommt?
- ANTWORT: Für *absolut konvergente* Ausgangsreihen $\sum a_k$ und $\sum b_l$ hängt das Ergebnis nicht von der Reihenfolge ab, in der man die Einzelterme $a_k b_l$ summiert, sonst normalerweise schon.

17.3.31 Satz: Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen mit Reihenwerten A und B. Dann ist auch die Summe

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} a_k b_l$$

wohldefiniert in dem Sinne, dass für jede bijektive Abbildung

$$\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\,, \quad n \mapsto (k_n, l_n)$$

gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} b_{l_n} = C = A \cdot B\,.$$

Beweisidee Die Reihe $(c_n) = (a_{k_n} b_{l_n})$ ist absolut konvergent mit

$$\sum_n |c_n| = \left(\sum_n |a_n|\right)\left(\sum_n |b_n|\right) < +\infty\,.$$

17.3.32 Definition: Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ erhält man durch Wahl der speziellen (diagonalen) Summationsreihenfolge als

$$C := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,, \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\,.$$

17.3.33 Bemerkungen:

- Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent sind, so gilt also

$$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\,.$$

- Wenn $\sum a_n$ und $\sum b_n$ andererseits nur bedingt konvergent sind, kann das Cauchy-Produkt unsinnige (z.B. divergierende oder den Multiplikationssatz verletzende) Ergebnisse liefern (siehe Übung).

17.3.34 Anwendung: Die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\,.$$

Beweis Da die Exponentialreihe für alle Argumente x absolut konvergiert, gilt

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{y^l}{l!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

17.4. Potenzreihen

Beobachtung

- Man kann wichtige Funktionen in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ als Reihen der Form

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

oder (allgemeiner) in der Form

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

erhalten (x_0 sowie die a_k sind dabei Elemente in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

- Dies gilt insbesondere für die Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

und die damit wegen $\exp(\boldsymbol{i}x) = \cos(x) + \boldsymbol{i}\sin(x)$ zusammenhängenden trigonometrischen Funktionen

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$$

und

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

- Für noch erheblich mehr Funktionen gilt die Darstellung

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

wenigstens lokal in einem Kreis um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ (oder $x_0 \in \mathbb{C}$) mit Radius R.

1. Beispiel 1: $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergiert für $|x| < 1$
2. Beispiel 2: $\dfrac{2}{x-4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{-1}{2^n}(x-2)^n$ konvergiert für $|x-2| < 2$
3. Später werden wir lernen, wie man solche Reihen für eine gegebene Funktion berechnet (Taylor-Reihe).

17.4.1 Definition: Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ heißt Potenzreihe mit Entwicklungspunkt x_0. Die Koeffizienten a_k sind hier (ebenso wie x und x_0) reell oder komplex.[¶]

Vereinfachung Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden oft den Fall $x_0 = 0$, also Reihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Die Fälle $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ verhalten sich identisch, so dass wir alles für den allgemeineren Fall $\mathbb{C}$ formulieren.

17.4.2 Satz: Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ in $\mathbb{C}$ gibt es ein $R \in [0, +\infty]$, so dass

- die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| < R$ konvergiert
- und für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| > R$ divergiert.
- Für $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| = R$ ist das Verhalten je nach Reihe unterschiedlich.

[¶] Offensichtlich machen aber auch hier allgemeine vektorwertige a_k durchaus Sinn, und in manchen Anwendungen wird dies auch gebraucht.

Dabei bedeutet:

- $R = 0$: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = x_0$ und
- $R = +\infty$: Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$.

17.4.3 Bezeichnung: Das im Satz genannte R bezeichnet man als Konvergenzradius. Es ist der Radius des Konvergenzkreises

$$B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x - x_0| < R\}\,.$$

17.4.4 Beispiel: Die Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

hat den Konvergenzradius 1 und konvergiert für $x \in [-1, 1[\subset \mathbb{R}$, bzw. für $x \in \{z \in \mathbb{C} || z| \leqslant 1\} \backslash \{1\} \subset \mathbb{C}$.

Beweis (des Satzes)

- Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$.
- Es reicht zu zeigen: wenn die Reihe für ein $x' \in \mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert sie auch für alle $\{x \in \mathbb{C} : |x| < |x'|\}$.
- Damit Konvergenz für x' vorliegt, muss wenigstens die Folge $(|a_k (x')^k|) = (|a_k||x'|^k)$ beschränkt sein durch ein $C > 0$.
- Damit folgt dann aber für $|x| < |x'|$, dass

  $$|a_k||x|^k \leqslant |a_k||x'|^k \frac{|x|^k}{|x'|^k} \leqslant Cq^k$$

  mit $q < 1$ und somit die Konvergenz der Reihe.

17.4.5 Bemerkung: (Bestimmung des Konvergenzradius)

- Den Konvergenzradius R einer Potenzreihe

  $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

  erhält man durch Anwendung des Wurzelkriteriums oder Quotientenkriteriums und Analyse, für welche $\tilde{x} := x - x_0$ sich ein $q < 1$ ergibt.
- Mittels des Wurzelkriteriums ergibt sich sogar ein expliziter Ausdruck als

  $$R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,,$$

  der sogar für $R \in \{0, +\infty\}$ funktioniert, wenn man definiert $\frac{1}{+\infty} = 0$ und $\frac{1}{0} = +\infty$.

- Das QK kann man allerdings nur anwenden, wenn der Grenzwert $q := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ (Achtung: kein Limes superior!) existiert. In diesem Fall gilt:

$$R = \frac{1}{q} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Beispiele

- $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ hat den KR

$$R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^{-1} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^{-1} = 1$$

und konvergiert daher in $B_1(0) = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < 1\}$. ‖

- Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hat denselben Konvergenzradius $R = 1$, allerdings konvergiert sie —wie wir bereits gesehen haben— auch noch für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$, ausgenommen $x = 1$.

- Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x^n$ hat den KR

$$R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{-n}})^{-1} = (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2})^{-1} = 2$$

und konvergiert daher in $B_2(0)$. Dies ist auch der gesamte Konvergenzbereich.

- Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n^2}x^n$ hat denselben KR $R = 2$, konvergiert aber auch noch auf dem Rand des Konvergenzbereiches absolut, denn $\frac{1}{n^2}$ ist für $|x| = 1$ offenbar eine Majorante.

- Die Reihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat nach dem QK den KR

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$$

und konvergiert daher in $\mathbb{C}$.

- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ hat nach dem QK den KR $R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0$. Somit konvergiert sie nur für $x = 0$.

‖ Dies ist auch der ganze Konvergenzbereich, weil die Reihenglieder für $|x| = 1$ nicht einmal eine Nullfolge bilden.

- Für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = 0$ für gerade n und $a_n = 1$ für ungerade n existiert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ nicht, allerdings ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Somit ist der KR auch hier gleich 1.

- Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$ ist so aufgeschrieben, dass man aufpassen muss: Wenn man alle x-Potenzen aufzählt, entspricht es nämlich einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, wobei a_k für ungerade k verschwindet, und für gerade k den Wert $\sqrt{2}^k$ hat. Dann folgt aber

$$R = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

  Alternativ kann man auch mit der Ursprungsformulierung arbeiten, muss dann aber in der Formel für R die $2n$-te Wurzel aus 2^n ziehen (entsprechend der x-Potenz), also

$$R = (\limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2^n})^{-1} = (\lim_{n\to\infty} \sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

17.4.6 Bemerkung: Vor allem das letzte Beispiel macht die Bestimmung des KR einer Potenzreihe über die explizite Formel etwas zweifelhaft. Denn wenigstens in diesem Fall ist die direkte Anwendung des Wurzelkriteriums auf die Potenzreihe gemäß

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k||x|^k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k|x|^{2k}} = 2|x|^2 < 1 \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

genauso einfach und weniger fehleranfällig.

18. Stetigkeit

18.1. Motivation

18.1.1 Prinzip: Qualitativ kann man sagen: Die Funktion

$$f : X \to Y\,, \quad x \mapsto f(x)$$

heißt stetig, wenn „kleine“ Änderungen in den Eingangsparametern nur zu „kleinen“ Änderungen im Funktionswert führen.

Beispiele (Für Stetigkeit)

- Orte von materiellen Gegenständen ändern sich unserer Erfahrung nach stetig mit der Zeit.
- In vielen Bereichen der Elektrotechnik arbeitet man mit dem Ohmschen Widerstandsgesetz, welches einen linearen Zusammenhang von Strom und Spannung voraussetzt. Linearität impliziert auch Stetigkeit.
- Der Strom hängt von der Spannung meist sogar in einem erweiterten Bereich nichtlinear und stetig ab.
- Für kleine Kräfte hängt die Auslenkung einer Feder linear und stetig, für etwas größere Kräfte nichtlinear und stetig von der auslenkenden Kraft ab.

In diesen Beispielen gilt das Stetigkeitsprinzip:

> Kleine Änderungen in den Eingangsgrößen führen zu kleinen Änderungen der Ausgangsgrößen.

Beispiele (Für Unstetigkeit)

- Auf kleinem Raum gibt es Situationen, in denen man nur diskrete Orte, Geschwindigkeiten, Zustände, etc., messen kann. In diesem Bereich ist Stetigkeit fraglich.
- Es gibt eine kritische Spannung, bei welcher der Strom durch eine kleine Spannungserhöhung rapide und unstetig auf Null abfallen kann. (Was passiert da wohl?)
- Ebenso gibt es eine kritische Kraft, bei welcher eine kleine Verstärkung die Auslenkung einer Feder mit einem Schlag viel größer macht. (Und was geschieht hier?)

- In der Digitaltechnik sind gerade diskrete Zustände wichtig, und den Übergang zwischen diesen modelliert man normalerweise unstetig.

In allen diesen Beispielen wird das Stetigkeitsprinzip verletzt, denn kleine Änderungen in Parametern führen zu großen Änderungen der Ausgangsgrößen.

Beispiele (Unnötige Unstetigkeiten in Tarifen und Gesetzen)

- Die Bahn legt für Strecken innerhalb eines Verkehrsverbunds eine andere Preisberechnung zugrunde als für Strecken, die nach draußen gehen.
- Politiker beabsichtigen ein Gesetz, nach dem ab 500,000 Euro Jahreseinkommen eine Sonderabgabe zu zahlen ist.
- In die private Krankenkasse darf man erst, wenn das Jahreseinkommen eine bestimmte Höhe hat.
- Nur Eltern von Kindern, die nach dem 1.1.2007 geboren werden, bekommen Elterngeld.
- Erst ab 2000 Euro Kosten werden für ein Jobticket Bahn-Bonuspunkte angerechnet.

Beispiele (Fälschlich(?) angenommene Stetigkeit im täglichen Leben)

- Der Anleger denkt: Die Aktienkurse ändern sich ja recht gemächlich. Wenn sie fallen, steige ich einfach schnell aus. Viel verlieren kann ich dann nicht.
- Der Anleger denkt: Der Eurokurs wird ja gegenüber dem Schweizer Franken von der Schweizer Nationalbank abgesichert und kann nur steigen. Obendrein habe ich für den Fall des Sinkens auch eine automatische Verkaufsorder platziert, so dass mein Verlust auf jeden Fall gering bleibt.
- Der Mensch denkt: Bisher ist beim Klima ja noch nichts wirklich angebrannt. Ein wenig mehr CO_2 wird schon nicht so schlimm sein.
- Der Rennfahrer denkt: Mit 100km/h bin ich ja schon um diese Kurve gekommen, dann wird es auch mit 105 km/h noch gehen.
- Der Chef denkt: Bisher hat Mitarbeiter X alle Aufgaben klaglos erledigt. Dann kann er dies sicher auch noch schaffen.

18.1.2 Beispiel: Zum Abschluss noch ein „Positivbeispiel“ in der Politik: Der Übergang zum Rentenalter soll von 65 Jahren auf 67 Jahre hochgesetzt werden. Dazu verlängert man das Eintrittsalter innerhalb von 24 Jahren pro Jahr um einen Monat. Dies ist ein recht guter Kompromiss zwischen Stetigkeit und Praktikabilität.

18.2. Stetigkeitsdefinition mit Folgen und Beispiele

Voraussetzung X und Y seien metrische Räume mit Metriken d_X und d_Y.

Erinnerung Beispiele für metrische Räume sind:

- $X = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit Absolutbetrag
- $\mathbb{R}^n$ (mit Euklidischer Norm oder p-Normen)
- aber auch $X = [0, 1]$ (üblicher Abstand)
- oder $X = S^1$ (Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$) mit Bogenlänge als Abstand
- ...

18.2.1 Definition: (Stetigkeit, „Folgenstetigkeit“)

- Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_* \in X$, wenn für *jede* konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_*) \quad \Big[= f(\lim_{n\to\infty} x_n)\Big] .$$

- Sie heißt stetig, wenn sie in allen Punkten $x_* \in X$ stetig ist.

18.2.2 Bemerkung: Die Definition der Konvergenz in X und Y hängt von den Metriken d_X bzw. d_Y ab. Das gleiche gilt daher natürlich auch für die Frage nach Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$.

18.2.3 Schreibweise: Anstatt die Folge in der Stetigkeitsdefinition genauer zu spezifizieren, schreibt man kurz:

$$f \text{ stetig } :\Longleftrightarrow \lim_{x\to x_*} f(x) = f(x_*)$$

oder auch

$$f \text{ stetig } :\Longleftrightarrow f(x) \to f(x_*) \text{ für } x \to x_* .$$

Beispiele Stetige reelle/komplexe Funktionen

- Ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ in $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ ist stetig.

  Beweis: Aufgrund der Grenzwertsätze gilt für eine Folge x_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$:

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{d} a_k x_n^k = \sum_{k=0}^{d} a_k (\lim_{n\to\infty} x_n)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k x_*^k = p(x_*) .$$

- Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dann ist die rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ stetig in $X = \mathbb{K}\backslash\{x \in \mathbb{K} \mid q(x) \neq 0\}$.

  Beweis: Ebenfalls Grenzwertsätze.

- Zwei konkrete Anwendungen dieses Resultats: die Funktion

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist stetig, ebenso wie die Funktion

$$g : \mathbb{C}\backslash\{\pm \boldsymbol{i}\} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \frac{x}{1+x^2}\,.$$

BEACHTE: Die Punkte 0 bzw. $\pm\boldsymbol{i}$ sind für f bzw. g nach unserer Definition *keine* Unstetigkeitsstellen, sondern Definitionslücken.

18.2.4 Beispiel: (Unstetige Funktion) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig im Punkt $x_* = 0$ (bezüglich des üblichen Abstands in $\mathbb{R}$), weil für die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$

BEACHTE: Mit der Folge $x_n = -\frac{1}{n}$ würde man diese Unstetigkeit nicht entdecken, sondern die gewünschte Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = 0 = f(0)$$

erhalten. Die Stetigkeitsdefinition verlangt diese Beziehung jedoch für *alle* Folgen!

Beispiele (Trivial stetige Funktionen)

- Konstante Funktionen $f : X \to Y$ mit $f(x) = y_*$ sind stetig.
- Die Identität $\mathrm{id} : X \to X, x \mapsto x$ ist stetig, weil gilt

$$\lim_{x\to x_*} \mathrm{id}(x) = \lim_{x\to x_*} x = x_* = \mathrm{id}(x_*)\,.$$

- Jede Norm

$$N = \|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}_0^+\,, \quad x \mapsto N(x) = \|x\|_V$$

ist stetig, wenn man Entfernungen in V mit ihr selber misst.

BEWEIS: Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$|N(x) - N(x_*)| = |\|x\|_V - \|x_*\|_V| \leqslant \|x - x_*\|_V \to 0 \quad (x \to x_*)$$

Also folgt $|N(x) - N(x_*)| \to 0$, was aber gleichbedeutend mit $N(x) \to N(x_*)$ in $\mathbb{R}$ ist.

18.2.5 Bemerkung: Die umgekehrte Dreiecksungleichung lautet

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$$

Sie folgt aus der Dreiecksungleichung wegen

$$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leqslant \|y\| + \|x - y\| \iff \|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|$$

und

$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \leqslant \|x\| + \|x - y\| \iff \|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\| .$$

18.3. Stetigkeitsdefinition mit Umgebungen

18.3.1 Definition: Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Menge

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

die ε-Umgebung von x.

18.3.2 Beispiel: Im $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen Abstand ist $U_\varepsilon(x)$ eine Kugel mit Radius ε um den Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^n$.
Der Rand der Kugel ist *nicht* in $U_\varepsilon(x)$ enthalten.

18.3.3 Definition: (ε-δ-Definition der Stetigkeit, „Umgebungsstetigkeit“)

- (X, d_X) und (Y, d_Y) seien metrische Räume.
- Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $x_* \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x_*, \varepsilon) > 0$ gibt mit
$$f(U_\delta(x_*)) \subset U_\varepsilon(f(x_*)) .$$
Hierbei ist $f(A) := \{y \mid \exists x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ das Bild von A unter f.
- Elementarer:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_*) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_*)) .$$
- Oder noch elementarer:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : d_X(x, x_*) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_*)) < \varepsilon .$$
- f heißt stetig, wenn es in allen Punkten $x \in X$ stetig ist.

18.3.4 Bemerkung:

- Eine gegebene Genauigkeitsanforderung ε der Ausgangsgröße eines Prozesses durch eine Präzision δ in den Eingangsparametern zu erreichen, ist ein auch in der Praxis häufig auftretendes Problem!
- Wenn eine Funktion f ein gutes Modell für einen realen Prozess darstellt, besagt die Stetigkeit von f daher einfach, dass dieses wichtige Problem im Prinzip lösbar ist.

18.3.5 Beispiel: Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig im Punkt $x_* = 0$, weil für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ für alle $\delta > 0$ gilt

$$f(U_\delta(0)) = f(]-\delta, \delta[) = \{0, 1\} \not\subset U_{\frac{1}{2}}(0)\,.$$

In allen anderen Punkten $x_* \neq 0$ ist f stetig, weil man zu *beliebigem* $\varepsilon > 0$ immer $\delta := |x_*| > 0$ wählen kann, um

$$f(U_\delta(x_*)) = f(]x_* - |x_*|, x_* + |x_*|[) = \{f(x_*)\} \subset U_\varepsilon(f(x_*))$$

zu erreichen. (Natürlich könnte man auch ein noch kleineres δ wählen.)

18.3.6 Beispiel:

- Dass die Funktion $f(x) = x^2$ als Polynom stetig in $\mathbb{R}$ ist, wissen wir bereits. Wir wollen es noch einmal mit der Umgebungsstetigkeit zeigen:
- Um Stetigkeit in $x_* \in \mathbb{R}$ zu zeigen, schätzt man für ein $x \in U_\delta(x_*) =]x_* - \delta, x_* + \delta[$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_*)| = |x^2 - x_*^2| = |(x - x_*)(x + x_*)| \\ = |x - x*||x + x_*| < \delta(2|x_*| + \delta) \end{aligned}$$

- Hieraus sieht man, dass die Wahl $\delta := \min(1, \dfrac{\varepsilon}{2|x_*| + 1})$ ausreicht, um

$$|f(x) - f(x_*)| < \delta(2|x_*| + \delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2|x_*| + 1}(2|x_*| + 1) = \varepsilon$$

und damit $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_*))$ zu erhalten.

18.3.7 Satz: (Äquivalenz von Folgen- und Umgebungsstetigkeit) Beide Stetigkeitsdefinitionen (mit Folgen bzw. mit Umgebungen) sind äquivalent, d.h. f ist folgenstetig $\iff$ f ist umgebungsstetig .

Beweisskizze Wir zeigen zuerst $\neg A \Rightarrow \neg B$. Wenn f nicht „folgenstetig“ in x_* ist, so gibt es eine Folge $x_n \to x_*$, so dass $f(x_n) \not\to f(x_*)$. Letzteres bedeutet, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $d(f(x_n), f(x_*)) > \varepsilon$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und nach Übergang zu einer Teilfolge kann man annehmen für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $x_n \to x_*$ gibt es dann aber in jedem $U_\delta(x_*)$ Punkte mit $d(f(x_n), f(x_*)) > \varepsilon$, die daher nicht in $U_\varepsilon(f(x_*))$ sind.
Nun zeigen wir $\neg B \Rightarrow \neg A$. Wenn f nicht umgebungsstetig ist, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass in jeder Umgebung $U_{\frac{1}{n}}(x_*)$ noch wenigstens ein Punkt x_n mit $d(f(x_n), f(x_*)) \geqslant \varepsilon$ liegt. Für die so erhaltene Folge gilt trotz $x_n \to x_*$ nicht $f(x_n) \to f(x_*)$.

18.3.8 Bemerkung:

- Die Folgenstetigkeit ist meist etwas angenehmer, erfordert aber mehr Infrastruktur (Konvergenz von Folgen, Grenzwertsätze).

- Sie ist insbesondere sehr gut geeignet, um zu zeigen, dass eine Funktion *nicht* stetig ist: Man gibt einfach eine geeignete Folge an, welche die Unstetigkeit aufspürt.
- Die Umgebungsstetigkeit ist elementarer. So werden etwa die Grenzwertsätze für Folgen genau betrachtet über die Umgebungsstetigkeit bewiesen.
- Die Umgebungsstetigkeit ist in manchen Situationen besser geeignet, um Stetigkeit zu zeigen: Man quantifiziert dann einfach $\delta = \delta(\varepsilon)$.
- Diese Abhängigkeit ist auch essentiell in den Anwendungen.

18.3.9 Anwendung: (Stetigkeit von Potenzreihen) Eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist eine stetige Funktion im Kreis $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{K} \mid |x - x_0| < R\}$, wobei R der Konvergenzradius der Reihe ist.

Beweisidee

- Der Beweis wäre einfach, wenn man Grenzwerte (die Reihe ist auch einer!) vertauschen dürfte:

$$\lim_{x \to x_*} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lim_{x \to x_*} (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_* - x_0)^k$$

- So allgemein stimmt das aber leider nicht: Wenn δ_{ik} das Kronecker-Delta bezeichnet, so gilt etwa

$$1 = \lim_{i \to \infty} 1 = \lim_{i \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{ik} \neq \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{i \to \infty} \delta_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

- Wir zeigen Stetigkeit im Punkt x_* mit $|x_* - x_0| < R$ und geben uns ein $\varepsilon > 0$ vor.
- Einerseits kann man nun $n_0 \in \mathbb{N}$ so wählen, dass der Rest $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ für $|x - x_*| < \delta_1 := \frac{R - |x_0 - x_*|}{2}$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ wird.
- Andererseits konvergiert wegen der Stetigkeit von Polynomen $p(x) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k (x - x_0)^k$ gegen $p(x_*) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k (x_* - x_0)^k$ für $|x - x_*| \to 0$, so dass es auch ein $\delta_2 > 0$ gibt mit $|p(x) - p(x_*)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
- Nach der Dreiecksungleichung erfüllt dann $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dass $|f(x) - f(x_*)| < \varepsilon$.

18.3.10 Folgerung: Die Exponentialfunktion $\exp$ und die trigonometrischen Funktionen $\sin$ und $\cos$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

18.4. Verkettung stetiger Funktionen

18.4.1 Satz: Seien X, Y, Z metrische Räume (mit Metriken d_X, d_Y, d_Z). Die Verkettung stetiger Funktionen $f_1 : X \to Y$ und $f_2 : Y \to Z$ ist eine stetige Funktion $f = f_2 \circ f_1 : X \to Z$.

Beweis

- Beweis 1 (Folgenstetigkeit): Für alle konvergente Folgen (x_n) in X gilt

$$f_2(f_1(\lim_{n\to\infty} x_n)) = f_2(\lim_{n\to\infty} f_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f_2(f_1(x_n))$$

- Beweis 2 (Umgebungsstetigkeit): Sei $y = f_1(x)$ und $z = f_2(y)$, so kann man zu einer Umgebung $U_\varepsilon(z)$ eine Umgebung $U_\delta(y)$ finden mit $f_2(U_\delta(y)) \subset U_\varepsilon(z)$, und danach eine Umgebung $U_{\delta'}(x)$ mit $f_1(U_{\delta'}(x)) \subset U_\delta(y)$.

18.4.2 Anwendung:

Wir hatten:

- Der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ ist stetig (er ist ja eine Norm).
- Rationale Funktionen sind stetig, wenn der Nenner nicht 0 ist.
- die Exponentialfunktion ist auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ stetig

Hieraus folgt, dass die Funktion $x \mapsto \exp(|\frac{x^2}{2-x}|)$ eine stetige Funktion auf der Menge $X = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ ist.

18.5. Umkehrfunktion

Frage Seien X und Y metrische Räume und $f : X \to Y$ bijektiv und stetig. Ist dann die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig?

Antwort Im allgemeinen nein! Ein Gegenbeispiel ist die Funktion

$$f : [0, 2\pi[\to S^1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\|_2 = 1\}, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Sie ist stetig und bijektiv, aber die Inverse ist nicht stetig im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18.5.1 Bemerkung: Später werden wir sehen, dass die Aussage des Satzes für einen wichtigen Spezialfall richtig ist: Falls nämlich X und Y beschränkte oder unbeschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind, so ist die es zu einem bijektiven stetigen $f : X \to Y$ gehörende Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig!
Im allgemeinen Fall ist die Stetigkeit von f^{-1} aber eine zusätzliche Qualität.

18.5.2 Definition: (Homöomorphismus) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$, für welche die Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$ existiert und stetig ist, heißt Homöomorphismus. Wenn es einen solchen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt, so nennt man X homöomorph zu Y.

18.5.3 Anschauung: Zwei metrische Räume X und Y sind homöomorph, wenn sie ineinander deformiert oder verzerrt werden können.

18.5.4 Bemerkung: Wie man leicht sieht, ist diese Homöomorphie metrischer Räume eine Äquivalenzrelation.

Beispiele

- Das Intervall $]0,1[$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$. Als Homöomorphismus könnte man beispielsweise $x \mapsto \frac{x-\frac{1}{2}}{x(1-x)}$ oder $x \mapsto \tan(\pi(x-\frac{1}{2})$ wählen.
- Die Intervalle $]0,1[$ und $]a,b[$ sind homöomorph mittels $x \mapsto a + (b-a)x$.
- $[0,1]$ ist nicht homöomorph zu $]0,1[$.
  Beweis (unter Verwendung späteren Wissens): Das erste Intervall ist kompakt, das zweite nicht. Homöomorphismen erhalten aber die Kompaktheit.
- $[0,1]$ ist nicht homöomorph zu $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$.
  Beweis: Folgt mit Mitteln der algebraischen Topologie.
- Die Einheitswürfel $[0,1]^m$ und $[0,1]^n$ sind nur im Fall $m = n$ homöomorph.
  Beweis: Ebenfalls mit Hilfe der algebraischen Topologie.

18.6. Topologische Grundbegriffe

Voraussetzung X sei wieder ein metrischer Raum mit Metrik d.

18.6.1. Offene Mengen

18.6.1 Definition: $O \subset X$ sei eine Teilmenge des metrischen Raums X. $x \in O$ heißt innerer Punkt von O, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset O\,.$$

O heißt offen (in X), wenn alle $x \in O$ innere Punkte sind, d.h.

$$O \text{ offen} \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall x \in O : \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset O\,.$$

Beispiele

- Das Intervall $]0,1[:= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ ist offen in $\mathbb{R}$.

- Die Intervalle $[0,1],]0,1], [0,1[$ sind nicht offen in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $\mathbb{Q}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $\mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{R}$.
- ALLGEMEINER: Für alle metrischen Räume X ist X selber eine offene Menge in X. (Warum? $\rightsquigarrow$ Siehe Definition der ε-Umgebung.)
- Daher (etwas erstaunlich): $[0,1]$ ist offen in $[0,1]$, $\mathbb{Q}$ ist offen in $\mathbb{Q}$, ...
- Die leere Menge $\varnothing$ ist offen in $\mathbb{R}$.
- ALLGEMEINER: $\varnothing$ ist offen in jedem metrischen Raum X. (Warum?)
- Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen (oder irgendeiner anderen) Norm $\|\cdot\|$. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$ ist dann die Kugel („Ball“)

$$B_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < R\} \quad [= U_R(x_0)]$$

offen in $\mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Für $\varepsilon = R - \|x - x_0\|$ gilt $U_\varepsilon(x) \subset B_R(x_0)$ (Dreiecksungleichung).

Vorsicht Im Fall $X \neq \mathbb{R}^n$ muss man sich genau anschauen, was die obigen Definitionen bedeuten. So sind zum Beispiel im Fall $X = \mathbb{R}_0^+$ die ε-Umgebungen des Punkts 0 von der Form $U_\varepsilon(0) = [0, \varepsilon]$, und die Menge $[0,1[$ ist offen in $\mathbb{R}_0^+$, weil 0 ebenfalls ein innerer Punkt ist.

18.6.2 Satz: Die Vereinigung $O_1 \cup O_2 \cup \ldots$ beliebig vieler offener Mengen $O_1, O_2, \ldots$ ist wieder offen, ebenso der Durchschnitt $O = O_1 \cap \ldots \cap O_n$ endlich(!) vieler offener Mengen $O_1, \ldots, O_n$.

Beweis *Sehr* gute Übung!

18.6.3 Übung: Man zeige anhand von Intervallen in $\mathbb{R}$, dass der Durchschnitt *unendlich* vieler offener Mengen nicht offen sein muss.

18.6.2. Abgeschlossene Mengen

18.6.4 Definition: $A \subset X$ sei eine Teilmenge des metrischen Raums X. $x \in X$ (!) heißt Häufungspunkt von A, wenn in jeder ε-Umgebung von x Punkte von A liegen, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$. A heißt abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte von A in A liegen.

18.6.5 Bemerkung: Alternativ könnte man definieren: $A \subset X$ ist abgeschlossen, wenn alle Häufungspunkte $x_* \in X$ (!) von „in A verlaufenden Folgen“ wieder in A liegen.

Beispiele

- Das Intervall $[0,1]$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Das Intervall $]0,1[$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$ (in jeder ε-Umgebung von $0 \notin]0,1[$ liegen offenbar Punkte von $]0,1[$)
- Die Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $\mathbb{Q}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- Die Menge $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$.
- ALLGEMEINER: Für alle metrischen Räume X ist X abgeschlossen in X.
- Also gilt auch: $]0,1[$ abgeschlossen in $]0,1[$, $\mathbb{Q}$ abgeschlossen in $\mathbb{Q}$, ...
- Die leere Menge $\varnothing$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Allgemeiner: Für alle metrischen Räume X ist $\varnothing$ abgeschlossen in X.
- Die $n-1$-dimensionale Einheitsphäre

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

ist abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$.

Vorsicht Wieder ist die Situation $X \neq \mathbb{R}^n$ etwas verwickelter. So ist zum Beispiel im Fall $X = \mathbb{R}^+$ die Menge $A =]0,1]$ nach Definition abgeschlossen *in* X, weil der Punkt 0 nicht in X liegt (dort gibt es nur positive Zahlen) und somit als Häufungspunkt von A nicht zur Auswahl steht.
Wie schon früher erwähnt, interessieren wir uns in dieser Vorlesung allerdings im Wesentlichen für offene und abgeschlossene Mengen in $X = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$, und gehen daher nicht weiter auf diese Komplikation ein.

18.6.3. Beziehung offen/abgeschlossen

18.6.6 Bezeichnung: Für eine Teilmenge A eines Raums X nennen wir die Menge

$$\complement_X A := X \backslash A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

das Komplement von A (in X). Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir auch kurz

$$\complement A := \complement_X A\,.$$

18.6.7 Bemerkung: Für alle $A \subset X$ gilt:

- $A = \complement\complement A$.
- $A \cap \complement A = \varnothing$.
- $A \cup \complement A = X$.

18.6.8 Satz: $O \subset X$ ist offen in $X \iff A = \complement O$ ist abgeschlossen in X.

Beweis Wenn A nicht abgeschlossen wäre, so gäbe es eine Folge in A, die gegen ein $x \in \complement A = O$ konvergiert. Um dieses $x \in O$ könnte man dann aber keine Umgebung in O legen, die keine Punkte von A enthält, so dass O nicht offen sein kann.
UMGEKEHRT: Wäre O nicht offen, so gäbe es einen Punkt $x \in O$, für den in jeder Umgebung Punkte aus $\complement O = A$ lägen. Dann könnte man aber eine Folge von Punkten $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x) \backslash O \subset A$ auswählen, die offenbar gegen x konvergiert.

18.6.9 Folgerung: Der Durchschnitt $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$ beliebig vieler abgeschlossener Mengen $A_1, A_2, \ldots$ ist ebenfalls abgeschlossen, ebenso die Vereinigung $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ endlich(!) vieler abgeschlossener Mengen $A_1, \ldots, A_n$.

Beweis Folgt aus Satz 18.6.2, Satz 18.6.8 und

$$\complement\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \bigcap_i \complement A_i \,.$$

18.6.10 Bemerkung:

- Es gibt also in einem metrischen Raum X offene und abgeschlossene Mengen, sowie normalerweise auch Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind. (Dies gilt nur dann nicht, wenn X sehr einfach ist, wie z.B. nur aus endlich vielen Punkten bestehend.)

- Offene und abgeschlossene Mengen gibt es in folgendem Sinne gleich viele: Die Komplementabbildung ordnet jeder offenen Menge eine abgeschlossene zu und umgekehrt.

18.6.4. Rand

18.6.11 Definition: (Abschluss, Inneres, Rand)

- Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ beliebig.

- Der Abschluss von A, genannt $\overline{A}$, bezeichnet die Menge aller Häufungspunkte von A. $\overline{A}$ ist immer abgeschlossen, und es ist die kleinste abgeschlossene Menge, welche A enthält.

- Das Innere von A, genannt $\mathring{A}$, ist die Menge aller inneren Punkte von A. $\mathring{A}$ ist immer offen, und es ist die größte offene Menge, welche in A enthalten ist.

- Es gilt also für alle Teilmengen $A \subset X$

$$\mathring{A} \subset A \subset \overline{A} \,.$$

- Der (topologische) Rand ∂A von A wird definiert als

$$\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A} \,.$$

18.6.12 Bemerkung: Der Rand ∂A ist immer eine abgeschlossene Menge, weil er der Durchschnitt der beiden abgeschlossenen Mengen $\overline{A}$ und $\complement\mathring{A}$ ist. (ERINNERUNG: $\complement M := X \backslash M$ ist das Komplement von M.)

Beispiele

- Für $A =]0,1]$ ist $\overline{A} = [0,1]$, $\mathring{A} =]0,1[$ und $\partial A = \{0,1\}$.
- Für $A =]0,1]^2$ ist $\overline{A} = [0,1]^2$, $\mathring{A} =]0,1[^2$ und $\partial A = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$.
- Für $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ ist $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$, $\mathring{A} = A$ und $\partial A = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
- Für $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ ist $\overline{A} = A$, $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ und $\partial A = S^{n-1}$.
- Für $A = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ist $\overline{A} = A$, $\mathring{A} = \varnothing$ und $\partial A = A$.
- Für $A = \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist $\overline{A} = \mathbb{R}^n$, $\mathring{A} = \varnothing$ und $\partial A = \mathbb{R}^n$.

18.6.5. Beziehung zur Stetigkeit

Erinnerung Wenn $f : X \to Y$, so ist für $B \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(B) \subset X$ definiert als $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$.

18.6.13 Satz: Man kann Stetigkeit einer Funktion $f : X \to Y$ auch über offene und abgeschlossene Mengen charakterisieren. Folgende Definitionen der Stetigkeit sind nämlich äquivalent:

1. f ist folgenstetig.
2. f ist umgebungsstetig.
3. „*Urbilder* offener Mengen sind offen“, d.h. es gilt (für alle O)

$$O \text{ offen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(O) \text{ offen in } X\,.$$

4. „*Urbilder* abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“, d.h.

$$A \text{ abgeschlossen in } Y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(A) \text{ abgeschlossen in } X$$

Beweis

$1 \Leftrightarrow 2$ Wurde schon früher gezeigt.

$3 \Leftrightarrow 4$ Dies folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil für alle Teilmengen $M \subset Y$ gilt $f^{-1}(\complement M) = \complement f^{-1}(M)$.

$2 \Rightarrow 3$ Sei $O \subset Y$ offen, $y \in O$ und $x \in X$ mit $f(x) = y$. O offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(y) \subset O$. Umgebungsstetigkeit $\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(x)$. Hieraus folgt aber $U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(x))$.

$3 \Rightarrow 2$ Sei $y = f(x)$ und $\varepsilon > 0$. Weil $U_\varepsilon(y)$ offen ist, ist auch $f^{-1}(U_\varepsilon(y))$ offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : U_\delta(x) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(y)) \Rightarrow f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(y)$.

18.6.14 Anwendung: Betrachte $X = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir hatten gesehen, dass die Normfunktion $N(x) := \|x\|$ selbst stetig ist, woraus sofort folgt:

- Weil $\{1\} \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist auch $S^{n-1} = N^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen.
- Weil $[0,1] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, ist auch die abgeschlossene Einheitskugel $N^{-1}([0,1])$ abgeschlossen.
- Weil $]-1,1[\subset \mathbb{R}$ offen ist, ist auch die offene Einheitskugel

$$\begin{aligned} N^{-1}(]-1,1[) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \in]-1,1[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} =: B_1(0) \end{aligned}$$

  offen.
- Alternative Argumentation: Wenn man $N : x \to \|x\|$ als Abbildung $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ auffasst, so ist das Invervall $[0,1[$ *offen* in $\mathbb{R}_0^+$! Und wegen der Stetigkeit von N folgt dann wieder die Offenheit von

$$B_1(0) = N^{-1}([0,1[) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant \|x\| < 1\}\,.$$

18.6.6. Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen

18.6.15 Definition: Es seien X, Y metrische Räume, $M \subset X$ und $f : M \to Y$ stetig. Ferner sei $x_* \in \overline{M} \backslash M$, also ein Häufungspunkt von M, der nicht selber zu M gehört. Dann heißt f stetig fortsetzbar in x_*, wenn es eine stetige Funktion $\tilde{f} : M \cup \{x_*\} \to Y$ gibt, welche auf M mit f übereinstimmt (d.h. $f = \tilde{f}|_M$).

18.6.16 Bemerkung: Natürlich könnte man f auch in einen Punkt $x_* \in X \backslash M$ fortsetzen, der *kein* Häufungspunkt von M ist. Das ist aber eher uninteressant, weil man dann $\tilde{f}(x_*)$ beliebig wählen kann.

18.6.17 Kriterium: Es gelten die Voraussetzungen der vorhergehenden Definition. Dann ist f stetig fortsetzbar in x_* mit dem Wert y_*, sofern eine der folgenden Bedingungen gilt:

- Es gilt

$$\lim_{x \in M, x \to x_*} f(x) = y_*\,,$$

  d.h. für alle in M verlaufenden Folgen (x_n) mit Grenzwert x_* gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_*$.
- Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für alle $x \in M$ mit $d(x, x_*) < \delta$ gilt $d(f(x), y_*) < \varepsilon$.

Beweis Die Bedingungen beschreiben gerade die Stetigkeit der mit fortgesetzten Funktion in x_*.

Beispiele

- Der wichtigste Spezialfall ist hier sicherlich $X = Y = \mathbb{R}$ und wir betrachten einige Beispiele in diesem Zusammenhang:
- Die auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definierte Funktion $x \sin(\frac{1}{x})$ ist stetig fortsetzbar in 0 mit dem Wert 0, weil für alle gegen Null konvergente Folgen wegen $|f(x_n)| \leqslant |x_n|$ auch $f(x_n)$ gegen 0 konvergiert.
- Im Gegensatz dazu ist die auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definierte Funktion $\sin(\frac{1}{x})$ nicht stetig fortsetzbar in 0, weil man je nach Wahl der Folge x_n mit Grenzwert 0 jeden beliebigen Wert in $[-1, 1]$ als Grenzwert der Funktionswerte $y_n = f(x_n)$ erreichen kann.
- Die auf $M = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definierte Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ist stetig fortsetzbar im Punkt 0 durch den Wert 1, weil auf M gilt

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k}$$

  Offenbar besitzt die Funktion daher auf M eine alternative Darstellung als eine in ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe, die dann natürlich stetig in 0 ist und offenbar dort den Wert 1 hat. Weil diese Funktion in Anwendungen öfter auftritt, hat man ihr sogar einen eigenen Namen (Sinus cardinalis) gegeben.

18.6.7. Kompakte Mengen

Erinnerung Ein Häufungspunkt (HP) x_* einer Folge (x_n) ist ein Punkt, für den in jeder Umgebung unendlich viele Folgenglieder liegen. Für jeden HP x_* einer Folge (x_n) gibt es eine Teilfolge $(x_{\tau(k)})$, die gegen x_* konvergiert.

18.6.18 Definition:

- Ein metrischer Raum X heißt kompakt, wenn jede Folge (x_n) in X einen Häufungspunkt $x_* \in X$ besitzt.
- Ebenso heißt eine Teilmenge $A \subset X$ kompakt, wenn jede Folge (x_n) in A (d.h. alle x_n sind Elemente von A) einen Häufungspunkt $x_* \in A$ besitzt.

18.6.19 Bemerkung:

- Der zweite Satz in der vorstehenden Definition ist eigentlich überflüssig, weil eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums wieder ein metrischer Raum ist (mit derselben Metrik).
- Allerdings liegt in Anwendungen oft gerade diese Situation vor, wie z.B. der nichtkompakte metrische Raum $X = \mathbb{R}^n$ und $A \subset X$ kompakt.

Beispiele

- $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt, weil z.B. die Folge $x_n = n$ keinen HP besitzt.
- $]0,1[$ ist nicht kompakt, weil z.B. die Folge $x_n = \frac{1}{2n}$ keinen HP in $]0,1[$ besitzt.
- $[0,1]$ oder auch jedes andere abgeschlossene Intervall $[a,b]$ ist nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß kompakt.

18.6.20 Definition: Wir betrachten den $\mathbb{R}^n$ versehen mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt : $\Longleftrightarrow$ es gibt ein $R > 0$ mit $\|x\| < R$ für alle $x \in A$.

Beispiele

- $A =]0,1[\cup \{5 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.
- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = 0\}$ ebenfalls (warum?)
- $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$ ist nicht beschränkt (warum?)

18.6.21 Satz: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist *kompakt* $\Longleftrightarrow$ A ist *beschränkt* und *abgeschlossen*.

Beweis

$\Rightarrow$ Für ein unbeschränktes $A \subset X$ könnte man eine Folge x_n in A mit $\|x_{n+1}\| > \|x_n\| + 1$ konstruieren, welche nicht konvergieren kann. Und wenn A nicht abgeschlossen wäre, so gäbe es eine Folge in A, die gegen ein $x_* \in X \backslash A$ *konvergierte* und somit keinen weiteren HP in A haben könnte.

$\Leftarrow$ Jede Folge x_n in A ist beschränkt und hat daher nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $x_* \in \mathbb{R}^n$. Somit gibt es aber eine Teilfolge $x_{\tau(n)}$ in A, die gegen x_* konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit von A muss dann auch x_* wieder in A liegen.

18.6.22 Anwendung:

- Abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sind kompakt.
- $]0,1[$ ist nicht kompakt.
- $[0, +\infty[$ ist nicht kompakt.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen, somit kompakt.

18.6.23 Definition: Es sei $f : X \to \mathbb{R}$. Eine Maximalstelle von f ist ein Punkt $x_{\max} \in X$, für den der Funktionswert $f(x_{\max})$ gleich dem Maximum aller Funktionswerte ist, d.h.

$$f(x_{\max}) = \max_{x \in X} f(x)\,, \text{ bzw. } \quad \forall x \in X : \; f(x_{\max}) \geqslant f(x)\,.$$

Eine Minimalstelle von f ist ein Punkt $x_{\min} \in X$, für den gilt

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in X} f(x)\,, \text{ bzw. } \quad \forall x \in X : \; f(x_{\min}) \leqslant f(x)\,.$$

Extremalstelle ist der Oberbegriff für „Maximal- oder Minimalstelle“.

18.6.24 Satz: (Extremalstellen auf kompakten Mengen) Wenn $X \neq \varnothing$ ein kompakter metrischer Raum ist (also z.B. $X = [a, b]$ mit $a \leqslant b$), so besitzt jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ (mindestens) eine Maximalstelle und (mindestens) eine Minimalstelle.

Beweis Für $S := \sup\{f(x) \mid x \in X\}$ gibt es eine Folge (x_n) in X mit $f(x_n) \to S$. Diese Folge muss wegen der Kompaktheit von X einen *Häufungspunkt* $x_{\max} \in X$ haben. Daher kann man aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auswählen, die tatsächlich gegen $x_{\max} \in X$ *konvergiert* (wobei die Folge der Funktionswerte $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ aber natürlich immer noch gegen S konvergiert!). Wegen der Stetigkeit von f folgt dann aber

$$f(x_{\max}) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = S\,.$$

Analog findet man eine Minimalstelle $x_{\min}$.

Beispiele

- Auf dem kompakten Intervall $X = [0, 2]$ hat die stetige Funktion $x \mapsto x^2$ das Maximum 4 an der Stelle $x_{\max} = 2$.
- Auf dem kompakten Intervall $X = [-2, 2]$ hat dieselbe Funktion das Maximum 4, und es gibt sogar zwei Maximalstellen (nämlich $x_{1/2} = \pm 2$).
- Die Funktion

  $$f(x_1, x_2, x_3) = \exp(\sin(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}))\sqrt{|\cos(x_1 x_2)|}$$

  ist stetig*, und hat daher in der Menge $B := \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 \leqslant 1\}$ mindestens eine Maximal- bzw. Minimalstelle.
- Für eine konstante Funktion sind alle Punkte des Definitionsbereichs Maximal- und Minimalstellen.
- Es sei $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$, versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und der zugehörigen Norm $\|\cdot\|$. Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die quadratische Form

  $$Q : S^{n-1} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto Q(x) := (Ax, x)$$

  stetig, und weil S^{n-1} kompakt ist, gibt es Minmal- und Maximalstellen $x_{\min} \in S^{n-1}$ bzw. $x_{\max} \in S^{n-1}$. Für symmetrische Matrizen stellt sich heraus, dass diese Punkte Eigenvektoren der Matrix A sind. Dies ist die Grundlage für die numerische Lösung von solchen symmetrischen Eigenwertproblemen.

*Eine genauere Begründung für die Stetigkeit dieser auf dem $\mathbb{R}^3$ definierten Funktion folgt später.

18.6.25 Bemerkung:

- Die Stetigkeit ist wesentlich, wie man am Beispiel

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = \begin{cases} x & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

sieht ($\frac{1}{2}$ ist Supremum der Funktionswerte, aber nicht Maximum).

- Wenn X nicht kompakt ist, so gibt es stetige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, die kein Minimum und/oder Maximum annehmen (siehe unten).
- Da viele praktische Probleme Minimierungs- oder Maximierungsaufgaben (z.B. Kostenminimierung, Gewinnmaximierung) sind, sind die Stetigkeit von $f : X \to \mathbb{R}$ und die Kompaktheit von X für die Analyse solcher Probleme oft wichtig.

Beispiele

- Auf $X = [0,2[$ hat die Funktion $x \mapsto x^2$ eine Minimalstelle bei 0, aber keine Maximalstelle. 4 ist also Supremum, aber nicht Maximum, aller Funktionswerte.
- Auf $X = \mathbb{R}$ hat die Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ zwar eine Maximalstelle bei 0, aber keine Minimalstelle.
- Auf $X = \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $x \mapsto \exp(x)$ weder Maximum noch Minimum an.

18.6.26 Bemerkung: Wenn X nicht kompakt ist, zeigt man die Existenz von Extremalstellen einer Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ oft auf folgende Weise:

1. Man zeigt, dass Extremalstellen von f nicht außerhalb einer kompakten Menge $K \subset X$ liegen können. Dies ist insbesondere dann gegeben, wenn es Vergleichspunkte *in* K gibt, für welche die Funktionswerte größer/kleiner sind als die außerhalb K angenommenen Werte.
2. Man wendet den Satz auf die Einschränkung $f|_K : K \to \mathbb{R}$ an und erhält die Existenz von Extremalstellen in K, die dann automatisch auch Extremalstellen auf X sind.

18.6.27 Beispiel: Wir betrachten die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto e^{-\|x\|^2} \sin(x_1)\,.$$

Wir betrachten nun die kompakte Menge $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant \frac{\pi}{2}\}$, und beobachten, dass die Punkte $x_+ = (\frac{\pi}{2}, 0, \ldots, 0)$ und $x_- = (-\frac{\pi}{2}, 0, \ldots, 0)$ in K liegen. Diese nehmen wir als Vergleichspunkte. Außerhalb von K gilt wegen $\|x\| > \frac{\pi}{2}$ offenbar

$$|f(x)| \leqslant e^{-\|x\|^2} < e^{-\frac{\pi^2}{4}}\,,$$

und wir sehen, dass wegen $f(x_\pm) = \pm e^{-\frac{\pi^2}{4}}$ das Minimum/Maximum der Funktionswerte dort nicht angenommen werden kann. Innerhalb der kompakten Menge K müssen hingegen sowohl Minimal- als auch Maximalstellen von f liegen, für die natürlich auch gilt

$$f(x_{\min}) \leqslant f(x_-) = -e^{-\frac{\pi^2}{4}} \text{ und } f(x_{\max}) \geqslant f(x_+) = e^{-\frac{\pi^2}{4}}\,.$$

FRAGE: Wie berechnet man die genaue Position dieser Extremalstellen? ANTWORT: Werden wir bald sehen...

18.7. Der „eindimensionale“ Fall

Frage Bisher waren zwar viele der Beispiele Funktionen mit Definitions- und Bildbereich $\mathbb{R}$, die Sätze waren aber sehr allgemein gültig. Gibt es auch wichtige Sätze, die nur für den speziellen „eindimensionalen“ Fall von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder $f : [a, b] \to \mathbb{R}$) gelten?

18.7.1 Satz: (Nullstellensatz) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, und es gelte $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$ (d.h. $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedenes Vorzeichen oder eines der beiden ist 0). Dann besitzt f eine Nullstelle im Intervall $[a, b]$ (d.h. es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$).

Beweis

- Man konstruiert eine Intervallschachtelung durch Halbierung (sog. Halbierungsverfahren oder Bisektionsverfahren):
  1. Setze $[a_0, b_0] := [a, b]$ und $k = 0$.
  2. Setze $c_k := \frac{a_k + b_k}{2}$ und $[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, c_k] & f(a_k) \cdot f(c_k) \leqslant 0 \\ [c_k, b_k] & \text{sonst} \end{cases}$.
- Die Folgen (a_k) und (b_k) müssen nach dem folgenden Satz (Intervallschachtelung) gegen ein $\xi \in [a, b]$ konvergieren.
- Wegen der Stetigkeit ist dann aber $f(\xi)$ Grenzwert zweier Folgen $(f(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ und $(f(b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit unterschiedlichen Vorzeichen und muss daher 0 sein.

18.7.2 Satz: (Intervallschachtelung) (a_n) sei eine monoton wachsende und (b_n) eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$, die außerdem $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n$ sowie $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$ erfüllen. Dann existiert der Wert

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

ZUSATZ: Wenn (c_n) eine dritte Folge ist mit $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, so gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = \xi$.

Beweis

- Sowohl (a_n) als auch (b_n) sind monoton und beschränkt und konvergieren daher gegen Grenzwerte $a_* \in \mathbb{R}$ bzw. $b_* \in \mathbb{R}$.
- Es muss aber $a_* = b_*$ gelten, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_* - b_*| \leqslant |a_* - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b_*| .$$

- Die rechte Seite wird aber für $n \to \infty$ beliebig klein, weshalb $a_* = b_*$ gelten muss.
- Ein analoges Argument zeigt, dass auch (c_n) diesen Grenzwert hat.

18.7.3 Satz: (Zwischenwertsatz) Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert $c \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ an.

Beweis Wende den Nullstellensatz auf die Funktion $\tilde{f}(x) := f(x) - c$ an.

18.7.4 Bemerkung:

- Das im Beweis des Nullstellensatzes verwendete Halbierungsverfahren nennt man auch Bisektionsverfahren.
- Es ist praktisch durchaus anwendbar, um nichtlineare Gleichungen (approximativ) zu lösen.
- Das zugehörige Programm könnte in Scilab ungefähr so aussehen:

```
function solution = bisection(f,y,eps,a,b)
  while abs(b-a)>eps
    c = (a+b)/2;
    disp(c);
    if (f(a)-y)*(f(c)-y)<0
       b=c;
    else
       a=c;
    end
  end
  solution=a;
endfunction
```

- ANWENDUNG: Approximiere die Lösung von $x \exp(x) = 1$ in $[0, 1]$.
  (Es ergibt sich der Wert: $0.56714329\ldots$)

18.7.5 Anwendung: (Nullstellensatz für reelle Polynome) Jedes reelle Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ hat für ungerades $n \in \mathbb{N}$ wenigstens eine Nullstelle $\xi \in \mathbb{R}$.

Beweis Ohne Einschränkung sei $a_n = 1$ (sonst teile durch a_n). Man beobachtet dann, dass $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$. Somit kann man für ausreichend großes $R > 0$ den Nullstellensatz anwenden und erhält die Existenz einer Nullstelle $\xi \in [-R, R]$.

18.7.6 Bemerkung: Für Nullstellen- und Zwischenwertsatz gibt es mehrdimensionale Verallgemeinerungen (Windungszahl, Abbildungsgrad), bei denen aber bereits die Aussage viel schwieriger zu formulieren ist. Mit diesen Verallgemeinerungen kann man dann zum Beispiel den Fundamentalsatz der Algebra „Jedes nichtkonstante Polynom hat wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$“ analog zum eben geführten Beweis erhalten.

18.7.7 Satz: (Umkehrfunktion)

- Sei $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ streng monoton wachsend und stetig.
- Dann gibt es eine eindeutig bestimmte und stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$.

Beweis

- Nach dem Zwischenwertsatz gibt es zu $y \in [f(a), f(b)]$ wenigstens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$, so dass f surjektiv ist.
- f muss auch injektiv sein, weil für $x_1 < x_2$ mit $y = f(x_1) = f(x_2)$ die strenge Monotonie verletzt wäre.
- Daher ist f bijektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} eindeutig definiert. Es bleibt also nur zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist.
- Wenn nicht, so gäbe es ein $y_* \in [f(a), f(b)]$ mit $x_* = f^{-1}(y_*)$ und eine Folge $y_k \to y$, so dass $x_k := f^{-1}(y_k) \not\to x_*$.
- Weil $[a, b]$ kompakt ist, muss (x_k) daher mindestens einen anderen HP $\xi \neq x_*$ in $[a, b]$ haben, für den aber wegen der Stetigkeit von f ebenfalls $f(\xi) = y_*$ gelten muss.
- Dies ist aber ein Widerspruch zur oben bewiesenen Injektivität von f.

18.7.8 Verallgemeinerung:

- Alternativ kann man natürlich annehmen, dass $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$ stetig und streng monoton fallend ist. Man erhält dann ein stetiges $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b]$.
- Oder man kann annehmen, dass $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig und bijektiv ist und erhält die Existenz einer stetigen Umkehrfunktion $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$.

  Beweis: Der letzte Teil des vorstehenden Beweises (Satz über die Umkehrfunktion) verwendete sowieso nur die Bijektivität.
- Indem man (halb)offene Intervalle durch abgeschlossene approximiert („ausschöpft“), sieht man, dass der Satz auch für halboffene oder offene Intervalle gilt (wobei Urbild- als auch Bild-Intervall gleich viel offene Grenzen haben müssen).
- Das gleiche Ausschöpfungsargument zeigt auch, dass der Satz auch für solche (halb-)offenen Intervalle gilt, bei denen a und/oder c den Wert $-\infty$ und b und/oder d den Wert $+\infty$ haben.

18.7.9 Anwendungen:

- Weil $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$, zeigt der Satz, dass die n-te Potenz $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^n$ eine stetige Umkehrfunktion besitzt, die man n-te Wurzel $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ nennt.
- Wenn man den Satz auf den Intervallen $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ und $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ anwendet, sieht man, dass die Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \exp(x)$ eine stetige Umkehrfunktion $\exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ besitzt, die man den natürlichen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ nennt.
- Auch die Funktion $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x \exp(x)$ besitzt eine stetige Umkehrfunktion, der man aber (noch) keinen speziellen Namen gegeben hat. Man kann sie trotzdem (z.B. mit dem Halbierungsverfahren) problemlos berechnen.

18.8. Stetigkeit im mehrdimensionalen Fall

18.8.1. Normäquivalenz

Voraussetzung Wir nehmen an, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ der Abstand mit Hilfe einer Norm gemessen wird.

Frage Macht es einen Unterschied, welche Norm zur Definition der Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ verwendet wird?

Antwort Quantitativ ja, aber qualitativ nein, weil sich zwei unterschiedliche Normen mit Konstanten gegeneinander abschätzen lassen, d.h. zu beliebigen Normen $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_\#$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad c_1\|x\|_* \leqslant \|x\|_\# \leqslant c_2\|x\|_* .$$

18.8.1 Bemerkung: Wir haben bereits gesehen, dass für $n = 1$ sogar die Gleichheit $\|x\|_\# = c\|x\|_*$ gelten muss (also $c_1 = c_2 = c$).

18.8.2 Beispiel:

- Wir betrachten den Fall $\mathbb{R}^2$ (also $n = 2$) und die Normen $\|\cdot\|_\# = \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_\infty$.
- Dann gilt für alle $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leqslant \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = \|x\|_2$$

- sowie wegen $|x_1| \leqslant \|x\|_\infty$ und $|x_2| \leqslant \|x\|_\infty$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leqslant \sqrt{2\|x\|_\infty^2} = \sqrt{2}\|x\|_\infty .$$

- Folglich können wir $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $c_2 = 2$ wählen.
- Bemerkung: Diese Wahl von Konstanten ist auch optimal, d.h. c_1 darf nicht größer und c_2 nicht kleiner gewählt werden. Wenn man nämlich die obigen Abschätzungen genauer betrachtet, sieht man, dass es in beiden Fällen bestimmte Vektoren gibt (welche?), bei denen Gleichheit gilt.

18.8.3 Satz: Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n$ versehen mit der Euklidischen Norm (EN) $\|\cdot\|$. Es bezeichne $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \|x\|_\sim$ irgendeine andere Norm (d.h. N erfüllt (N1) Definitheit, (N2) Homogenität, (N3) Dreiecksungleichung). Dann gilt

1. Die Funktion N ist stetig *bezüglich der EN* $\|\cdot\|$.
2. Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass

$$c_1\|x\| \leqslant N(x) \leqslant c_2\|x\| , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

Beweis

- Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis.
- Es gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|N(x) - N(y)| \leqslant N(\underbrace{x-y}_{=:v}) = N(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i)$$
$$\overset{\text{(N2),(N3)}}{\leqslant} \sum_{i=1}^{n} |v_i| N(e_i) \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \|v\| \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} N(e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=:C>0 \text{ wegen (N1)}} = C\|x-y\| .$$

- Dies ist aber gerade eine Eigenschaft von N, welche man Lipschitz-Stetigkeit nennt, und aus welcher die Stetigkeit von N folgt (siehe Übung).
- Auf der kompakten Einheitssphäre S^{n-1} nimmt die stetige Funktion N dann ein Maximum $c_1 > 0$ und ein Minimum $c_2 > 0$ an.
- Das heißt aber
$$c_1 \leqslant N(x) \leqslant c_2 , \quad x \in S^{n-1} ,$$
woraus folgt
$$c_1 \leqslant N(\frac{x}{\|x\|}) \leqslant c_2 , \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} .$$
- Dies ist aber wegen (N2) gleichbedeutend mit
$$c_1\|x\| \leqslant N(x) \leqslant c_2\|x\| , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

18.8.4 Folgerung: (Normäquivalenz) Es seien $\|\cdot\|_*, \|\cdot\|_\# : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ beliebige Normen auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1\|x\|_* \leqslant \|x\|_\# \leqslant c_2\|x\|_* , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Beweis Seien $c_1^\#, c_2^\#$ bzw. c_1^*, c_2^* die Konstanten, die durch Vergleich von $\|\cdot\|_\#, \|\cdot\|_*$ mit der EN $\|\cdot\|$ entstehen. Dann gilt

$$\|x\|_* \leqslant c_2^*\|x\| \leqslant \underbrace{\frac{c_2^*}{c_1^\#}}_{=:\frac{1}{c_1}} \|x\|_\# , \quad \|x\|_\# \leqslant c_2^\#\|x\| \leqslant \underbrace{\frac{c_2^\#}{c_1^*}}_{=:c_2} \|x\|_* .$$

18.8.5 Übung: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$\forall x, y \in D : \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C\|x-y\| .$$

Man zeige, dass f auch stetig nach der ε-δ-Definition der Stetigkeit ist.
Bemerkung: $\|\cdot\|$ bezeichne die Euklidische oder irgendeine andere Norm im $\mathbb{R}^n$.

18.8.2. Folgerungen

Beobachtung Aus der Normäquivalenz ergibt sich, dass die folgenden *qualitativen* Eigenschaften unabhängig von der zur Abstandsmessung verwendeten Norm definiert sind:

- Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^n$.
- Offenheit, Abgeschlossenheit oder Kompaktheit einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$.
- Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ oder allgemeiner einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ für $D \subset \mathbb{R}^n$.
  (In diesem Fall können die Normen sowohl im Urbild $\mathbb{R}^n$ als auch im Bild $\mathbb{R}^m$ beliebig gewählt werden.)

18.8.6 Bemerkung:

- Aber: In der Praxis braucht man quantitative Aussagen und eine geschickte Wahl der Normen wird wichtig!
- So erfüllt zum Beispiel die Abbildung $f : x \mapsto Qx$ für eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Euklidischen Norm die Abschätzung

$$\|Qx - Qy\|_2 = \|Q(x-y)\|_2 = \|x-y\|_2 .$$

- Für die Maximumsnorm ergibt sich für dieselbe Abbildung dagegen nur

$$\|Qx - Qy\|_\infty = \|Q(x-y)\|_\infty \leqslant \sqrt{n}\|x-y\|_\infty .$$

  (Beispiel: Drehung von $x - y = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ um den Winkel $45°$.)
- Für viele andere Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist dagegen die Wahl von $\|\cdot\|_\infty$ (Maximumsnorm) und $\|\cdot\|_1$ (Summennorm) in Urbildraum $\mathbb{R}^n$ bzw. Bildraum $\mathbb{R}^m$ angenehmer, weil sich die optimale Stetigkeitskonstante $C_{p,q}$ in der Ungleichung

$$\|Av\|_q \leqslant C_{p.q}\|v\|_p$$

  für $p, q \in \{1, \infty\}$ sehr einfach aus A berechnen lässt.

  Beispiel: $C_{\infty,\infty} = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

18.8.3. Komponentenweise Stetigkeitsanalyse

18.8.7 Satz: Es sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ und $x_* \in \mathbb{R}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $x_k \to x_*$ für $k \to \infty$ in einer beliebigen Norm.

- Für jedes $i = 1, \dots, n$ konvergiert die i-te Komponente $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen die i-te Komponente $x_{*,i}$ von x_*.

Anders ausgedrückt gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} x_{k,1} \\ \vdots \\ x_{k,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty} x_{k,1} \\ \vdots \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{k,n} \end{pmatrix}.$$

Beweis

$\Rightarrow$ Dies folgt wegen

$$|x_{k,i} - x_{*,i}| \leqslant \|x_k - x_*\|_\infty \to 0 \quad (k \to \infty)$$

$\Leftarrow$ Wenn jede Komponente $x_{k,i}$ gegen $x_{*,i}$ konvergiert, so gilt

$$\|x_k - x_*\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_{k,i} - x_{*,i}| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

18.8.8 Anwendungen:

- Die Projektionen

$$\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i$$

sind stetig.

- Allgemeiner sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist die lineare Funktion

$$x \mapsto Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

stetig.

- Multivariate Polynome $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (d.h. p ist ein Polynom bezüglich x_k $(k = 1, \dots, n)$, wenn man die anderen Variablen als konstant ansieht) sind stetig.

  Beispiel: Für $p(x_1, x_2) = x_1x_2 + 2x_1^2x_2^3$ erhält man für jede Folge $x \to x_*$

$$\lim_{x\to x_*} p(x) = \lim_{x\to x_*} (x_1x_2 + 2x_1^2x_2^3) \overset{\text{Grenzwertsätze}}{=} x_{*,1}x_{*,2} + 2x_{*,1}^2x_{*,2}^3 = p(x_*).$$

- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ der Form

$$f : x \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

ist stetig $\iff$ alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind stetig.

18.8.4. Arithmetik mit stetigen Funktionen

18.8.9 Motivation: Die gerade beobachtete Stetigkeit von linearen Abbildungen oder multivariaten Polynomen ist ein Spezialfall der folgenden abstrakteren Betrachtungen.

Wissen Es sei X irgendeine Menge.

- Wir können vektorwertige Funktionen $f : X \to \mathbb{R}^m$ addieren gemäß
$$f + g : X \to \mathbb{R}^m\,,\ x \mapsto f(x) + g(x)$$
und mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ skalieren gemäß
$$\alpha f : X \to \mathbb{R}^m\,,\ x \mapsto \alpha f(x)\,.$$
- Wir können $\mathbb{R}$-wertige (oder auch $\mathbb{C}$-wertige) Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ multiplizieren gemäß
$$h = fg = f \cdot g : X \mapsto \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f(x) \overset{\mathbb{R}}{\cdot} g(x)$$
und dividieren gemäß
$$h = \frac{f}{g} : X \mapsto \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$
sofern $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

18.8.10 Satz: Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt

- Wenn $f, g : X \to \mathbb{R}^m$ stetig sind und $\alpha \in \mathbb{R}$, so sind auch die Summe $f + g$ und die Skalierung αf stetig.
- Wenn $f, g : X \to \mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{C}$) stetig sind, so ist auch das Produkt fg stetig.
- Wenn $f : X \to \mathbb{R}$ und $g : X \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig sind, so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ stetig.

Beweisskizze Dies folgt direkt aus den Grenzwertsätzen für Folgen. Zum Beispiel folgt die Stetigkeit des Produkts wegen

$$\lim_{x\to x_*}(fg)(x) = \lim_{x\to x_*} f(x)g(x) = (\lim_{x\to x_*} f(x))(\lim_{x\to x_*} g(x))$$
$$= f(x_*)g(x_*) = (fg)(x_*)\,.$$

18.8.11 Anwendung: Die Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 e^{x_2} \\ \frac{\sin(x_1)}{x_1^2 - x_2^2} \\ x_1^5 x_2 + 5x_2^7 \end{pmatrix}$$

ist stetig auf ihrem Definitionsbereich

$$D := \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \neq |x_2|\}$$

aufgrund folgender Argumentation:

- Die Projektionen $\pi_1 : x \mapsto x_1$ und $\pi_2 : x \mapsto x_2$ sind stetig.
- Wir wissen auch bereits, dass Potenzbildung, Exponentialfunktion und Sinus stetige Funktionen in $\mathbb{R}$ sind.
- Folglich sind die erste und dritte Komponente von f als Verkettung, Produkt und Summe stetiger Funktionen wieder stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$.
- Die zweite Komponente ist aber nur stetig, wenn der Nenner $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$, was aber gerade in D der Fall ist.
- Auf D sind also alle Komponenten von f stetig, somit ist dort auch f stetig.

18.9. Räume stetiger Funktionen

18.9.1 Definition: Es sei (X, d) eine beliebiger metrischer Raum und $m \geqslant 1$. Dann setzen wir

$$C^0(X, \mathbb{R}^m) := \{f : X \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist stetig}\}.$$

Den Spezialfall $C^0(X, \mathbb{R}^1) = C^0(X, \mathbb{R})$ bezeichnet man oft auch einfach als $C^0(X)$.

18.9.2 Bezeichnung: Das C stammt vom englischen "continuous" (stetig). Der „Exponent" 0 kennzeichnet die Differenzierbarkeitsstufe, weil wir später mit $C^k(X, \mathbb{R})$ die Menge derjenigen Funktionen bezeichnen wollen, für welche sogar die k-ten Ableitungen noch stetig sind.

Beobachtungen Die Ergebnisse des vorigen Abschnitts lassen sich nun wie folgt interpretieren:

- Die Menge $C^0(X, \mathbb{R}^m)$ ist ein Vektorraum, weil für Summe und Skalierung von Elementen $f, g \in C^0(X, \mathbb{R}^m)$ gilt $f + g \in C^0(X, \mathbb{R}^m)$ und $\alpha f \in C^0(X, \mathbb{R}^m)$.
- Im Fall $m = 1$ gibt es auf der Menge $C^0(X, \mathbb{R}^m) = C^0(X, \mathbb{R}) = C^0(X)$ auch eine Multiplikation.
- Diese Multiplikation hat ein Einselement, nämlich einfach die konstante Funktion $f(x) = 1$.
- Funktionen g, die nirgends Null sind, haben multiplikative Inverse $\frac{1}{g}$.

18.9.3 Bemerkung:

- Auch auf solchen Funktionenräumen kann man Normen einführen, wie zum Beispiel auf $C^0([0,1])$ die L^∞-Norm (Maximumsnorm)

$$\|f\|_{L^\infty([0,1])} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

oder die früher erwähnte L^2-Norm

$$\|f\|_{L^2([0,1])} := \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}$$

- Allerdings sind diese beiden Normen anders als im endlich-dimensionalen Fall nicht mehr „äquivalent“ und auch Folgenkonvergenz und Stetigkeit gelten nicht mehr unabhängig von der verwendeten Norm.

  BEISPIEL: Man untersuche die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ auf Konvergenz unter Verwendung von $\|\cdot\|_{L^\infty([0,1])}$ bzw. $\|\cdot\|_{L^2([0,1])}$.

- Mit dieser viel komplizierteren Situation beschäftigt sich ein Teilbereich der Analysis namens Funktionalanalysis.

18.10. Philosophisches

18.10.1 Bemerkung: Man mache sich am Ende dieses Kapitels noch Folgendes klar:

- Stetigkeit ist eine Eigenschaft mathematischer Modelle. Solche Modelle beschreiben aber reale Phänomene nur approximativ!

- Insbesondere kann man in der Realität weder die erreichte Genauigkeit ε für die Ausgangsgrößen beliebig genau messen, noch die Genauigkeit δ für die Eingangsgrößen beliebig genau festlegen.

- Manchmal will man das nicht einmal, weil man genau weiß, dass das beschriebene Phänomen auf sehr kleinen Skalen unstetig ist (z.B. entstehen manche physikalische Gesetze durch Mittelung über unstetige Prozesse).

- Es reicht aber aus, wenn ein durch ein stetiges f gegebenes mathematisches Modell die Realität in *praktisch relevanten* Bereichen von ε und δ gut approximiert.

Teil V.

Analysis

19. Differentialrechnung

Beobachtung In vielen praktischen Problemen ist die Änderungsrate einer Größe so wichtig wie die Größe selbst.

Beispiele

- Für eine Bewegungskurve $s : [0, T] \to \mathbb{R}^3$ (Zeit $\to$ Ort) ist die Geschwindigkeit (Änderungsrate des Orts) oft so interessant wie der Ort s selbst (wie schnell ist das Flugzeug, das Auto, die Gewehrkugel, etc.).
- Beim radioaktiven Zerfall ergibt sich die Strahlung aufgrund der Änderung der Gesamtmenge einer radioaktiven Substanz.
- Maxwell-Gleichungen: Die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes induziert ein magnetisches Feld und umgekehrt.
- Die „Neuverschuldung“ im Bundeshaushalt.
- Der „Konzentrationsgradient“ von in einem Fluid (Wasser, Luft) enthaltenen Substanzen bestimmt die Richtung des „Diffusionsstroms“.
- Das „Wohlstandsgefälle“, welches zum Beispiel die Richtung von Migrationsbewegungen mitbestimmt.

Ziel Wir wollen solche „Änderungsraten“ mathematisch präzise definieren und analysieren.

19.1. Eindimensionale Differentialrechnung

19.1.1. Die Ableitung

Voraussetzung Wir setzen im folgenden voraus: $\Omega \subset \mathbb{R}$ sei offen, d.h. jeder Punkt $x \in \Omega$ besitzt eine Umgebung, die ganz in Ω enthalten ist. BEISPIELE: $\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ oder $\Omega =]0, 1[$.

19.1.1 Bezeichnung: Ω wird von Mathematikern oft als Bezeichnung für eine offene Menge gewählt. Da man solche offenen Bereiche aber auch als „Gebiet“ bezeichnet, sind auch die lateinischen Buchstaben G (Gebiet) oder D (*domain*) gebräuchlich. Allerdings wird g für Funktionen und d für die Differentialnotation gebraucht, so dass wir Ω verwenden.

19.1.2 Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $x_* \in \Omega$. Dann heißt f differenzierbar im Punkt x_*, wenn es ein $\alpha = \alpha(x_*) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\Omega\backslash\{x_*\}$ mit $x_k \to x_*$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_*)}{x_k - x_*} = \alpha\,.$$

f heißt differenzierbar, wenn f differenzierbar ist für alle $x_* \in \Omega$. Die Funktion $\Omega \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha(x)$ nennt man die Ableitung von f und bezeichnet sie mit f'.

19.1.3 Schreibweise: Statt der obigen genauen Spezifikation einer Folge x_k in $\Omega\backslash\{x_*\}$ und

$$f'(x_*) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k) - f(x_*)}{x_k - x_*}$$

werden wir im folgenden einfach schreiben

$$f'(x_*) = \lim_{x_*\neq x\to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

oder noch einfacher

$$f'(x_*) = \lim_{x\to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}\,.$$

Manchmal führt man auch die Differenz $h = x - x_*$ ein und schreibt den Differenzenquotienten als

$$f'(x_*) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_* + h) - f(x_*)}{h}\,.$$

Weil der Differenzenquotient eine Differenz $\Delta f = f(x) - f(x_*)$ von f-Werten durch eine Differenz von x-Werten $\Delta x = x - x_*$ teilt, gibt es auch die (von Leibniz stammende) Schreibweise

$$f'(x_*) = \frac{df}{dx}(x_*) \quad \left[= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\right]$$

19.1.4 Interpretation: Geometrisch kann man den obigen Differenzenquotienten als Steigung einer Geraden durch die Punkte $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_* \\ f(x_*) \end{pmatrix}$ interpretieren und die Ableitung $f'(x_*)$ als die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\begin{pmatrix} x_* \\ f(x_*) \end{pmatrix}$. Diese Tangente ist die (affin-)lineare Funktion $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche gegeben ist als

$$l(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*)\,.$$

19.1.5 Bemerkung:

- Wenn Ω nicht als offen vorausgesetzt wäre, stünde man vor dem Problem, was man mit Definitionsbereichen wie $\Omega = \{0\}$ machen sollte, bei denen 0 nicht durch andere Punkte aus Ω approximiert wird.

- Differenzierbarkeit ist eine stärkere Anforderung an f als Stetigkeit: wenn f differenzierbar in x_* ist, so gilt ja für beliebige gegen x_* konvergente Folgen

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} (f(x_k) - f(x_*)) &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{f(x_k) - f(x_*)}{x_k - x_*} (x_k - x_*) \right) \\ &= f'(x_*) \lim_{k\to\infty} (x_k - x_*) = 0\,, \end{aligned}$$

was Stetigkeit in x_* impliziert.

Beispiele

- Für $c \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ differenzierbar wegen

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \lim_{x \to x_*} \frac{c - c}{x - x_*} = 0\,.$$

  Es gilt daher $f'(x_*) = 0$ für alle $x_* \in \mathbb{R}$ (oder genauer: die Ableitung f' ist die konstante Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$).

- Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die affin-lineareFunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \alpha x + \beta$ differenzierbar wegen

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} &= \lim_{x \to x_*} \frac{\alpha x + \beta - \alpha x_* - \beta}{x - x_*} \\ &= \lim_{x \to x_*} \frac{\alpha(x - x_*)}{x - x_*} = \alpha\end{aligned}$$

  Die Ableitung ist die konstante Funktion $f'(x) = \alpha$ (oder genauer: die konstante Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha$).

- Die quadratische Fuktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist differenzierbar wegen

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = \lim_{x \to x_*} \frac{x^2 - x_*^2}{x - x_*} = \lim_{x \to x_*} (x + x_*) = 2x_*$$

  Die Ableitung ist daher die Funktion $f'(x) = 2x$ (genauer $f' : x \mapsto 2x$).

- Allgemeiner: Die Funktion

$$f : x \mapsto x^n$$

  besitzt die Ableitung

$$f' : x \mapsto n x^{n-1}$$

  wegen

$$\begin{aligned}&\lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} \\ &= \lim_{x \to x_*} \frac{x^n - x_*^n}{x - x_*} \\ &= \lim_{x \to x_*} (x^{n-1} + x^{n-2} x_* + \ldots + x x_*^{n-2} + x_*^{n-1}) \\ &= n x_*^{n-1}\,.\end{aligned}$$

- Die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$$

ist nicht differenzierbar in $x = 0$: es gilt nämlich

$$\lim_{0<h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{0>h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{0<h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

und

$$\lim_{0>h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{0>h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{0>h\to 0} \frac{-h}{h} = -1\,.$$

Weil je nach Folge unterschiedliche Grenzwerte auftreten können, ist die Betragsfunktion in $x = 0$ nicht differenzierbar.

19.1.2. Rechenregeln und weitere Beispiele

19.1.6 Satz: Die Ableitung (Differenziation) ist linear: Wenn $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind, so gilt

- Die Funktion $h = f + g : \Omega \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, und es gilt $h' = f' + g'$.
- Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $h = \alpha f : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $h' = \alpha f'$.

Beweis Anwendung der Grenzwertsätze auf den Grenzwert des Differenzenquotienten (Summe und skalares Vielfaches von Folgen).

19.1.7 Folgerung: Das Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ besitzt die Ableitung

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a_{k+1}(k+1)}_{b_k} x^k\,.$$

19.1.8 Satz: (Differenzierbarkeit von Potenzreihen) Die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

habe den Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f differenzierbar in $\Omega :=]x_0 - R, x_0 + R[$, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k\,, \quad b_k = a_{k+1}(k+1)$$

Beweisskizze Die Stetigkeit von Potenzreihen wissen wir bereits aus Anwendung 18.3.9. Wenn gliedweises Differenzieren unendlicher Reihen erlaubt wäre, wäre der Beweis analog zum vorstehenden Differentiationssatz für Polynome. Leider ist aber das Vertauschen eines Grenzwerts (wie $x \to x_*$ in der Ableitung) mit einer unendlicher Summe nicht allgemein gültig, wie man zum Beispiel an

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{nk} = 1 \neq 0 = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \delta_{nk}$$

sieht (δ_{nk}: Kronecker-Delta). In diesem Fall geht es aber, weil der „Schwanz“ der Reihe in einer Umgebung von x_* unabhängig von n klein gemacht werden kann (vergleiche auch den Beweis der Stetigkeit einer Potenzreihe in ihrem Konvergenzkreis).

19.1.9 Folgerungen:

- Die Exponentialfunktion $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die Ableitung

$$\exp'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)\,.$$

- $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ hat die Ableitung $\cos(x)$.
- $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ hat die Ableitung $-\sin(x)$.

19.1.10 Satz: Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in $x \in \Omega$). Dann gilt:

- Produktregel: $f \cdot g : \Omega \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in x mit

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

- „Kehrwertregel“: Auf $\Omega' := \{x \in \Omega \mid g(x) \neq 0\}$ ist $h = \frac{1}{g} : \Omega' \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$h'(x) = \frac{-g'(x)}{(g(x))^2}\,, \quad x \in \Omega'\,.$$

- Quotientenregel: Sei $\Omega' := \{x \in \Omega \mid g(x) \neq 0\}$. Dann ist $h = \frac{f}{g} : \Omega' \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,, \quad x \in \Omega'\,.$$

Beweis

- Produktregel: Mit $h(x) = f(x)g(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
h'(x_*) &= \lim_{x \to x_*} \frac{h(x) - h(x_*)}{x - x_*} \\
&= \lim_{x \to x_*} \frac{f(x)g(x) - f(x_*)g(x_*)}{x - x_*} \\
&= \lim_{x \to x_*} \left(\frac{(f(x) - f(x_*))g(x) + f(x_*)(g(x) - g(x_*))}{x - x_*} \right) \\
&= \lim_{x \to x_*} \frac{(f(x) - f(x_*))g(x)}{x - x_*} + \lim_{x \to x_*} \frac{f(x_*)(g(x) - g(x_*))}{x - x_*} \\
&= f'(x_*)g(x_*) + f(x_*)g'(x_*)\,.
\end{aligned}$$

- Kehrwertregel:

$$\begin{aligned} h'(x_*) &= \lim_{x\to x_*} \frac{h(x)-h(x_*)}{x-x_*} \\ &= \lim_{x\to x_*} \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_*)}}{x-x_*} \\ &= \lim_{x\to x_*} \frac{\frac{g(x_*)-g(x)}{g(x)g(x_*)}}{x-x_*} \\ &= \lim_{x\to x_*} \frac{1}{g(x)g(x_*)} \frac{g(x_*)-g(x)}{x-x_*} \\ &= -\frac{1}{(g(x_*))^2} g'(x_*)\,. \end{aligned}$$

- Quotientenregel: Diese ergibt sich aus den beiden vorhergehenden Regeln.

19.1.11 Beispiel: Die Tangensfunktion ist definiert als

$$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}\,,\quad x\mapsto\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

Ihre Ableitung berechnet sich als

$$\tan'(x)=\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'=\frac{\overbrace{(\cos(x))^2+(\sin(x))^2}^{=1}}{(\cos(x))^2}=\begin{cases}\frac{1}{(\cos(x))^2}\\ 1+(\tan(x))^2\end{cases}$$

(je nach Anwendung ist der obere oder der untere Ausdruck nützlicher).

Vorsicht Oftmals wird $\cos^2(x)$ und $\tan^2(x)$ anstelle von $(\cos(x))^2$ und $(\tan(x))^2$ geschrieben. Diese Quadrat-Notation von Funktionen ist aber leider nicht eindeutig: So kann f^2 für eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sowohl die Verkettung $f\circ f$ als auch das Quadrat $f\cdot f$ bedeuten, und was tatsächlich gemeint ist, muss aus dem Zusammenhang abgeleitet werden. Dies ist offenbar analog zur Mehrdeutigkeit, die wir auch schon bei der Notation f^{-1} bemerkt hatten.

19.1.12 Beispiel: Sei $n\in\mathbb{N}$ und $\Omega:=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist für $h:\Omega\to\mathbb{R}\,,x\mapsto\frac{1}{x^n}$ die Ableitung $h':\Omega\to\mathbb{R}$ nach der Quotientenregel angewendet mit $f(x)=x^n$ und $h(x)=1/f(x)$ gegeben als

$$h'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}=-\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{-n}{x^{n+1}}\,.$$

FOLGERUNG: Wegen $\frac{1}{x^k}=x^{-k}$ gilt die Formel $(x^k)'=kx^{k-1}$ für alle $k\in\mathbb{Z}$.

19.1.13 Satz: (Kettenregel) Es seien $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}$ offen und $f:\Omega_1\to\Omega_2$ und $g:\Omega_2\to\mathbb{R}$ seien differenzierbar. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung $h=g\circ f:\Omega_1\to\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt für alle $x\in\Omega_1$

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)\,.$$

Beweis Sei (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_*$ für $n \to \infty$. Wegen der Stetigkeit von f folgt dann auch $y_n := f(x_n) \to y_* := f(x_*)$. Daher gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_*) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(g \circ f)(x_n) - (g \circ f)(x_*)}{x_n - x_*} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_*))}{x_n - x_*} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_*)}{y_n - y_*} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_*)}{x_n - x_*} \\ &= g'(y_*)f'(x_*)\,.\end{aligned}$$

(Genau genommen muss man hier noch den Fall $f(x_n) = f(x_*)$ gesondert betrachten. Wenn dies aber für $x_* \neq x_n \to x_*$ eintritt, so muss aber $f'(x_*) = 0$ sein, und man sieht, dass dann auch bereits der ursprüngliche (nicht erweiterte) Differenzenquotient verschwindet.)

Beispiele

- $f(x) = \cos(x^2) \;\Rightarrow\; f'(x) = -2x\sin(x^2)$.
- $f(x) = e^{\cos(\sin(x))} \;\Rightarrow\; f'(x) = e^{\cos(\sin(x))}(-\sin(\sin(x)))\cos(x)$.

19.1.14 Satz: Sei $f :]a, b[\to]c, d[$ bijektiv und stetig. Wenn dann f im Punkt $x \in]a, b[$ differenzierbar ist mit $f'(x) \neq 0$, so ist auch die (stetige) Umkehrfunktion $g := f^{-1} :]c, d[\to]a, b[$ im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt (zusätzlich zu $y = f(x)$)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Bemerkung: Zur Anwendung dieser Formel muss man normalerweise noch eine der beiden Variablen x, y mittels $y = f(x)$ oder $x = f^{-1}(y)$ eliminieren. Dies führt dann z.B. zu

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Beweis Man leite die Gleichungen

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

bzw.

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

mit Hilfe der Kettenregel ab.

19.1.15 Bemerkung: Die Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ des Satzes ist notwendig, wie man an dem Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ sehen kann.

Vorsicht Im vorhergehenden Satz bezeichnet f^{-1} die Umkehrfunktion von f und *nicht* die Funktion $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ und *auch nicht* die mengenabbildende Urbildfunktion. Für $f(x) = e^x$ ist beispielsweise

$$f^{-1}(x) = \ln(x) \neq e^{-x} = \frac{1}{f(x)} .$$

BEACHTE: Die Umkehrfunktion ist für beliebige bijektive Abbildungen zwischen Mengen definiert, der Kehrwert nur, wenn im Bild eine „Inversion“ definiert ist, wie z.B. für Abbildungen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Beispiele

- Die Ableitung des natürlichen Logarithmus $x \mapsto \ln(x)$ erhält man als

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} .$$

- Die Umkehrfunktion des Tangens

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} , \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

  nennt man den Arcustangens

$$\arctan = \tan^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

  Ihre Ableitung erhält man wegen $\tan' = 1 + \tan^2$ gemäß

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2} .$$

- Ähnliche Formeln findet man für die Umkehrfunktionen Arcussinus $\arcsin$ und Arcuskosinus $\arccos$ von Sinus und Kosinus.

19.1.3. Stetige Differenzierbarkeit

Beobachtung Falls eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in allen Punkten der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ differenzierbar ist (also nicht wie bei der Betragsfunktion Punkte existieren, wo sie es nicht ist), so ist f' *normalerweise* auch stetig in Ω. Leider gilt die Stetigkeit der Ableitung aber nicht *immer* aufgrund „pathologischer“ Gegenbeispiele wie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

ÜBUNG: Man berechne f'.

19.1.16 Definition: $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt stetig differenzierbar, wenn f in Ω differenzierbar ist und f' stetig ist. Den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnen wir mit

$$C^1(\Omega, \mathbb{R}) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar} | f' \in C^0(\Omega, \mathbb{R})\} .$$

19.1.17 Bemerkungen:

- Aus der Summen- und Skalierungsregel folgt, dass $C^1(\Omega, \mathbb{R})$ ein Vektorraum ist (abgeschlossen unter Addition und Skalierung).
- Ebenso zeigt die Produktregel, dass für $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ auch $f \cdot g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt.
- Die Quotientenregel zeigt, dass für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}\backslash\{0\})$ auch $\frac{f}{g} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gilt.
- Auch Potenzreihen sind stetig differenzierbar innerhalb ihres Konvergenzbereichs, wie man aus einer genaueren Analyse des Differenzierbarkeitsbeweises von Potenzreihen sieht.

19.1.18 Bemerkung:

- Es gilt offenbar

$$C^1(\Omega, \mathbb{R}) \subset \underbrace{\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar}\}}_{=:X} \subset C^0(\Omega, \mathbb{R}) .$$

- In Anwendungen kommen fast nie Funktionen wie das obige „pathologische“ Beispiel aus $X\backslash C^1(\Omega, \mathbb{R})$ vor.
- Funktionen $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$, die nicht in X (und damit auch nicht in $C^1(\Omega, \mathbb{R})$) liegen, kommen allerdings häufiger vor. Dies liegt daran, dass einige wichtige Operationen wie Absolutbetrag, Minimum- und Maximumbildung nur stetig, aber nicht (überall) differenzierbar sind.

19.1.4. Mehrfache Differenzierbareit

Beobachtung Oft ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ nicht nur stetig, sondern sogar wiederum differenzierbar.

19.1.19 Bezeichnung: Die höheren Ableitungen von f bezeichnet man mit $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')', \ldots$. Gebräuchlich ist auch der allgemeine Ausdruck $f^{(k)}$ wobei k die Ordnung der Ableitung angibt: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $\ldots$. Von Leibniz stammt die Schreibweise $\left(\frac{d}{dx}\right)^k f$, $\frac{d^k}{dx^k} f$ oder $\frac{d^k f}{dx^k}$.

Beispiele

- Die Ableitungen des Polynoms $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ sind

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) = f(x) &= 3x^3 + 2x^2 + x + 4 \\ f^{(1)}(x) = f'(x) &= 9x^2 + 4x + 1 \\ f^{(2)}(x) = f''(x) &= 18x + 4 \\ f^{(3)}(x) = f'''(x) &= 18 \\ f^{(k)}(x) &= 0 \quad (k \geqslant 4) \end{aligned}$$

- ALLGEMEIN: Die k-te Ableitung eines Polynoms f vom Grad d ist für $k \leqslant d$ ein Polynom $d-k$-ten Grades. Für $k = d$ ist $f^{(k)}$ ein konstantes Polynom, für $k > d$ ist $f^{(k)}$ das Nullpolynom.
- Normalerweise werden höhere Ableitungen von Funktionen wegen Ketten-, Produkt- und Quotientenregel schnell hässlich, z.B. für $f(x) = e^{\cos x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\cos x} \\ f'(x) &= -e^{\cos x} \sin x \\ f''(x) &= e^{\cos x} \sin^2 x - e^{\cos x} \cos x \\ f'''(x) &= \dots \end{aligned}$$

19.1.20 Bezeichnung: Wenn $f : \Omega \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar ist, und die höchste Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist*, sagt man $f \in C^n(\Omega, \mathbb{R})$. $C^n(\Omega, \mathbb{R})$ bezeichnet den Raum der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, den man präzise rekursiv definieren könnte als

$$C^n(\Omega, \mathbb{R}) := \begin{cases} C^0(\Omega, \mathbb{R}) & n = 0 \\ \{f \in C^{n-1}(\Omega, \mathbb{R}) \mid f' \in C^{n-1}(\Omega, \mathbb{R})\} & n > 0 \end{cases}.$$

19.1.5. Extremalpunkte

19.1.21 Definition: Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ hat/besitzt im Punkt $x_* \in \Omega$ ein

- globales Minimum, wenn $f(x_*) \leqslant f(x)$ für alle $x \in \Omega$,
- globales Maximum, wenn $f(x_*) \geqslant f(x)$ für alle $x \in \Omega$,
- lokales Minimum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_*) \leqslant f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_*)$,
- lokales Maximum, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $f(x_*) \geqslant f(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_*)$.

19.1.22 Bezeichnung: Extremum ist der Oberbegriff für beides (steht also für „Minimum oder Maximum“). Den Wert $f(x_*)$ an solchen Punkten nennt man Minimalwert, Maximalwert oder allgemein Extremalwert. Den Punkt x_* selber nennen wir Minimalstelle, Maximalstelle oder allgemein Extremalstelle.

Beispiele

- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ besitzt in $x = 0$ ein globales Minimum.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x(x-1)(x+1) = x^3 - x$ besitzt ein lokales Maximum im Punkt $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ und ein lokales Minimum im Punkt $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$ besitzt lokale und globale Maxima in den Punkten $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$, sowie lokale und globale Minima in den Punkten $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

*Man beachte, dass für Ableitungen $f^{(k)}$ mit $k < n$ die Stetigkeit aus der Differenzierbarkeit folgt.

- Für konstante Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (z.B. $f(x) = 1$) liegt in jedem $x \in \Omega$ ein lokales und globales Minimum/Maximum vor.

19.1.23 Satz: Wenn die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in $x_* \in \Omega$ ein Extremum hat und in x_* differenzierbar ist, so gilt $f'(x_*) = 0$.

Beweis Wenn $f'(x_*) \neq 0$, so gilt

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*} = f'(x_*)\,,$$

woraus man sieht, dass $f(x) - f(x_*)$ in einer Umgebung von x_* sowohl positive als auch negative Werte annehmen muss (je nach Vorzeichen von $x - x_*$).

19.1.24 Bemerkungen:

- Punkte $x_* \in \Omega$ mit $f'(x_*) = 0$ nennt man kritische Punkte. Solche Punkte sind oft Extremalstellen, müssen es aber nicht sein, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt.
- Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ so sind auch die Randpunkte a und b Kandidaten für (lokale) Extremalstellen, die man gesondert untersuchen muss.
- Diese gesonderte Untersuchung kann beispielsweise mit sogenannten „einseitigen“ (rechtsseitig oder linksseitig) Ableitungen in a bzw. b geschehen.
- Manchmal sieht man es aber auch einfach durch Auswerten: Falls z.B. für $f \in C^1([a, b])$ gilt $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$, so muss das Maximum/Minimum in den Randpunkten vorliegen, und ein einfacher Vergleich von $f(a)$ und $f(b)$ reicht aus.

19.1.25 Anwendung: Wir wollen eine zylindrische Konservendose mit Radius r und Höhe h konstruieren, für welche die Oberfläche $S(r, h)$ (S für “surface”) bei gegebenem Volumen V_0 möglichst klein ist. Die Blechstärke wird dabei als vernachlässigbar dünn angenommen. Das Volumen berechnet sich allgemein als $V(r, h) = \pi r^2 h$ und die Oberfläche als $S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. Weil V_0 vorgegeben ist, kann man setzen $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$ und die Oberfläche als Funktion nur einer Variablen r betrachten:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\frac{V_0}{r}\,.$$

Hier sieht man nun, dass $S(r) \to +\infty$ sowohl für $r \to +\infty$ als auch für $r \downarrow 0$. Hieraus schließt man (wie?), dass S mindestens eine Minimalstelle r_* in $\mathbb{R}^+$ haben muss. Die genaue Lage der Minimalstelle errechnet man nun mittels Lösen der Gleichung

$$S'(r) = 4\pi r - 2\frac{V_0}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_* = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\,.$$

Hieraus erhält man dann $h = 2\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$, was bedeutet, dass für die „optimale“ Konservendose „Durchmesser=Höhe“ gelten muss.

19.1.6. Mittelwertsatz

Voraussetzung Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, und außerdem stetig differenzierbar im offenen Intervall $]a, b[$. Dafür schreiben wir der Einfachheit halber

$$f \in C^1([a, b]) := C^0([a, b]) \cap C^1(]a, b[) ,$$

obwohl wir in den Punkten a und b nicht differenzieren wollen.

19.1.26 Satz: (Satz von Rolle) Es sei $f \in C^1([a, b])$ mit $f(a) = f(b) = c \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $x_* \in]a, b[$ mit $f'(x_*) = 0$.

Beweis Es sei $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Falls $m = M = c$, so ist f konstant und die Ableitung überall 0. Andernfalls ist m oder M ungleich c, woraus wir folgern, dass (mindestens) eine Extremalstelle x_* in $]a, b[$ liegt. Für solch eine Extremalstelle ist aber —wie im vorigen Abschnitt gezeigt— die Bedingung $f'(x_*) = 0$ notwendig.

19.1.27 Satz: (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 1. Form) Es sei $f \in C^1([a, b])$. Dann gibt es ein $x_* \in]a, b[$ mit

$$f'(x_*) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Beweis Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) .$$

19.1.28 Satz: (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 2. Form) Seien $f, g \in C^1([a, b])$ mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Dann gibt es ein $x_* \in]a, b[$ mit

$$f'(x_*) = g'(x_*) .$$

Beweis Wende den Satz von Rolle an auf die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$, für die ja $h(a) = h(b) = 0$ gilt.

19.1.29 Satz: (Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 3. Form) Seien $f, g \in C^1([a, b])$. Dann gibt es ein $x_* \in]a, b[$ mit

$$f'(x_*)(g(b) - g(a)) = g'(x_*)(f(b) - f(a)) .$$

Bemerkung: Falls $f(a) \neq f(b)$ und $g(a) \neq g(b)$, so ist die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\frac{f'(x_*)}{f(b) - f(a)} = \frac{g'(x_*)}{g(b) - g(a)} .$$

Beweis Falls $f(a) = f(b)$ oder $g(a) = g(b)$, so folgt das Ergebnis sofort mittels des Satzes von Rolle. Andernfalls betrachten wir die Funktion

$$h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)} - \frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Diese erfüllt offenbar $h(a) = h(b) = 0$, so dass wegen des Satzes von Rolle für ein $x_* \in]a, b[$ gilt $h'(x_*) = 0$. Wenn man h' nun ausrechnet, liefert das sofort die gewünschte Gleichung in x_*.

19.1.30 Bemerkungen:

- Die erste Form des MWS folgt aus der zweiten, wenn man

$$g(x) = f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  wählt.

- Die erste Form des MWS folgt aus der dritten, wenn man

$$g(x) = x$$

  wählt.

- In den meisten Anwendungen reicht die erste Form des MWS aus.

19.1.31 Bemerkung:

- Sehr oft wird der erste Mittelwertsatz in der Form

$$f(b) - f(a) = f'(x_*)(b - a) \quad \text{für ein } x_* \in]a, b[$$

  verwendet, um aus Informationen über die Ableitung etwas über die Differenz $f(b) - f(a)$ zu schließen (z.B. Kleinheit oder Vorzeichen).

- Entscheidend für die Anwendungen ist oft, dass man für $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit Hilfe des MWS die Differenz $f(x_1) - f(x_2)$ für beliebige Punkte $x_1, x_2 \in \Omega$ kontrollieren kann, sofern $[x_1, x_2] \subset \Omega$ gilt. (Man wählt dazu einfach $[a, b] := [x_1, x_2]$ und wendet den MWS auf $f|_{[x_1,x_2]}$ an.)

- Im folgenden zeigen wir drei Anwendungen dieses Prinzips.

19.1.32 Satz: Wenn für $f \in C^1([a, b])$ gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant.

Beweis Für $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ gilt nach dem MWS für ein $\xi \in]x_1, x_2[$:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi) = 0\,.$$

19.1.33 Übung: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man zeige:

1. Wenn f' ein Polynom k-ten Grades ist, so ist f ein Polynom $k + 1$-ten Grades.
2. Wenn $f^{(n)}(x) = 0$, so ist f ein Polynom höchstens $n - 1$-ten Grades.

19.1.34 Lösung: 1. Wenn $f'(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$, so gilt mit $g(x) := \sum_{i=1}^{k+1} \frac{a_{i-1}}{i} x^i$ die Beziehung $(f-g)' = f' - g' = 0$. Somit ist $f - g$ konstant (gleich $\alpha \in \mathbb{R}$), und $f(x) = g(x) + \alpha$.

2. Aus dem ersten Teil folgt durch Induktion, dass für $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ die k-te Ableitung $f^{(k)}$ ein Polynom vom Grad $n-1-k$ ist.

19.1.35 Satz: Wenn für $f \in C^1([a,b])$ gilt $|f'(x)| \leqslant C$ für alle $x \in]a,b[$, so ist f Lipschitz-stetig mit Konstante C.
(Und aus der Lipschitz-Stetigkeit folgen ja auf erfreulich einfache Weise die für Anwendungen wichtigen ε-δ-Abschätzungen.)

Beweis Für $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ gilt nach dem MWS für ein $\xi \in]x_1, x_2[$:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |(x_2 - x_1) f'(\xi)| \leqslant C|x_2 - x_1| \,.$$

19.1.36 Satz: Für $f \in C^1([a,b])$ gilt

1. $\forall x \in]a,b[: f'(x) \geqslant 0 \iff f$ ist monoton wachsend.
2. $\forall x \in]a,b[: f'(x) > 0 \implies f$ ist streng monoton wachsend.
3. $\forall x \in]a,b[: f'(x) \leqslant 0 \iff f$ ist monoton fallend.
4. $\forall x \in]a,b[: f'(x) < 0 \implies f$ ist streng monoton fallend.

In den Aussagen 2 und 4 gilt die Äquivalenz nicht (Gegenbeispiel: $f(x) = x^3$).

Beweis Die Richtung $\Rightarrow$ folgt für alle Aussagen aus dem Mittelwertsatz, weil für $x_1 < x_2$ gilt

$$\exists \xi \in]x_1, x_2[: \; f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi) \,.$$

Die Rückrichtung $\Leftarrow$ in den Aussagen 1 und 3 erhält man, weil die Nichtnegativität (Nichtpositivität) eines Differenzenquotienten im Limes die Nichtnegativität (Nichtpositivität) der Ableitung impliziert.

19.1.7. Die Regel von l'Hospital

19.1.37 Satz: Es seien $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und für $x_* \in \Omega$ gelte $f(x_*) = g(x_*) = 0$. Wenn dann der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_*} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so existiert auch $\lim\limits_{x \to x_*} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und beide sind gleich:

$$\lim_{x \to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Beispiele

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = 1$

- $\lim_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \lim_{x\to a} \dfrac{nx^n}{mx^m} = \dfrac{n}{m} a^{n-m}$

Beweis (der Regel von l'Hospital)

- Weil Ω offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_*) =]x_* - \varepsilon, x_* + \varepsilon[\subset \Omega$.
- Sei nun x_n eine Folge in $U_\varepsilon(x_*)$, die gegen x_* konvergiert.
- Dann gibt es nach der dritten Form des MWS eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|\xi_n - x_*| < |x_n - x_*|$, so dass
$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_*)}{g(x_n) - g(x_*)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$$
- Nach Voraussetzung konvergiert aber die rechte Seite für $n \to \infty$, folglich muss auch die linke Seite konvergieren.

19.1.38 Bemerkungen:

- Falls $\lim_{x\to x_*} f(x) \in \{\pm\infty\}$ und $\lim_{x\to x_*} g(x) \in \{\pm\infty\}$, so gilt ebenfalls
$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_*} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$
- Auch $x_* = \pm\infty$ ist (bei geeignetem Definitionsbereich wie z.B. $\Omega = \mathbb{R}$) erlaubt: Zum Beispiel gilt für $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \{0, \pm\infty\}$ und $\lim_{x\to+\infty} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$
(Beweis: Wende die alte Regel auf $\tilde f := f(\frac{1}{x})$, $\tilde g = g(\frac{1}{x})$ an.)
- Falls $f, g \in C^n(\Omega, \mathbb{R})$, so kann man l'Hospital auch n-mal anwenden.

Beispiele

- Man kann manche Grenzwerte der Form $\infty - \infty$ ausrechnen:
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to1} \frac{x\ln(x) - (x-1)}{(x-1)\ln(x)} =$$
$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(x)}{\frac{x-1}{x} + \ln(x)} = \lim_{x\to1} \frac{x\ln(x)}{(x-1) + x\ln(x)} = \lim_{x\to1} \frac{1 + \ln(x)}{2 + \ln(x)} = \frac{1}{2}$$
- Man kann auch (noch einmal) erhalten, dass die Exponentialfunktion schneller wächst als alle Potenzen:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

- Und man kann auch die uns schon bekannten Grenzwertbetrachtungen für rationale Funktionen noch einmal erhalten: Beispielsweise gilt nach l'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+1}{5x^2-x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+3}{10x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{10} = \frac{2}{5}\,.$$

($\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{5n^2-n-1}$ muss dann natürlich ebenfalls $\frac{2}{5}$ sein, weil $x_n = n$ nur eine spezielle Folge ist, die gegen $+\infty$ strebt.)

Vorsicht Die Regel von l'Hospital ist kein Allheilmittel zur Untersuchung von Quotienten-Grenzwerten, für welche Zähler/Nenner gegen 0 oder ∞ konvergieren. Dies liegt vor allem daran, dass Ableiten in vielen Fällen Funktionsausdrücke komplizierter und nicht einfacher macht.

19.1.8. Taylorentwicklung

Beobachtung Die Definition der Ableitung kann man als lokale Approximation einer beliebigen Funktion durch eine (affin-)lineare interpretieren:

$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)-f(x_*)}{x-x_*} = f'(x_*)$$

ist offenbar äquivalent mit

$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x)-[f(x_*)+f'(x_*)(x-x_*)]}{x-x_*} = 0\,.$$

Frage Kann man eine Funktion $f(x)$ mit Polynomen höheren Grades noch besser approximieren?

Antwort Ja, wenn $f \in C^n(\Omega,\mathbb{R})$ mit $n > 1$.

19.1.39 Definition: (Landau-Symbole, Landausche O-Notation) Es sei Ω offen und $x_* \in \Omega$. Wir nennen eine Funktion $r : \Omega \to \mathbb{R}$

- von der Ordnung $O(|x-x_*|^k)$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein $C > 0$ gibt, mit $|r(x)| \leqslant C|x-x_*|^k$ für alle $x \in U_\varepsilon(x_*)$, und
- von der Ordnung $o(|x-x_*|^k)$, wenn gilt $\lim_{x\to x_*} \frac{r(x)}{|x-x_*|^k} = 0$.

19.1.40 Schreibweise: Wenn eine Funktion r diese Eigenschaften in der Umgebung eines Punkts x_* aufweist, so schreibt man einfach $r(x) = O(|x-x_*|^k)$ bzw. $r(x) = o(|x-x_*|^k)$.

19.1.41 Interpretation:
- Wenn $r = O(|x-x_*|^k)$, so verläuft der Graph von r in der Nähe von x_* zwischen den Kurven $b_\pm(x) = \pm C|x-x_*|^k$.

- Wenn $r = o(|x - x_*|^k)$, so verläuft der Graph von r in der Nähe von x_* zwischen Kurven der Form $b_\pm(x) = \pm C|x - x_*|^k$. Außerdem kann man durch Wahl eines hinreichend kleinen $\varepsilon = \varepsilon(C)$ sogar erreichen, dass diese Einschließung für ein beliebig kleines $C > 0$ gilt.

19.1.42 Definition: Es sei $f \in C^n(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_* \in \Omega$. Dann heißt das Polynom

$$T_{f,x_*,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!}(x - x_*)^k$$

das Taylor-Polynom n-ten Grades zu f an der Stelle x_*.

Beobachtung Für $k = 0, \ldots, n$ stimmen die k-ten Ableitungen von f und $T_{f,x_*,n}$ an der Stelle x_* überein, d.h.

$$f^{(k)}(x_*) = T^{(k)}_{f,x_*,n}(x_*)\,, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

19.1.43 Satz: (Taylorentwicklung) Für $f \in C^n(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_* \in \Omega$ gilt für den Approximationsfehler

$$r(x) := f(x) - T_{f,x_*,n}(x) \quad (\text{„Restglied“})$$

das Limes-Verhalten

$$\lim_{x \to x_*} \frac{r(x)}{(x - x_*)^n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r(x) = o(|x - x_*|^n)\,.$$

Falls $f \in C^{n+1}(\Omega, \mathbb{R})$, so gilt sogar

$$\lim_{x \to x_*} \frac{r(x)}{(x - x_*)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x_*)}{(n+1)!} \quad \Longleftrightarrow \quad r(x) = O(|x - x_*|^{n+1})\,.$$

Beweis Für $k = 0, \ldots, n$ gilt $r^{(k)}(x_*) = 0$. Somit liefert die n-fache Anwendung der Regel von l'Hospital

$$\lim_{x \to x_*} \frac{r(x)}{(x - x_*)^n} = \lim_{x \to x_*} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_*)}{n!} \to 0\,,$$

weil $f^{(n)} \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$. Für $f \in C^{n+1}(\Omega, \mathbb{R})$ kann man ein weiteres Mal differenzieren und erhält

$$\lim_{x \to x_*} \frac{r(x)}{(x - x_*)^{n+1}} = \lim_{x \to x_*} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(x_*)}{(n+1)!}\,.$$

19.1.44 Bemerkungen:

- Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_* \in \Omega$ hatten wir als den Spezialfall

$$f(x) - T_{f,x_*,1}(x) = o(|x - x_*|)$$

der Taylorschen Fehlerabschätzung bereits kennengelernt.

- Auch die Stetigkeit einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_* \in \Omega$ kann man als Spezialfall der Taylorschen Fehlerabschätzung auffassen: Für $n = 0$ lautet diese ja einfach
$$\lim_{x\to x_*} \frac{f(x) - T_{f,x_*,0}(x)}{(x-x_*)^0} = \lim_{x\to x_*} (f(x) - f(x_*)) = 0\,,$$
was gerade die Definition der Stetigkeit im Punkt x_* ist.

19.1.45 Bemerkung:

- Wenn man nicht mit der Regel von l'Hospital argumentiert, sondern direkt den MWS anwendet, so erhält man folgende Fehlerdarstellung: Es gibt ein *zwischen x_* und x liegendes* ξ mit
$$f(x) - T_{f,x_*,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_*)^{n+1}\,.$$

- Diese Form ist unter anderem deshalb wichtig, weil man durch Voraussetzungen an die $n+1$-te Ableitung die Differenz $f(x) - T_{f,x_*,n}(x)$ *quantitativ* abschätzen kann.

- Falls etwa $|f^{(n+1)}(\xi)| \leqslant C$ für alle zwischen x und x_* liegenden Punkte ξ, so gilt
$$|f(x) - T_{f,x_*,n}(x)| \leqslant \frac{C}{(n+1)!}|x-x_*|^{n+1}\,.$$

19.1.46 Beispiel: Das Polynom $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ist das Taylorpolynom sowohl zweiten als auch dritten Grades für die Kosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$. Der Approximationsfehler lässt sich für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ daher wie folgt abschätzen

$$|\cos(x) - p(x)| \leqslant \frac{|x|^4}{24} \sup_{\xi\in]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[} |f^{(4)}(\xi)| \leqslant \frac{|x|^4}{24} \leqslant 0.041\bar{6}|x|^4 \leqslant 2.61\cdot 10^{-3}$$

Diese Abschätzung ist bereits sehr genau: Der Fehler ist nämlich maximal groß für $x = \pm\frac{1}{2}$ und beträgt dort

$$|\cos(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})| = |0.87758\ldots - 0.875| \approx 2.58\cdot 10^{-3}\,.$$

19.1.47 Definition: Wenn f unendlich oft stetig differenzierbar ist, d.h. $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, so definiert
$$T_{f,x_*,\infty}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_*)}{k!}(x-x_*)^k$$
eine Potenzreihe um x_*. Diese nennt man Taylorreihe von f im Punkt x_*.

Beispiele

- Sei $f(x) = x^3 + 2x + 1$. Wegen $f'(x) = 3x^2 + 2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ und $f^{(k)}(x) = 0$ für $k \geqslant 4$ ist die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_* = 1$
$$T_{f,1,\infty}(x) = 4 + 5(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 = \\ 4 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3\,,$$
was natürlich nur eine andere Darstellung von f ist.

- Diese andere Darstellung kann man alternativ (aber umständlicher) mittels wiederholter Polynomdivision durch $(x-1)$ erreichen.
- Für $f(x) = e^x$ gilt $\forall k \geqslant 0 : f^{(k)}(x) = f(x)$. Somit ist die Taylorreihe an der Stelle $x_* = 0$ einfach
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$
was natürlich wieder die uns bekannte Exponentialreihe ist.
- Ebenso ergibt sich die Taylorreihe der Sinusfunktion um $x = 0$ zu
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \pm \dots$$
und die der Kosinunsfunktion zu
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \pm \dots .$$
- Manchmal kann man mit Taylorreihen auch Grenzwerte einfacher erhalten als mit der l'Hospital-Regel:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \Big(\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}\Big) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (\sin x)^2}{x^2 (\sin x)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^2}{x^4 + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{6} + O(x^6)}{x^4 + O(x^5)} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$
- Eine Taylor-Reihe einer Funktion f braucht nicht auf dem ganzen Definitionsbereich von f gegen f zu konvergieren. So ist zum Beispiel für $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ die Taylorreihe um $x_* = 0$ einfach $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$, was nur im Intervall $]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ (oder im Kreis $B_1(0) \subset \mathbb{C}$) gegen f konvergiert.
- Es gibt sogar Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, für welche die Taylorreihe die Funktion in keiner Umgebung des Entwicklungspunkts vollkommen beschreibt. Ein solches Beispiel ist
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases},$$
bei dem sich $T_{f,0,\infty}(x) = 0$ ergibt (siehe auch Übung).

19.1.48 Beispiel: Im vorigen Abschnitt hatten wir die Extrema der Funktion $f(x) = x^3 - x$ als Lösungen von $f'(x) = 0$ bestimmt und die Extremalstellen $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $x_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ erhalten. Die Taylorentwicklung erlaubt nun eine Bestimmung, ob wir ein Maximum oder Minimum vor uns haben. Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung ist ja
$$T_{f,x_*,2}(x) = f(x_*) + f'(x_*)(x - x_*) + \frac{f''(x_*)}{2}(x - x_*)^2\,.$$

Wenn nun x_* ein kritischer Punkt mit $f'(x_*) = 0$ ist, so zeigt das Vorzeichen von $f''(x_*)$ an, ob f in x_* durch eine nach oben oder nach unten geöffnete Parabel approximiert wird und demnach ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt. In unserem Fall ist $f''(x) = 6x$, so dass bei $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ein lokales Maximum und bei $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ein lokales Minimum vorliegt.

19.1.49 Bemerkung: Wenn auch $f''(x_*) = 0$ sein sollte, so kann man fast immer durch Betrachtung von Taylorpolynomen noch höheren Grades bestimmen, ob ein Minimum, Maximum oder keins von beiden vorliegt. Diese Prozedur versagt nur, falls die Taylorreihe von f in einem kritischen Punkt x_* konstant ist und zusätzlich die Funktion f nicht lokal approximiert (wie im früheren Beispiel mit $e^{-\frac{1}{x}}$).

19.1.50 Beispiel: Die Taylorreihe von $x^2 \sin(x)$ ist $x^2(x - \frac{x^3}{6} \pm \ldots) = x^3 - \frac{x^5}{6} \pm \ldots$. Somit sieht die Funktion nahe $x_* = 0$ wie x^3 aus und hat in 0 kein Extremum.

19.1.9. Das eindimensionale Newton-Verfahren

19.1.51 Problem: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung $x_* \in \mathbb{R}$ der nichtlinearen Gleichung

$$f(x) = 0\,.$$

Idee Angefangen von einem Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$, ersetzen wir die Funktion f durch ihr Taylorpolynom ersten Grades $T_{f,x_0,1}$ (eine Gerade). Für dieses kann man eine Lösung der Gleichung

$$T_{f,x_0,1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

leicht bestimmen (sofern $f'(x_0) \neq 0$), nämlich

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\,.$$

Der so berechnete Punkt $x \in \mathbb{R}$ wird dann als (hoffentlich) verbesserte Approximation an die tatsächliche Lösung x_* verwendet.

19.1.52 Algorithmus: (Newton-Verfahren, NV)

1. Gegeben seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ein Startpunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Toleranz $\varepsilon > 0$.
2. Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ führe durch:
   a) Wenn $|f(x_k)| < \varepsilon$, brich die Iteration ab.
   b) Setze $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

19.1.53 Bemerkung:

- Die Lösung einer *nichtlinearen* Gleichung wird also mit Hilfe einer Methode approximiert, welche das mehrfache Lösen von *linearen* Gleichungen benötigt.
- Der Algorithmus versagt, wenn für ein x_k gilt $f'(x_k) = 0$.

19.1.54 Beispiel: Berechne die Lösung von $f(x) = x^2 - 2 = 0$. Die Iterationsvorschrift ist offenbar

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k + \frac{2}{x_k}}{2}\,.$$

Wir erhalten dann für $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} = \underline{1}.5 \\ x_2 &= \frac{17}{12} = \underline{1.41}\bar{6} \\ x_3 &= \frac{577}{408} = \underline{1.4142}157\ldots \\ x_4 &= \frac{665857}{470832} = \underline{1.414213562374}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beobachtung Im vorhergehenden Beispiel hat sich die Anzahl der korrekten Ziffern in jedem Schritt verdoppelt. Dieses Phänomen nennt man quadratische Konvergenz.

19.1.55 Satz: Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $x_* \in \Omega$ sei eine Lösung der Gleichung $f(x_*) = 0$ mit $f'(x_*) \neq 0$ (reguläre Lösung). Dann gilt:

1. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass das NV für alle Startwerte $x_0 \in U_\varepsilon(x_*)$ konvergiert, d.h.

$$x_0 \in U_\varepsilon(x_*) \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_k = x_*\,.$$

2. Wenn f zusätzlich in $C^2(\Omega, \mathbb{R})$ liegt, so liegt sogar sogenannte quadratische Konvergenz vor: es gibt ein $C > 0$ und $\varepsilon > 0$, so dass

$$x_0 \in U_\varepsilon(x_*) \quad \Rightarrow \quad |x_{k+1} - x_*| \leqslant C|x_k - x_*|^2\,.$$

Beweis

1. Wir betrachten die Newton-Abbildung $\Phi : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Wegen $f(x_*) = 0$ erfüllt diese $\Phi(x_*) = x_*$. Für $x \to x_*$ gilt nun

$$\frac{\Phi(x) - x_*}{x - x_*} = 1 - \underbrace{\frac{f(x) - \overbrace{f(x_*)}^{=0}}{x - x*}}_{\to f'(x_*)} \underbrace{\frac{1}{f'(x)}}_{\to \frac{1}{f'(x_*)}} \to 0 \quad (x \to x_*)\,.$$

   Dies bedeutet aber, dass man zu beliebigem $\rho < 1$ ein $\varepsilon > 0$ wählen kann, so dass aus $|x_k - x_*| < \varepsilon$ folgt, dass $|x_{k+1} - x_*| = |\Phi(x_k) - x_*| \leqslant \rho|x_k - x_*|$, woraus wir die Konvergenz der Folge (x_k) gegen x_* ersehen.

2. Wenn $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, so gilt

$$\frac{\Phi(x) - x_*}{(x - x_*)^2} = \frac{f'(x)(x - x_*) - (f(x) - f(x_*))}{f'(x)(x - x_*)^2} .$$

Die Fehlerformel der Taylorentwicklung um x liefert nun die Existenz eines zwischen x und x_* liegenden ξ_x mit

$$f'(x)(x - x_*) - (f(x) - f(x_*)) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_*)^2 .$$

Weil $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ folgt dann

$$\lim_{x \to x_*} \frac{\Phi(x) - x_*}{(x - x_*)^2} = \lim_{x \to x_*} \frac{f''(\xi_x)}{2f'(x)} = \frac{f''(x_*)}{2f'(x_*)} ,$$

woraus man die quadratische Konvergenz ersieht.

19.1.56 Bemerkung: Das Newton-Verfahren kann unter verschiedenen Umständen versagen:

- Es kann auf singuläre Punkte mit $f'(x_k) = 0$ laufen.
- Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ kann divergieren. Ein Beispiel dafür ist eine Nullstellensuche für $f(x) = \tanh(x)$, welche für große Startwerte divergiert ($x_0 \geqslant 1.1$ reicht).

19.1.57 Bemerkung: Das genaue Verhalten der Newton-Iteration kann höchst komplex sein. Das gilt umso mehr, wenn man das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche für komplexe Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oder zur Lösung nichtlinearer Gleichungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ einsetzt.
Beispiel: Konvergenzbereiche in $\mathbb{C}$ beim Lösen von $f(z) = z^3 - 1 = 0$.

19.2. Mehrdimensionale Differentialrechnung

19.2.1. Motivation

Beobachtung Obwohl Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein wichtiger Spezialfall sind, decken Sie nur einen eher kleinen Teil der Anwendungen ab.

Beispiele Die allgemeinere Situation $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ wird benötigt in folgenden Anwendungen:

- $n = 1$, $m > 1$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, t \mapsto f(t)$. Dieser Fall tritt auf vor allem bei der Beschreibung von Zeitentwicklungen ohne räumliche Auflösung wie etwa:
  - Mechanische Systeme (Roboterarme, Planetenbewegungen, etc.)
  - Chemische Reaktionen in voll gemischten Systemen
  - Biologische Modelle (z.B. Räuber-Beute-Modell)

  - Einige Wirtschaftsmodelle
  - ...

- $n > 1$, $m > 1$: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto f(x)$. Dies beschreibt unter anderem Phänomene mit Raum- und Zeitauflösung wie etwa
  - Mechanische Probleme (z.B. Roboterarme oder Balken, deren Deformation mitberücksichtigt wird).
  - Chemische Reaktionen, wenn der Mischvorgang wichtig ist (z.B. Stofftransport in der Atmosphäre oder im Ozean).
  - Biologische Modelle, sofern die räumliche Verteilung der Spezies wichtig ist
  - Wirtschaftsmodelle mit räumlicher Auflösung (etwas problematisch)

- Besonders schwierig und komplex wird es, wenn weitere Dimensionen im Urbildraum durch die Parametrisierung von Zuständen entstehen, wie z.B. die Alters- und/oder Einkommensstruktur der Bevölkerung, oder die Aktienkurse verschiedener Unternehmen. In solchen Fällen gilt $n \gg 1$ und die Behandlung solcher Probleme ist hochaktuelle Forschung.

19.2.1 Beispiel:

- Parabolische Flugbahn eines Balls ohne Reibung:

$$\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x}(t) = t\vec{v} + \frac{t^2}{2}\vec{g}$$

  Allgemeiner (auch mit Reibung) ergibt sich die Bahn als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

- Auslenkung einer belasteten kreisförmigen Membran

$$u : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad u(x_1, x_2) = \dots$$

  Diese erhält man durch Lösung einer partiellen Differentialgleichung.

- Und zuletzt ein explizites Beispiel ohne tiefergehende Bedeutung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2^2 x_3 \end{pmatrix}$$

19.2.2. Definition der mehrdimensionalen Ableitung

19.2.2 Definition: (Mehrdimensionale Ableitung, totale Ableitung)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

1. f heißt differenzierbar im Punkt $x_* \in \Omega :\iff$ es existiert eine (eindeutig bestimmte) Matrix $\mathcal{D}f(x_*) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (die sogenannte Jacobi-Matrix), so dass bezüglich irgendwelcher Normen $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}$ im $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^m}$ im $\mathbb{R}^m$ gilt
$$\lim_{x\to x_*} \frac{\|f(x) - f(x_*) - \mathcal{D}f(x_*)(x - x_*)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - x_*\|_{\mathbb{R}^n}} = 0\,.$$
2. f heißt differenzierbar, wenn f für alle $x \in \Omega$ differenzierbar ist. Die Abbildung $\mathcal{D}f : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \mapsto \mathcal{D}f(x)$ bezeichnet man dann als Ableitung (manchmal auch: totale Ableitung) der Funktion f.
3. $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar ($f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$), wenn $\mathcal{D}f$ stetig ist.

19.2.3 Notation: Wir hätten auch hier f' statt $\mathcal{D}f$ schreiben können. Es ist in der Literatur allerdings eher unüblich: Meist wird die Bezeichnung f' nur für den Fall $n = 1$ verwendet, bei dem nur nach einer Variable abgeleitet wird.

19.2.4 Bemerkung: Stetigkeit für die matrixwertige Funktion $\mathcal{D}f : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$ kann man entweder mit Hilfe von Normen auf $\mathbb{R}^{m\times n}$ definieren (z.B. die Euklidische Norm in $\mathbb{R}^{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, welche man in diesem Zusammenhang auch Frobeniusnorm nennt) oder man fordert einfach, dass die Komponentenfunktionen
$$(\mathcal{D}f)_{ik} : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (\mathcal{D}f(x))_{ik}$$
für $i = 1, \dots, m$ und $k = 1, \dots, n$ stetig sind.

19.2.5 Bezeichnung: Die Beziehung
$$\lim_{x\to x_*} \frac{\|f(x) - f(x_*) - \mathcal{D}f(x_*)(x - x_*)\|}{\|x - x_*\|} = 0$$
könnte man mit Hilfe der o-Notation auch schreiben als
$$f(x) - f(x_*) - \mathcal{D}f(x_*)(x - x_*) = o(\|x - x_*\|)\,.$$
Manchmal vereinfacht man diesen Ausdruck sogar noch weiter zu
$$f(x) - f(x_*) \doteq \mathcal{D}f(x_*)(x - x_*)\,,$$
wobei $\doteq$ für „in führender Ordnung gleich“ steht.

19.2.6 Beispiel: Es sei $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist die affin-lineare Abbildung
$$f : \Omega \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto b + Ax$$
stetig differenzierbar, und die Ableitung ist die *konstante* Abbildung
$$\mathcal{D}f : \Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}\,, \quad x \mapsto \mathcal{D}f(x) = A\,.$$
Beweis: Es gilt immer $f(x) - f(x_*) - A(x - x_*) = 0$.

19.2.3. Partielle Ableitungen

Frage Wie berechnet man denn für ein gegebenes $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ die Einträge der Jacobi-Matrix $\mathcal{D}f(x)$?

19.2.7 Definition: (Richtungsableitung) Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $x \in \Omega$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt f in x eine Richtungsableitung in Richtung v, wenn der Grenzwert

$$\mathcal{D}_v f(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h} \in \mathbb{R}^m$$

existiert.

Beobachtung

- Die Richtungsableitung $\mathcal{D}_v f(x)$ erhält man offenbar, indem man die Einschränkung

  $$\tilde{f} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^m\,, \quad h \mapsto \tilde{f}(h) := f(x+hv)\,.$$

  von f auf ein Geradenstück durch x mit Richtung v betrachtet, und dann

  $$\tilde{f}'(0) := \frac{d}{dh}\,\tilde{f}(h)\Big|_{h=0} = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(h) - \tilde{f}(0)}{h}$$

  bildet.

- Man beachte, dass die Folge und ihr Grenzwert hier vektorwertig sind, was unsere Theorie aber erlaubt.

19.2.8 Beispiel: [†] Für $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_v f(x_1, x_2) &= \frac{d}{dh}\, f(x_1 + hv_1, x_2 + hv_2)\Big|_{h=0} \\
&= \frac{d}{dh} \begin{pmatrix} (x_1+h)^2 \\ (x_1+h)(x_2-h) \end{pmatrix}\Big|_{h=0} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{d}{dh}\,(x_1+h)^2\Big|_{h=0} \\ \frac{d}{dh}\,(x_1+h)(x_2-h)\Big|_{h=0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

19.2.9 Satz: Falls $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so gilt $\mathcal{D}_v f(x) = \mathcal{D}f(x)v$.

[†] Wir verwenden in diesem Beispiel anstelle von $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})$ die klammersparende Notation $f(x_1, x_2)$.

Beweis

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_v f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+hv)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)+(\mathcal{D}f(x))(hv)+o(hv)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\mathcal{D}f(x))(hv)}{h}\\ &= \mathcal{D}f(x)v\,.\end{aligned}$$

19.2.10 Definition: (Partielle Ableitung) Es sei $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$. Wir definieren die partielle Ableitung von f an der Stelle x als Richtungsableitung in Richtung des Standardbasisvektors e_k, d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) := \mathcal{D}_{e_k} f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h}\,.$$

INTERPRETATION: Wenn $f(x) = f(x_1,\dots,x_n)$, so erhält man $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$, indem man den Ausdruck $f(x_1,\dots,x_n)$ nach $x_k\in\mathbb{R}$ ableitet *und dabei die anderen Variablen x_i mit $i\neq k$ als konstante Parameter ansieht*.

Beispiele

- Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad (x_1,x_2)\mapsto e^{x_1^2}\sin(x_2^4)$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2x_1e^{x_1^2}\sin(x_2^4)\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 4x_2^3\cos(x_2^4)e^{x_1^2}\,.$$

- Die partiellen Ableitungen von

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\qquad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x_1^2-x_2^2\\2x_1x_2\end{pmatrix}$$

sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \begin{pmatrix}2x_1\\2x_2\end{pmatrix}\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \begin{pmatrix}-2x_2\\2x_1\end{pmatrix}\,.$$

19.2.11 Satz: Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ und $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ gegeben als $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\\vdots\\f_m(x)\end{pmatrix}$. Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ gerade die k-te Spalte der Jacobi-Matrix $\mathcal{D}f(x)$, und die einzelnen Matrixeinträge berechnen sich folglich als

$$(\mathcal{D}f(x))_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)\,,\quad i=1,\dots,m,\ k=1,\dots n\,.$$

Beweis Man erhält die Spalten der Matrix $\mathcal{D}f(x)$, indem man sie auf die Einheitsvektoren e_k anwendet. Außerdem wissen wir, dass $\mathcal{D}f(x)e_k = \mathcal{D}f_{e_k}(x)$. Letzteres ist aber gerade die Definition der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.

Beispiele

- Die Ableitung von

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1 + x_2) \\ x_1 + x_2^2 x_3 \end{pmatrix}$$

  ist die matrixwertige Funktion

$$J : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \cos(x_1 + x_2) & x_3 \cos(x_1 + x_2) & \sin(x_1 + x_2) \\ 1 & 2x_2 x_3 & x_2^2 \end{pmatrix} .$$

- Die Ableitung der Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ ist

$$\varphi'(t) = \mathcal{D}\varphi(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} ,$$

  was die Tangentialrichtung im Punkt $\varphi(t)$ an den Einheitskreis angibt.

- Die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad x \mapsto f(x) = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

  im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\mathcal{D}f(x) = (2x_1, \ldots, 2x_n) = 2x^T \in \mathbb{R}^{1 \times n} .$$

- Die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad x \mapsto f(x) = \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

  in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist

$$\mathcal{D}f(x) = (\frac{2x_1}{2\|x\|}, \ldots, \frac{2x_n}{2\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|} x^T .$$

  (Man beachte, dass dies auch für $n = 1$ Sinn macht.)

19.2.12 Bemerkung: Die Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_*)$ im Punkt $x_* \in \Omega$ ist nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ im Punkt x_*. So ist beispielsweise die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & x = (x_1, x_2)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

in $x = (0,0)^T$ zwar stetig (warum?), aber nicht differenzierbar (warum?), obwohl $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0) = 0$! Allerdings gilt folgende wichtige Äquivalenz:

$$\begin{aligned} & f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \\ \iff \quad & \forall i = 1, \ldots, m,\ \forall k = 1, \ldots, n : \ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Hieraus folgt insbesondere, dass die in den vorhergehenden Beispielen berechneten Matrixfunktionen $\mathcal{D}f(x)$ tatsächlich totale Ableitungen mit der gewünschten Approximationseigenschaft sind.

Beweisskizze Die zuletzt angegebene Äquivalenz ist nicht selbstverständlich, so dass wir der Vollständigkeit halber eine Beweisskizze liefern: Die Richtung „⇒“ folgt aus der Kettenregel (nächster Satz), weil die Extraktion von Matrixeinträgen linear (und damit stetig differenzierbar) ist. Für die Richtung „⇐“ kann man wie folgt vorgehen: Zuerst vereinfacht man durch Abziehen einer linearen Abbildung auf den Fall $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_*) = 0$ für $k = 1, \ldots, n$ und $\mathcal{D}f(x_*) = 0$. Dann verwendet man die ε-δ-Stetigkeit, um $|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}| \leqslant \varepsilon$ in $U_\delta(x_*)$ zu sichern. Für $x \in U_\delta(x_*)$ erhält man zuletzt $\|f(x) - f(x_*)\|_\infty \leqslant \varepsilon \|x - x_*\|_1$ durch komponentenweise und mehrfache Anwendung des Mittelwertsatzes. Hieraus folgt aber, dass der Quotient $\frac{\|f(x)-f(x_*)\|_\infty}{\|x-x_*\|_1}$ für $x \to x_*$ beliebig klein wird, und wegen der Normäquivalenz gilt das auch für andere Normen.

19.2.4. Mehrdimensionale Kettenregel

19.2.13 Satz: (Kettenregel) Es sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in x und es sei $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $y = f(x)$. Dann gilt

$$\mathcal{D}(g \circ f)(x) = \mathcal{D}g(f(x)) \cdot \mathcal{D}f(x)\,,$$

wobei $\cdot$ das Matrix-Matrix-Produkt bezeichnet.

Beweis Wenn wir mit $\doteq$ wieder die Gleichheit „in führender Ordnung“ bezeichnen, so gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_*) &= g(f(x)) - g(f(x_*)) \\ &\doteq \mathcal{D}g(f(x_*)) \cdot (f(x) - f(x_*)) \\ &\doteq \mathcal{D}g(f(x_*)) \cdot \mathcal{D}f(x_*) \cdot (x - x_*)\,. \end{aligned}$$

19.2.14 Beispiel: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,, \quad x \mapsto Ax\,.$$

Ferner bezeichne $\|x\|$ die Euklidische Norm und es sei

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \|x\|^2 = x^T x\,.$$

Dann ergibt sich die Ableitung von

$$h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto (Ax, Ax)$$

wegen $\mathcal{D}f(x) = A$ und $\mathcal{D}g(y) = 2y^T$ zu

$$\mathcal{D}h : x \mapsto 2(Ax)^T A = 2x^T A^T A\,.$$

19.2.5. Ableitung von Summe und Skalierung

19.2.15 Satz: Es seien $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Weil $\mathbb{R}^m$ ein Vektorraum ist, sind die Summe $f + g$ und die Skalierung αf wohldefiniert. Ferner gilt $f + g \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $\mathcal{D}(f + g)(x) = \mathcal{D}f(x) + \mathcal{D}g(x)$ (Addition der Jacobi-Matrizen) wegen

$$\begin{aligned}(f+g)(x) - (f+g)(x_*) &= f(x) + g(x) - (f(x_*) + g(x_*)) = \\ f(x) - f(x_*) + g(x) - g(x_*) &\doteq \mathcal{D}f(x_*)(x - x_*) + \mathcal{D}g(x_*)(x - x_*) = \\ &(\mathcal{D}f(x_*) + \mathcal{D}g(x_*))(x - x_*)\,.\end{aligned}$$

Ebenso ist $\alpha f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $\mathcal{D}(\alpha f)(x) = \alpha \mathcal{D}f(x)$ (Skalierung der Jacobi-Matrix).

19.2.6. Das mehrdimensionale Newton-Verfahren

Beobachtung Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. (Man beachte: nicht $\mathbb{R}^m$!) Wenn wir eine Nullstelle $f(x) = 0$ suchen, so ergibt sich aus der Ableitungsdefinition an einer Stelle x_k

$$\underbrace{f(x)}_{\stackrel{!}{=}0} - f(x_k) \doteq \mathcal{D}f(x_k)(x - x_k)$$

sofort die Newton-Iterationsvorschrift

$$x_{k+1} = x_k - (\mathcal{D}f(x_k))^{-1} f(x_k)\,.$$

19.2.16 Bemerkungen:

- Das Newton-Verfahren lässt sich also völlig natürlich auf mehrdimensionale Probleme verallgemeinern!
- Dies sieht man auch an der Implementation: Ein gut geschriebenes Matlab/Octave-Programm für das Newton-Verfahren ist gleicherweise auf ein- und mehrdimensionale Probleme anwendbar.

- Man beachte auch, dass man im Newton-Verfahren die Inverse $(\mathcal{D}f(x_k))^{-1}$ eigentlich nicht braucht! Zur Berechnung der Korrektur $v_k = x_{k+1} - x_k$ reicht es vollkommen aus, lineare Gleichungssysteme der Form

$$\mathcal{D}f(x_k)v_k = -f(x_k)$$

zu lösen, was meist weniger aufwendig ist.

19.2.17 Satz: (Theorie des Newton-Verfahrens) Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $x_* \in \Omega$ eine Lösung von $f(x_*) = 0$. Falls $\mathcal{D}f(x_*)$ regulär (invertierbar) ist, so konvergiert das Newton-Verfahren, sofern man in einer ausreichend kleinen Umgebung von x_* startet. Es konvergiert lokal quadratisch, wenn $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt.

Beweis Analog zum eindimensionalen Fall zeigt man die Kontraktionseigenschaft der Fixpunktabbildung Φ des Newton-Schritts.

19.2.18 Beispiel: Das NV zur Nullstellensuche für $f(z) = z^2 - 2$ in $\mathbb{C}$ hat genau wie in $\mathbb{R}$ die Iterationsvorschrift

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} = z_k - \frac{z_k^2 - 2}{2z_k} = \frac{z_k}{2} + \frac{1}{z_k}\,.$$

Wenn man nun $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \leftrightarrow \quad x_1 + x_2 \boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$$

so entspricht $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}\,.$$

Die Ableitungsmatrix $\mathcal{D}F$ hat dann die Gestalt

$$\mathcal{D}F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

und man kann leicht nachrechnen (sehr gute Übung!), dass die zugehörige Newton-Iterationsvorschrift

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - (\mathcal{D}F(\vec{x}_k))^{-1} F(\vec{x}_k)$$

genau der vorher angegebenen (und viel bequemer zu schreibenden) komplexen Form entspricht.

19.2.7. Lokale Umkehrfunktion

19.2.19 Satz: (Satz von der lokalen Umkehrfunktion) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Ferner sei $x_* \in \Omega$ mit $F(x_*) = y_* \in \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{D}F(x_*)$ sei invertierbar. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset \Omega$ mit $x_* \in U$, so dass die Einschränkung $F|_U : U \to f(U) =: V$ bijektiv ist, und die Inverse $(F|_U)^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar ist. Für alle $x \in U$ mit $y = F(x) \in V$ (also auch x_* und $y_* = F(x_*)$) gilt

$$\mathcal{D}(F^{-1})(y) = (\mathcal{D}F(x))^{-1}\,.$$

Beweisidee Man kann die Umkehrfunktion auf einer geeigneten Umgebung U durch Lösen der Gleichung $F(x) - y = 0$ mittels des Newton-Verfahrens definieren. Der erste Schritt ist zu zeigen, dass das Verfahren für alle y in einer Umgebung von y_* und mit Startwert x_* konvergiert. Der zweite Schritt besteht darin, zu zeigen, dass das so erhaltene F^{-1} stetig differenzierbar in y ist. Die Beziehung $\mathcal{D}(F^{-1})(y) = (\mathcal{D}F(x))^{-1}$ folgt schließlich wegen $F^{-1} \circ F|_U = \mathrm{id}_U$ aus der Kettenregel.

Beispiele

- Für die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \sin(x)$$
kann eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion nur in Umgebungen um Punkte $x_* \notin \{\pi(k + \frac{1}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert werden.
FRAGE: Wie könnte man U und V für den Punkt $x_* = 2$ möglichst groß wählen?

- Wir betrachten die uns schon bekannte Abbildung
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$
Nach dem Satz besitzt der Punkt $x_* = (\sqrt{2}, 0)$ (eine der beiden Nullstellen) wegen
$$\mathcal{D}F(\sqrt{2}, 0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
eine offene Umgebung U, die bijektiv und differenzierbar auf eine Umgebung V von $F(x_*) = 0$ abgebildet wird (d.h. man könnte dann auch die Gleichung $F(x) = v$ für alle $v \in V$ lösen und würde eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in U$ erhalten).
FRAGE: Wie könnte man U und V hier möglichst groß wählen?

19.2.8. Höhere Ableitungen und mehrdimensionale Taylorformel

Beobachtung Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Wenn auch $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ für $k = 1, \ldots, n$, so kann man diese Funktionen wiederum differenzieren und erhält die zweiten Ableitungen
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x) := \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big) \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^m)\,, \quad k, l = 1, \ldots, n\,.$$

19.2.20 Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k > 1$. Dann heißt $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \;:\Longleftrightarrow\; \forall k = 1, \ldots, n : \frac{\partial f}{\partial x_k} \in C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

19.2.21 Satz: (Schwarz) Für $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt für alle $x \in \Omega$ und $k, l = 1, \ldots, n$:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(x)\,.$$

19.2.22 Interpretation: Partielle Ableitungen „vertauschen“. Es kommt nicht auf die Reihenfolge der partiellen Differentiation an.

19.2.23 Bemerkung: Falls $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $k > 2$, so liefert die induktive Anwendung des Satzes von Schwarz sogar die Vertauschbarkeit von k partiellen Ableitungen von f.

Beweisskizze

- Wir zeigen dies für den Spezialfall $\Omega = \mathbb{R}^2$ und $m = 1$, der allgemeine Fall ist ähnlich. Außerdem nehmen wir an, dass wir die Vertauschbarkeit von $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ für den Punkt $(0,0)^T$ nachweisen wollen.
- Zu $a, b > 0$ betrachten wir dann die Größe

$$\square f(a,b) := f(a,b) + f(0,0) - f(a,0) - f(0,b)\,.$$

- Mit Hilfe von $g(x) := f(x,b) - f(x,0)$ erhält man dann durch zweifache Anwendung des eindimensionalen Mittelwertsatzes

$$\square f(a,b) = g(a) - g(0) = a g'(\xi) \\ = a(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, 0)) = ab\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)\,,$$

  wobei $(\xi, \eta) \in]0, a[\times]0, b[$.
- Analog sieht man durch Betrachten von $h(y) := f(a,y) - f(0,y)$, dass es ein $(\xi', \eta') \in]0, a[\times]0, b[$ gibt mit

$$\square f(a,b) = ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta')\,.$$

- Wenn die zweiten partiellen Ableitungen aber stetig sind, folgt

$$\lim_{a,b\to 0} \frac{\square f(a,b)}{ab} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)\,.$$

19.2.24 Beispiel: Betrachte

$$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2^2)\,.$$

Dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2^2 \cos(x_1 x_2^2)\right) = 2x_2 \cos(x_1 x_2^2) - 2x_1 x_2^3 \sin(x_1 x_2^2)$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_2 x_1 \cos(x_1 x_2^2)\right) = 2x_2 \cos(x_1 x_2^2) - 2x_1 x_2^3 \sin(x_1 x_2^2)\,.$$

19.2.25 Definition: Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ und

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad [= \|\alpha\|_1] \,.$$

Zu $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist dann

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \in \mathbb{R}^m$$

die α-te partielle Ableitung von f an der Stelle x.
(BEACHTE: Dies macht deswegen Sinn, weil es auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen nicht ankommt!)

19.2.26 Beispiel: Für

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^4 x_2^2 \\ \sin(x_1) x_2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\partial^{(2,1)} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 24 x_1^2 x_2 \\ -\sin(x_1) \end{pmatrix} .$$

19.2.27 Satz: (Mehrdimensionale Taylorentwicklung) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$f(x) = T_{f,x_*,k}(x - x_*) + o(\|x - x_*\|^k)$$

mit

$$T_{f,x_*,k}(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| \leqslant k} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x_*)(x - x_*)^\alpha \,.$$

Hierbei wurden folgende Kurzschreibweisen verwendet, damit der Satz möglichst ähnlich zum eindimensionalen Fall aussieht:

- Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setzt man $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$.
- Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $y \in \mathbb{R}^n$ setzt man $y^\alpha := \prod_{i=1}^n y_i^{\alpha_i}$.

19.2.28 Bemerkungen: Das Taylorpolynom $T_{f,x_*,k}$ für $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ist hier ein sogenanntes multivariates Polynom in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Wenn $m > 1$, so sind die Koeffizienten dieses Polynoms sogar vektorwertig. Wie man leicht sieht, lässt sich der Term erster Ordnung der Taylor-Entwicklung alternativ schreiben als

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| = 1} \frac{1}{\alpha!} (\partial^\alpha f)(x_*)(x - x_*)^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_*)(x_i - x_{*,i}) \,.$$

Weil $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ aber gerade die i-te Spalte der Jacobi-Matrix $\mathcal{D}f(x_*)$ ist, kann man dies wiederum als das Matrix-Vektorprodukt $\mathcal{D}f(x_*)(x - x_*)$ schreiben.

19.2.29 Beispiel: Das Taylorpolynom zweiten Grades von

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

an der Stelle $x_1 = x_2 = 0$ ist

$$T_{f,(0,0),2}(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2 + \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 + \frac{x_2^2}{2}$$

in den zwei Variablen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

19.2.9. Implizit definierte Funktionen

19.2.30 Bezeichnung: Eine Gleichung der Form

$$x = \textit{von } x \textit{ unabhängiger Ausdruck}$$

nennt man explizite Definition von x, welches dadurch vollkommen festgelegt („erklärt“) wird. In Anwendungen tritt allerdings oft auch die Form

$$\textit{Ausdruck in } x = \textit{von } x \textit{ unabhängiger Ausdruck}$$

auf. Auch so etwas kann x eindeutig festlegen (manchmal unter Zuhilfenahme von zusätzlichem Wissen) und wird daher implizite Definition von x genannt.

19.2.31 Beispiel: Die Gleichung

$$y = x + x^5$$

ist gleichzeitig explizite Definition von $y \in \mathbb{R}$ und implizite Definition von $x \in \mathbb{R}$. Man beachte, dass die implizite Definition $x \in \mathbb{R}$ eindeutig festlegt, und dass sich x mit den uns schon bekannten Verfahren beliebig gut approximieren lässt. Man kann aber zeigen, dass es keinen expliziten Ausdruck $x = x(y)$ mit Hilfe elementarer Funktionen gibt.

19.2.32 Beispiel:

- Die allgemeine Geradengleichung

  $$ax + by = c\,, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

  kann für $a \neq 0$ als implizite Definition von x angesehen werden, die man mittels

  $$x = \frac{c - by}{a}$$

  in eine explizite Definition von x umformen kann.

- Für $a = 0$ wird x dagegen durch die Gleichung nicht eindeutig festgelegt.

- Für y und b anstelle von x und a gilt Analoges.

19.2.33 Beispiel: Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ habe die Blockstruktur $\begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \end{pmatrix}$ mit $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $A^{(2)} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$, ebenso betrachten wir $x \in \mathbb{R}^n$ als gemäß $x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \end{pmatrix}$ aus zwei Blöcken $x^{(1)} \in \mathbb{R}^m$ und $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$ zusammengesetzt. Mit $b \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$Ax = b \quad \Longleftrightarrow \quad A^{(1)}x^{(1)} + A^{(2)}x^{(2)} = b\,.$$

Wenn nun $\det(A^{(1)}) \neq 0$ ist (gleichwertig: $A^{(1)}$ invertierbar ist, $A^{(1)}$ vollen Rang hat, ...), so definiert diese Gleichung den Vektor $x^{(1)} \in \mathbb{R}^m$ in Abhängigkeit von $x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$ eindeutig. Man kann die implizite Definition nämlich offenbar wieder in eine explizite Definition überführen, nämlich

$$x^{(1)} = (A^{(1)})^{-1}(b - A^{(2)}x^{(2)})\,.$$

19.2.34 Bemerkung: Dieses letzte Beispiel kann man auch wie folgt interpretieren: Es gibt n Unbekannte und m linear unabhängige Gleichungen (A hat ja Rang m). Somit bleiben $n-m$ freie Parameter (hier die letzten $n-m$ Komponenten von x), aus denen man dann m Parameter (hier die ersten m Komponenten von x) berechnen kann. Dies ist natürlich genau das Lösen singulärer Gleichungssysteme, welches wir schon früher bei der Berechnung von Kernen und Eigenräumen kennengelernt haben.

19.2.35 Beispiel: Wir betrachten die *nichtlineare Gleichung*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1\,, \quad x, y \in [-1, 1]\,.$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung beschreibt offenbar den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$. Hier wird aber y im allgemeinen nicht eindeutig durch x festgelegt und umgekehrt. (Wann doch?) Wenn man allerdings zusätzliches Wissen über das Vorzeichen von y besitzt, so reicht die durch die Gleichung bereitgestellte Information aus und man kann y auch explizit ausdrücken als

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \text{bzw.} \quad y = -\sqrt{1-x^2}\,.$$

Jede der beiden Darstellungen ist nur auf einem Teil der Lösungsmenge gültig. Und es gibt Punkte der Lösungsmenge, bei denen das Auflösen nach y nicht befriedigend klappt, nämlich an den Stellen $(\pm 1, 0)$. Analoges gilt, wenn man x und y vertauscht.

19.2.36 Satz: (über implizit definierte Funktionen) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant n$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Außerdem sei $x_* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Gleichung

$$f(x_*) = d \in \mathbb{R}^m$$

$A = \mathcal{D}f(x_*) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei die Jacobi-Matrix von f im Punkt x_*. Analog zum linearen Fall gilt $A = \begin{pmatrix} A^{(1)} & A^{(2)} \end{pmatrix}$ mit $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A^{(2)} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ und $x_* = \begin{pmatrix} x_*^{(1)} \\ x_*^{(2)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

Falls nun $\det(A^{(1)}) \neq 0$, so gibt es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^m$ von $x_*^{(1)}$ und $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $x_*^{(2)}$, sowie eine Funktion $g \in C^1(V, U)$ mit $x_*^{(1)} = g(x_*^{(2)})$, so dass die Lösungen von $f(x) = d$ in $U \times V$ als Graph von g gegeben sind, d.h.

$$\{x \in U \times V \mid f(x) = d\} = \left\{ \begin{pmatrix} g(x^{(2)}) \\ x^{(2)} \end{pmatrix} \mid x^{(2)} \in V \right\}\,.$$

19.2.37 Bezeichnung: Oft nennt man diesen Satz auch kurz Satz über implizite Funktionen.

Beweisidee Man kann den Funktionswert $g(x^{(2)})$ iterativ berechnen, indem man zu gegebenem $x^{(2)}$ ein $x^{(1)}$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens berechnet. (Wie wir wissen, ist die entscheidende Bedingung für die lokale Konvergenz des Newton-Verfahrens um den Punkt $x_*^{(1)}$ gerade $\det(A^{(1)}) \neq 0$, was wegen der Voraussetzungen erfüllt ist!)

19.2.38 Interpretation: Geometrisch besagt der Satz über implizite Funktionen Folgendes: Wenn die $m \times n$-Jacobi-Matrix $\mathcal{D}f(x_*)$ an einer Stelle x_* mit $f(x_*) = d$ den vollen Rang m hat, so kann die Lösungsmenge $\{x \mid f(x) = f(x_*) = d\}$ als Graph einer Funktion bezüglich einer geeigneten Auswahl von Koordinaten (hier $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$) betrachtet werden.

19.2.39 Bemerkung: Die Ableitung der implizit definierten Funktion g kann man durch Differenzieren der Gleichung

$$f(g(z), z) = d$$

berechnen. An der Stelle $z = x_*^{(2)}$ erhält man den Wert sogar ohne g genauer zu kennen, denn es ergibt sich einfach

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x_*^{(2)}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}\right)^{-1}(x_*^{(1)}, x_*^{(2)}) \quad \frac{\partial f}{\partial x^{(2)}}(x_*^{(1)}, x_*^{(2)})\,.$$

19.2.40 Anwendung: Für das obige Beispiel

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = 1$$

ist $x_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Lösung. Die Jacobi-Matrix in x_* ist

$$A = \mathcal{D}f(1,0) = \left[\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}\right]_{x_1=1, x_2=0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\,,\ A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}\,.$$

Folglich können wir nach x_1 auflösen (aber nicht nach x_2) und können die Lösungsmenge in einer Umgebung von $x_2 = 0$ als

$$x_1 = g(x_2)$$

schreiben. Für dieses einfache Beispiel sieht man sofort, dass man für die Umgebung V von $x_2 = 0$ maximal das Intervall $]-1, 1[$ wählen kann. Für U wäre dann zum Beispiel $]0, 2[$ möglich und auch g kann explizit angegeben werden als

$$g(x_2) = \sqrt{1 - x_2^2}\,.$$

Die Ableitung von g im Punkt 0 kann man berechnen mittels

$$\frac{d}{dy} f(g(y), y) = \frac{d}{dy}\left((g(y))^2 + y^2\right) = 2g(y)g'(y) + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad g'(0) = \frac{0}{g(0)} = 0\,.$$

19.2.41 Anwendung: Der Satz über die Existenz einer lokalen Umkehrfunktion g zu einer Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ folgt sofort durch Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf die Funktion $F(x, y) = y - f(x)$.

19.2.42 Bemerkung:

- Leider ist der Satz über implizite Funktionen nur ein *Existenzresultat*!
- Er liefert insbesondere nicht die Funktion g in einer expliziten und in der Praxis verwendbaren Form!
- Man verwendet diesen Satz daher nur, um *qualitative* Aussagen für Lösbarkeit und Auflösbarkeit von Gleichungen zu treffen, oder auch um die prinzipielle Übertragbarkeit einer Theorie oder eines Verfahrens zu verifizieren. Beispiele sind:
  - Die Gleichung $y = x + \cos(x)$ hat für y nahe bei 1 genau eine Lösung x nahe bei 0. Genauer ist die Lösungsmenge in der Nähe von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Graph $x = g(y)$ mit einer differenzierbaren Funktion g gegeben, deren Ableitung $g'(1) = 1$ ist.
  - Gewöhnliche Differentiagleichungen treten manchmal in der impliziten Form

    $$f(u'(t), u(t), t) = 0\,, \quad u(0) = u_0$$

    auf. Die theoretische Behandlung dieser Gleichungen kann dann mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen auf diejenige von ODEs der expliziten Form

    $$u'(t) = g(u(t), t)\,, \quad u(0) = u_0$$

    zurückgeführt werden.

19.2.43 Bemerkung: Die Berechnung von implizit definierten Unbekannten oder auch die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in impliziter Form geschieht normalerweise approximativ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

19.2.10. Reellwertige Funktionen

19.2.44 Spezialfall: Wir betrachten in diesem Abschnitt den Spezialfall einer reellwertigen, stetig differenzierbaren Funktion, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

19.2.45 Anwendung: f kann zum Beispiel die Kosten oder den Gewinn eines von n Parametern abhängenden Wirtschaftsprozesses darstellen.

Beobachtung Im Spezialfall $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist die Ableitung

$$\mathcal{D}f(x) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \dots \quad \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \in \mathbb{R}^{1\times n}\,.$$

Oft wird aber lieber mit einem Spaltenvektor gearbeitet und man definiert den sogenannten Gradienten

$$\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n\,, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}\,,$$

welcher natürlich dieselbe Information wie $\mathcal{D}f$ enthält. Das Symbol ∇ heißt „Nabla"-Symbol ($\nu\alpha\beta\lambda\alpha$=„Harfe" auf Griechisch).

Bedeutung Der Gradientenvektor $\nabla f(x_*)$ gibt *Richtung und Stärke des steilsten Anstiegs* von f im Punkt x_* an. Man ersieht nämlich aus

$$f(x) - f(x_*) \doteq \mathcal{D}f(x_*)(x - x_*) = \langle \nabla f(x_*), x - x_* \rangle ,$$

dass eine Variation $x = x_* + \varepsilon v$ mit $\|v\|_2 = 1$ und kleinen $\varepsilon > 0$ in der Richtung $v = \frac{1}{\|\nabla f(x_*)\|_2} \nabla f(x_*)$ das stärkste Wachstum von f erzeugt. Außerdem gibt $\|\nabla f(x_*)\|_2$ offenbar die Größe dieses Wachstums nahe x_* an, wenn man sich in der Richtung $\frac{1}{\|\nabla f(x_*)\|_2} \nabla f(x_*)$ bewegt.

19.2.11. Extrema reellwertiger Funktionen

19.2.46 Satz: Wenn $x_* \in \Omega$ eine Extremalstelle der Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist, so muss gelten $\nabla f(x_*) = 0$.

Beweis Wenn $v = \nabla f(x_*) \neq 0$, so würde eine Variation $x = x_* + \varepsilon v$ mit kleinem ε zum Wachstum und in Richtung $x = x_* - \varepsilon v$ zum Abfall des Funktionswerts führen.

19.2.47 Bezeichnung: Allgemein nennt man ein x_* mit $\nabla f(x_*) = 0$ einen kritischen Punkt von f.

19.2.48 Bemerkungen:

- Kritische Punkte müssen nicht unbedingt Extrema sein, wie schon das eindimensionale Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt.
- Trotzdem steckt hinter der numerischen Berechnung von Extrema (z.B. Minimum eines Kosten- oder Maximum eines Nutzenfunktionals) in vielen Fällen die Lösung der nichtlinearen Gleichung $F(x) := \nabla f(x) = 0$ mit Hilfe des mehrdimensionalen Newton-Verfahrens.
- Durch Betrachtung der zweiten Ableitungen kann man dann oft entscheiden, ob ein kritischer Punkt $x_* \in \Omega$ ein Minimum, Maximum, oder keins von beiden ist.
- Im hier betrachteten Fall einer skalarwertigen Funktion f gilt nämlich für den Term zweiter Ordnung

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_*)(x - x_*)^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_*)(x_i - x_{*,i})(x_j - x_{*,j}) ,$$

  woraus wir sehen, dass er durch die sogenannte Hesse-Matrix[‡]

$$H(x) = \mathcal{D}\nabla f(x) = \left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n} ,$$

[‡]Die Hesse-Matrix hat nichts mit der Jacobi-Matrix zu tun! Die $m \times n$-Jacobi-Matrix beschreibt die *erste* Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die $n \times n$-Hesse-Matrix beschreibt hingegen die *zweite* Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. (BEMERKUNG: Zur Beschreibung zweiter und höherer Ableitungen von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > 1$ braucht man eine Verallgemeinerung des Matrixbegriffs zu sogenannten Tensoren, mit denen man beliebige multilineare Abbildungen beschreiben kann.)

vollständig beschrieben wird.

- Wegen des Satzes von Schwarz ist die Hesse-Matrix $H(x)$ symmetrisch. Mit diesem Wissen kann man einerseits Rechenarbeit sparen, andererseits sieht man, dass $H(x)$ nur reelle Eigenwerte haben kann. (Genauer: Es gibt sogar eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, die aus n Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ besteht.)

- Es sei nun x_* ein kritischer Punkt. In Abhängigkeit vom Vorzeichen der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $H(x_*)$ können dann folgende Fälle auftreten:
  - Falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ (d.h. wenn $H(x_*)$ symmetrisch positiv definit ist), so ist x_* ein Minimum.
  - Falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0$, so ist x_* ein Maximum.
  - Wenn es Eigenwerte λ_i und λ_k mit unterschiedlichen Vorzeichen gibt, so ist x_* ein sogenannter Sattelpunkt.

Vorsicht Die schwächeren Bedingungen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ bzw. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \leqslant 0$ reichen nicht aus, um den Charakter von x_* klar festzulegen. Andere Argumente oder die Einbeziehung noch höherer Terme der Taylorentwicklung um x_* sind hier notwendig. Dies ist analog zum Fall $f'(x_*) = f''(x_*) = 0$ bei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Beispiele

- Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ hat wegen $\nabla f(x) = 2x$ als einzigen kritischen Punkt $x = 0$. Weil $H(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nur den Eigenwert 2 hat, ist $x = 0$ ein Minimum.

- Die Funktion $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ hat wieder nur $x = 0$ als kritischen Punkt, der wegen $H(0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ein Maximum ist.

- Für die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ ist der kritische Punkt $x = 0$ wegen $H(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ein Sattelpunkt.

- Gleiches gilt für $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. (Übung)

- Für die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ enthält $H(0)$ nicht ausreichend Information, um den Charakter des kritischen Punkts zu bestimmen. Weil aber sowohl positive als auch negative Werte in beliebig kleinen Umgebungen von 0 auftreten, ist es keine Extremalstelle, sondern wieder eine Art Sattelpunkt.

19.2.49 Bemerkung:

- Die hier betrachteten Untersuchungen von $\nabla f(x_*)$, $H(x_*)$ oder noch höheren Termen der Taylorentwicklung liefern nur Aussagen über den lokalen Charakter von x_*.

- Wenn also $\nabla f(x_*) = 0$ und alle Eigenwerte von $H(x_*)$ positiv (alternativ: negativ) sind, so wissen wir nur, dass x_* ein *lokales* Extremum ist.

- Ob dieses x_* dann sogar globales Extremum ist, muss man mit Hilfe anderer Argumente begründen.

  FRÜHERES BEISPIEL: Die Funktion $f(x,y) = xy\exp(-x^2-y^2)$ muss globale Maxima und Minima in $\mathbb{R}^2$ annehmen (warum?). Hieraus kann man dann die gefundenen lokalen Maximal/Minimalstellen als globale Maximal/Minimalstellen identifizieren.

19.2.12. Extrema unter Nebenbedingungen

Beobachtung

- Wir hatten bisher lokale Extrema $x_* \in \Omega$ von Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachtet, für die $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine *offene* Menge war.
- In der Praxis reicht dies nicht aus. Funktionen sind manchmal direkt auf nichtoffenen Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert, oder aber man interessiert sich für die Funktion nur auf einer (nichtoffenen) Teilmenge $M \subset \Omega$ der offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- Sowieso sind offene Mengen ungünstig, wenn man an Maximierungs- und Minimierungsproblemen interessiert ist, weil man dann die Existenz von Extrema nicht einfach nur aus der Stetigkeit von f erhalten kann, wie es ja für kompakte (abgeschlossen und beschränkte) Mengen möglich ist.

Beispiele

- Die (momentane) Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche könnte man als Abbildung
$$T : M \to \mathbb{R}$$
beschreiben, wobei $M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 = R\}$ und R den Erdradius bezeichnet.
- Das Kurvenstück $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ beschreibe den Verlauf einer Röhre. Um für eine in dieser Röhre rollende Kugel Ruhepunkte zu finden, muss man die potentielle Energie unter der Einschränkung minimieren, dass die Kugel in der Röhre bleibt.
- Analoges gilt für eine auf einer gekrümmten Fläche frei bewegliche Kugel.
- Wenn ein LKW (z.B. wegen Geschwindigkeitsbeschränkungen) Waren mit maximal 80 km/h transportieren darf, muss man diese Restriktion auch in etwaigen Kosten/Nutzenrechnungen berücksichtigen.

  Die Optimierung auf einem unbegrenzten Geschwindigkeitsbereich kann sonst Lösungen mit illegalen (oder sogar technisch nicht möglichen) Geschwindigkeiten liefern oder aber legale Optima nicht erkennen.
- ... fast alle Anwendungsprobleme ...

19.2.50 Problem: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Es sei $M \subset \Omega$ eine Niveaufläche von g der Form

$$M = g^{-1}(\{a\}) = \{x \in \Omega \mid g(x) = a\}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Wir interessieren uns für Extrema von $f|_M : M \to \mathbb{R}$, d.h. wir suchen Punkte $x_* \in M$, so dass

1. für alle anderen $x \in M$ gilt $f(x_*) \leqslant f(x)$ (Minimum) oder aber
2. für alle anderen $x \in M$ gilt $f(x_*) \geqslant f(x)$ (Maximum).

19.2.51 Bezeichnung: Die Bedingung $g(x) = a \in \mathbb{R}$ nennt man Nebenbedingung. Genauer ist es eine Gleichungsnebenbedingung.

19.2.52 Beispiel: (Konkretes Problem) Bestimme die Maxima und Minima von $f(x, y) = ax + by + c$ auf dem Einheitskreis

$$S^1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}\,.$$

(Wie könnte diese Frage in Anwendungen auftreten?) Weil f stetig ist und S^1 kompakt ist, wissen wir bereits, dass es (ein oder mehrere) globale Minima und Maxima geben muss. Wie berechnet man diese aber?

Idee Manchmal kann man die Nebenbedingung $g(x) = a$ durch die Einführung neuer Variablen eliminieren (z.B. wenn man die Gleichung $g(x) = a$ nach einer ausgewählten Komponente auflösen oder aber Winkel oder Polarkoordinaten verwenden kann). Die neuen Variablen sind dann im Idealfall auf einer offenen Teilmenge $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ definiert, und man kann die Standardtheorie anwenden.

19.2.53 Beispiel: (Fortsetzung)

- Für das Beispielproblem können wir alle Punkte des Einheitskreises mit Hilfe von Winkelkoordinaten parametrisieren:

$$\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\,, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}\,.$$

- Nun kann man die Funktion

$$\tilde{f}(\varphi) = f(\Psi(\varphi)) = a\cos(\varphi) + b\sin(\varphi) + c$$

  betrachten und deren Extrema bestimmen.

- Ableiten liefert

$$\tilde{f}'(\varphi) = -a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi)$$

- Falls nun $a \neq 0$, so kann man offenbar errechnen

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{b}{a} \iff \varphi = \arctan(\frac{b}{a}) + k\pi$$

  Je nach Vorzeichen von b und a sind nun $\Psi(\arctan(\frac{b}{a}))$ und der gegenüberliegende Punkt $\Psi(\arctan(\frac{b}{a}) + \pi)$ Minimum bzw. Maximum von f auf S^1.

- FRAGE: Was ergibt sich für $a = 0$?

Aber

- Oftmals existieren solche neuen Variablen nur theoretisch (nach dem „Satz über implizite Funktionen“) und sind nicht explizit verfügbar.
- In anderen praktisch wichtigen Fällen kann es auch zu umständlich sein, solche Variablen auszurechnen.
- Wir werden daher im folgenden eine alternative Methode kennenlernen, die auf diese Art Umformung verzichtet.

19.2.54 Satz: (Lagrange-Multiplikatoren-Regel) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Ferner sei $M = g^{-1}(\{a\})$ eine Niveaufläche von g und für $x_* \in M$ gelte $\nabla g(x_*) \neq 0$. Falls dann x_* Extremum von f auf M ist, so müssen $\nabla f(x_*)$ und $\nabla g(x_*)$ linear abhängig sein, d.h. es gilt

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad \nabla f(x_*) = \lambda \nabla g(x_*)\,.$$

Die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ nennt man Lagrange-Multiplikator. Einen Punkt $x_* \in M$ für den es einen solchen Lagrange-Multiplikator gibt, nennt man wieder kritischen Punkt.

Beweisskizze Die Voraussetzungen $\nabla g(x_*) \neq 0$ und $\nabla f(x_*) \neq 0$ führen dazu, dass die Situation in der Umgebung von x_* bis auf Störungen höherer Ordnung dem Minimieren/Maximieren der affin-linearen Funktion

$$l(x) := f(x_*) + \langle \nabla f(x_*), x - x_* \rangle$$

über einer durch die Ebenengleichung

$$\langle \nabla g(x_*), x - x_* \rangle = a - g(x_*) = 0$$

definierten Hyperebene entspricht. In dieser Situation ist aber die notwendige Bedingung der linearen Abhängigkeit offensichtlich (siehe Übung).

19.2.55 Anschauung: Man mache sich klar, was diese Aussage physikalisch für eine auf einer Oberfläche S liegende Kugel bedeutet: Damit die Kugel an der Position $x_* \in S$ in der Ruhelage sein kann, muss die Oberfläche in der orthogonalen Richtung $\nabla g(x_*)$ eine die Schwerkraft $\nabla f(x_*)$ aufhebende Gegenkraft ausüben, entsprechend dem Newtonschen dritten Gesetz „Actio=Reactio“. Wie groß der *Betrag* von ∇f ist, ist dabei unerheblich! Die Gegenkraft kann sich immer anpassen.

19.2.56 Beispiel: (Fortsetzung)

- Für unser obiges Beispielproblem berechnen wir

$$f(x,y) = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =: v$$

und

$$g(x,y) = x^2 + y^2 = \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|^2 \quad \Rightarrow \quad \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

- Aus $\nabla f = \lambda \nabla g$ folgt daher, dass alle kritischen Punkte reelle Vielfache von v sind. Da sie zudem $g(x,y) = 1$ erfüllen müssen, erhalten wir

$$x_{*,1} = \frac{v}{\|v\|}, \quad x_{*,2} = \frac{-v}{\|v\|}.$$

- Offenbar ist der erste Punkt ein Maximum mit

$$f(x_{*,1}) = c + \langle v, x_{*,1} \rangle = c + \langle v, \frac{v}{\|v\|} \rangle = c + \|v\|$$

und der zweite ein Minimum mit $f(x_{*,2}) = c - \|v\|$.

19.2.57 Anwendung: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h. $A = A^T$. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, Ax \rangle \quad [= \langle Ax, x \rangle] .$$

Dann ist jeder kritische Punkt von f auf der $n-1$-dimensionalen Einheitssphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ ein Eigenvektor von A und umgekehrt ist jeder Eigenvektor ein kritischer Punkt.

Beweis Wir hatten in einer Übung bereits gezeigt (und zeigen es im nächsten Abschnitt nochmal), dass

$$\nabla f(x) = (A + A^T)x = 2Ax,$$

und ebenso gilt für $g(x) = \langle x, x \rangle$

$$\nabla g(x) = 2x.$$

Die Lagrange-Multiplikator-Regel liefert dann sofort die Behauptung $Ax = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

19.2.58 Bemerkungen:

- Die meisten numerischen Methoden zur Eigenwertberechnung bei symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verwenden diese Eigenschaft. Der erste (und oft bereits ausreichende) Schritt ist dabei, f auf S^{n-1} zu minimieren/maximieren. Eine Minimalstelle x_- ist dann gerade ein Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert $\lambda_- = f(x_-)$, eine Maximalstelle ist ein Eigenvektor zum größten Eigenwert $\lambda_+ = f(x_+)$.

- Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist, dass für symmetrische Matrizen immer (reelle) Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten existieren.

  (ERINNERUNG: f ist stetig, es muss daher auf der kompakten Menge S^{n-1} Maximal- und Minimalstellen geben.)

- In Anwendungen trifft man auch oft den Fall mehrerer Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccc} g_1(x) & = & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_k(x) & = & a_k \end{array}$$

an (alternativ: $g(x) = a$ für $g : \Omega \to \mathbb{R}^k$ und $a \in \mathbb{R}^k$).

Hier ergibt sich analog, dass für ein Extremum $x_* \in \mathbb{R}^n$ unter den Nebenbedingungen $g_i(x_*) = a_i$ gelten muss

$$\nabla f(x_*) \in \operatorname{Spann}(\nabla g_1(x_*), \ldots, \nabla g_k(x_*))$$
$$\iff \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \nabla f(x_*) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(x_*) \,.$$

Wieder nennt man $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ Lagrange-Multiplikatoren.

- Ferner trifft man in Anwendungen oft auch Ungleichungsnebenbedingungen der Form $g(x) \geqslant a$ an (Beispiel: ein Körper, der sich nur über oder auf einer Oberfläche befinden darf). Hier ergibt sich, dass die zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren ein bestimmtes Vorzeichen haben müssen (die Gegenkräfte sichern nur, dass der Körper nicht in die Fläche eindringt, das Loslösen von der Oberfläche verhindern sie aber nicht).
- Der sich mit solchen und ähnlichen Problemen beschäftigende Bereich der Mathematik ist sehr anwendungsnah und nennt sich (kontinuierliche) Optimierung.

19.2.13. Produktregel

19.2.59 Satz: (Produktregel) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann ist auch $fg \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ und es gilt

$$\mathcal{D}(fg)(x) = g(x) \cdot \mathcal{D}f(x) + f(x) \cdot \mathcal{D}g(x) \,, \quad x \in \Omega \,,$$

oder mit dem Gradienten formuliert

$$\nabla(fg)(x) = g(x) \cdot (\nabla f(x)) + f(x) \cdot (\nabla g(x)) \,.$$

Beweis Folgt aus der Produktregel für Ableitungen von Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wegen

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(x) = g(x) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + f(x) \, \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \,.$$

19.2.60 Beispiel: Für

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} \sin(x + y)$$

gilt

$$\nabla f(x, y) = 2e^{x^2+y^2} \sin(x + y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + e^{x^2+y^2} \cos(x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

19.2.61 Bemerkung:
- Es gibt noch weitere „Produktregeln“ für Skalarprodukt und Kreuzprodukt vektorwertiger Funktionen.
- Diese Regeln braucht man so selten, dass sich (noch mehr als bei der vorstehenden Produktregel) das Merken kaum lohnt.
- Jedenfalls kann man sie sich ebenso wie oben allesamt einfach durch Ausrechnen der partiellen Ableitung und komponentenweises Rechnen einfach herleiten.

19.2.62 Beispiel: (für solch eine komponentenweise Rechnung)

- Wir rechnen den Gradienten der Funktion
$$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j$$
aus. (A muss nicht unbedingt symmetrisch sein.)
- Die Anwendung von $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ auf $f(x)$ ergibt dann
$$\begin{aligned}\partial_k\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\Big(\underbrace{(\partial_k x_i)}_{=\delta_{ki}}\, x_j + x_i\, \underbrace{(\partial_k x_j)}_{=\delta_{kj}}\Big)\\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{kj}x_j\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} A_{ik}x_i\Big)\end{aligned}$$
- Die rechte Seite lässt sich aber als die k-te Komponente von $(A+A^T)x$ interpretieren, so dass gilt $\nabla f(x) = (A + A^T)x$.
- Wenn $A = A^T$, so ergibt sich einfach $\nabla f(x) = 2Ax$.

19.2.14. Kurven

19.2.63 Spezialfall: In diesem Abschnitt betrachten wir den Spezialfall $\Omega :=]a, b[\subset \mathbb{R}$ und Funktionen $\gamma \in C^1(]a, b[, \mathbb{R}^m)$ ($a = -\infty$ oder $b = +\infty$ sind erlaubt). Solche Funktionen nennen wir Kurve im $\mathbb{R}^m$. Der reelle Parameter in $]a, b[$ steht in den Anwendungen meist für die Zeit und wird daher oft mit t bezeichnet.

Beobachtung Die Ableitung der Kurve
$$\gamma :]a, b[\to \mathbb{R}^m\,, \quad t \mapsto \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \gamma_m(t)\end{pmatrix}.$$
ist gegeben als
$$\gamma' :]a, b[\to \mathbb{R}^{m\times 1} \cong \mathbb{R}^m\,, \quad t \mapsto \begin{pmatrix}\gamma_1'(t)\\ \vdots \\ \gamma_m'(t)\end{pmatrix}.$$

Sie beschreibt die „Geschwindigkeit“, mit welcher die Kurve durchlaufen wird. Man beachte, dass man hier keine partielle Ableitungen braucht, und wir daher die Ableitung nach t anstatt mit $D\gamma$ wieder als γ' oder auch $\frac{d\gamma}{dt}$ bezeichnen. Oft ist auch die Notation $\dot{\gamma}$ gebräuchlich.

19.2.64 Beispiel: Ein zum Zeitpunkt $t = 0$ mit Abwurfgeschwindigkeit $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ am Nullpunkt abgeworfener Ball durchläuft bei Vernachlässigung der Luftreibung die Bahnkurve

$$\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} tv_x \\ tv_y \\ tv_z - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}.$$

(die z-Richtung ist die Vertikale, g bezeichne die Erdbeschleunigung). Die Geschwindigkeit des Balles ist gegeben als

$$\gamma' : [0, T] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z - gt \end{pmatrix}.$$

19.2.65 Bemerkungen:

- Analog zu vektorwertigen Kurven kann man die Ableitung einer komplexwertigen Kurve

  $$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto a(t) + b(t)\boldsymbol{i}$$

  als

  $$\gamma'(t) = a'(t) + b'(t)\boldsymbol{i}$$

  definieren.

- Kurven entstehen oft als Lösungen sogenannter gewöhnlicher Differentialgleichungen, auf die wir später genauer eingehen werden.

- Die Bahnkurve des Balls aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich zum Beispiel aus der einfachen Differentialgleichung zweiter Ordnung

  $$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad t \in]0, T[$$

  zusammen mit den angegebenen Anfangsbedingungen an Ort und Geschwindigkeit des Balls zum Zeitpunkt $t = 0$.

20. Eindimensionale Integralrechnung

Beobachtung Die Differentiation lieferte uns die Änderungsgeschwindigkeit einer Größe. Wenn man die Größe zu einer Anfangszeit kennt, so kann man umgekehrt aus der Änderungsgeschwindigkeit die Größe zu einer beliebigen Zeit ausrechnen.

Beispiele

- Wenn man das Anfangskapital und die zeitliche Abfolge der Ein- und Auszahlungen auf ein Girokonto kennt, so kann man daraus den Kontostand zu einer beliebigen Zeit errechnen.
- Angenommen, man kennt den zeitlichen Verlauf des Zuflusses aus einem Wasserhahn in einen Eimer. Wenn der Eimer anfangs leer war, so kann man die Wassermenge im Eimer zu einem späteren Zeitpunkt berechnen.

20.1. Das Riemann-Integral

Idee Das Akkumulieren einer veränderlichen skalaren Größe kann man sich geometrisch als die Berechnung der Fläche zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse in einem Abschnitt $x \in [a, b]$ vorstellen. Dieses Bild sollte man bei all den folgenden Konstruktionen im Kopf haben.

20.1.1. Konstruktion

20.1.1 Definition: Eine Unterteilung (Partition, Zerlegung, Gitter)

$$\Delta = \{x_i \in [a, b] : i = 0, \ldots, n\}$$

eines Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist eine Menge reeller Zahlen mit

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

Die Feinheit von Δ ist definiert als $h_\Delta := \max\limits_{i=1,\ldots,n} h_i$ wobei $h_i := x_i - x_{i-1}$ die lokale Schrittweite ist.

20.1.2 Definition: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zu einer Unterteilung Δ von $[a, b]$ definieren wir die Riemannsche Obersumme

$$O_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} h_i \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

und die Riemannsche Untersumme als

$$U_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} h_i \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\,.$$

Beide Riemannsche Summen hängen offenbar von f und Δ ab.

20.1.3 Interpretation: Geometrisch kann man Ober- bzw. Untersumme als die Größe der von einer „Stufenfunktion“ (=eine stückweise konstante Funktion), der x-Achse und den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzten Fläche interpretieren. Die Stufenfunktionen werden dabei so gewählt, dass sie gerade noch ober- bzw. unterhalb von f liegen. Bereiche mit negativen Funktionswerten liefern negative Beiträge.

20.1.4 Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

- Für beliebige Unterteilungen Δ von $[a, b]$ gilt $U_\Delta(f) \leqslant O_\Delta(f)$.
- Wenn Δ' eine Verfeinerung von Δ ist (d.h. $\Delta \subset \Delta'$), so gilt

$$U_\Delta(f) \leqslant U_{\Delta'}(f) \leqslant O_{\Delta'}(f) \leqslant O_\Delta(f)\,.$$

- Für beliebige Unterteilungen Δ_1 und Δ_2 von $[a, b]$ gilt $U_{\Delta_1}(f) \leqslant O_{\Delta_2}(f)$.

Beweis

- Offensichtlich.
- Durch Verfeinerung werden Teilintervalle weiter aufgeteilt. Die Summe der Beiträge der Teilintervalle kann bei der Untersumme nur größer und bei der Obersumme nur kleiner werden.
- Man betrachtet die Unterteilung $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2$ und erhält

$$U_{\Delta_1}(f) \leqslant U_\Delta(f) \leqslant O_\Delta(f) \leqslant O_{\Delta_2}(f)\,.$$

20.1.5 Definition: f heißt Riemann-integrierbar ($\mathcal{R}$-integrierbar), wenn für eine beliebige Folge von Unterteilungen, deren Feinheiten gegen Null konvergieren, sowohl Ober- und Untersummen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. In diesem Fall können wir das Integral von f in den Grenzen a und b definieren als

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{h_\Delta \to 0} U_\Delta(f) = \lim_{h_\Delta \to 0} O_\Delta(f)\,.$$

20.1.6 Bemerkung: Durch die nicht ganz präzise Notation $\lim_{h_\Delta \to 0}$ wird ein Grenzwert immer feinerer Unterteilungen angedeutet. Praktisch erreicht man dies z.B. durch wiederholte „Verfeinerung“ einer Ausgangszerlegung $\Delta = \Delta_0$.

20.1.7 Notation: Analog zur Notation $f' = \frac{df}{dx}$ deutet das Differential dx in $\int_a^b f(x)\,dx$ auf „infinitesimale“ Differenzen $\Delta x := x_i - x_{i-1}$ hin.

20.1.8 Interpretation: Geometrisch betrachtet ist das Riemann-Integral dann die Größe der vom Graph von f, der x-Achse, und den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzten Fläche (wobei aber wieder Bereiche unterhalb der x-Achse negativ gewichtet werden).

20.1.9 Bemerkungen:

- Man beachte, dass die Approximation von $\int_a^b f(x)\,dx$ einer $\mathcal{R}$-integrierbaren Funktion f sogar durch eine beliebige Wahl eines Auswertepunkts $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ möglich ist, weil ja immer gilt

$$U_\Delta(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} h_i f(\xi_i) \leqslant O_\Delta(f)\,.$$

- Diese allgemeine Form der Approximation nennt man dann einfach Riemannsche Summe.
- Am einfachsten ist es, wenn man die ξ_i nur von x_i und x_{i-1} abhängig wählt. In diesem Fall stellt sich die Wahl $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ (sog. Mittelpunktsregel) für „glatte“ Funktionen als besonders günstig heraus (siehe später).

Beispiele

- Jede stetige Funktion ist $\mathcal{R}$-integrierbar. (Beweis: Später.)
- Auch nicht-stetige Funktion können $\mathcal{R}$-integrierbar sein, wie etwa

$$f : [0,1] \to [0,1]\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{2} \\ 0 & x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}\,.$$

  (Beweis: Man zeigt leicht, dass gilt $-h_\Delta \leqslant U_\Delta - \frac{1}{2} \leqslant O_\Delta - \frac{1}{2} \leqslant h_\Delta$, woraus für $h_\Delta \to 0$ die Konvergenz von Ober- und Untersummen gegen $\frac{1}{2}$ folgt.)
- Keine unbeschränkte Funktion ist $\mathcal{R}$-integrierbar. (Beweis: Unabhängig von Δ gilt entweder $U_\Delta = -\infty$ oder $O_\Delta = +\infty$ (oder beides), so dass keine Konvergenz möglich ist.)
- Nicht $\mathcal{R}$-integrierbar über $[0,1]$ ist aber auch die beschränkte Funktion

$$f : [0,1] \to [0,1]\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

  (Beweis: Weil jedes Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ sowohl rationale als auch irrationale Punkte enthält, gilt hier $O_\Delta(f) = 1$ und $U_\Delta(f) = 0$ unabhängig von der Zerlegung Δ von $[0,1]$.)

20.1.2. Eigenschaften

20.1.10 Satz: Ohne Beweis* zählen wir hier einige elementare Eigenschaften des Riemann-Integrals auf:

- LINEARITÄT: Für $\mathcal{R}$-integrierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch die Funktionen $f+g$ und λf $\mathcal{R}$-integrierbar, und es gilt
  1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
  2. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$
- ADDITIVITÄT bezüglich des Integrationsgebiets: Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-integrierbar ist, so gilt für ein beliebiges $c \in]a,b[$

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

  Damit diese Formel für möglichst viele Kombinationen von a, b, c Sinn macht, definieren wir auch

  $$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \text{für } a = b\,,$$
  $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{für } a > b\,.$$

- Für konstante Funktion $f(x) = c \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$
- Mit $m := \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M := \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ gilt

  $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)\,.$$

- Wenn f $\mathcal{R}$-integrierbar ist, so ist auch $|f|$ $\mathcal{R}$-integrierbar, und es gilt

  $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

*Die Beweise sind nicht sehr schwierig, aber recht technisch und tragen relativ wenig zum Verständnis der eigentlich sehr anschaulichen Eigenschaften bei.

20.1.3. Einschub: Gleichmäßige Stetigkeit

20.1.11 Definition: X und Y seien metrische Räume. $f \in C^0(X,Y)$ heißt gleichmäßig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in X : \forall y \in U_\delta(x) : f(y) \in U_\varepsilon(f(x)) \,.$$

In Worten: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ kann ein $\delta > 0$ gewählt werden, so dass $f(U_\delta(x)) \subset U_\varepsilon(f(x))$ für alle x gilt (also $\delta = \delta(\varepsilon)$ anstatt $\delta = \delta(\varepsilon, x)$).

20.1.12 Beispiel:

- $f :]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist gleichmäßig stetig (wähle $\delta := \varepsilon$).
- Eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung $K := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < \infty$ ist gleichmäßig stetig.
  (Begründung: Wegen des MWS kann man $\delta := \frac{\varepsilon}{K}$ wählen.)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist gleichmäßig stetig (wähle $\delta := \varepsilon$).
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$ ist gleichmäßig stetig (wähle $\delta := \varepsilon^2$).

20.1.13 Satz: Sei X kompakter metrischer Raum, Y metrischer Raum und $f : X \to Y$ sei stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweisskizze Wenn f nicht gleichmäßig stetig wäre, so gäbe es zu einem $\varepsilon > 0$ eine Folge (x_k), so dass in der $U_{2^{-k}}(x_k)$ Umgebung Punkte y liegen, mit $d(f(x_k), f(y)) \geqslant \varepsilon$. Diese Folge hätte dann aber wegen der Kompaktheit von X einen Häufungspunkt $x_* \in X$, in dem die Stetigkeit verletzt wäre.

20.1.14 Beispiel: Jedes $f \in C^0([a,b])$ ist gleichmäßig stetig.

20.1.4. $\mathcal{R}$-Integrierbarkeit von stetigen Funktionen

20.1.15 Satz: Jedes $f \in C^0([a,b])$ ist $\mathcal{R}$-integrierbar.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil $[a,b]$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig und es gibt ein $\delta > 0$, so dass $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Dann folgt aber für jede Zerlegung Δ mit $h_\Delta < \delta$:

$$O_\Delta(f) - U_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} h_i \Big(\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \Big) < (b-a)\varepsilon \,.$$

20.1.16 Verallgemeinerung: Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt (d.h. $\exists M > 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| < M$) und für alle $x \in [a,b]$ stetig mit Ausnahme von endlich vielen Unstetigkeitsstellen $s_1, \ldots, s_n \in [a,b]$. Dann ist f $\mathcal{R}$-integrierbar.

Beweisidee Der genaue Beweis ist leider ziemlich technisch, und so macht man sich am besten zuerst die Gültigkeit der Aussage am früher gegebenen Beispiel einer speziellen $\mathcal{R}$-integrierbaren Funktion mit einem einzigen Unstetigkeitspunkt klar. Die Idee des genauen Beweises ist dann einfach die Unterteilung des Intervalls in zwei Bereiche. Der eine Bereich beinhaltet die Unstetigkeitsstellen, hat eine kleine „Länge“, und man nutzt dort nicht die Stetigkeit, sondern die Beschränktheit von f aus. Auf dem anderen Bereich ist f stetig und man kann wie im Satz für stetige Funktionen argumentieren.

20.1.5. $\mathcal{R}$-Integrierbarkeit von differenzierbaren Funktionen

20.1.17 Problem: Für manche $f \in C^0([a,b])$ benötigt die Approximation von $\int_a^b f\,dx$ sehr feine Zerlegungen, wie etwa

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\,, \quad f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{|x|}{\varepsilon})\,, \quad \varepsilon \ll 1\,.$$

Fragen

1. Kann man die notwendige Feinheit quantifizieren?
2. Wie könnte man die Approximation verbessern?

20.1.18 Satz: Wenn $f \in C^0([a,b]) \cap C^1(]a,b[)$ mit $K := \sup_{x\in]a,b[}|f'(\xi)| < \infty$, so gilt die Fehlerabschätzung

$$O_\Delta(f) - U_\Delta(f) \leqslant K(b-a)h_\Delta\,.$$

Beweis Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ erhält man mit dem MWS

$$\begin{aligned}\max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) &= f(x_{\max}) - f(x_{\min}) \\ &= |f'(\xi)|\cdot|x_{\max} - x_{\min}| \\ &\leqslant h_i \sup_{x\in]x_{i-1},x_i[}|f'(\xi)|\,.\end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$O_\Delta(f) - U_\Delta(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot \underbrace{h_i \cdot \sup_{x\in]x_{i-1},x_i[}|f'(\xi)|}_{\leqslant Kh_\Delta} \leqslant (b-a)Kh_\Delta\,.$$

20.1.19 Anwendung: Es sei $f(x) = \exp(-x^2)$ und wir wollen $\int_0^1 f(x)\,dx$ approximieren. Wir berechnen

$$f'(x) = -2x\exp(-x^2)$$

und schätzen ab

$$|f'(x)| \leqslant |-2x\exp(-x^2)| \leqslant 2\,, \quad x \in [0,1]\,.$$

Somit reicht eine Feinheit von $h = \frac{1}{1000}$ aus, um das Integral mit Ober- oder Untersummen (oder alternativ: einer beliebigen Riemannsumme) bis auf einen Fehler $\varepsilon = \frac{1}{500}$ zu berechnen.

20.1.20 Satz: Bei Approximation mit der sogenannten Mittelpunktsregel

$$M_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} h_i f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$$

gilt für $f \in C^2([a,b])$ mit $K := \sup_{\xi\in]a,b[} |f''(\xi)| < \infty$ die Fehlerabschätzung

$$|\int_a^b f(x)\,dx - M_\Delta(f)| \leqslant \frac{K}{8}(b-a)h_\Delta^2\,.$$

Beweis Es bezeichne $m_i := \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ den Intervallmittelpunkt des i-ten Intervalls und $h_i = x_i - x_{i-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |I(f) - M_\Delta(f)| &= |\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} h_i f(m_i)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(m_i))\,dx| \end{aligned}$$

Auf jedem Teilintervall $[x_{i-1},x_i]$ bezeichne nun $T_{f,m_i,1}$ das Taylor-Polynom ersten Grades um m_i. Wegen $\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-m_i)\,dx = 0$ gilt dann gilt

$$\begin{aligned} |\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(m_i))\,dx| &= |\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-T_{f,m_i,1}(x))\,dx| \\ &\leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-T_{f,m_i,1}(x)|\,dx\,. \end{aligned}$$

Aus der Taylorschen Fehlerdarstellung

$$f(x) - T_{f,m_i,1}(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-m_i)^2$$

mit einer zwischen x und m_i liegenden Zwischenstelle ξ erhält man wegen $|x-m_i| \leqslant \frac{h_i}{2}$ dann lokal die Abschätzung

$$|f(x) - T_{f,m_i,1}(x)| \leqslant \frac{K}{2}\left(\frac{h_i}{2}\right)^2\,,$$

und zusammengesetzt ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n}|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - hf(m_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} h_i^3\frac{K}{8} \leqslant \frac{K}{8}(b-a)h^2\,.$$

20.1.21 Anwendung: Für $f(x) = \exp(-x^2)$ ist

$$f''(x) = 4x^2 \exp(-x^2) - 2\exp(-x^2)$$

und wir können abschätzen

$$|f''(x)| \leqslant |4x^2 - 2| \underbrace{\exp(-x^2)}_{\leqslant 1} \leqslant 2 \text{ für } x \in [0,1]\,.$$

Somit erhalten wir für $h = \frac{1}{1000}$ die Abschätzung

$$|M_\Delta(f) - \int_0^1 f(x)\,dx| \leqslant \frac{2}{8 \cdot 10^6} = 2.5 \cdot 10^{-7}\,.$$

20.1.22 Bemerkung: Falls noch höhere als die zweiten Ableitungen von f beschränkt sein sollten, kann man auch dies ausnutzen, um das Integral noch schneller zu approximieren. Mit der Untersuchung und Entwicklung geeigneter Methoden, um solche (und andere) Probleme numerisch effizient zu lösen, beschäftigt sich die Numerische Mathematik.

20.2. Integral und Stammfunktionen

20.2.1. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

20.2.1 Satz: („Hauptsatz“ der Differential- und Integralrechnung (HDI), 1. Teil) Sei $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Dann ist die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \int_a^x f(s)\,ds$$

stetig differenzierbar für $x \in]a,b[$, und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Beweis Dies folgt aus der Additivität:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h} \to f(x) \quad (h \to 0)$$

Begründung: Es gilt

$$\min_{\xi\in[x,x+h]} f(\xi) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x) \leqslant \max_{\xi\in[x,x+h]} f(\xi)$$

und für $h \to 0$ konvergieren wegen der Stetigkeit von f obere und untere Schranke gegen $f(x)$.

20.2.2 Definition: Sei $f \in C^0([a,b])$. Eine Funktion $F \in C^1([a,b])$ heißt Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a,b[$.

Beobachtung

- Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so ist für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ auch $F + c$ eine Stammfunktion von f.
- Umgekehrt gilt: Wenn $\tilde{F}$ eine weitere Stammfunktion von f ist, so gilt

$$(F - \tilde{F})'(x) = 0\,, \qquad \text{für alle } x \in]a, b[\,,$$

weswegen $F - \tilde{F}$ konstant sein muss (Mittelwertsatz).

20.2.3 Satz: (HDI, 2. Teil) Für eine beliebige Stammfunktion $F \in C^1([a, b])$ der Funktion $f \in C^0([a, b])$ gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis Sei $F_0(x) := \int_a^x f(x)\,dx$. Wegen $F(x) - F_0(x) = c \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F_0(b) - \underbrace{F_0(a)}_{=0} \\ &= (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - F(a)\,.\end{aligned}$$

20.2.4 Notation:
- Für die Differenz $F(b) - F(a)$ schreibt man oft $[F(x)]_a^b$, manchmal aber auch einfach $F(x)|_a^b$.
- Eine (bis auf eine additive Konstante bestimmte) Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnen wir mit $\int f(x)\,dx$ (sogenanntes unbestimmtes Integral im Gegensatz zum bestimmten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$).
- Wir werden daher im Folgenden schreiben $\int x\,dx = \frac{x^2}{2}$.
- ABER: Oft wird unter $\int f(x)\,dx$ ein allgemeiner Ausdruck für *alle möglichen* Stammfunktionen verstanden. Viele Leute schreiben daher

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \text{ für ein } c \in \mathbb{R}\,.$$

20.3. Integrationstechniken

20.3.1. Bekannte Stammfunktionen

Wissen Wir kennen bereits folgende (bis auf eine additive Konstante bestimmte) Stammfunktionen:

Funktion	Stammfunktion	Bemerkungen
$x^n, n \geqslant 0$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	
$x^n, n < -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$x \neq 0$
x^{-1}	$\ln(x)$	$x > 0$
x^{-1}	$\ln(-x)$	$x < 0$
$e^{\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\alpha \neq 0$
α^x	$\frac{1}{\ln(\alpha)}\alpha^x$	$1 \neq \alpha > 0$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \in]-1, 1[$

20.3.1 Anwendung: Wir berechnen $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ für die „Nadelkurve“

$$f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\exp(-\frac{|x|}{\varepsilon})$$

aus einem früheren Beispiel. Es ist

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{\varepsilon}\left[-\varepsilon e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\right]_0^1 = 2(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}})\,,$$

was für $0 < \varepsilon \ll 1$ sehr nahe bei 2 liegt.

20.3.2 Bemerkung: Durch Umkehrung der Differentiationsregeln kann man in etlichen Fällen die Stammfunktion eines Ausdrucks bestimmen, d.h. in Ausdrücke zerlegen/transformieren, deren Stammfunktionen bekannt sind. Die sich dadurch ergebenden Integrationsregeln stellen wir im Folgenden vor. Wir geben dabei jeweils eine Version für das unbestimmte Integral $\int \ldots$ und das bestimmte Integral $\int_a^b \ldots$ an.

20.3.2. Linearität der Integration

Beobachtung Die Linearität der Differentiation liefert die Integrationsregel

$$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha\int f + \beta\int g\,,$$

bzw. mit Grenzen (dies hatten wir schon früher erwähnt)

$$\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

20.3.3 Beispiel:

$$\int_0^1(e^x + 5\sin(x))\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + 5\int_0^1 \sin(x)\,dx = e + 4 - 5\cos(1)\,.$$

20.3.3. Partielle Integration

Beobachtung (Partielle Integration) Aus der Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \Longleftrightarrow \quad fg' = (fg)' - f'g$$

ergibt sich für die unbestimmten Integrale

$$\int (fg') = fg - \int (f'g)\,.$$

(Zu lesen als: Man erhält eine Stammfunktion von fg' als Differenz von fg und einer beliebigen Stammfunktion von $f'g$.) Mit Integrationsgrenzen hat diese Regel die unmissverständliche Form

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx\,.$$

20.3.4 Beispiel: Eine Stammfunktion für $\ln(x)$ (auf $\mathbb{R}^+$) erhält man durch

$$\int \ln(x) = \int \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f} = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}x = x\ln(x) - x\,.$$

Genauso berechnet man auch für $0 < a < b$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln(x)\,dx = \int_a^b 1\cdot\ln(x)\,dx &= [x\ln(x)]_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}x\,dx \\ &= [x\ln(x) - x]_a^b\,.\end{aligned}$$

20.3.5 Bemerkung: Die partielle Integration kann normalerweise nur dann sinnvoll angewendet werden, wenn sich der Integrand $f(x)$ so als Produkt $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ schreiben lässt, dass sich einer der Faktoren f_1, f_2 leicht differenzieren und der andere leicht integrieren lässt. In falscher Weise ausgeführt macht sie das Problem meist schlimmer!

20.3.6 Bemerkung: Manchmal gibt es auch Fälle, bei denen einfache oder wiederholte partielle Integration wieder zum Auftreten des Ausgangsterms auf der rechten Seite mit anderem Vorzeichen oder anderem Vorfaktor führt. Dieser kann dann auf die linke Seite gebracht werden und so berechnet werden.

20.3.7 Übung: Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$ auf verschiedene Weisen:

1. Stellen Sie $\cos^2(x)$ mit Hilfe eines Additionstheorems durch $\cos(2x)$ dar und integrieren Sie diesen Ausdruck.
2. Elimieren Sie die Integration im vorigen Schritt durch eine geometrische Betrachtung.
3. Integrieren Sie den Ursprungsausdruck mit Hilfe der partiellen Integration.

Substitution

Beobachtung (Substitution) Aus der Kettenregel der Differentiation ergibt sich, dass mit $u = \phi(x)$ gilt

$$\int f(\underbrace{\phi(x)}_{u}) \underbrace{\phi'(x)}_{=\frac{du}{dx}} = \left(\int f(u)\, du \circ \phi\right)(x) = \left(\int f(u)\, du\right)\Big|_{u=\phi(x)},$$

oder aber mit Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\, du\,.$$

20.3.8 Beispiel: Zur Berechnung von

$$\int \sin(x)\cos(x)\, dx$$

kann man $f(u) = u$ und $\phi(x) = \sin(x)$ setzen und erhält

$$\int \cos(x)\sin(x)\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\sin(x))^2\,.$$

20.3.9 Bemerkung: Oft sieht man die Substitution auch in folgender Variante:

$$\int f(\phi(x))\, dx \overset{u=\phi(x)}{=} \left(\int f(u)\, \underbrace{(\phi^{-1})'(u)}_{=\frac{dx}{du}}\, du\right) \circ \phi\,,$$

bzw. mit Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(\phi(x))\, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\,(\phi^{-1})'(u)\, du\,.$$

Auch diese Variante kann man sich gut merken, wenn man $dx = \frac{dx}{du}\, du$ schreibt, und dann (wegen $x = \phi^{-1}(u)$) $\frac{dx}{du} = (\phi^{-1})'(u)$.

20.3.10 Beispiel:

- Berechnung eines bestimmten Integrals:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (\alpha+\beta x)^{10}\, dx &\underbrace{=}_{u=\alpha+\beta x} \int_\alpha^{\alpha+2\beta} u^{10} \underbrace{\frac{1}{\beta}}_{=\frac{dx}{du}}\, du \\ &= \frac{1}{11\beta}\left[u^{11}\right]_\alpha^{\alpha+2\beta} \\ &= \frac{(\alpha+2\beta)^{11} - \alpha^{11}}{11\beta}\,.\end{aligned}$$

- Berechnung einer Stammfunktion

$$\begin{aligned}\int (\alpha+\beta x)^{10}\,dx &= \int u^{10}\,\underbrace{\frac{dx}{du}}_{=\frac{1}{\beta}}\,du\Big|_{u=\alpha+\beta x}\\ &= \frac{1}{11\beta}u^{11}\Big|_{u=\alpha+\beta x} = \frac{1}{11\beta}(\alpha+\beta x)^{11}\end{aligned}$$

- Diese Stammfunktion ist natürlich nur bis auf eine additive Konstante bestimmt, so dass viele Leute hier so rechnen

$$\begin{aligned}\ldots &= \frac{1}{11\beta}u^{11}\Big|_{u=\alpha+\beta x} + c\\ &= \frac{1}{11\beta}(\alpha+\beta x)^{11} + c \quad (c\in\mathbb{R})\,.\end{aligned}$$

20.3.11 Bemerkungen:

- Formal kann man bei der Substitution sehr gut mit Ausdrücken wie

$$u=u(x)\,,\quad x=x(u)\,,\quad \frac{du}{dx}=u'(x)\,,\quad \frac{dx}{du}=x'(u)=\frac{1}{\frac{du}{dx}}\ldots$$

  rechnen.

- Man kann die beiden Variablen u und x auch eine Zeitlang gemeinsam stehen lassen, muss dabei allerdings den Zusammenhang $x=x(u)$ und $u=u(x)$ im Kopf behalten. Viele Leute fordern daher Ersetzen in einem Schritt.

- Wichtig ist bei dieser zweiten Substitutionsvariante, dass die Ersetzungen $x\mapsto u(x)$ bzw. $u\mapsto x(u)$ bijektiv und differenzierbar sind. Bei bestimmten Integralen muss das wenigstens auf dem Bereich gelten, über den man integriert!

  FALSCH ist beispielsweise die Rechnung: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx \overset{u=x^2}{=} \int_1^1 \frac{u\,du}{2\sqrt{u}} = \int_1^1 \frac{\sqrt{u}\,du}{2} = 0.$

- Und es ist natürlich egal, wie die Variablen heißen!

20.3.12 Beispiel:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &\underbrace{=}_{x=\sin(u)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin(u)^2}\,\underbrace{\frac{dx}{du}}_{=\cos(u)}\,dx\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(u)\,du = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

20.3.4. Partialbruchzerlegung

20.3.13 Motivation: Wir wollen eine Stammfunktion der rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ berechnen.

20.3.14 Beispiel: Berechne $\int \frac{2x^2+3x+7}{x^2+3x+2}$.

Idee Zerlege die Funktion in einfachere Bestandteile.

20.3.15 Satz: Es sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome der Grade m und n sind. Es gelte $m < n$ (ansonsten kann man mittels Polynomdivision ein Polynom abspalten). Früher wurde gezeigt, dass man $q(x)$ wie folgt in lineare und quadratische Faktoren zerlegen kann:

$$q(x) = \alpha \prod_{i=1}^{n_1} (x - a_i)^{\nu_i} \cdot \prod_{i=1}^{n_2} (x^2 - b_i x + c_i)^{\mu_i}$$

mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$, $\nu_i, \mu_i \in \mathbb{N}$ und $\alpha, a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$. (Hierbei soll außerdem gelten $c_i > \frac{b_i^2}{4}$, sonst kann man die quadratischen Terme weiterzerlegen.) Dann kann man $f(x)$ schreiben als

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 - b_i x + c_i)^j}$$

Die $\sum_{i=1}^{n_1} \nu_i + 2\sum_{i=1}^{n_2} \mu_i = \operatorname{grad}(q)$ Koeffizienten $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ und $C_{i,j}$ ergeben sich durch Koeffizientenvergleich und Lösung eines linearen Gleichungssystems, welches man erhält, wenn man die Gleichung mit $q(x)$ multipliziert und die Koeffizienten der Polynome auf beiden Seiten gleichsetzt.

Beweisidee Dass eine solche Zerlegung immer möglich ist, sieht man, wenn man $p(x)$ in einer Basis von Interpolationspolynomen darstellt, die zu den Nullstellen von $q(x)$ gehören (vergleiche auch die folgende Übungsaufgabe).

20.3.16 Übung: Angenommen $q(x) = \alpha(x - a_1) \cdots (x - a_n)$, wobei die a_i paarweise verschieden sind. Es sei $p(x)$ ein Polynom mit $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$, welches daher mit Hilfe der Lagrangeschen Basispolynomen $\ell_1, \ldots, \ell_n$ zu den Stützstellen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ exakt dargestellt werden kann (siehe Übungsaufgabe 11.4). Leiten Sie hieraus eine explizite Formel für die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_n$ der Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{x - a_i}$$

her.

Beobachtung Die durch Partialbruchzerlegung entstehenden Terme lassen sich mit Hilfe der uns schon bekannten Techniken integrieren:

- $\int \frac{1}{x-c} = \ln|x - c|$

- Für $k > 1$: $\int \frac{1}{(x-c)^k} = \frac{\frac{-1}{k-1}}{(x-c)^{k-1}}$
- $\int \frac{x+a}{x^2-bx+c} = \frac{1}{2}\ln|x^2-bx+c| + \int \frac{a+\frac{b}{2}}{x^2-bx+c}$
- $\int \frac{1}{y^2+1} = \arctan(y)$
- Durch Substitution erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-bx+c} &= \int \frac{dx}{(x-\frac{b}{2})^2+(c-\frac{b^2}{4})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \int \frac{dy}{y^2+1}\Big|_{y=\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan\Big(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\Big) \\
&= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}} \arctan\Big(\frac{2x-b}{\sqrt{4c-b^2}}\Big)
\end{aligned}$$

20.3.17 Beispiel:

- Wir betrachten das Anfangsbeispiel $\int \frac{2x^2+3x+7}{x^2+3x+2}$.
- Zuerst sehen wir

$$\frac{2x^2+3x+7}{x^2+3x+2} = 2 + \frac{-3x+3}{x^2+3x+2}$$

- Als nächstes machen wir wegen $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$ den Ansatz

$$\frac{-3x+3}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$
$$\iff -3x+3 = a(x+2)+b(x+1) = (a+b)x + (2a+b)$$

- Koeffizientenvergleich liefert das LGS

$$\begin{aligned} a+b &= -3 \\ 2a+b &= 3 \end{aligned}$$

  Dieses hat die Lösung $a = 6$, $b = -9$.

- Folglich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+3x+7}{x^2+3x+2}\,dx &= \int 2\,dx + 6\int \frac{dx}{x+1} - 9\int \frac{dx}{x+2} \\
&= 2x + 6\ln|x+1| - 9\ln|x+2|
\end{aligned}$$

- Dieser Ausdruck liefert eine für $x \notin \{-1, -2\}$ definierte Stammfunktion.

Vorsicht Wenn man die entstehenden Stammfunktionen für die Berechnung eines bestimmten Integrals verwenden will, darf man normalerweise nicht über Nichtdefiniertheitsstellen hinwegintegrieren, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} \neq \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2\,.$$

Diese Zahl hat nichts mit der Fläche zwischen x-Achse und der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ zu tun. Diese ist nämlich unendlich groß ist (siehe später).

20.3.5. Schwierigkeiten und Grenzen der exakten Integration

20.3.18 Bemerkung: Zwar kann man für viele wichtige Funktionen in elementaren Funktionen wie $\exp$, $\sin$, Potenzen, Wurzeln, ... ausdrückbare Stammfunktionen finden, aber bei weitem nicht für alle. Wichtige Beispiele dafür sind $\int \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ oder $\int \exp(-x^2)\,dx$. Stammfunktionen können aber für stetige Integranden immer in der Form $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$ definiert und numerisch beliebig genau berechnet werden. Manchmal sind die entstehenden Funktionen so wichtig, dass man neue Namen dafür erfindet wie zum Beispiel die Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-s^2)\,ds$.

20.3.19 Bemerkung: Ferner sollte man folgendes beachten:

- Selbst wenn für eine Stammfunktion $\int f(x)$ ein elementarer Ausdruck existiert, kann dieser viel komplizierter sein als der Ausdruck für $f(x)$ selbst (Beispiele finden Sie in jeder Formelsammlung).
- In solchen Fällen verwendet man Computer-Algebra-Systeme oder aber ersetzt die exakte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ durch eine numerische Approximation (z.B. mit Hilfe der Mittelpunktsregel).

20.4. Erweiterungen

20.4.1. Uneigentliche Integrale

Beobachtung Manchmal ist auch für nur auf einem offenen (oder halboffenen) Intervall definierte Funktionen $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ die Fläche unter dem Graphen wohlbestimmt.

20.4.1 Definition: Es sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, wobei wir explizit auch die Werte $a = -\infty$ und $b = +\infty$ erlauben. Wir nehmen an, dass $\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$ wohlbestimmt ist, für alle $a', b' \in]a, b[$. Falls dann gilt $\lim\limits_{a' \to a, b' \to b} \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx = K \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ so definieren wir das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,dx := K$. Für halboffene Intervalle braucht man natürlich nur einen Grenzwert zu betrachten.

Beispiele

- Für $a \in \mathbb{R}$ ist
$$\int_a^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_a^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^{-a}) = e^{-a}\,.$$
- Für $\alpha > 1$ gilt
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^b = \frac{1}{\alpha-1}$$
sowie
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^1 = +\infty\,.$$
- Für $0 < \alpha < 1$ gilt umgekehrt $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = +\infty$ und $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$.
- Das uneigentliche Integral der Funktion $\frac{1}{x}$ über $\mathbb{R}^+$ divergiert hingegen in beide Richtungen: Es gilt nämlich
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\ln(x)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln(b)-0) = +\infty$$
und
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0}\left[\ln(x)\right]_a^1 = \lim_{a\to 0}(0-\ln(a)) = +\infty\,.$$
- Später[†] werden wir auch zeigen $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} = \sqrt{2\pi}$.

20.4.2 Satz: (Majorantenkriterium für Integrale) Es seien $f \in C^0(]a,b[,\mathbb{R})$ und $g \in C^0(]a,b[,\mathbb{R}_0^+)$ mit
$$|f(x)| \leqslant g(x)\,, \quad x \in]a,b[\,.$$
Wenn dann das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ existiert und endlich ist, so existiert auch das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ und ist endlich.

Beweisidee Für Folgen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt
$$\begin{aligned}\left|\int_{a_m}^{b_m} f(x)\,dx - \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx\right| &\leqslant \left|\int_{a_m}^{a_n} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{b_m}^{b_n} f(x)\,dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_{a_m}^{a_n} g(x)\,dx\right| + \left|\int_{b_m}^{b_n} g(x)\,dx\right| \\ &\to 0 \quad (m,n\to\infty)\end{aligned}$$

[†]Siehe den Abschnitt über die Normalverteilung.

weil g uneigentlich integrierbar ist und die Folge $G_n = \int_{a_n}^{b_n} g(x)\,dx$ konvergent und daher eine Cauchy-Folge ist. Folglich ist auch $F_n = \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent.

20.4.3 Beispiel:

- Wir setzen

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

- Dies ist die sogenannte Gamma-Funktion, die wegen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt &= \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &\leqslant \int_0^1 t^{x-1}\,dt + \Big(\sup_{t\geqslant 1} e^{-\frac{t}{2}}t^{x-1}\Big)\int_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,dt < +\infty\end{aligned}$$

  für alle $x \in \mathbb{R}^+$ wohldefiniert ist.

- Sie hat folgende Eigenschaften:
  - $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ (zeigt man mit partieller Integration).
  - $\Gamma(1) = 1$
  - Hieraus folgt $\Gamma(x) = (x-1)!$ für $x \in \mathbb{N}$.
- Somit liefert die Gamma-Funktion (abgesehen von der etwas störenden Verschiebung des Arguments um 1) eine Fortsetzung der Fakultätsfunktion von $\mathbb{N}_0$ auf $]-1, +\infty[$.

20.4.2. Beziehung zur Summation

Beobachtung Summation $\sum_{k=1}^N f(k)$ und Integration $\int_a^b f(x)\,dx$ hängen eng zusammen:

- Beide akkumulieren eine Größe f: die Summe akkumuliert *diskrete*, das Integral *kontinuierliche* Beiträge.
- Das Integral ist der Grenzwert von Summen, es lässt sich durch Summen approximieren

Ebenso hängen Reihen $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ und uneigentliche Integrale wie $\int_0^\infty f(x)\,dx$ eng zusammen:

- Es gelten analoge Sätze für Konvergenz der Reihe und Existenz des uneigentlichen Integrals, wie z.B. Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, etc.
- Summen/Reihen lassen sich durch Integrale nach oben oder unten abschätzen: Man sieht z.B. leicht (Ober-/Untersummen!), dass für $\alpha > 0$ gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,.$$

  Hieraus erhält man sofort, dass $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$ genau für $\alpha > 1$ existiert.

20.4.4 Bemerkung: Tatsächlich gibt es sogar eine Verallgemeinerung des Integralbegriffs, welche sowohl Summen als auch das Riemann-Integral als Spezialfälle enthält. Mit diesen allgemeinen Strukturen beschäftigt sich die Maßtheorie, welche eine wichtige Grundlage nicht nur für die höhere Analysis, sondern auch für die Stochastik (Wahrscheinlichkeitstheorie) ist. Mehr dazu findet man im Stochastikteil dieses Skripts.

20.4.3. Ableitung nach Parametern

Beobachtung Ein bestimmtes Integral kann man als (stetige) Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, \quad (a, b, f) \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

auffassen.

Frage Wie verhält sich der Wert des Integrals bei Änderung der Argumente a, b, f?

Wissen Wir wissen bereits, dass gilt

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(t)\,dt = f(b)\,.$$

20.4.5 Folgerung: Es gilt

$$\frac{d}{da} \int_a^b f(t)\,dt = \frac{d}{da} \left(- \int_b^a f(t)\,dt \right) = -f(a)\,.$$

20.4.6 Beispiel: Es gilt $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_x^b \sin(t)\cos(t)\,dt = -\sin(x)\cos(x)$.

20.4.7 Verallgemeinerung: Manchmal sind obere und/oder untere Grenzen eines bestimmten Integrals Funktionen eines Parameters x. In diesem Fall gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = b'(x)f(b) - a'(x)f(a)\,,$$

wobei a', b' die Ableitungen der Funktionen a und b bezeichnen.

Beweis Wir beobachten, dass $I(x) = \displaystyle\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt$ als Verkettung der differenzierbaren Abbildung

$$\tilde{I}(a, b) = \int_a^b f(t)\,dt\,, \qquad \text{Ableitung: } \mathcal{D}\tilde{I}(a, b) = (-f(a), f(b))$$

und der differenzierbaren Abbildung

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} a(x) \\ b(x) \end{pmatrix}\,, \qquad \text{Ableitung: } \mathcal{D}\varphi(x) = \begin{pmatrix} a'(x) \\ b'(x) \end{pmatrix}$$

entsteht. Die Kettenregel liefert dann die Behauptung.

20.4.8 Satz: Es sei $f : \mathbb{R} \times [a,b]\,,\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ stetig. Außerdem fordern wir, dass auch

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R} \times [a,b]\,, \quad (x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$$

stetig auf $\mathbb{R} \times [a,b]$ ist.

Dann ist die Funktion $I(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$ stetig differenzierbar und es gilt $\frac{dI}{dx}(x) := \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$. Man darf also „die Ableitung nach x unter das Integral nach t ziehen".

Beweisidee Ein elementarer Beweis ist wieder ziemlich technisch, so dass wir nur die Beweisidee im Kontext von Funktionenräumen skizzieren. Die Voraussetzungen reichen aus, um zu zeigen, dass $x \mapsto F(x) := f(x,\cdot)$ eine stetig differenzierbare Kurve im Vektorraum $\mathcal{C} := C^0([a,b])$ mit Ableitung $F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) \in \mathcal{C}$ ist. Die Integralauswertung $g \mapsto \int_a^b g(t)\,dt$ ist eine stetige und lineare Abbildung auf $\mathcal{C}$. Analog zur Anwendung von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ auf differenzierbare Kurven $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, wo nach der Kettenregel $\frac{d}{dx}(A\varphi(x)) = A(\frac{d\varphi}{dx}(x))$ gilt, liefert auch hier eine (verallgemeinerte) Kettenregel die Behauptung.

20.4.9 Zusammenfassung:

- Falls sowohl der Integrand f als auch die untere und obere Grenze von einem Parameter $x \in \mathbb{R}$ abhängen, erhält man somit die allgemeine Formel

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\\ &= b'(x)\,f(x,b(x)) - a'(x)\,f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\,.\end{aligned}$$

- Dies kann man sich geometrisch sehr schön veranschaulichen, wenn man $\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt$ als die Fläche in der (t,y)-Ebene zwischen den Kurven $y = f(x,t)$, $y = 0$, $t = a(x)$ und $t = b(x)$ interpretiert, und beobachtet, wie sie sich bei Variation von x verändert.

20.4.10 Beispiel: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{2x} (x+t)^{10}\,dt &= 2(3x)^{10} - (2x)^{10} + \int_x^{2x} 10(x+t)^9\,dt\\ &= 2(3x)^{10} - (2x)^{10} + \big[(x+t)^{10}\big]_x^{2x}\\ &= (2\cdot 3^{10} - 2^{10} + 3^{10} - 2^{10})x^{10}\\ &= (3^{11} - 2^{11})x^{10}\,.\end{aligned}$$

20.4.4. Vektorwertige Integration

20.4.11 Definition: $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt (uneigentlich) $\mathcal{R}$-integrierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_1,\ldots,f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ (uneigentlich) $\mathcal{R}$-integrierbar sind. Wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)\,dx := \begin{pmatrix} \int_a^b f(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_a^b f(x)\,dx \end{pmatrix}.$$

Beispiele

- $\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}$
- $\int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \, dt = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$
- $\int_{-1}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \, dt = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$

20.4.12 Bemerkung: Auch vektorwertige Stammfunktionen einer vektorwertigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ kann man als Vektor von Stammfunktionen der Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ definieren:

$$\int f \, dx := \begin{pmatrix} \int f_1 \, dx \\ \vdots \\ \int f_n \, dx \end{pmatrix}.$$

Solche vektorwertigen Stammfunktionen sind (analog zum skalaren Fall) nicht eindeutig definiert, sondern können sich um einen konstanten Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ unterscheiden.

20.4.13 Beispiel: FRAGE: Ein Beschleunigungsmesser in einem Auto stellt im Zeitintervall $[0, \pi]$ eine Beschleunigung der Form $a(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ fest. Wo befindet sich das Fahrzeug zum Zeitpunkt $t = \pi$, wenn es sich zur Zeit $t = 0$ am Ursprung $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Geschwindigkeit $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bewegte? Die Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned} v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix} \, ds &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} \sin(s) \\ -\cos(s) \end{pmatrix} \right]_0^t \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Ort ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 + \sin(s) \\ 1 - \cos(s) \end{pmatrix} \, ds &= \left[\begin{pmatrix} s - \cos(s) \\ s - \sin(s) \end{pmatrix} \right]_0^t \\ &= \begin{pmatrix} t - \cos(t) + 1 \\ t - \sin(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist $x(\pi) = \begin{pmatrix} \pi + 2 \\ \pi \end{pmatrix}$.

21. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beobachtung In den meisten Fällen verändert sich eine oder mehrere zeitlich variable Größen nicht nur durch fest vorgegebene Zuflüsse und Abflüsse, sondern die Änderungsgeschwindigkeit hängt (zusätzlich) vom aktuellen Zustand ab. Solche Phänomene können nicht mehr durch eine einfache Integration beschrieben werden, so dass eine Verallgemeinerung notwendig ist.

Beispiele

- Konto mit Zinsen
- Populationsmodelle
- Chemische Reaktionen
- Mechanische Systeme (z.B. Planetenbewegungen)
- Schwingungsstromkreis
- ...

21.1. Grundlagen

21.1.1. Definition

21.1.1 Problem: Zu $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ suchen wir ein $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

21.1.2 Notation: Hierbei sei $u'(t) = \frac{du}{dt}(t)$ und

$$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) := \{u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \mid u' \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\} \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)\,.$$

21.1.3 Bezeichnung: Eine solche Gleichung, in der die Ableitungen einer unbekannten Funktion auftreten, nennen wir eine gewöhnliche Differentialgleichung (engl.: *ordinary differential equation*, ODE). Die Lösung u ist offenbar eine *Kurve*, welche man auch Integralkurve der ODE nennt.

Beispiele

- Es sei $n = 1$ und $f(t, u) = \tilde{f}(t)$. Dann sind die Lösungen der ODE

$$u'(t) = f(t, u) = \tilde{f}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

gerade die (bis auf eine additive Konstante festgelegten) Stammfunktionen von $\tilde{f}$. Man kann u daher einfach durch Integration berechnen.

- Die Funktionen $u(t) = ce^{\lambda t}$ mit beliebiger Konstante $c \in \mathbb{R}$ sind Lösungen der ODE

$$u'(t) = \lambda u(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

- Für $f(t, u) = u^2$ hat die ODE

$$u'(t) = (u(t))^2$$

gerade die Lösungen $u(t) = 0$ sowie $u(t) = \frac{1}{t_* - t}$, wobei letztere aber nicht für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

BEMERKUNG: In der Praxis könnte t_* dabei die „Explosionszeit“ einer Kettenreaktion darstellen, auf welche sich die Lösung für Zeiten $t < t_*$ zubewegt. Derartige Singularitäten entsprechen in der Realität Situationen, bei denen ein allzu vereinfachtes Modell nicht mehr zur Beschreibung eines Phänomens ausreicht.

Abhilfe Erlaube auch Lösungen, die nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

21.1.4 Verallgemeinerung: Es sei $]a, b[$ ein Intervall und $f \in C^0(]a, b[\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Wir suchen $u \in C^1(]a, b[, \mathbb{R}^n)$ mit

$$u'(t) = f(t, u(t)) \text{ für alle } t \in]a, b[\,.$$

21.1.5 Bemerkungen:

- Manchmal bezeichnet man nur den Fall $n = 1$ als Differentialgleichung und nennt den Fall $n > 1$ ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

- Wenn $f(t, u) = \tilde{f}(t)$ nur von der t-Variablen, aber nicht von u abhängt, so kann man die Lösung der Differentialgleichung durch eine einfache Integration erhalten. Dieser einfache Fall wurde im vorigen Kapitel schon behandelt und interessiert uns daher im Folgenden nur wenig.

- Wenn umgekehrt f nicht explizit von t abhängt (sondern nur implizit über die Variable $u = u(t)$), so nennt man die Differentialgleichung autonom oder auch dynamisches System. Dynamische Systeme sind etwas einfacher zu analysieren, weil ihr Verhalten nur vom aktuellen Zustand des Systems abhängt, aber nicht von äußeren (zeitabhängigen) Einflüssen.

21.1.2. Lineare und autonome ODEs

21.1.6 Bezeichnung: Wir nennen eine ODE

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

linear, wenn $f(t, u)$ linear im Parameter u ist.

21.1.7 Beispiel:

- Im Fall $n = 1$ hat eine lineare, autonome ODE die Gestalt

$$u'(t) = \lambda u(t)\,.$$

  mit einem fest gewählten Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Diese ODE hat auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen der Form $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$.*

  Beweis: Einsetzen und differenzieren.

- Sie werden offenbar durch eine Konstante $u_0 \in \mathbb{R}$ parametrisiert, die man gleichzeitig als Wert der Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$ ansehen kann.

21.1.8 Beispiel:

- Für $n > 1$ haben lineare und autonome ODEs die Gestalt

$$u'(t) = A\,u(t)\,, \quad t \in]0, T[$$

  mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- Die Lösungen kann man sehr ähnlich zum Fall $n = 1$ schreiben als $u(t) = e^{tA}u_0$ mit einem $u_0 \in \mathbb{R}^n$, wenn man setzt (siehe folgende Bemerkung)

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} := \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

- Den Parametervektor $u_0 \in \mathbb{R}^n$ kann man auch hier wieder als Wert der jeweiligen Lösung zur Zeit $t = 0$ interpretieren.

- Beweis: Einsetzen und gliedweise nach t differenzieren.

21.1.9 Definition:

- Die Exponentialfunktion für beliebige Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist über ihre Reihe definiert:

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \in \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

- Diese Reihe konvergiert für beliebige Matrizen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (entweder elementweise oder aber bezüglich einer Matrixnorm gemessen).

- In Octave gibt es zu ihrer Berechnung den Befehl `expm` (die Funktion `exp` hingegen wendet die Exponentialfunktion elementweise an!).

*Bald werden wir sehen, dass dies auch alle Lösungen sind.

21.1.3. Ein (nichtlineares) Beispiel aus der Biologie

21.1.10 Modell: (Räuber-Beute-Modell) Auf einer Insel gebe es Populationen von Raubtieren $R = R(t)$ und Beutetieren $B = B(t)$, die sich mit der Zeit ändern können. Ein einfaches Modell für die zeitliche Veränderung der Populationen ist

$$\begin{aligned} \dot{B}(t) &= \mu_B B(t) - \alpha B(t) R(t)\,, \\ \dot{R}(t) &= -\mu_R R(t) + \beta B(t) R(t)\,. \end{aligned}$$

Hierbei sind $\mu_B, \mu_R, \alpha, \beta$ positive reelle Konstanten.

Frage Welche Phänomene beschreiben $\mu_B, \mu_R, \alpha, \beta$ im Räuber-Beute-Modell?

21.1.11 Transformation: Wir setzen $u(t) = \big(B(t), R(t)\big)^T$ und erhalten die Vektorgleichung

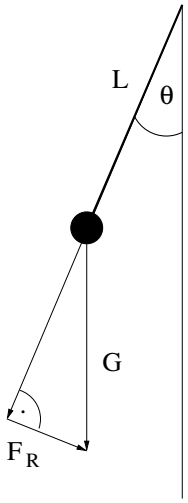
$$u'(t) = f(u(t)) \quad \text{mit} \quad f(u) = \begin{pmatrix} \mu_B u_1 - \alpha u_1 u_2 \\ -\mu_R u_2 + \beta u_1 u_2 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist dies ein nichtlineares (warum?) autonomes (warum?) System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der früher angegebenen Form. Die Lösungen dieser Gleichung sind dann Kurven aus $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

21.1.4. Ein (nichtlineares) Beispiel aus der Physik

21.1.12 Experiment: (Stabpendel)

- L: Länge des Pendelstabs
- m: Masse des Pendels
- g: Erdbeschleunigung
- $G = mg$: Gewichtskraft
- θ: Auslenkungswinkel
- $F_R = G \sin\theta$: Rückstellkraft



Wissen Aus der Mechanik wissen wir

- Auslenkungswinkel θ ist eine Funktion $\theta(t)$ der Zeit t
- Winkelgeschwindigkeit $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, wobei $\dot{\theta}(t) := \frac{d}{dt}\theta(t)$.
- Geschwindigkeit des Pendelgewichts ist $v(t) = L\omega(t)$

- Beschleunigung des Pendelgewichts $a(t) = \dot{v}(t) = L\dot{\omega}(t) = L\ddot{\theta}(t)$
- Rückstellkraft $F_R(t) = -mg\sin\theta(t)$ (Vorzeichen!)
- Andererseits: $F_R(t) = ma(t) = mL\ddot{\theta}(t)$ (Newtonsches Kraftgesetz)

21.1.13 Folgerung:
- Wenn wir setzen

$$u(t) = \begin{pmatrix}\theta(t)\\ \omega(t)\end{pmatrix},$$

so sehen wir, dass wir folgende nichtlineare ODE erhalten

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix}\dot{\theta}(t)\\ \dot{\omega}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega(t)\\ -\frac{g}{L}\sin\theta(t)\end{pmatrix},$$

- Dies entspricht aber gerade der Form

$$u'(t) = f(u(t)) \quad \text{mit} \quad f\left(\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}u_2\\ -\frac{g}{L}\sin u_1\end{pmatrix}.$$

21.1.14 Bemerkung:
- Weil sich die zweite Komponente $\omega(t)$ von $u(t)$ durch einfaches Ableiten aus der ersten Komponente $\theta(t)$ ergibt, erhält man durch nochmaliges Differenzieren die Form

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{L}\sin\theta(t).$$

- Hier kommt offenbar nur noch die skalare Funktion θ vor (wir haben also kein System mehr), allerdings haben wir uns dafür auch eine doppelte Zeitableitung eingehandelt.
- Solche ODEs zweiter und höherer Ordnung werden wir später noch genauer betrachten. Sie lassen sich durch Einführen von Ableitungen als eigenständige Lösungskomponenten immer in Systeme erster Ordnung überführen!

21.1.15 Bemerkung:
- Auch die Pendelgleichung hat viele Lösungen, die man am bequemsten wieder je nach ihrem Zustand zum Zeitpunkt 0 (Anfangsauslenkung und Anfangsgeschwindigkeit) parametrisieren kann.
- Einen expliziten Lösungsausdruck durch bekannte Formeln kann man hier (genau wie bei den anderen hier behandelten nichtlinearen Beispielen) nicht hinschreiben, die numerische Approximation von Lösungen ist aber nicht schwierig.

21.1.5. Eine Anwendung in der Chemie

21.1.16 Modell: (Michaelis-Menten-Kinetik) Wir betrachten folgendes System chemischer Reaktionen:

$$\begin{aligned} S + E &\xrightarrow{c_1} ES\\ ES &\xrightarrow{c_2} S + E\\ ES &\xrightarrow{c_3} P + E \end{aligned}$$

Hierbei ist S ein Substrat, E ein Enzym, das mit S einen Komplex ES bilden kann. Die Reaktion ist reversibel, es kann aber auch vorkommen, dass ES irreversibel in E und ein Endprodukt P zerfällt. c_1, c_2, c_3 sind die sogenannten Reaktionskonstanten. Das dynamische Verhalten der Konzentrationen wird dann durch folgende ODE beschrieben:

$$\begin{aligned}
[S]'(t) &= -c_1\,[S](t)\;[E](t) + c_2\,[ES](t)\\
[E]'(t) &= -c_1\,[S](t)\;[E](t) + (c_2+c_3)\,[ES](t)\\
[ES]'(t) &= c_1\,[S](t)\;[E](t) - (c_2+c_3)\,[ES](t)\\
[P]'(t) &= c_3\,[ES](t)
\end{aligned}$$

Dies ist von der allgemeinen Form, wenn man setzt

$$u = \begin{pmatrix}[S]\\[E]\\[ES]\\[P]\end{pmatrix}, \quad f(t,u) = \begin{pmatrix}-c_1u_1u_2 + c_2u_3\\ -c_1u_1u_2 + (c_2+c_3)u_3\\ c_1u_1u_2 - (c_2+c_3)u_3\\ c_3u_3\end{pmatrix}.$$

21.1.6. Lokale Lösungstheorie

Fragen

- Unter welchen Bedingungen an f existieren Lösungen einer ODE?
- Unter welchen Bedingungen sind sie eindeutig?
- Wie groß sind die Existenzintervalle der Lösungen? Existieren sie vielleicht sogar für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$?

Beobachtung

- Eine ODE
$$u'(t) = f(t,u(t)), \quad f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
hat normalerweise eine ganze Schar von Lösungen (wie z.B. für $f(t,u) = \tilde{f}(t)$, wo alle Stammfunktionen durch Variation einer additiven Konstante erhalten werden können).
- Eindeutigkeit kann daher nur mittels Zusatzbedingungen erreicht werden.
- Die einfachste Form einer solchen Bedingung ist die Forderung
$$u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$$
wobei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig ist.
- Recht oft ist dieses t_0 der Anfangszeitpunkt, von dem aus man das Verhalten des Systems für spätere Zeiten $t > t_0$ bestimmen will. Man nennt die Bedingung dann Anfangsbedingung.

21.1.17 Satz: (Lokaler Existenzsatz von Peano) Zu $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $\delta = \delta(f, t_0, u_0) > 0$, so dass die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

eine Lösung $u \in C^1(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, \mathbb{R}^n)$ besitzt.

Beweisidee Sei $B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - u_0\|_2 \leqslant 1\}$ und

$$C := \max_{(t,v) \in [t_0-1, t_0+1] \times B} \|f(t, v)\|, \quad \delta := \frac{1}{C}.$$

Dann beobachtet man, dass für $X := C^0(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, B)$ und

$$\mathcal{S} : X \to C^0(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, \mathbb{R}^n), \quad v \mapsto (t \mapsto u_0 + \int_0^t f(\tau, v(\tau))\, d\tau)$$

gilt $\mathcal{S}(X) \subset X$. Nun kann man mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln wie z.B. Abbildungsgrad/Fixpunktsatz auf Funktionenräumen und dem Satz von Arzela-Ascoli zeigen, dass $\mathcal{S}$ einen Fixpunkt $u \in X$ besitzt.

Beobachtung Leider ist die Lösung für nur stetige rechte Seiten f im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Ein Gegenbeispiel ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sqrt{|u(t)|}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses besitzt eine (durch t_1, t_2 mit $t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2$ parametrisierte) unendliche Lösungsschar

$$u(t) = \begin{cases} \frac{-(t-t_1)^2}{4} & t < t_1 \\ 0 & t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ \frac{(t-t_2)^2}{4} & t > t_2 \end{cases}.$$

21.1.18 Satz: (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf) Es seien f, t_0, u_0 wie vorher. f sei aber zusätzlich „lokal Lipschitz-stetig“ in der u-Variablen, d.h. für jedes feste t gibt es ein $C > 0$ mit

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leqslant C\|u_1 - u_2\|, \quad \forall u_1, u_2 \in B_1(u_0).$$

Dann gibt es ein $\delta > 0$, für welches die ODE

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\\ u(t_0) &= u_0 \end{aligned}$$

eine *eindeutige* Lösung $u \in C^1(]t_0 - \delta, t_0 + \delta[, \mathbb{R}^n)$ besitzt.

Beweisidee

- Wieder betrachtet man die oben definierte Abbildung $\mathcal{S} : X \to X$ für $X = C^0([-\delta, \delta[, \mathbb{R}^n)$.
- Die Annahmen reichen aus, um zu zeigen, dass $\mathcal{S}$ für ausreichend kleines $\delta > 0$ sogar eine Kontraktion auf X ist, d.h. es gilt für ein $\theta < 1$

$$\|\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}(v)\|_X \leqslant \theta \|u - v\|_X \,.$$

- Für Kontraktionen kann es aber höchstens einen Fixpunkt geben (warum?).

21.1.19 Bemerkung: Lipschitz-Stetigkeit und stetige Differenzierbarkeit hängen wie folgt zusammen:

- Jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist *lokal* Lipschitz-stetig (d.h. für jeden Punkt kann man eine Umgebung finden, so dass f Lipschitz-stetig in dieser Umgebung ist).
- Umgekehrt gibt es aber *lokal* Lipschitz-stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind, wie z.B. $f(x) = |x|$.
- $f(x) = |x|$ ist sogar *global* Lipschitzstetig, weil mit $C = 1$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leqslant C|x_1 - x_2| \,.$$

- Eine stetig differenzierbare Funktion wie $f(x) = x^2$ ist hingegen nur *lokal*, aber nicht *global* Lipschitz-stetig, weil man eine Lipschitz-Konstante C nur finden kann, wenn man die Größe von x_1 und x_2 beschränkt.

Beispiele

- Der lokale Existenzsatz gilt für *alle* bisher betrachteten ODE-Beispiele, weil in allen Fällen die Funktion f stetig war.
- Die Eindeutigkeit ist aber nicht garantiert, wenn f in der u-Variablen nicht Lipschitz-stetig ist (Gegenbeispiel $f(t, u) = \sqrt{|u|}$).
- Die Einschränkung des Existenzintervalls ist im Allgemeinen notwendig, wie wir bereits am Beispiel $u'(t) = (u(t))^2$ gesehen haben. Ein weiteres ähnliches Beispiel ist

$$u'(t) = 1 + u^2(t) \,, \quad u(0) = 0 \,,$$

deren Lösung $u(t) = \tan(t)$ nur im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ definiert ist.

21.1.20 Satz: (Regularitätssatz) Falls $f \in C^k(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ für $k \geqslant 1$ (in t und u), so ist die sich aus dem Satz von Picard-Lindelöf ergebende eindeutige Lösung $u \in C^1(]t_0-\delta,t_0+\delta[,\mathbb{R}^n)$ der ODE

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t) &= f(t,u(t))\,, \quad t\in]t_0-\delta,t_0+\delta[\\ u(t_0) &= u_0\end{aligned}$$

sogar $k+1$-fach stetig differenzierbar, d.h. $u \in C^{k+1}(]t_0-\delta,t_0+\delta[,\mathbb{R}^n)$.

Beweis Für $k=1$ ergibt sich $u \in C^2$ wegen

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}(t) &= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}u(t))\\ &= \frac{d^2u}{dt^2}(t)\\ &= \frac{d}{dt}f(t,u(t))\\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t,u(t))}_{\in\mathbb{R}^n} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(t,u(t))}_{\in\mathbb{R}^{n\times n}}\underbrace{u'(t)}_{\in\mathbb{R}^n}\,.\end{aligned}$$

In Abhängigkeit von t ist das Ergebnis aber nun als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Das Ergebnis für $k>1$ folgt analog mit Induktion.

21.1.21 Zusammenfassung: Insgesamt lassen sich die Sätze dieses Abschnitts in folgender Tabelle zusammenfassen:

	Lokale		
	Existenz	Eindeutigkeit	Regularität
$f \in C^0$	ja	nicht immer	$u \in C^1$
$f \in C^0$, $f(t,\cdot)$ lok. Lip.	ja	ja	$u \in C^1$
$f \in C^k$ mit $k \geqslant 1$	ja	ja	$u \in C^{k+1}$

Dabei kann das Existenzintervall von u sehr klein sein (und natürlich machen auch Eindeutigkeit und Regularität nur auf diesem Intervall Sinn). Falls f allerdings *global* Lipschitz-stetig ist (d.h. mit einer für alle u_1,u_2 geltenden Konstante C), so existiert eine eindeutige Lösung für alle Zeiten.

21.1.22 Anwendung: Eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t) &= \frac{t}{1+(u(t))^2}\,, \quad t>0\\ u(0) &= 1\end{aligned}$$

existiert wenigstens auf einem Zeitintervall $]-\delta,\delta[$ für ein $\delta>0$. Auf $]-\delta,\delta[$ ist die Lösung auch eindeutig und beliebig oft differenzierbar. Wie schon früher bemerkt, ist die Einschränkung des Existenzintervalls ohne Zusatzannahmen unausweichlich. Später werden wir einige Bedingungen angeben, unter denen man Existenz für alle $t>0$ zeigen kann. Tatsächlich existiert die Lösung im hier betrachteten Beispiel sogar für alle $t\in\mathbb{R}$.

21.1.7. Ein einfaches numerisches Lösungsverfahren

Beobachtung Man kann Differentialgleichungen im allgemeinen nicht explizit lösen (schon explizite Stammfunktionen gibt es ja nicht immer!). Man ist daher in den meisten Fällen auf eine numerische Approximation angewiesen.

Idee Wenn wir die Ableitung durch einen Differenzenquotienten approximieren, können wir aus dem Wert $u(t)$ eine Approximation von $u(t+h)$ für ein $h > 0$ berechnen:

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \approx u'(t) \quad \rightsquigarrow \quad u(t+h) \approx u(t) + hf(t, u(t)) .$$

21.1.23 Algorithmus: (Explizites Euler-Verfahren) Gegeben sei $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ und $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann berechnet folgendes Verfahren für eine gegebene Zeitschrittweite $h > 0$ eine Folge von Vektoren $y_{h,1}, y_{h,2}, \ldots \in \mathbb{R}^n$:

1. Setze $y_{h,0} := u_0$.
2. Für $i = 1, 2, \ldots$ setze $y_{h,i} := y_{h,i-1} + hf(t_{i-1}, y_{h,i-1})$ und danach $t_i = t_{i-1} + h$.

Bemerkung: Falls eine eindeutige Lösung u auf einem Intervall $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ existiert, so kann man zeigen, dass $|y_{h,i} - u(t_i)| = O(h)$.

Beobachtung Bei Anwendung auf das Räuber-Beute-Modell sehen wir:

- Es gibt einen stationären Punkt, in dem Räuber und Beute im Gleichgewicht sind.
- Wenn der Anfangswert u_0 nicht dieses Gleichgewicht ist, so beobachten wir Oszillationen, die umso stärker sind, je weiter u_0 vom Gleichgewicht entfernt ist. Solche Oszillationen beobachtet man auch in der Natur!
- Das explizite Euler-Verfahren ist zwar einfach, aber leider auch sehr ungenau (Fehlerordnung $O(h)$). Eine erhebliche Verbesserung liefert ein sogenanntes Runge-Kutta-Verfahren der Fehlerordnung $O(h^4)$.

Beobachtung Bei Anwendung auf das Pendelproblem sehen wir:

- Das explizite Euler-Verfahren ist wieder sehr ungenau.
- Insbesondere sehen wir, dass es die Gesamtenergie des physikalischen Systems nicht erhält.
- Auch hier bringt das RK-Verfahren vierter Ordnung eine wesentliche Verbesserung, obwohl es auch nicht exakt energieerhaltend ist.

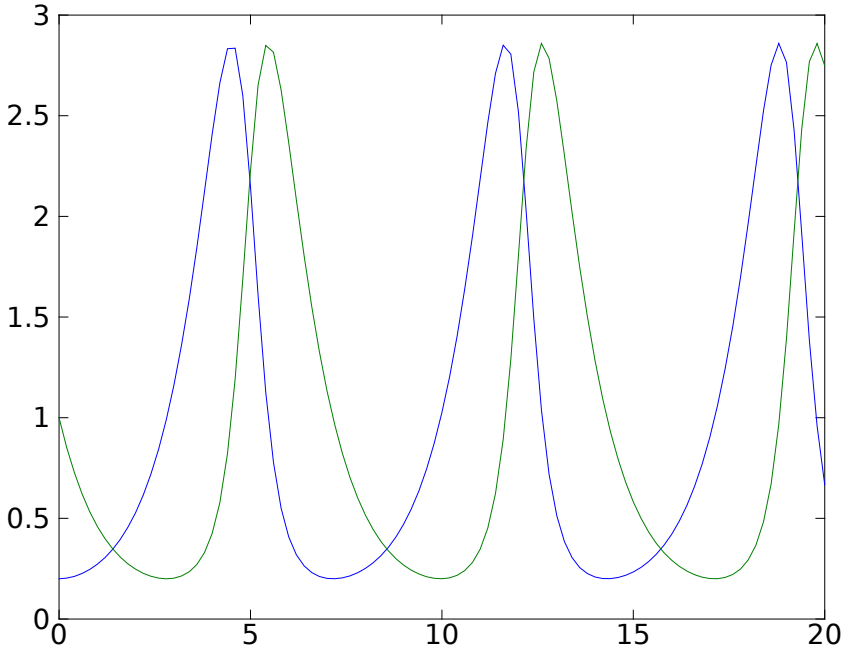


Abbildung 21.1.: Räuber und Beute in Abhängigkeit von der Zeit

21.1.8. Geometrische Veranschaulichung

21.1.24 Bezeichnung: Eine Lösung $u :]t_1, t_2[\to \mathbb{R}^n$, welche die ODE

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

löst (egal zu welchen Randbedingungen!), nennt man eine Integralkurve dieser ODE (weil man sie durch verallgemeinertes Integrieren erhält).

Frage Welche Möglichkeiten gibt es, um solche Integralkurven graphisch darzustellen?

Darstellung einer bestimmten Lösung im (t, u)-Diagramm Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine bestimmte Integralkurve der ODE

$$u'(t) = f(t, u(t)) \text{ mit } f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

(zum Beispiel durch einen Anfangswert spezifiziert). Dann kann man alle oder auch eine oder mehrere ausgewählte Komponentenfunktionen $u_i(t)$ in einem (t, u)-Diagramm darstellen. Diese Darstellung hilft allerdings nicht dem Verständnis, wie sich die Gesamtheit *aller* Lösungen verhält. Wichtige Ausnahme: Im Fall $n = 1$ kann man mehrere Integralkurven gemeinsam in das Schaubild einzeichnen. Mehr dazu später.

21.1.25 Beispiel: Im Räuber-Beute-Modell oder im Pendel-Modell können wir für bestimmte Parameter und Anfangswerte solche Oszillationen beobachten, siehe Fig. 21.1.

Richtungsfelder und/oder Integralkurven im Phasenraum Eine Integralkurve $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der autonomen ODE (oder „des dynamischen Systems“)

$$u'(t) = f(u(t))$$

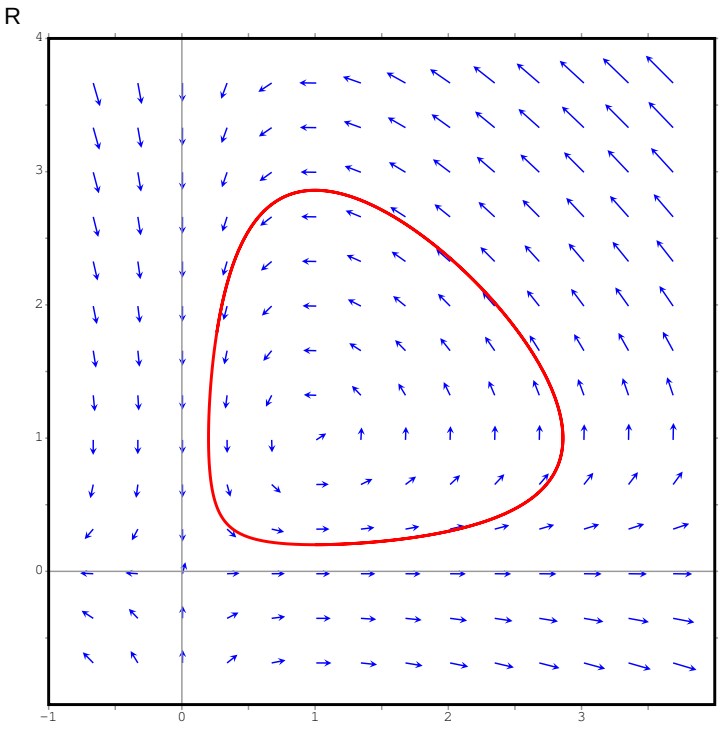


Abbildung 21.2.: Phasenraumdarstellung des Räuber-Beute-Modells

besitzt die Eigenschaft, dass ihre Ableitung (Tangente) gerade durch die Auswertung der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an der Stelle $u(t)$ (also im aktuellen Zustand) gegeben ist. Den Raum aller Zustände (hier $\mathbb{R}^n$) eines dynamischen Systems nennt man Phasenraum. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nennt man Vektorfeld im $\mathbb{R}^n$. Im Zusammenhang mit ODEs spricht man dabei auch vom Richtungsfeld der ODE. Dieses Richtungsfeld hängt nicht von einer bestimmten Lösungskurve ab, sondern bestimmt das Verhalten der Gesamtheit der Lösungen (für alle Anfangswerte). Das Richtungsfeld kann durch Pfeile im $\mathbb{R}^n$ dargestellt werden. Zur zusätzlichen Veranschaulichung werden oft auch vereinzelte Segmente $\{u(t) \mid t \in]t_1, t_2[\}$ von Integralkurven der ODE eingezeichnet. Die Zeitinformation wird dabei nicht wiedergegeben (und ist für die autonome Differentialgleichung auch nicht so wichtig)! Aus den Pfeilen kann man allerdings ersehen, in welche Richtung eine Integralkurve durchlaufen wird, und die Länge der Pfeile gibt einen Hinweis auf die Geschwindigkeit, mit der sie an dieser Stelle durchlaufen wird. Besonders im Fall $n = 2$ ist diese Phasenraum-Darstellung sehr aufschlussreich! Im Fall $n = 3$ ist man dagegen schon auf 3D-Graphiken am Computer angewiesen, und im Fall $n \geqslant 4$ muss man auf ein vollständiges Bild für komplizierte Situationen ganz verzichten.

21.1.26 Beispiel: Im Räuber-Beute-Modell sieht die Phasenraumdarstellung wie in Fig. 21.2 aus.

Richtungsfelder und Integralkurven im erweiterten Phasenraum Jede Lösung einer nichtautonomen ODE entspricht einer (der Einfachheit halber wieder mit t parametrisierten) Kurve

$$\tilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}$$

im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Für $\tilde{u}$ gilt wieder, dass die Tangentenrichtung durch ein Richtungsfeld, nämlich

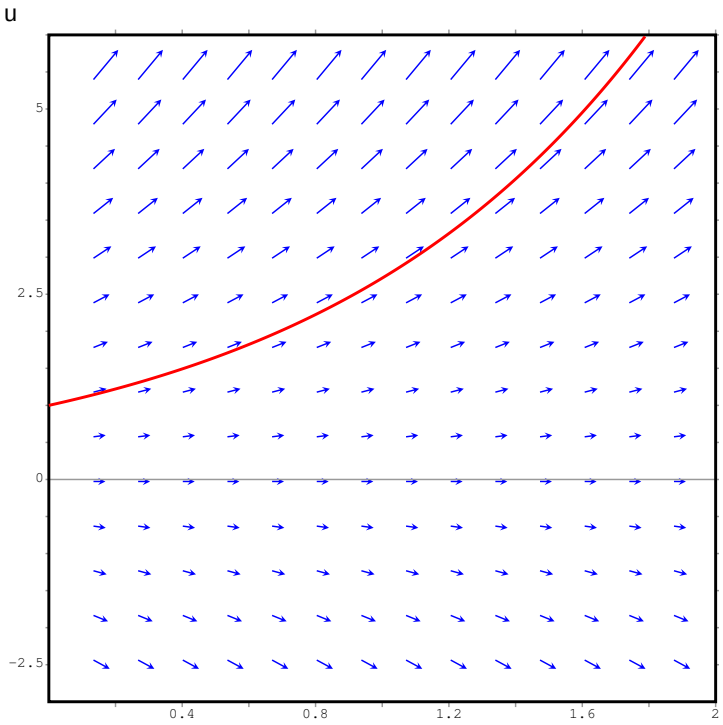
$$\tilde{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ f(t,u) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Offenbar ist

$$\tilde{u}'(t) = \tilde{f}(\tilde{u})$$

dann ein autonomes System im erweiterten Phasenraum $\mathbb{R}^{n+1}$. Im diesem erweiterten Phasenraum ist auch die Zeitinformation enthalten. Diese Darstellung ist vor allem für den Fall $n = 1$ eines geeignet, weil dann der erweiterte Phasenraum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zweidimensional ist.

21.1.27 Beispiel: Für die Differentialgleichung $u'(t) = \lambda u(t)$ mit $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ergibt sich folgendes Bild:



21.2. Die Lösung ausgewählter gewöhnlicher Differentialgleichungen

- Für manche Differentialgleichungen ist es möglich, Lösungen in Form einfacher Integrale und Stammfunktionen darzustellen.
- Falls diese Integrale auch noch explizit berechenbar sind, kann man sogar explizite Darstellungen der Lösungen finden.
- In diesem Abschnitt werden wir einige wenige solcher Fälle betrachten, es gibt aber noch viel, viel mehr...

- Für diesen ganzen Abschnitt werden wir uns auf den Fall einer Differentialgleichung im strengen Sinn beschränken, d.h. f und u sollen reellwertig sein.

21.2.1. Separable ODEs

- Die Integralkurve $u \in C^1(]t_1, t_2[, \mathbb{R})$ erfülle eine ODE der speziellen Form

$$u'(t) = f(t)g(u(t)) = f(t)g(u)\,,$$

  bei welcher die rechte Seite ein Produkt einer nur von t und einer nur von u abhängigen Funktion ist.

- Wir setzen voraus, dass $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Somit sind Lösungskurven auf jeden Fall lokal eindeutig.

- Wir nehmen ferner an, dass $g(u(t)) \neq 0$ längs der Integralkurve ist. Dies ist keine wesentliche Einschränkung: Falls für ein $t_* \in]t_1, t_2[$ gelten würde $g(u(t_*)) = 0$, so würde aus dem Eindeutigkeitssatz sofort folgen, dass $u(t) = u_* := u(t_*)$ für alle $t \in]t_1, t_2[$ gilt.

- Dann kann man aber durch $g(u(t))$ teilen und erhält

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t)\,.$$

- Es sei nun H eine (beliebige) Stammfunktion von $\frac{1}{g}$ und F eine (beliebige) Stammfunktion von f.

- Wegen der Kettenregel gilt

$$(H(u(t)))' = \frac{u'(t)}{g(u(t))}\,,$$

  so dass wir folgern können $H(u(t)) = F(t) + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

- Nun ist der Bereich der möglichen u-Werte wegen der Stetigkeit von u ein zusammenhängendes Intervall I in $\mathbb{R}$ (nämlich welches?) und weil $H'(u) = \frac{1}{g(u)} \neq 0$ auf I ist, so gibt es dort eine Umkehrfunktion H^{-1}.

- Theoretisch (und wenn man Glück hat auch praktisch) kann man diese nichtlineare Gleichung nach $u(t)$ auflösen und erhält die Integralkurve in der Form

$$u(t) = H^{-1}(F(t) + C) \text{ mit einem } C \in \mathbb{R}\,.$$

21.2.1 Bemerkungen:

- Formal (aber besser zu merken) kann man dies auch durch die Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} = f(t)g(u) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{du}{g(u)} = f(t)\,dt \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{du}{g(u)} = \int f(t)\,dt + C \end{aligned}$$

und anschließendem Auflösen nach u erreichen.

- Wenn eine Anfangsbedingung $u(t_0) = u_0$ vorgegeben ist, so kann man diese auch direkt einbauen:

$$\begin{aligned} \frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t} \frac{u'(\tau)}{g(u(\tau))}\,d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau \\ &\overset{\text{Substitution}}{\Longleftrightarrow} \quad \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

Auflösen nach $u(t)$ ergibt dann die zur Anfangsbedingung gehörende Lösung.

21.2.2 Beispiel: Wir betrachten die lineare ODE

$$u'(t) = a(t)u(t)\,.$$

Hier ist offenbar $g(u) = u$ und für $u \neq 0$ errechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{du}{g(u)} = a(t)\,dt \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int a(t)\,dt + C \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln(|u(t)|) = C + \int a(t)\,dt \end{aligned}$$

Hieraus können wir die allgemeine Lösung

$$u(t) = \pm e^{C} e^{\int a(t)\,dt}$$

ablesen (das Vorzeichen ist je nach dem Vorzeichen von $u(t)$ auf der uns interessierenden Lösungskurve). Außerdem ist $u(t) = 0$ eine Lösung. Für die Wahl der speziellen Stammfunktion $\int_0^t a(\tau)\,d\tau$ ersehen wir hieraus die allgemeine Form

$$u(t) = u_0 e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} \quad \text{mit } u_0 \in \mathbb{R}\,.$$

21.2.3 Beispiel: Wir betrachten die ODE

$$u'(t) = -\frac{t}{u(t)}\,.$$

im Bereich $(t, u) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Hier erhalten wir

$$u\,du = -t\,dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{u^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C$$

woraus wir mit $\tilde{C} = 2C$ die allgemeine Lösungsform

$$u(t) = \pm\sqrt{\tilde{C} - t^2}$$

für Integralkurven ablesen können. Diese Integralkurven beschreiben Kreissegmente in der (t, u)-Ebene und sind jeweils nur für $t^2 < \tilde{C}$ definiert. Dies kann man übrigens auch durch Betrachtung des Richtungsfelds $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{u} \end{pmatrix}$ erraten, welches immer senkrecht auf dem Ortsvektor $\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$ steht.

21.2.4 Übung: Wie sieht das Richtungsfeld und die allgemeine Lösung im Fall

$$u'(t) = \frac{t}{u(t)}\,.$$

aus?

21.2.2. Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

21.2.5 Bemerkung: Gleichungen der Form

$$u'(t) = g(\frac{u(t)}{t})$$

nennt man Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen. Sie lassen sich in separable ODE umschreiben (siehe die folgende Übung).

21.2.6 Übung: Eine Differentialgleichung der Form

$$y'(t) = f(\frac{y}{t})$$

nennt man *Ähnlichkeitsdifferentialgleichung*.

1. Man transformiere sie durch die Substitution $u(t) = \frac{y(t)}{t}$ in eine separable Differentialgleichung.
2. Man finde auf diese Weise die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{y}{t} + 1\,.$$

21.2.7 Lösung:

- Einerseits gilt

$$y'(t) = (tu(t))' = tu'(t) + u(t)\,,$$

andererseits aber auch

$$y'(t) = f(u(t))\,.$$

Somit folgt

$$u'(t) = \frac{f(u(t)) - u(t)}{t}\,.$$

- Diese ODE für u ist aber separabel, d.h. von der Form $u'(t) = g(u)h(t)$ mit geeigneten Funktionen g und h (nämlich $g(u) = f(u) - u$ und $h(t) = \frac{1}{t}$). Man kann sie exakt lösen, sofern man eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(u)}$ angeben kann.

- Im angegebenen Speizialfall ist $f(u) = u + 1$ und somit $g(u) = 1$. Daher erhalten wir die transformierte Gleichung
$$u'(t) = \frac{1}{t}\,.$$
Diese lässt sich sogar durch einfache Integration lösen und man erhält
$$u(t) = \ln|t| + C\,.$$
Somit muss $y(t) = t(\ln|t| + C)$ sein.

- PROBE (sollte man machen, weil sie wenig kostet): Einsetzen in die ODE für y zeigt, dass man richtig gerechnet hat.

21.3. Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

21.3.1. Der skalare Fall

21.3.1 Definition: Eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung (Gleichung im strengen Sinn verstanden) hat die Gestalt
$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$$
mit $a, b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wenn $b(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so nennt man die Gleichung homogen, ansonsten inhomogen. Durch Vorgabe einer Anfangsbedingung $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}$ kann man die Lösung eindeutig festlegen. Die Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert für alle $t \in \mathbb{R}$ (siehe später).

Wissen Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung
$$u'(t) = a(t)u(t)$$
hat die Form $u_{\text{hom}}(t) = u_0 e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau}$.
Der Lösungsraum der homogenen Gleichung ist somit
$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \{u(t) = u_0 e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} \mid u_0 \in \mathbb{R}\}\,.$$
Es ist ein eindimensionaler Vektorraum, der aus allen reellen Vielfachen der Funktion $t \mapsto e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau}$ besteht.

Beobachtung Wenn $u_1, u_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Lösungen der linearen *inhomogenen* ODE sind, so ist ihre Differenz $v := u_1 - u_2$ wegen
$$v'(t) = (u_1 - u_2)'(t) = u_1'(t) - u_2'(t) = a(t)u_1(t) - a(t)u_2(t) = a(t)v(t)$$

Lösung der linearen *homogenen* ODE. Folglich hat der Lösungsraum der linearen *inhomogenen* ODE die Form

$$\mathcal{L}_{\text{inh}} = u_{\text{inh}} + \mathcal{L}_{\text{hom}}$$

wobei u_{inh} eine *beliebige* Lösung der linearen *inhomogenen* ODE ist.

21.3.2 Bemerkung:

- Dies ist analog zum Fall von Lösungen linearer Gleichungssysteme $Ax = b$, wo wir auch den allgemeinen Lösungsraum in ähnlicher Weise als

$$\mathcal{L}_{\text{inh}} = x_{\text{inh}} + \mathcal{L}_{\text{hom}} = x_{\text{inh}} + \text{Kern}(A)$$

  beschrieben haben.

- Der Matrix A entspricht hier der Differentialoperator

$$\mathcal{D} : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad u \mapsto u' - au.$$

Frage Wie erhält man irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung?

21.3.3 Methode: (Variation der Konstanten) Man macht den Ansatz

$$u_{\text{inh}}(t) = c(t)u_{\text{hom}}(t)$$

wobei $u_{\text{hom}}(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Differenzieren liefert dann

$$\begin{aligned} u'_{\text{inh}}(t) &= c'(t)u_{\text{hom}}(t) + c(t)u'_{\text{hom}}(t) \\ &= c'(t)u_{\text{hom}}(t) + c(t)a(t)u_{\text{hom}}(t) \\ &= c'(t)u_{\text{hom}}(t) + a(t)u_{\text{inh}}(t) \\ &\overset{!}{=} b(t) + a(t)u_{\text{inh}}(t). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man

$$c'(t) = \frac{b(t)}{u_{\text{hom}}(t)},$$

und mit Wahl von $u_{\text{hom}}(t) = e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau}$ ergibt sich

$$c'(t) = b(t)e^{-\int_0^t a(\tau)\,d\tau} \quad \Rightarrow \quad c(t) = \int b(t)e^{-\int_0^t a(\tau)\,d\tau}\,dt$$

Somit erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung durch

$$\begin{aligned} u_{\text{inh}}(t) &= \int_0^t b(\sigma)e^{-\int_0^\sigma a(\tau)\,d\tau}\,d\sigma \cdot e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} \\ &= \int_0^t b(\sigma)e^{\int_\sigma^t a(\tau)\,d\tau}\,d\sigma \end{aligned}$$

Wenn man ein Anfangswertproblem lösen will, so muss zu dieser speziellen inhomogenen Lösung noch ein geeignetes Vielfaches der homogenen Lösung addiert werden. Falls der Anfangswert bei $t = 0$ als $u(0) = u_0$ gegeben ist, so ergibt sich die Lösungsformel

$$\begin{aligned} u(t) &= (u_0 + \int_0^t b(\sigma) e^{-\int_0^\sigma a(\tau)\,d\tau}\,d\sigma) \cdot e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} \\ &= u_0 e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} + \int_0^t b(\sigma) e^{\int_\sigma^t a(\tau)\,d\tau}\,d\sigma\,. \end{aligned}$$

21.3.4 Bemerkung:

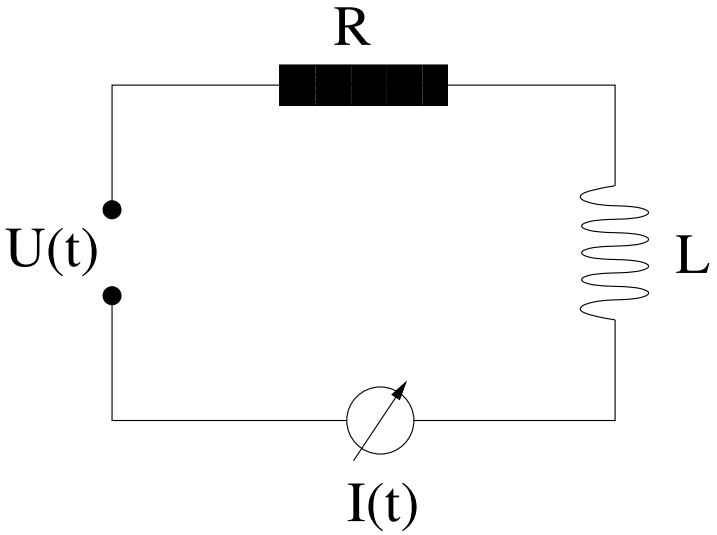
- Diese Lösungsformel hilft nicht viel, da es fast genauso einfach ist, die Methode der „Variation der Konstanten“ direkt auf die Gleichung anzuwenden.
- Man kann sie aber recht gut verstehen, wenn man

  $$\Phi(t_1, t_2) = e^{\int_{t_1}^{t_2} a(\tau)\,d\tau}$$

  als den Vergrößerungsfaktor erkennt, mit dem Beiträge aus der Zeit t_1 in die Zeit t_2 „transportiert“ werden (analog zur Verzinsung von Geld auf einem Konto).
- Wegen dieser Transporteigenschaft nennt man Φ oft auch Fluss oder Phasenfluss.

21.3.2. Beispiel

Eine Wechselspannungsquelle gibt in einem Stromkreis die Spannung $U(t) = \cos(\omega t)$ vor, in Reihe geschaltet sind noch der Widerstand R und eine Induktivität L:



Aufgrund der Beziehungen

$$U_R(t) = RI(t)\,, \quad U_{\text{ind}}(t) = -L\dot{I}(t)\,, \quad U(t) + U_{\text{ind}}(t) = U_R(t)$$

ergibt sich eine Differentialgleichung für die Stromstärke $I(t)$:

$$L\dot{I}(t) = -RI(t) + U(t)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung ist

$$I_{\text{hom}}(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung suchen wir mit dem Ansatz

$$I_{\text{inh}} = c(t)e^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

Einsetzen in die DG ergibt

$$Lc'(t)e^{-\frac{R}{L}t} - RI_{\text{inh}}(t) = -RI_{\text{inh}}(t) + U(t)$$

woraus man ersieht

$$c'(t) = \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{L}U(t) = \frac{U_0}{L}e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t)\,.$$

Am einfachsten kann man dies weiterbehandeln, wenn man im Komplexen arbeitet. Man beobachtet dazu, dass

$$e^{\frac{R}{L}t}\cos(\omega t) = \mathfrak{Re}(e^{(\frac{R}{L}+\omega \boldsymbol{i})t})$$

Weil nun (analog zu Kurven im $\mathbb{R}^n$) für komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt $\int \mathfrak{Re}(f(t))\,dt = \mathfrak{Re}(\int f(t))$, so kann man auch komplex weiterrechnen und erst am Ende den Realteil nehmen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} c(t) &= \int c'(t)\,dt \\ &= \frac{U_0}{L}\int e^{(\frac{R}{L}+\boldsymbol{i}\omega)t}\,dt \\ &= \frac{U_0}{L(\frac{R}{L}+\boldsymbol{i}\omega)}e^{(\frac{R}{L}+\boldsymbol{i}\omega)t} \\ &= \frac{U_0}{R+\boldsymbol{i}\omega L}e^{(\frac{R}{L}+\boldsymbol{i}\omega)t} \end{aligned}$$

(Hier haben wir ausgenutzt, dass $\frac{1}{z}\exp(zt)$ eine Stammfunktion von $\exp(zt)$ ist. Dies sieht man aber wieder aus der Exponentialreihe.) Somit ergibt sich dann eine komplexwertige Lösung der inhomogenen Gleichung zu

$$I_{\text{inh}}(t) = \frac{U_0}{R+\boldsymbol{i}\omega L}e^{\boldsymbol{i}\omega t}$$

und die allgemeine Lösung zu

$$I(t) = \frac{U_0}{R+\boldsymbol{i}\omega L}e^{\boldsymbol{i}\omega t} + ce^{-\frac{R}{L}t}\,.$$

Nun könnte man c aus einer Anfangsbedingung an $I(0)$ bestimmen (nicht eindeutig, da physikalisch nur der Realteil festgelegt ist) und würde eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung erhalten. Wenn man allerdings am Langzeitverhalten der Lösung

interessiert ist, so sieht man, dass $I(t)$ exponentiell schnell gegen $I_{\text{inh}}(t)$ strebt, so dass man sich auf diesen einfacheren Ausdruck einschränken kann. Dieser beschreibt eine Kreisbewegung in der komplexen Ebene auf einem Radius (Amplitude) $\frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$ mit einer Phasenverschiebung $\varphi = \arg(\frac{1}{R+\boldsymbol{i}\omega L}) = -\arg(R+\boldsymbol{i}\omega L)$ gegenüber der Spannung $U(t)$. Als physikalisch messbare Funktion ergibt sich daher (nach dem Abklingen des Anfangsterms)

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos(\omega t+\varphi)\,.$$

Die komplexen Größen $Z = R+\boldsymbol{i}\omega L$ und $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R+\boldsymbol{i}\omega L}$ nennt man übrigens Impedanz bzw. Admittanz.

21.3.3. Lineare Systeme

21.3.5 Problem: Es sei $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $b(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Wir suchen alle Lösungen $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ der Gleichung (genauer: des Systems)

$$\begin{aligned} u'(t) &= A(t)u(t)+b(t)\,, \quad t>0\,,\\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist dabei $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, also konstante Koeffizienten in der Systemmatrix.

21.3.6 Beispiel: Das System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_1'(t)\\ u_2'(t)\end{pmatrix}}_{u'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}}_{A(t)=A}\underbrace{\begin{pmatrix} u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix}}_{u(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1\\ t\end{pmatrix}}_{b(t)}\,, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} u_1(0)\\ u_2(0)\end{pmatrix}}_{u(0)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\\ 1\end{pmatrix}}_{u_0}$$

lässt sich einfach lösen, indem man zuerst die erste Gleichung löst und deren Lösung dann in die zweite Gleichung einsetzt. Ohne die Dreiecksgestalt der Matrix ist dieser einfache Weg allerdings nicht mehr möglich.

Lineare Systeme mit konstanter Systemmatrix

Voraussetzung Die Systemmatrix ist konstant, d.h. $A(t) = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Beobachtung Dieselben Schlüsse wie für die skalare Differentialgleichung führen für das System

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t)+b(t)\\ u(0) &= u_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

auf die Lösungsformel

$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-\sigma)A}b(\sigma)\,d\sigma = e^{tA}\left(u_0 + \int_0^t e^{-\sigma A}b(\sigma)\,d\sigma\right)\,.$$

21.3.7 Bemerkung: Diese Lösungsformel ist identisch mit derjenigen für den skalaren Fall, außer dass genauer auf die Multiplikationsreihenfolge Matrix-mal-Vektor geachtet wurde.

Aber

1. Die in der Formel verwendete Matrix-Exponentialfunktion ist zwar recht gut berechenbar (Matlab/Octave: `expm`), aber dennoch ein Black-Box-Konstrukt, das wir noch analysieren sollten.

2. Was macht man, wenn man eine solche Differentialgleichung „von Hand“ lösen will?

Erinnerung Aus der linearen Algebra wissen wir:

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt (reell) diagonalisierbar, wenn es eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von A zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ gibt.

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt (komplex) diagonalisierbar, wenn es eine Basis des $\mathbb{C}^n$ von Eigenvektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ gibt.

- Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nur komplex diagonalisierbar ist, so treten nichtreelle Eigenwerte immer als konjugiert komplexe Paare auf.
  GENAUER: Wenn $v \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ ist, so ist $\overline{v}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda} \neq \lambda$.

- Wenn man die obigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ spaltenweise zu einer Matrix $T = (v_1|\cdots|v_n)$ zusammensetzt, so gilt

$$A = T\Lambda T^{-1} \text{ bzw. } \Lambda = T^{-1}AT \quad \text{mit} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

21.3.8 Satz: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei reell oder komplex diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis von Eigenvektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. T sei die zugehörige Transformationsmatrix, deren Spalten die v_i sind. Dann gilt $u(t) = T\tilde{u}(t)$, wobei die Komponenten $\tilde{u}_k$ von $\tilde{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die entkoppelten skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k'(t) &= \lambda_k \tilde{u}_k(t) + \tilde{b}_k(t) \\ \tilde{u}_k(0) &= \tilde{u}_0 \end{aligned}$$

mit der Inhomogenität $\tilde{b}(t) = T^{-1}b(t)$ und dem Anfangswert $\tilde{u}_0 = T^{-1}u_0$ erfüllen.

Beweis Multipliziere die Ausgangsgleichung mit T^{-1} und ersetze u durch $T\tilde{u}(t)$.

21.3.9 Beispiel:

- Wir wollen das System

$$\begin{aligned} u'(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} \\ u(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  lösen.

- Die Systemmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat offenbar die Eigenwerte 0 und 2 zu Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (bis auf Vielfache bestimmt).

- Für $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ist dann $T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Somit ergibt sich

$$\tilde{u}_0 = T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b}(t) = T^{-1}\begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\tilde{u}(t)$ ist dann Lösung des Systems

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1'(t) &= 0 \cdot \tilde{u}_1(t) - t \\ \tilde{u}_2'(t) &= 2 \cdot \tilde{u}_2(t) \end{aligned}$$

  mit Anfangsbedingungen $\tilde{u}_1(0) = 0$ und $\tilde{u}_2(0) = 1$.

- Die Lösung dieses Systems ist offenbar $\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} \frac{-t^2}{2} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$.

- Für u bedeutet dies

$$u(t) = T\tilde{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} - \frac{t^2}{2} \\ e^{2t} + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

21.3.10 Bemerkung:

- Auch wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nur komplex diagonalisierbar sein sollte, wie zum Beispiel für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, muss das Endergebnis $u(t)$ im Falle eines reellen Anfangswerts u_0 und einer reellen Inhomogenität b wieder reellwertig sein.

- Dies geschieht, indem sich komplexwertige Summanden geeignet kombinieren, wie zum Beispiel für

$$\begin{aligned} (2+3\boldsymbol{i})e^{(\alpha+\omega\boldsymbol{i})t} + (2-3\boldsymbol{i})e^{(\alpha-\omega\boldsymbol{i})t} &= 2\,\mathfrak{Re}((2+3\boldsymbol{i})e^{(\alpha+\omega\boldsymbol{i})t}) \\ &= e^{\alpha t}(4\cos(\omega t) - 6\sin(\omega t)) \end{aligned}$$

  Wenn α und ω reell sind, ist es offenbar auch das Ergebnis.

Aber Nicht alle Matrizen sind diagonalisierbar, wie zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$.
FRAGE: Was macht diese Matrix z.B. für $\lambda = 1$ geometrisch?

21.3.11 Satz: Für jede Matrix gibt es Transformationen $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, für welche $T^{-1}AT$ eine obere Dreiecksmatrix oder sogar in der sogenannten „Jordan-Normalform“ (JNF) ist.
Letzteres bedeutet eine Blockdiagonalmatrix, deren Diagonalblöcke entweder Zahlen sind (Format 1x1) oder aber die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ haben.

Beweisidee Die Berechnung der JNF geschieht, indem man Eigenvektoren $v^{(1)}$ durch weitere Vektoren (Hauptvektoren) ergänzt, die $Av^{(k)} = \lambda v^{(k)} + v^{(k-1)}$ erfüllen.

21.3.12 Bemerkung:

- Leider ist die Berechnung der JNF einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ im allgemeinen numerisch instabil (unstetig), so dass es auch keine Matlab/Octave-Funktion dafür gibt.

- Wir werden daher nicht weiter darauf eingehen, sondern nur Matrizen wie die oben gezeigte Scherungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ betrachten, welche bereits in der JNF vorliegen.

21.3.13 Bemerkung:

- Wenn A in oberer Dreiecks- oder Jordan-Gestalt vorliegt, so kann man die Differentialgleichungen in der Reihenfolge $n, n-1, \dots, 1$ auflösen.

- So ergibt sich etwa die allgemeine Lösung der ODE

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= \lambda u_1(t) + u_2(t) \\ u_2'(t) &= \lambda u_2(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $(u_1(0), u_2(0)) = (\alpha, \beta)$ zu

$$u_2(t) = \beta e^{\lambda t}, \quad u_1(t) = \alpha e^{\lambda t} + \beta t e^{\lambda t}.$$

21.3.4. Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

21.3.14 Problem: Wir wollen die Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t)\,, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

lösen, indem wir ein Fundamentalsystem finden.

Wissen Wir hatten bereits gesehen, dass die Lösung der obigen ODE mit Anfangswert $u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$u(t) = \exp(tA)u_0\,,$$

wobei $\exp(\cdot)$ die Matrix-Exponentialfunktion bezeichnet.

Idee Wir setzen für eine beliebige Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ einfach

$$y_k(t) := \exp(tA)\, v_k\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Kritik Leider ist die hier verwendete Matrix-Exponentialfunktion ein Black-Box-Konstrukt, das zum Verständnis nicht viel mehr hilft als die Konstruktion von Fundamentalsystemen durch Lösung von Anfangswertproblemen (welche ja den Vorteil hat, auch für zeitabhängige Koeffizienten $A(t)$ zu funktionieren).

Fragen

- Gibt es Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$, für welche das Fundamentalsystem besonders einfach aussieht?
- Alternativ: Was macht die Matrix-Exponentialfunktion genau?

21.3.15 Satz: Es seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektoren von A zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k\,, \quad k = 1, \ldots, n$$

ein Fundamentalsystem.

Beweis Einsetzen in die Differentialgleichung.

21.3.16 Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Somit ist ein Fundamentalsystem durch

$$y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } y_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Frage Bei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann es aber auch nichtreelle Nullstellen des charakteristischen Problems geben. Wie erhält man in diesem Fall ein einfach zu handhabendes Fundamentalsystem?

21.3.17 Satz: $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei komplex diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis aus komplexen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^n$ zu komplexen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k\,, \quad k = 1, \ldots, n$$

ein komplexes Fundamentalsystem.

Beweis Einsetzen in die Differentialgleichung.

21.3.18 Bemerkung:

- Wenn man dieses komplexe Fundamentalsystem zur Lösung einer reellwertigen Differentialgleichung verwendet, so erhält man die physikalisch messbaren Größen wieder als Real- oder Imaginärteil der komplexwertigen Lösung.
- So lange wie möglich im Komplexen zu rechnen ist oft sehr praktisch. Wir haben dies auch im Beispiel mit dem L-R-Stromkreis bereits getan.

Frage Kann man das Rechnen in $\mathbb{C}$ vermeiden und direkt ein relles Fundamentalsystem definieren?

Antwort Ja, denn für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt folgendes: Wenn ein (komplexer) Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ existiert, so ist $\overline{v}$ ein Eigenvektor zu $\overline{\lambda}$. Die zugehörigen komplexen Basisfunktionen im Fundamentalsystem sind dann

$$y_v(t) = e^{\lambda t} v \quad \text{und} \quad y_{\overline{v}}(t) = e^{\overline{\lambda} t}\overline{v} = \overline{y_v(t)}\,.$$

Damit folgt aber sofort, dass die reellen Funktionen

$$\mathfrak{Re}(y_v(t)) = \frac{y_v(t) + y_{\overline{v}}(t)}{2} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Im}(y_v(t)) = \frac{y_v(t) - y_{\overline{v}}(t)}{2\boldsymbol{i}}$$

denselben Lösungsvektorraum aufspannen wie y_v und $y_{\overline{v}}$.

21.3.19 Beispiel: Wir betrachten $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + \boldsymbol{i}$ und $\lambda_2 = 1 - \boldsymbol{i}$ zu den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{i} \end{pmatrix}$. Statt des komplexen Fundamentalsystems

$$\{y_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix} e^{(1+\boldsymbol{i})t},\; y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{i} \end{pmatrix} e^{(1-\boldsymbol{i})t}\}$$

kann man dann auch folgendes reelle System verwenden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(y_1(t)) &= \mathfrak{Re}(e^t(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}) = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}\,, \\ \mathfrak{Im}(y_1(t)) &= \mathfrak{Im}(e^t(\cos(t) + i\sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{i} \end{pmatrix}) = e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

(Was beschreiben diese Kurven übrigens geometrisch?)

Frage Und was geschieht im Fall nichtdiagonalisierbarer Matrizen?

21.3.20 Beispiel: Für das System

$$u'(t) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} u(t) \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,,$$

kann man das (halbwegs) einfache Fundamentalsystem

$$\{y_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix},\ y_2(t) = \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix}\}$$

definieren.

21.3.21 Bemerkungen:

- Für größere Matrizen dieser speziellen Form (Einsen über einer λ-Diagonale) gibt es analoge Fundamentalsysteme bestehend aus Lösungskurven der Form
$$y_k(t) = e^{\lambda t}\left(\tfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \tfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}, \ldots, t, 1, 0, \ldots, 0\right)^T .$$
- Allgemeine Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kann man durch die Wahl einer speziellen Basis in die sogenannte Jordan-Normalform transformieren (die Vektoren der Jordan-Basis, die keine Eigenvektoren sind, nennt man dabei Hauptvektoren).
- In dieser Jordan-Normalform treten die gerade beschriebenen Matrizen als Diagonalblöcke auf (zusammen mit den zu üblichen Eigenvektoren gehörenden 1×1-Blöcken), so dass man Fundamentalsysteme analog zu oben konstruieren kann.
- Allerdings ist die Verwendung der Jordan-Normalform $J(A)$ einer Matrix A in der Praxis problematisch. Dies liegt daran, dass die Abbildung $A \mapsto J(A)$ im Falle mehrfacher Eigenwerte[†] unstetig in A und damit für fehlerbehaftete Daten nicht wohldefiniert ist.
- Man beachte auch, dass dies ein künstliches Problem ist, entstanden nur durch unser Streben nach einem möglichst expliziten Lösungsausdruck. Das Lösen der Differentialgleichung mit Hilfe der (als Reihe ausgewerteten) Matrix-Exponentialfunktion oder das numerische Lösen mit einem Runge-Kutta-Verfahren ist völlig unabhängig davon, ob die Systemmatrix diagonalisierbar ist oder nicht!

21.3.5. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Beobachtung

- Das Stabpendel-System
$$\begin{aligned} \theta'(t) &= \omega(t) \\ \omega'(t) &= -\frac{g}{L}\sin(\theta(t)) \end{aligned}$$

[†]Und das ist ja der für die Jordan-Gestalt relevante Fall, weil man ansonsten eine Eigenvektorbasis zur Verfügung hat!

kann man durch Differenzieren und Einsetzen in

$$\theta''(t) = -\frac{g}{L}\sin(\theta(t))$$

überführen.

- Diese zweite Form ist kompakter als das System und wird daher in der Praxis gerne verwendet.
- Allerdings kommen Ableitungen höherer Ordnung vor...

21.3.22 Problem: Finde alle Lösungen $u \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der folgenden skalaren Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ $(a_n \neq 0)$:

$$a_n u^{(n)}(t) + a_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 u'(t) + a_0 u(t) = b(t)\,.$$

($u^{(k)}$ bezeichnet hier die k-te Ableitung nach t.) Oder aber: Finde eine spezielle Lösung $u \in C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dieser Gleichung, die zusätzlich folgende Anfangsbedingungen erfüllt:

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}\,.$$

Idee Schreibe die ODE durch Hinzunehmen der Ableitungen bis zur Ordnung $n-1$ in ein System erster Ordnung um und löse dann dieses.

Beobachtung

- Dies funktioniert gut, um grundlegende Existenzresultate zu übertragen (wie z.B. dass das im vorigen Problem beschriebene AWP eine eindeutige Lösung hat) und um numerische Löser einheitlich verwenden zu können.
- Allerdings ist es aufwändiger, weil man Redundanz einschleppt: Alle Komponenten können ja im Prinzip aus einer einzigen (der Funktion) durch Ableiten berechnet werden.
- Außerdem hat das durch die Umformung entstandene System erster Ordnung eine sehr spezielle Struktur, welche von für allgemeine Systeme konstruierten Methoden wahrscheinlich nicht ausgenutzt wird.

21.3.23 Bezeichnung: Es seien $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann nennen wir eine Abbildung $\mathcal{D} : C^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Form

$$\begin{aligned} u \mapsto \mathcal{D}u &= a_n\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{du}{dt} + a_0 u \\ &= \left(a_n\frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\right)u \\ &= \left(a_n\Big(\frac{d}{dt}\Big)^n + a_{n-1}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^{n-1} + \dots + a_1\frac{d}{dt} + a_0\right)u \end{aligned}$$

einen linearen Differentialoperator n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Beobachtung Die Differentialgleichung höherer Ordnung lässt sich mit Hilfe von $\mathcal{D}$ einfach schreiben als

$$\mathcal{D}u = b \qquad [\forall t \in \mathbb{R} : \ (\mathcal{D}u)(t) = b(t)]$$

und die zugehörige homogene Gleichung lautet einfach

$$\mathcal{D}u = 0 \qquad [\forall t \in \mathbb{R} : \ (\mathcal{D}u)(t) = 0] \ .$$

Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ der homogenen Gleichung ist daher

$$\mathcal{L}_{\text{hom}} = \{u \mid \mathcal{D}u = 0\} = \text{Kern}(\mathcal{D}) \, .$$

21.3.24 Definition: Es sei $\mathcal{D}$ der obige Differentialoperator n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dann nennen wir das Polynom

$$p_{\mathcal{D}}(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

das zu $\mathcal{D}$ gehörende charakteristische Polynom. Es entsteht, indem man die Ableitungen in $\mathcal{D}$ durch die Variable λ ersetzt.

Beobachtung

- Es gilt für beliebige $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder auch $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t} \, .$$

- Hieraus folgt sofort[‡]

$$\mathcal{D}(e^{\lambda t}) = p_{\mathcal{D}}(\lambda)e^{\lambda t} \, .$$

- Wir sehen hieraus, dass die Funktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ ein Eigenvektor (weil es eine Funktion ist, sagt man hier auch Eigenfunktion) von $\mathcal{D}$ ist mit Eigenwert $p_{\mathcal{D}}(\lambda)$!

- Und offenbar gibt es unendlich viele dieser Eigenfunktionen...

21.3.25 Satz: Es sei $\mathcal{D}$ der obige Differentialoperator n-ter Ordnung und $p_{\mathcal{D}}$ das zugehörige charakteristische Polynom n-ten Grades. $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ seien paarweise verschiedene Nullstellen von $p_{\mathcal{D}}$ mit Vielfachheiten $\mu_1, \ldots, \mu_k \geqslant 1$, so dass gilt $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = n$. Dann wird $\text{Kern}(\mathcal{D})$ aufgespannt von den n linear unabhängigen Funktionen

$$\begin{matrix} \{e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \ldots, & t^{\mu_1 - 1}e^{\lambda_1 t}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_k t}, & te^{\lambda_k t}, & \ldots, & t^{\mu_k - 1}e^{\lambda_k t}\} \end{matrix}$$

[‡]Weil $\mathcal{D}$ ein *linearer* DO mit *konstanten* Koeffizienten ist, also ein Polynom in $\frac{d}{dt}$!

Beweis

- Zuerst zeigt man, dass alle diese Funktionen Lösungen der Gleichung $\mathcal{D}u = 0$ sind. Dies folgt, weil
$$(\frac{d}{dt} - \lambda)(t^k e^{\lambda t}) = (kt^{k-1})e^{\lambda t}\,,$$
so dass $k+1$-faches Anwenden von $(\frac{d}{dt} - \lambda)$ Null ergibt.
- Durch Anwendung geeigneter Operatoren der Form $\frac{d}{dt} - \lambda$ kann man auch sehen, dass die angegebenen n Funktionen linear unabhängig sein müssen.
- Jede Lösung von $\mathcal{D}u = 0$ ist durch die n Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt. Daher ist der Lösungsraum n-dimensional, und die angegegebenen n linear unabhängigen Funktionen müssen eine Basis sein.

21.3.26 Bezeichnung: Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathcal{D})$ nennt man Fundamentalsystem.

21.3.27 Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung
$$u^{(6)}(t) - u^{(4)}(t) - u^{(2)}(t) + u(t) = 0\,.$$
Dieses entspricht $\mathcal{D}u = 0$ mit
$$\mathcal{D} = \left(\frac{d}{dt}\right)^6 - \left(\frac{d}{dt}\right)^4 - \left(\frac{d}{dt}\right)^2 + 1$$
Dieser Differentialoperator $\mathcal{D}$ hat dann das charakteristische Polynom
$$p_{\mathcal{D}}(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^4 - \lambda^2 + 1\,,$$
welches die Nullstellen 1 und -1 jeweils mit Vielfacheit 2, sowie $\pm\boldsymbol{i}$ mit Vielfachheit 1 hat. Somit ist ein komplexes Fundamentalsystem gegeben als
$$\{e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}, e^{\boldsymbol{i}t}, e^{-\boldsymbol{i}t}\}$$
und ein reelles durch[§]
$$\{e^t, te^t, e^{-t}, te^{-t}, \cos(t), \sin(t)\}\,.$$

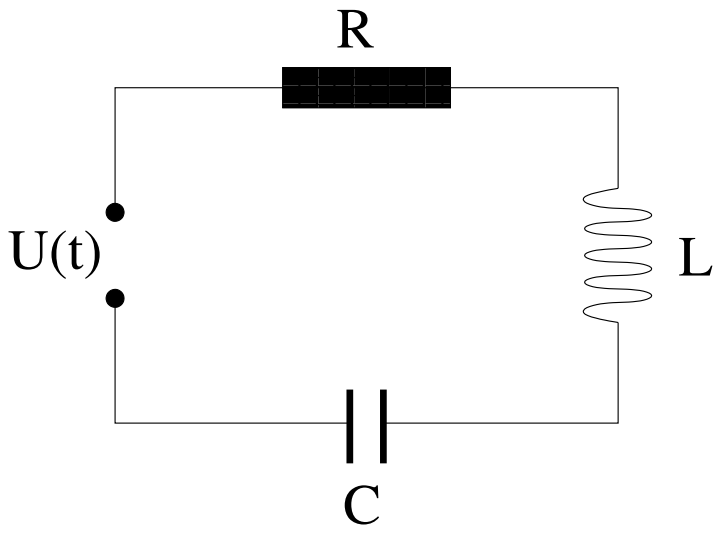
21.3.28 Bemerkungen:

- Solche Fundamentalsysteme können wieder genutzt werden, um die Lösung an einen Anfangswert anzupassen oder um die Lösung zu einer vorgegebenen inhomogenen rechten Seite $b(t)$ durch Variation der Konstanten zu finden.
- Man sollte allerdings beachten, dass es in der Praxis aufgrund von Ungenauigkeiten in den Koeffizienten schwierig sein kann, mehrfache und sehr nahe beieinander liegende einfache Nullstellen zu unterscheiden. Und auch die Basisfunktionen $e^{\lambda t}$ und $e^{\mu t}$ liegen für $\lambda \approx \mu$ (und moderate t) nahe beieinander, was ungünstig ist.
- Diese Problematik entsteht aber nur durch das Streben nach einer expliziten Lösungsdarstellung! Wenn man darauf verzichtet und mit numerischen Lösungen zufrieden ist, so ist es einem numerischen Löser vollkommen egal, ob das charakteristische Polynom mehrfache Nullstellen hat oder nicht.

[§]Basiswechsel: $\{\cos(t), \sin(t)\}$ kann man komplex-linear aus $\{e^{\boldsymbol{i}t}, e^{-\boldsymbol{i}t}\}$ kombinieren und umgekehrt.

21.3.6. Anwendungsbeispiel: RLC-Stromkreis

- Eine Wechselspannungsquelle gibt in einem Stromkreis die Spannung $U(t) = e^{i\omega t}$ vor, in Reihe geschaltet sind ein Widerstand R, eine Induktivität L und eine Kapazität C:



- Aus den Beziehungen

$$U_R(t) = RI(t)\,, \quad U_L(t) = L\dot{I}(t)\,, \quad U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}\,, \quad I(t) = \dot{Q}(t)$$

und der Maschenregel $U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = U(t)$ ergibt sich eine Differentialgleichung für die Ladung $Q(t)$:

$$\mathcal{D}(Q)(t) = L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = U(t)$$

- Um die Lösung eindeutig zu bestimmen, muss man noch Anfangsbedingungen festlegen, wie zum Beispiel $Q(0)$ und $I(0) = \dot{Q}(0)$, was Informationen über den Ladezustand des Kondensators und das Magnetfeld in der Spule zum Anfangszeitpunkt beinhaltet.

- Das charakteristische Polynom zu $\mathcal{D}$ ist

$$p_{\mathcal{D}}(\lambda) = L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C}\,.$$

- Es hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}\,.$$

- Hier kann man drei Fälle unterscheiden:

  - Für $R^2 > \frac{4L}{C}$ (starke Dämpfung) sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$. Alle Lösungen der homogenen Gleichung (kurzgeschlossener Schwingkreis) sind von der Form $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und fallen daher exponentiell schnell ab.
  - Für $R^2 < \frac{4L}{C}$ (schwache Dämpfung) gilt $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ mit $\mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$. Die (komplexen) Lösungen der homogenen Gleichung sind von der Form $ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}$ und beschreiben gedämpfte Schwingungen.
  - Für $R^2 = \frac{4L}{C}$ ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{-R}{2L}$. Die Lösungen der homogenen Gleichung haben die Form $(a + bt)e^{\lambda t}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und fallen ebenfalls exponentiell schnell ab.

- Die Berechnung einer speziellen inhomogenen Lösung zur rechten Seite $U_0 e^{i\omega t}$ könnte man mit Hilfe der Variation der Konstanten durchführen, was allerdings aufwendig ist.

- Eine einfachere Lösung ist wieder für die hier vorgegebene zeitharmonische Anregung $U_0 e^{i\omega t}$ möglich. Weil $e^{i\omega t}$ nach einer früheren Beobachtung eine Eigenfunktion von $\mathcal{D}$ zum Eigenwert $p_{\mathcal{D}}(i\omega)$ ist, ergibt sich eine Lösung einfach als

$$Q(t) = Q_0 e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad Q_0 = \frac{U_0}{p_{\mathcal{D}}(i\omega)} = \frac{U_0}{-L\omega^2 + Ri\omega + \frac{1}{C}}\,.$$

- (Hierbei wurde vorausgesetzt $p_{\mathcal{D}}(i\omega) \neq 0$, was im Fall $R > 0$ offenbar gilt.)

- Für die Stromstärke ergibt sich hieraus

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad I_0 = i\omega Q_0 = \frac{U_0}{R + iL\omega + \frac{1}{i\omega C}}\,.$$

- Das Maximum der Amplitude von I wird daher offenbar bei der Resonanzfrequenz $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ erreicht (warum?).

- Weil für $R > 0$ alle Lösungen der homogenen Gleichung exponentiell schnell abfallen, wird diese inhomogene Lösung auch exponentiell schnell von *jeder* Lösung (d.h. bei beliebigen Anfangsbedingungen) approximiert.

- Wenn man sich daher nur für den quasi-stationären Grenzfall (zeitharmonische Anregung, keine Einschaltvorgänge) interessiert, ist die Analyse solcher Schaltkreise erfreulich einfach.

21.4. Stabilität und globale Existenz

Fragen Einige wichtige Fragen wurden noch nicht beantwortet:

- Unter welchen Bedingungen existieren Lösungen für große Zeitintervalle oder sogar unendlich lange?

- Wie verhalten sich Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen bei Variation von Parametern?

21.4.1. Das Gronwall-Lemma

21.4.1 Lemma: (Gronwall) Es sei $a \in C^0([0,T],\mathbb{R}_0^+)$ und $b \in C^0([0,T],\mathbb{R})$. Die Funktion $w \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ erfülle die Differentialungleichung

$$w'(t) \leqslant a(t)w(t) + b(t)\,.$$

Dann gilt $w(t) \leqslant v(t)$, wobei $v \in C^1([0,T],\mathbb{R})$ die Lösung der Differentialgleichung

$$v'(t) = a(t)v(t) + b(t)\,, \quad v(0) = w(0)$$

ist, für welche wir ja die Lösungsformel

$$v(t) \;=\; v(0)e^{\int_0^t a(\tau)\,d\tau} + \int_0^t b(\sigma)e^{\int_\sigma^t a(\tau)\,d\tau}\,d\sigma$$

hergeleitet hatten.

Beweis Anschaulich ist das klar. Einen exakten Beweis kann man durch Betrachtung der Funktion $u := v - w$ führen. Diese erfüllt $u(0) \geqslant 0$ und $u'(t) \geqslant 0$ für $t \in]0,T[$. Falls nun $u(t) < 0$ für ein $t \in [0,T]$, so würde der Mittelwertsatz ein $\tau \in]0,t[$ mit $u'(\tau) < 0$ liefern — Widerspruch.

21.4.2 Bemerkung: Dieselbe Abschätzung gilt, falls $w \in C^0([0,T],\mathbb{R})$ die integrierte Gleichung

$$w(t) = \int_0^t a(\tau)w(\tau)\,d\tau + \int_0^t b(\tau)\,d\tau$$

erfüllt.

21.4.3 Anwendung: Falls gilt $0 \leqslant a(t) \leqslant C_1$ und $|b(t)| \leqslant C_2$ für $C_1, C_2 > 0$, so können die Funktionen w und v höchstens exponentiell wachsen. Genauer gilt

$$|w(t)| \leqslant |w(0)|e^{C_1 t} + \frac{C_2}{C_1}e^{C_1 t} = (|w(0)| + \frac{C_2}{C_1})e^{C_1 t}\,.$$

21.4.2. Globale Existenz von Lösungen

21.4.4 Bezeichnung: $\|\cdot\|$ bezeichne eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

21.4.5 Satz: Die Funktion $f \in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ erfülle

$$\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n : \quad \|f(t,u_1) - f(t,u_2)\| \leqslant a(t)\|u_1 - u_2\|$$

für eine Funktion $a \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}_0^+)$. Dann existiert für alle $(t_0,u_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ der ODE

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t,u(t))\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ u(t_0) &= u_0\,. \end{aligned}$$

Beweisidee Wenn man die lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssätze genauer anschaut, so liefern sie die Lösungs $u(t)$ auf einem Intervall $]t_0 - \delta(t_0), t_0 + \delta(t_0)[$, wobei $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ als stetige(!) Funktion (abhängig von den stetigen Funktionen a und f) gewählt werden kann. Somit kann man $h := \frac{1}{2} \min_{t\in[-T,T]} \delta(t) > 0$ setzen, und dann die Lösung durch lokales Lösen um die Zeitpunkte

$$t_0,\ t_1 = t_0 + h,\ t_{-1} = t_0 - h,\ t_2 = t_0 + 2h,\ t_{-2} = t_0 - 2h,\ \ldots$$

auf dem ganzen Intervall $[-T, T]$ zusammensetzen.

21.4.6 Beispiel:

- Zur Differentialgleichung

$$u'(t) = \frac{t\,\|u(t)\|^4}{1 + \|u(t)\|^4}\, u(t)\,, \quad u(t_0) = u_0$$

gibt es für alle $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ mit $u(t_0) = u_0$.

- Wenn $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, so gilt sogar $u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, was man aus dem früher bewiesenen Regularitätssatz und der unendlichen Differenzierbarkeit der Funktion $f(t,u) = \frac{t\,\|u\|^4}{1+\|u\|^4}\, u$ erhält.
(Für die Euklidische Norm ist $\|u\|^2 = u_1^2 + \ldots + u_n^2$ unendlich oft differenzierbar, und der Rest ergibt sich aus Ketten- und Produktregel.)

21.4.3. Variation des Anfangswerts

Frage Wie ändert sich eine Lösung $u(t)$ einer ODE bei Variation des Anfangswerts?

21.4.7 Satz: Für ein $C > 0$ erfülle die Funktion $f \in C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant C\|x - y\|\,,$$

und zu $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne u_x die Lösung der ODE

$$\begin{aligned} u_x'(t) &= f(t, u_x(t))\,, \quad t \in]0,T[\,, \\ u_x(t_0) &= x \in \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|u_x(t) - u_y(t)\| \leqslant \|u_x(0) - u_y(0)\| e^{Ct}\,.$$

Beweis Wir zeigen das Resultat nur für $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. (Der allgemeine Fall wird durch die sogenannte Gronwall-Ungleichung abgedeckt.) Für die Funktion $v(t) := \|u_x(t) - u_y(t)\|^2$ gilt

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dt}\langle u_x(t) - u_y(t), u_x(t) - u_y(t)\rangle \\ &= 2\langle u_x(t) - u_y(t), u_x'(t) - u_y'(t)\rangle \\ &= 2\langle u_x(t) - u_y(t), f(t, u_x(t)) - f(t, u_y(t))\rangle \\ &\leqslant 2C\|u_x(t) - u_y(t)\|^2 = 2Cv(t) \end{aligned}$$

Für $w(t) := v(t) - v(0)e^{2Ct}$ erhält man nun $w(0) = 0$ und $w'(0) \leqslant 0$, so dass man aus dem Mittelwertsatz $w(t) \leqslant 0$ folgern kann.

21.4.8 Folgerungen:

- Für festes t hängt $u_x(t)$ stetig vom Anfangswert x ab.
- Ein Anfangsabstand zwischen zwei Lösungen kann allerdings mit der Zeit exponentiell wachsen.

21.4.9 Beispiel: Für die skalare ODE

$$u_x'(t) = \lambda u_x(t)\,, \quad u_x(0) = x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$u_x(t) - u_y(t) = u_x(0)e^{\lambda t} - u_y(0)e^{\lambda t} = (x-y)e^{\lambda t}\,.$$

Die Abschätzung des Satzes würde dagegen wegen $f(u) = \lambda u$ ein Fehlerwachstum $|x-y|e^{|\lambda|t}$ ergeben Folglich ist die Abschätzung im Falle $\lambda > 0$ scharf, im Fall $\lambda < 0$ aber zu pessimistisch.

21.4.10 Bemerkung: Dass sich kleine Fehler des Anfangswerts exponentiell schnell vergrößern, ist für ODEs nicht ungewöhnlich. Ein bekanntes Beispiel ist das dreidimensionale Lorenz-System, welches ein vereinfachtes hydrodynamisches Modell beschreibt (und daher oft als Hinweis auf die prinzipielle Unzuverlässigkeit von Langzeitwettervorhersagen gedeutet wird). Hier approximieren alle Lösungen eine komplizierte Menge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^3$, die man den Lorenz-Attraktor nennt. Bei welchem Punkt des Attraktors sich individuelle Lösungen nach einer längeren Zeit befinden, hängt dabei sehr empfindlich vom Anfangszustand ab.

21.4.4. Ableitung nach dem Anfangswert

21.4.11 Problem: Es sei $f \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. $u \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ sei eine Lösung zu

$$u'(t) = f(t, u(t))\,, \quad u(0) = u_0\,,$$

und $\tilde{u} \in C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ sei eine Lösung zu

$$\tilde{u}'(t) = f(t, \tilde{u}(t))\,, \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}_0\,.$$

Was kann man über die Differenz $\tilde{u} - u$ aussagen?

21.4.12 Satz: $u, \tilde{u}$ seien die oben definierten Lösungen zu Anfangswerten $u_0, \tilde{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\tilde{u}(t) \doteq u(t) + Y(t)(\tilde{u}_0 - u_0)\,,$$

wobei der Fehlerfortpflanzungsoperator $Y \in C^1([0,T], \mathbb{R}^{n\times n})$ definiert ist als die Lösung der ODE

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))Y(t)\,, \quad t \in]0,T[\\ Y(0) &= \mathbb{1}_{n\times n}\,. \end{aligned}$$

21.4.13 Bemerkungen:

- Die ODE

$$Y'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))\, Y(t)\,, \quad Y(0) = \mathbb{1}_{n\times n}$$

ist eine lineare ODE der Form $Y'(t) = A(t)Y(t)$ mit einer Koeffizientenmatrix $A(t) := \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))$.

- Die Lösung $Y : [0, T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine matrixwertige Funktion.
- Man kann $Y(t)$ alternativ erhalten, indem man zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ die n vektorwertigen Lösungen $y_1, \ldots, y_n$ von

$$y_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))\, y_k(t)\,, \quad y_k(0) = e_k$$

bestimmt. Diese liefern nämlich gerade die Spalten von Y, d.h. es gilt $Y(t) = (y_1(t)|\ldots|y_n(t))$.

Beweisskizze Für $v := \tilde{u} - u$ gilt

$$\begin{aligned} v(t) = \tilde{u}(t) - u(t) &= \tilde{u}_0 - u_0 + \int_0^t (f(t, \tilde{u}(t)) - f(t, u(t)))\, dt \\ &\doteq v(0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t)) v(t)\, dt \end{aligned}$$

Somit ist $v(t)$ (approximativ) eine Lösung der ODE

$$v'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, u(t))\, v(t)\,, \quad v(0) = v_0 = \tilde{u}_0 - u_0\,.$$

Weil diese Differentialgleichung linear ist, folgt aus $v_0 = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ die Darstellung $v(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k y_k(t) = Y(t)v_0$.

21.4.14 Beispiel: Wir betrachten die skalare ODE

$$u'(t) = \lambda u(t)\,, \quad u(0) = u_0$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Hier ist die Fehlerfortpflanzungsmatrix eine 1×1-Matrix, die man wieder als Zahl schreiben kann. Wegen $f(t, u) = \lambda u$ folgt $A(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, u) = \lambda$, so dass wir sehen, dass Y die Gleichung

$$Y'(t) = \lambda Y(t)\,, \quad Y(0) = 1$$

erfüllt. Die Lösung hiervon ist $e^{\lambda t}$, so dass ein Fehler δu_0 im Anfangswert sich zur Zeit t als Beitrag $\delta u_0 \cdot e^{\lambda t}$ auswirkt. Für $\lambda < 0$ wird der Fehler exponentiell schnell kleiner, für $\lambda > 0$ exponentiell schnell größer.

21.4.15 Beispiel: Das mehrdimensionale Analogon ist die lineare Differentialgleichung

$$u'(t) = Au(t)\,, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Hier entsteht Y durch Lösen von

$$Y'(t) = AY(t)\,, \quad Y(0) = \mathbb{1}_{n\times n}\,.$$

Das Verhalten von $Y(t)$ ist hier komplizierter: Wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, so wird ein Anfangsabstand δu_0 exponentiell schnell kleiner (alle Lösungen streben gegen den Nullvektor), wenn dagegen auch nur ein Eigenwert einen positiven Realteil hat, so gibt es eine Variation des Anfangswerts, so dass die zugehörigen Lösungen exponentiell schnell auseinanderlaufen.

21.5. Stationäre Punkte und Stabilität

21.5.1 Motivation: Viele wichtige Fragen kann man an Lösungen der ODE

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

noch stellen:

- Unter welchen Bedingungen bleiben Lösungen beschränkt?
- Was machen sie für große Zeiten?
- Unter welchen Bedingungen gibt es periodische Orbits?
- ...

Die Antworten auf diese Fragen sind oft hochkomplex (z.B. Lorenz-Attraktor). In diesem Abschnitt werden wir uns daher auf den sehr kleinen Bereich der stationären Punkte beschränken, um einen Einblick zu gewinnen.

21.5.2 Bemerkung: Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf autonome ODEs der Form

$$u'(t) = f(u(t))\,,$$

d.h. die rechte Seite hängt nicht explizit von t ab.

21.5.3 Definition: Ein stationärer Punkt oder Gleichgewichtspunkt der autonomen ODE $u' = f(u)$ ist ein $x_* \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_*) = 0$.

21.5.4 Satz: Wenn x_* ein stationärer Punkt einer ODE ist, so ist die konstante Funktion $u(t) = x_*$ eine Lösung dieser ODE.

Beweis Klar.

Beispiele

- Für lineare ODEs $u'(t) = Au(t)$ sind alle $x_* \in \mathrm{Kern}(A)$ stationäre Punkte.
- Insbesondere ist $x_* = 0$ immer ein stationärer Punkt für solche ODEs.

- Für ein Stabpendel gibt es (bis auf Periodizität im Winkel) zwei stationäre Punkte (Position unten/oben mit Geschwindigkeit 0).
- Für einen geschlossenen Stromkreis ohne Spannungsquelle (z.B. bei Entladung eines Kondensators) ist der Nullzustand stationär.

Beispiele Wir schauen uns die ODE $u'(t) = Au(t)$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für einige Fälle genauer an:

- Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sind alle $x_* \in \mathbb{R}^2$ stationäre Punkte.
- Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ streben alle Lösungen vom stationären Punkt $x_* = 0$ weg. Man nennt ihn daher instabil.
- Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ streben alle Lösungen zum stationären Punkt $x_* = 0$ hin. Man nennt ihn daher asymptotisch stabil.
- Für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ bewegen sich alle Lösungen in Kreisen um den stationären Punkt $x_* = 0$ herum. Man nennt ihn stabil.
- Im Fall $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ gibt es Lösungen die sich zum stationären Punkt hin- und andere, die sich von ihm wegbewegen.
- Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt dasselbe (bezüglich eines um 45 Grad gedrehten Koordinatensystems).
- Für $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ bewegen sich alle Lösungen in Kreisen um den stationären Punkt $x_* = 0$ herum und streben dabei zu ihm hin. x_* ist asymptotisch stabil.
- Für $A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ kann $\|u(t)\|_2$ anfangs zwar wachsen (je nach Anfangswert), letztendlich streben aber alle $u(t)$ zu $x_* = 0$ hin.

21.5.5 Definition: $x_* \in \mathbb{R}^n$ sei ein stationärer Punkt der ODE $u'(t) = f(u(t))$. x_* heißt stabil, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\delta(x_*)$ gibt, so dass alle Integralkurven $u(t)$, die in $U_\delta(x_*)$ starten (d.h. $u(0) \in U_\delta(x_*)$), in $U_\varepsilon(x_*)$ bleiben. x_* heißt asymptotisch stabil, wenn zusätzlich für alle in $U_\delta(0)$ startenden Lösungen gilt $\lim_{t\to\infty} u(t) = x_*$.

21.5.6 Satz: $x_* \in \mathbb{R}^n$ sei ein stationärer Punkt von $u' = f(u)$, $A := \mathcal{D}(f)(x_*)$ sei die Jacobi-Matrix von f an der Stelle x_*, und $\sigma(A)$ bezeichne die Menge aller komplexen Eigenwerte von A (d.h. wir sehen A als komplexe Matrix an und berechnen ihr Spektrum). Dann gilt:

- Falls für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $\mathfrak{Re}(\lambda) < 0$, so ist x_* asymptotisch stabil.
- Falls es dagegen ein $\lambda \in \sigma(A)$ gibt mit $\mathfrak{Re}(\lambda) > 0$, so ist x_* nicht stabil.

Beweisskizze

- Das Verhalten von $u - x_*$ nahe x_* ist so wie dasjenige der Lösung $x(t)$ der ODE $x'(t) = Ax(t)$ nahe 0.
- Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch wäre, so würde die Aussage folgen, weil alle Eigenwerte reell wären und gelten würde

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\langle x(t), x'(t)\rangle = 2\langle x(t), Ax(t)\rangle \leqslant 2\lambda_{\max}\|x(t)\|^2$$

- Falls A nicht symmetrisch ist, so kann man es dennoch nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation als kleine Störung eines linearen Problems mit symmetrischer Matrix behandeln.

21.5.7 Beispiel: Für die Pendelgleichung hatten wir folgende rechte Seite hergeleitet.

$$f(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\frac{g}{L}\sin(u_1) \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass stationäre Punkte durch $u_2 = 0$ und $u_1 = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gekennzeichnet sind. Die Ableitungsmatrix an diesen Punkten ist

$$\mathcal{D}(f)(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos(u_1) & -\beta \end{pmatrix}.$$

Für $u_1 = k\pi$ mit ungeradem $k \in \mathbb{Z}$ ergeben sich die Eigenwerte $\pm\sqrt{\frac{g}{L}}$, woraus man sieht, dass diese Punkte instabil sind. Für $u_1 = k\pi$ mit geradem $k \in \mathbb{Z}$ hat die Matrix dagegen die Eigenwerte $\pm\sqrt{\frac{g}{L}}\boldsymbol{i}$. Hieraus können wir mit unserem Satz leider nichts schließen. Erst eine genauere Analyse (normalerweise mit Hilfe der Energieerhaltung) zeigt, dass es sich um stabile (aber nicht asymptotisch stabile) Gleichgewichtspunkte handelt. Man beachte, dass die unendlich vielen stationären Punkte nur dadurch entstehen, dass der Winkel nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist.

22. Mehrdimensionale Integralrechnung

Ziel Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ oder $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Wir wollen die Größe

$$\int_\Omega f(x)\, dx = \int_\Omega f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n)$$

definieren.

22.0.1 Anwendungen:

- Gesamtmasse eines Körpers $M = \int_\Omega \rho(x)\, dx \in \mathbb{R}$.
- Schwerpunkt eines Körpers $S = \frac{1}{M} \int_\Omega \rho(x) x\, dx \in \mathbb{R}^3$.
- Energie elektromagnetischer Felder im Gebiet Ω:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_\Omega (\langle E(x), D(x) \rangle + \langle H(x), B(x) \rangle)\, dx\,.$$

22.1. Mehrdimensionale Riemann-Integration

22.1.1. Mehrdimensionale Intervalle und Gitter

22.1.1 Definition: Ein mehrdimensionales Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ ist ein n-faches kartesisches Produkt eindimensionaler Intervalle $I_k \subset \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$:

$$I = I_1 \times \cdots \times I_n =: \bigtimes_{k=1}^{n} I_k\,.$$

22.1.2 Beispiel: Etwa

$$I = [-1, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$$

oder

$$I = [1, 2] \times [3, 4] \times]-1, 1[\subset \mathbb{R}^3\,.$$

22.1.3 Satz: Das mehrdimensionale Intervall $I = \times_{k=1}^n I_k$ ist offen (bzw. abgeschlossen, kompakt), genau dann wenn I_k für jedes $k = 1, \ldots, n$ offen (bzw. abgeschlossen, kompakt) ist.

Beweis Etwas längerer Beweis, der eine gute Mathematiker-Übung ist. Besonders einfach wird es, wenn man als Norm im $\mathbb{R}^n$ die Maximumsnorm verwendet (was man wegen der Normäquivalenz darf).

22.1.4 Definition: Wenn die Intervalle I_k die Grenzen $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \leqslant b_k$ haben, so definieren wir das Volumen des kartesischen Produkts $I = \times_{k=1}^{n} I_k$ als

$$\mathrm{vol}(I) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)\,.$$

Man beachte, dass das Volumen nicht davon abhängt, ob I offen oder abgeschlossen ist.

Hinweis Zwar betrachten wir hier und im Folgenden den allgemeinen n-dimensionalen Fall. Es ist aber durchaus möglich und sehr zu empfehlen, sich alle Aussagen zuerst und vor allem im 2-dimensionalen Fall klarzumachen.

22.1.5 Bezeichnungen:

- $I = \times_{k=1}^{n} I_k$ sei ein mehrdimensionales Intervall. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass I und die Faktoren $I_k = [a_k, b_k]$ abgeschlossen sind.
- Für $k = 1, \ldots, n$ sei
$$a_k = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \ldots < x_{N_k}^{(k)} = b_k$$
eine Zerlegung Z_k des Intervalls $I_k = [a_k, b_k]$.
- Diese definieren eine Zerlegung Z von I bestehend aus kleineren mehrdimensionalen Intervallen („Quadern“)
$$Q_{i_1,\ldots,i_n} := [x_{i_1-1}^{(1)}, x_{i_1}^{(1)}] \times \cdots \times [x_{i_n-1}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]\,, \quad 1 \leqslant i_k \leqslant N_k,\ k = 1, \ldots n$$
- Das Volumen des Quaders $Q_{i_1,\ldots,i_n}$ lässt sich einfach berechnen als
$$\mathrm{vol}(Q_{i_1,\ldots,i_n}) := \prod_{k=1}^{n} (x_{i_k}^{(k)} - x_{i_k-1}^{(k)})\,.$$
- Die Menge aller Quader der Zerlegung Z bezeichnen wir mit $\mathcal{Q}(Z)$. Offenbar gilt $|\mathcal{Q}(Z)| = \prod_{k=1}^{n} N_k$.
- Die Feinheit der Zerlegung Z quantifizieren wir über die größte Maschenweite
$$h(Z) := \max_{k=1,\ldots,n} \max_{i=1,\ldots,N_k} |x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}|\,.$$

22.1.6 Definition: (Riemannsche Unter- und Obersummen) Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein mehrdimensionales Intervall und Z eine Zerlegung desselben. Ferner sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann können wir analog zum eindimensionalen Fall Untersummen

$$U_Z(f) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}(Z)} \mathrm{vol}(Q) \cdot \inf_{x \in Q} f(x)$$

bzw. Obersummen

$$O_Z(f) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}(Z)} \mathrm{vol}(Q) \cdot \sup_{x \in Q} f(x)$$

definieren.

22.1.7 Bemerkung: In dieser Situation gilt analog zum eindimensionalen Fall:

- Für alle Zerlegungen Z von I gilt $U_Z(f) \leqslant O_Z(f)$.
- Wenn man eine Zerlegung Z zu einer Zerlegung Z' verfeinert, so gilt

$$U_Z(f) \leqslant U_{Z'}(f) \leqslant O_{Z'}(f) \leqslant O_Z(f)\,.$$

- Aufgrund dieser Eigenschaften ergibt sich, dass die reellen Zahlen

$$U_I(f) := \sup\{U_Z(f) \mid Z \in Z(I)\}\,, \quad O_I(f) := \inf\{O_Z(f) \mid Z \in Z(I)\}$$

wohldefiniert sind und $U_I(f) \leqslant O_I(f)$ erfüllen.

22.1.8 Definition: $I \subset \mathbb{R}^n$ sei wieder ein mehrdimensionales Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar ($\mathcal{R}$-integrierbar), wenn gilt

$$U_I(f) = O_I(f)\,.$$

Diese Zahl nennt man dann das Integral von f über I und bezeichnet es mit

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

22.1.9 Eigenschaften: Analog zum 1D-Fall ergeben sich die Eigenschaften:

- Linearität: Für $\mathcal{R}$-integrierbare Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch die Funktionen $f+g$ und λf $\mathcal{R}$-integrierbar, und es gilt
  - $\displaystyle\int_I (f+g)(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx + \int_I g(x)\,dx.$
  - $\displaystyle\int_I (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx.$
- Für konstante Funktion $f(x) = c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_I f(x)\,dx = c \cdot \mathrm{vol}(I) = c \cdot \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)\,.$$

- Mit $m := \inf_{x\in I} f(x)$ und $M := \sup_{x\in I} f(x)$ gilt

$$m \cdot \mathrm{vol}(I) \leqslant \int_I f(x)\,dx \leqslant M \cdot \mathrm{vol}(I)\,.$$

- Wenn f $\mathcal{R}$-integrierbar ist, so ist auch $|f|$ $\mathcal{R}$-integrierbar, und es gilt

$$\Big|\int_I f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_I |f(x)|\,dx\,.$$

22.1.10 Beispiel: Für eine konstante Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ ist jede Ober- und Untersumme gleich mit $c \operatorname{vol}(I) = c \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$. Folglich gilt

$$U_I(f) = O_I(f) = \int_I f(x)\, dx = c \operatorname{vol}(I)\,.$$

22.1.11 Bemerkung:

- Riemannsche Ober- und Untersummen sind in der Praxis nicht zu gebrauchen, weil Infimum und Supremum von Funktionswerten über einem Würfel normalerweise nicht einfach zu berechnen sind.
- Man verwendet daher allgemeinere Riemann-Summen der Form

$$R_Z(f) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}(Z)} \operatorname{vol}(Q) f(x_Q)$$

  wobei $x_Q \in Q$ ein beliebig gewählter Punkt ist.
- Aufgrund ihrer guten Approximationseigenschaften besonders beliebt ist wieder die Mittelpunktregel, bei der x_Q als Mittelpunkt von Q gewählt wird.

22.1.12 Programm: Eine Octave/Matlab/Scilab-Funktion zur numerischen Approximation von zweidimensionalen Integralen mit Hilfe der Mittelpunktsregel könnte beispielsweise so aussehen: **Demos/A3/riemann.m**

```
function s = riemann(f,a,b,n)
  h = (b-a)./n;
  s = 0;
  for i1=1:n(1)
    for i2=1:n(2)
      s = s + h(1)*h(2)*f(a+([i1,i2]-[0.5,0.5]).*h);
    end
  end
end

%% riemann(@(x)norm(x)<=1,[-1,-1],[1,1],[100,100])
```

FRAGE: Welches Integral approximiert die auskommentierte Zeile am Ende?

Frage Welche Funktionen sind denn aber nun $\mathcal{R}$-integrierbar?

22.1.13 Satz: Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf einem kompakten mehrdimensionalen Intervall I ist, so ist f Riemann-integrierbar über I.

Beweisidee Analog zum eindimensionalen Fall argumentiert man wieder mit der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf der kompakten Menge I.

22.1.14 Bemerkung: Es gibt allerdings auch noch viele weitere Funktionen, die $\mathcal{R}$-integrierbar sind, wie zum Beispiel stückweise stetige Funktionen (wobei eine geeignete Definition von „stückweise“ im Mehrdimensionalen nicht ganz einfach ist).

22.1.2. Der Satz von Fubini

Frage Mit Hilfe Riemannscher Summen kann man mehrdimensionale Integrale numerisch approximieren. Wie berechnet man sie aber exakt?

22.1.15 Satz: (Fubini) Es sei $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ und

$$f : I \to \mathbb{R}\,, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

sei $\mathcal{R}$-integrierbar. Falls dann für alle $x_2, \ldots, x_n \in I^{(n-1)} := [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ gilt, dass

$$F_1(x_2, \ldots, x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$$

wohldefiniert ist, so gilt

$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{I^{(n-1)}} F_1(x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}(x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Beweisidee Durch Verfeinern einer Zerlegung Z in x_1-Richtung wird das n-dimensionale Integral durch Ober- und Untersummen nur genauer approximiert. Andererseits führt „unendliches Verfeinern“ in x_1-Richtung gerade zu $n-1$-dimensionalen Ober- und Untersummen über F_{x_1}. Einen genauen Beweis findet man in Band 2 von Ansorge-Oberle.

22.1.16 Bemerkungen:

- Gleiches gilt für jede andere Komponente, falls die Abbildung

$$F_k(\text{alle ohne } x_k) := \int_{a_k}^{b_k} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_k$$

  wohldefiniert ist.

- Wenn man den Satz rekursiv anwendet, kann man folgende Formel erhalten:

$$\int_I f(x)\, \mathrm{d}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} \left\{ \cdots \left\{ \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \right\} \cdots \right\} dx_1\,,$$

  wobei die Reihenfolge in der die eindimensionalen Integrale ausgeführt werden, egal ist.

22.1.17 Beispiel:

- Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$\int_{[0,1]\times[-1,1]} (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + 2)\, dx\,.$$

- Möglichkeit 1:

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]\times[-1,1]} (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + 2)\, dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + 2)\, dx_2 \right) dx_1 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x_1^2 x_2^3 + 2x_1 x_2 + 2x_2 \right]_{x_2=-1}^{x_2=1} dx_1 \\
&= \int_0^1 (\frac{2}{3} x_1^2 + 4x_1 + 4)\, dx_1 \\
&= \left[\frac{2}{9} x_1^3 + 2x_1^2 + 4x_1 \right]_{x_1=0}^{x_1=1} \\
&= \frac{2}{9} + 2 + 4 \;=\; 6\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

- Möglichkeit 2 (etwas günstiger):

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,1]\times[-1,1]} (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + 2)\, dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + 2)\, dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} x_1^3 x_2^2 + x_1^2 + 2x_1 \right]_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \\
&= \int_0^1 (\frac{1}{3} x_2^2 + 3)\, dx_2 \\
&= \left[\frac{1}{9} x_2^3 + 3x_2 \right]_{x_2=-1}^{x_2=1} \\
&= \frac{2}{9} + 6 \;=\; 6\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Beobachtung Besonders einfach können mehrdimensionale Integrale ausgerechnet werden, wenn der Integrand Produktform hat, d.h.

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n)\,.$$

Dann gilt nämlich

$$\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\, dx = \prod_{k=1}^n \int_{I_k} f_k(x_k)\, dx_k\,.$$

(Man mache sich das für $n = 2$ klar.)

22.1.18 Anwendung: Für $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ gilt

$$\int_{[0,1]\times[-1,1]} x_1^2 x_2^2 \, dx = \left(\int_0^1 x_1^2 \, dx_1 \right) \cdot \left(\int_{-1}^1 x_2^2 \, dx_2 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} .$$

Damit könnte man das Integral aus dem obigen Beispiel ausrechnen:

$$\begin{aligned} &\int_{[0,1]\times[-1,1]} (x_1^2 x_2^2 + 2x_1 + 2) \, dx \\ &= 2 \operatorname{vol}(I) + 2 \int_0^1 2x_1 \, dx_1 + \left(\int_0^1 x_1^2 \, dx_1 \right) \left(\int_{-1}^1 x_2^2 \, dx_2 \right) \\ &= 4 + 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 6\frac{2}{9} \end{aligned}$$

22.1.3. Integration auf allgemeineren Gebieten

22.1.19 Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Aufgrund der Beschränktheit ist Ω in einem mehrdimensionalen Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ enthalten und f kann mittels

$$f^*(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in I \backslash \Omega \end{cases}$$

zu einer Funktion $f^* : I \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Wir nennen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-integrierbar, wenn $f^* : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-integrierbar ist, und setzen

$$\int_\Omega f(x) \, dx := \int_I f^*(x) \, dx .$$

22.1.20 Bemerkung: Es ist leicht einzusehen, dass die genaue Größe des Ω enthaltenden Intervalls I egal ist.

22.1.21 Bemerkung: Mithilfe der sogenannten charakteristischen Funktion von Ω

$$\chi_\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

schreibt man oft auch einfach

$$\int_\Omega f(x) \, dx = \int_I f(x) \chi_\Omega(x) \, dx .$$

Beobachtung Probleme beim Integrieren können nicht nur von der Funktion, sondern auch vom Definitionsbereich Ω herrühren.

22.1.22 Beispiel: Für $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $I = [0,1]$ und $f(x) = 1$ ist das Produkt $f(x)\chi_\Omega(x)$ gerade die nicht $\mathcal{R}$-integrierbare Dirichlet-Funktion

$$f_{\text{Dirichlet}} : [0,1] \to [0,1] , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Abhilfe Man schränkt die Integrationsbereiche ein, indem man fordert, dass wenigstens konstante Funktionen integrierbar sein sollen.

22.1.23 Definition: ($\mathcal{R}$-messbare Mengen) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\mathcal{R}$-messbar, wenn die konstante Funktion

$$1_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto 1$$

$\mathcal{R}$-integrierbar ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn die charakteristische Funktion

$$\chi_\Omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

über ein Ω enthaltendes Intervall I $\mathcal{R}$-integrierbar ist.

22.1.24 Bezeichnung:

- Die Größe

$$\mu(\Omega) = \mathrm{vol}(\Omega) = |\Omega| := \int_\Omega 1\,dx = \int_\Omega 1_\Omega(x)\,dx$$

  bezeichnet man als Maß oder Volumen von Ω.

- Wenn $\mu(N) = 0$ für eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ so nennt man N eine $\mathcal{R}$-Nullmenge oder einfach Nullmenge.

22.1.25 Bemerkung: Später werden wir zeigen, dass eine (beschränkte) Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genau dann $\mathcal{R}$-messbar ist, wenn ihr „Rand“ eine $\mathcal{R}$-Nullmenge ist. Dies trifft aber auf alle für uns wichtigen Mengen zu.

22.1.26 Satz: Wenn $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{R}$-messbar sind, so sind auch $\Omega_1 \cup \Omega_2$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2$ $\mathcal{R}$-messbar.

Beweisskizze Man zeigt, dass aus der $\mathcal{R}$-Messbarkeit von χ_{Ω_1} und χ_{Ω_2} die $\mathcal{R}$-Messbarkeit der Funktionen $\chi_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \max(\chi_{\Omega_1}, \chi_{\Omega_2})$ und $\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \chi_{\Omega_1} \cdot \chi_{\Omega_2}$ folgt.

22.1.27 Eigenschaften: (des allgemeinen Riemann-Integrals)

- Linearität: Für $\mathcal{R}$-integrierbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch die Funktionen $f + g$ und λf $\mathcal{R}$-integrierbar, und es gilt
  1. $\displaystyle\int_\Omega (f+g)(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx + \int_\Omega g(x)\,dx.$
  2. $\displaystyle\int_\Omega (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_\Omega f(x)\,dx.$

- Für konstante Funktion $f(x) = c \in \mathbb{R}$ gilt $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx = c \cdot \mathrm{vol}(\Omega).$

- Mit $m := \inf_{x\in\Omega} f(x)$ und $M := \sup_{x\in\Omega} f(x)$ gilt

$$m \cdot \mathrm{vol}(\Omega) \leqslant \int_\Omega f(x)\,dx \leqslant M \cdot \mathrm{vol}(\Omega)\,.$$

- Wenn f $\mathcal{R}$-integrierbar ist, so ist auch $|f|$ $\mathcal{R}$-integrierbar, und es gilt
$$|\int_\Omega f(x)\,dx| \leqslant \int_\Omega |f(x)|\,dx\,.$$
- Falls $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit $\mathcal{R}$-messbaren Mengen Ω_1 und Ω_2, so gilt für ein $\mathcal{R}$-integrierbares $f : \Omega \to \mathbb{R}$
$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\Omega_1} f(x)\,dx + \int_{\Omega_2} f(x)\,dx - \int_{\Omega_1\cap\Omega_2} f(x)\,dx\,.$$
Falls $\Omega_1 \cap \Omega_2$ eine Nullmenge ist (d.h. $\mu(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$), so fällt der letzte Term weg.

22.1.28 Satz: (Allgemeiner Satz von Fubini) Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1+n_2} = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ beliebig. Es sei
$$\Omega_1 := \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid \exists x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} : (x_1, x_2) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n_1}$$
die Projektion von Ω auf $\mathbb{R}^{n_1}$, und für jedes $x_1 \in \Omega_1$ sei $S_2(x_1) := \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \mid (x_1, x_2) \in \Omega\}$. Dann gilt
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{S_2(x_1)} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1\,,$$
sofern alle auftauchenden Ausdrücke wohldefiniert sind (d.h. f ist $\mathcal{R}$-integrierbar, ebenso sollen alle Integrale und Integranden auf der rechten Seite existieren). Analog gilt mit $\Omega_2 := \{x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \mid \exists x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} : (x_1, x_2) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^{n_2}$ und $S_1(x_2) := \{x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \mid (x_1, x_2) \in \Omega\}$, dass
$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_{\Omega_2} \left(\int_{S_1(x_2)} f(x_1, x_2)\,dx_2 \right) dx_1$$
(wieder unter der Voraussetzung, dass alle auftretenden Ausdrücke wohldefiniert sind).

Beweis Folgt aus dem Fubini-Satz für mehrdimensionale Intervalle, weil Integrale über allgemeine Gebiete mittels Erweiterung durch Null auf solche Intervalle definiert sind.

22.1.29 Folgerung: Rekursive Anwendung des Satzes von Fubini ergibt, dass man mehrdimensionale Integrale durch mehrfache Integration über eindimensionale Mengen (ein Intervall oder eine Vereinigung von mehreren Intervallen) berechnen kann.

22.1.30 Beispiel:
- Wir wollen die Fläche des Dreiecks
$$D(r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x + y \leqslant r\}$$
berechnen.
- Nach dem Satz für Fubini gilt
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(D(r)) := \int_{D(r)} 1\,\mathrm{d}(x, y) &= \int_0^r \left(\int_{\{0\leqslant y\leqslant r-x\}} 1\,dy \right) dx \\ &= \int_0^r \left(\int_0^{r-x} 1\,dy \right) dx = \int_0^r (r - x)\,dx = r^2 - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}\end{aligned}$$

22.1.31 Definition: Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir den geometrischen Schwerpunkt als

$$S_\Omega := \frac{1}{\mathrm{vol}(\Omega)} \int_\Omega x \, dx \, .$$

22.1.32 Beispiel: Um den geometrischen Schwerpunkt des Dreiecks $D(r)$ des vorigen Beispiels zu erhalten, berechnen wir zuerst

$$\int_{D(r)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) = \begin{pmatrix} \int_{D(r)} x \, \mathrm{d}(x,y) \\ \int_{D(r)} y \, \mathrm{d}(x,y) \end{pmatrix} \overset{\text{Übung}}{=} \frac{1}{6} r^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Zusammen mit $\mathrm{vol}(D(r)) = \frac{r^2}{2}$ erhalten wir dann $S_{D(r)} = \frac{r}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

22.1.33 Beispiel:

- Das Volumen des Tetraeders

$$T = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x + y + z \leqslant 1\}$$

würde man unter Verwendung des vorigen Ergebnisses erhalten als

$$\int_T 1 \, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_{D(1-z)} 1 \, \mathrm{d}(x,y) \right) dz$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-z)^2}{2} \, dz = \int_0^1 \frac{z^2}{2} \, dz = \frac{1}{6}$$

22.1.34 Beispiel: Der „Schwerpunkt“ von $T = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x + y + z \leqslant 1\}$ ist definiert durch $S := \frac{1}{\mathrm{vol}(T)} \int_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dx$. Somit berechnet sich die x-Koordinate als

$$6 \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{1-x-y} x \, dz \, dy \, dx = 6 \int_{x=0}^1 x \int_{y=0}^{1-x} (1-x-y) \, dy \, dx$$
$$= 6 \int_{x=0}^1 x \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx = 6 \int_{x=0}^1 (\frac{x}{2} - x^2 + \frac{1}{2}x^3) \, dx$$
$$= 6 \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = 6(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}) = 6\frac{6-8+3}{24} = \frac{1}{4}$$

und aus Symmetriegründen ergibt sich für die anderen beiden Koordinaten derselbe Wert.
Bemerkung: Wenn man die vorher gezeigte Schwerpunktberechnung des Dreiecks $D(r)$ verwendet, erhält man dasselbe Ergebnis auch einfacher durch

$$6 \int_{z=0}^1 \int_{D(1-z)} x d(x,y) \, dz = 6 \int_{z=0}^1 \frac{1}{6}(1-z)^3 \, dz = \int_{z=0}^1 z^3 \, dz = \frac{1}{4} \, .$$

22.1.35 Beispiel: Das Maß der Einheitskreisscheibe

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

kann man berechnen als

$$\begin{aligned}\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2} \, dx \qquad [x = \sin(\varphi)] \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos(\varphi))^2 \,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\varphi)) \,\mathrm{d}\varphi = \pi\end{aligned}$$

Apropos Die Beziehung $(\cos(\varphi))^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\varphi)$ sollte man sich auch qualitativ wie folgt klarmachen: Die Funktion $(\cos(\varphi))^2$ oszilliert offenbar doppelt so schnell (mit halber Periodenlänge, nämlich π) wie $\cos(\varphi)$ um den Mittelwert $\frac{1}{2}$. Wenn man sie daher über ein ganzzahliges Vielfaches dieser Periodenlänge π integriert (d.h. ein Intervall $[c, c + k\pi]$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ beliebig), muss der Wert $\frac{k\pi}{2}$ herauskommen. BEMERKUNG: Genau dasselbe gilt für $(\sin(\varphi))^2 = 1 - (\cos(\varphi))^2$.
ANWENDUNG: In der Elektrotechnik folgt so der Zusammenhang $U_{\mathit{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\mathit{max}}$ zwischen Maximalspannung und effektiver Spannung im einfachen Wechselstromkreis (nur Ohmscher Widerstand).

22.1.36 Bemerkung:

- Die Wahl der Reihenfolge, in welcher man nach x, y, z oder $x_1, x_2, \ldots$ integriert, ist für die Einfachheit der Rechnung oft entscheidend.
- Beispielsweise lässt sich das Maß der Menge

  $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,\pi] \wedge x \in [\sin(y), 2 + \sin(y)]\}$$

  mit äußerer Integration nach y und innerer Integration nach x sehr einfach bestimmen, in der anderen Reihenfolge ist es aber nicht so einfach.
- Wenn das Integrationsgebiet Ω sehr kompliziert ist, hilft auch oft die Zerlegung in Integrale über einfachere Teilgebiete.

22.1.4. Beziehung zum Rand

Erinnerung ((Topologischer) Rand einer Menge) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. Das Innere von A, genannt $\mathring{A}$, bezeichnet die Menge aller inneren Punkte von A (für die es eine ε-Umgebung gibt, die ganz in A liegt). Der Rand ∂A einer Menge A bezeichnet alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$, für die jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x)$ sowohl mit A als auch mit seinem Komplement

$\complement A = \mathbb{R}^n \backslash A$ nichtleeren Durchschnitt hat. Der Abschluss von A ist die Menge $\overline{A} := A \cup \partial A$. Es ist die kleinstmögliche abgeschlossene Menge, welche A enthält. Es gilt immer

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A} \,.$$

Beispiele In den folgenden Beispielen wird A immer als eine Teilmenge des euklidischen Raums $X = \mathbb{R}^n$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ betrachtet.*

- Für $A =]0,1]$ ist $\overline{A} = [0,1]$, $\mathring{A} =]0,1[$ und $\partial A = \{0,1\}$.
- Für $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ ist $\overline{A} = A$, $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ und $\partial A = S^{n-1}$.
- Für $A = [0,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ ist $\overline{A} = A$, $\mathring{A} = \varnothing$ und $\partial A = A$.
- Für $A = [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ ist $\overline{A} = [0,1]^n$, $\mathring{A} = \varnothing$ und $\partial A = [0,1]^n$.

22.1.37 Satz: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{R}$-messbar $\iff$ $\partial\Omega$ ist $\mathcal{R}$-messbar und $\mu(\partial\Omega) = 0$.

Beweisskizze Man kann sich überlegen, dass Unterschiede in den Ober- und Untersummen von $\chi_{\partial\Omega}$ immer entsprechende Unterschiede in den Ober- und Untersummen von χ_Ω bedingen. Umgekehrt impliziert sowohl ein Unterschied in Ober- und Untersummen von $\partial\Omega$ als auch ein positives Maß $\mu(\partial\Omega) > 0$ des Randes einen Unterschied in Ober- und Untersummen für χ_Ω.

22.1.38 Beispiel: Wenn $A := [0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$, so ist $\partial\Omega := [0,1]^n$. Folglich ist $\mu(\partial\Omega) = 1$, so dass A nicht $\mathcal{R}$-messbar sein kann.

22.1.39 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{R}$-messbar und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f $\mathcal{R}$-integrierbar.

Beweisskizze Für eine Ω überdeckende Zerlegung Z zerfallen die Würfel in diejenigen, die außerhalb Ω liegen (hier ist der Unterschied von Ober- und Untersummen 0), sowie diejenigen, welche innerhalb Ω liegen (hier ist f gleichmäßig stetig und die Differenz von Ober- und Untersummen kann durch Verfeinerung klein gemacht werden), und zuletzt diejenigen welche den Rand schneiden (auch dieser Beitrag kann wegen $\mu(\partial\Omega) = 0$ und der Beschränktheit von f beliebig klein gemacht werden).

22.2. Der Transformationssatz

22.2.1. Einführung

22.2.1 Motivation: Oftmals entstehen kompliziertere Integrationsbereiche durch eine Verformung von einfacheren, oder aber Funktionen schreiben sich einfacher in anderen Variablen (Beispiele: Polar-, Kugel- oder Zylinderkoordinaten).
Wenn man in solchen Situationen integrieren muss, ist eine Verallgemeinerung der eindimensionalen Substitutionsregel wichtig.

*Von diesem umgebenden Raum X hängen die Definitionen $\mathring{A}, \overline{A}, \partial A$ ab!

Erinnerung Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konnte geometrisch verstanden werden als das orientierte Volumen des Parallelotops, welches als Bild des Einheitswürfels $[0,1]^n$ unter der Abbildung $\Phi_A : x \mapsto Ax$ entsteht.

Beobachtungen

- Translationen $T_b : x \mapsto x + b$ „ändern“ das Volumen von messbaren Mengen Ω nicht, d.h. $\operatorname{vol}(T_b(\Omega)) = \operatorname{vol}(\Omega)$.
- Lineare Abbildungen $\Phi_A : x \mapsto Ax$ „ändern“ das Volumen einer messbaren Menge Ω um den Faktor $|\det(A)|$, d.h.

$$\operatorname{vol}(\Phi_A(\Omega)) = |\det(A)| \operatorname{vol}(\Omega)\,.$$

- Folglich „ändert“ eine allgemeine Verzerrung $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ das Volumen eines kleinen Würfels Q an der Stelle $x \in \Omega$ approximativ um den Faktor $|\det(D\Phi(x))|$, d.h.

$$\operatorname{vol}(\Phi(Q)) \approx |\det(D\Phi(x))| \operatorname{vol}(Q)\,.$$

22.2.2. Der Transformationssatz

22.2.2 Satz: (Transformationssatz, Substitutionssatz)

- Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{R}$-messbar.
- Für $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sei $\Phi|_{\Omega\setminus N}$ injektiv, wobei N eine beliebige Nullmenge sein darf.
- Wenn dann $\tilde{\Omega} := \Phi(\Omega)$, so gilt

$$\operatorname{vol}(\tilde{\Omega}) = \int_{\tilde{\Omega}} 1 \,\mathrm{d}\tilde{x} = \int_{\Omega} |\det(D\Phi(x))| \, dx\,.$$

- Allgemeiner sei $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{R}$-integrierbar über $\tilde{\Omega}$ und $f(x) := \tilde{f}(\Phi(x))$. Dann gilt

$$\int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}(\tilde{x}) \,\mathrm{d}\tilde{x} = \int_{\Omega} f(x) |\det(D\Phi(x))| \, dx\,.$$

Beweisidee Man kann das Integral über $\tilde{\Omega}$ auch berechnen, indem man eine verzerrte Zerlegung verwendet, die als Bild einer Zerlegung Z von Ω unter der Abbildung Φ entsteht (wegen der Additivität des Integrals). Wenn nun die Würfel Q der Zerlegung sehr klein werden, nähern sich sich ihre Bilder immer mehr Parallelotopen an, deren Volumen durch $|\det(D\Phi)(\cdot)| \operatorname{vol}(Q)$ gegeben ist.

22.2.3 Merkregel:

- Man kann sich die Formel wie folgt merken:

$$\int_{\tilde{\Omega}=\Phi(\Omega)} f(\Phi) \,\mathrm{d}\Phi = \int_{\Omega} f(\Phi(x)) \frac{\mathrm{d}\Phi}{dx} \, dx\,.$$

- Dies liefert die mehrdimensionale Regel, wenn man das Verhältnis der Volumenelemente $\frac{\mathrm{d}\Phi}{dx}$ durch $|\det(D\Phi(x))|$ ausdrückt.
- Und es liefert auch die eindimensionale vorzeichenlose Regel

$$\int_{\Phi([a,b])} f(\Phi)\,\mathrm{d}\Phi = \int_{[a,b]} f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\,dx\,.$$

  (Für ein injektives Φ ist $\Phi([a,b])$ das Intervall $[\Phi(a),\Phi(b)]$ oder aber das Intervall $[\Phi(b),\Phi(a)]$, je nachdem ob Φ streng monoton wächst oder fällt.)

22.2.4 Bemerkung: Es gibt auch einen (der eindimensionalen Substitutionsregel ganz analogen) Transformationssatz, bei dem keine Betragsstriche um $\det(D\Phi)$ gesetzt werden müssen. Allerdings muss man dann schon bei der Integraldefinition mit orientierten Volumenformen arbeiten, was wir der Einfachheit halber vermieden haben.

22.2.3. Anwendung: Polarkoordinaten

22.2.5 Definition: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ sind durch

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben (r Radius, φ Winkel).

Beobachtungen

- Die Polarkoordinatenabbildung Φ ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Das Bild des Rechtecks $\Omega := [0,R] \times [0,2\pi[$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe $\tilde{\Omega} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leqslant R\}$.
- Ohne die Nullmenge $N = \{0\}\times]0,2\pi[$ ist $\Phi|_{\Omega\setminus N}$ injektiv.
- Die Ableitung ist

$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}\,.$$

  Offenbar ist sie auf Ω beschränkt.
- Ihre Determinante ist offenbar

$$\det(D\Phi(r,\varphi)) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r\,.$$

- Folglich ist der Transformationssatz anwendbar, und es gilt für alle $\mathcal{R}$-messbaren $f : B_R(0) \to \mathbb{R}$

$$\int_{B_R(0)} f(x)\,dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(\Phi(r,\varphi))\,r\,\mathrm{d}\varphi\,dr\,.$$

22.2.6 Bemerkung: Man mache sich die Größe des „Volumenelements“ $r\,dr\,\mathrm{d}\varphi$ auch geometrisch klar. Die Multiplikation mit r muss hineinkommen, weil eine Variation des Winkels um $\mathrm{d}\varphi$ eine Variation der tatsächlichen Entfernung um $r\,\mathrm{d}\varphi$ bedeutet. So entspricht zum Beispiel einer Änderung der geographischen Länge um ein Grad am Äquator eine Distanz von etwa $\frac{40000\mathrm{km}}{360} \approx 111,\bar{1}\,\mathrm{km}$ und einer Änderung um eine Bogenminute eine Distanz von $\frac{111,\bar{1}\,\mathrm{km}}{60} \approx 1.852\,\mathrm{km}$. Dies ist gerade eine nautische Meile oder Seemeile.

Beispiele

- Das Volumen (die Fläche) einer Kreisscheibe $\tilde{\Omega} = B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ berechnet sich als
$$\int_{\tilde{\Omega}} 1\,dx = \int_{\Omega} r\,\mathrm{d}(r,\varphi) = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,dr = 2\pi\frac{R^2}{2} = \pi R^2\,.$$
- Um den Schwerpunkt des Viertelkreises $V := B_R(0) \cap (\mathbb{R}_0^+)^2$ zu berechnen, berechnen wir zuerst
$$\int_V x_1\,\mathrm{d}(x_1,x_2) = \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\varphi)\,r\,\mathrm{d}\varphi\,dr = \frac{R^3}{3}\,.$$
Dieser Ausdruck muss noch durch die Fläche $\frac{\pi R^2}{4}$ geteilt werden, womit sich die x_1-Koordinate des Schwerpunkts zu $\frac{4}{3\pi}R$ ergibt.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ heißt radialsymmetrisch, wenn es sich schreiben lässt als $f(x) = \tilde{f}(\|x\|_2)$. Das Integral einer radialsymmetrischen Funktion über die Kreisscheibe $B_R(0)$ berechnet sich dann als
$$\int_{B_R(0)} f(x)\,dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tilde{f}(r) r\,dr\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^R \tilde{f}(r) r\,dr$$

22.2.4. Anwendung: Zylinderkoordinaten

- Für Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ werden Polarkoordinaten für die ersten beiden Komponenten eingeführt, die dritte bleibt unverändert:
$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}\,.$$
- Das Bild des Quaders $\Omega := [0,R] \times [0,2\pi[\times [0,h]$ ist dann ein Zylinder mit Radius R und Höhe h.
- Die Ableitung ist
$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$
- Offenbar gilt hier ebenfalls $\det(D\Phi(r,\varphi,z)) = r$.

22.2.5. Anwendung: Kugelkoordinaten

22.2.7 Definition: Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ entstehen, indem man die Kugel durch Radius und zwei Winkel $\theta \in [0, \pi]$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ parametrisiert:

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

22.2.8 Bemerkung: Dies ist die in Mathematik, Physik und wahrscheinlich auch Ingenieurwissenschaften gebräuchlichste Beschreibung, die leider nicht ganz der in der Geographie üblichen entspricht. φ kann man zwar als Längenkoordinate interpretieren, $\theta \in [0, \pi]$ ist hier aber nicht der Winkel des Ortsvektors zur „Äquatorebene", sondern der Winkel zwischen Ortsvektor und „Nordpol" $(0, 0, 1)^T$. Im Prinzip könnte man natürlich auch mit der „geographischen" Breite $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ arbeiten, muss dann aber in der Abbildung Φ die Ausdrücke $\sin(\theta)$ und $\cos(\theta)$ vertauschen.

Beobachtungen

- Die Ableitung der Kugelkoordinatenabbildung ist

$$D\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}.$$

- Hier gilt offenbar (warum?)

$$\det(D\Phi)(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin(\theta)\,.$$

- Der Transformationssatz liefert somit für $\mathcal{R}$-messbares $\tilde{f} : B_R(0) \to \mathbb{R}$

$$\int_{B_R(0)} \tilde{f}(x)\, dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\Phi(r, \varphi))\, r^2 \sin(\theta)\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, dr\,.$$

Beispiele

- Das Volumen der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ berechnet sich zu

$$\int_{B_R(0)} 1\, dx = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2\, \sin(\theta)\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta\, dr = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

- Das elektrische Feld einer im Punkt 0 befindlichen Punktladung sei $E(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$. Die Energiedichte dieses Feldes ist $e(x) := \frac{1}{2}\langle E(x), E(x)\rangle = \frac{1}{2\|x\|^4}$. Somit ist die Gesamtenergie in einer Kugelschale $K_{R_1,R_2} = B_{R_2}(0)\backslash B_{R_1}(0)$ gleich

$$\begin{aligned} \int_{K_{R_1,R_2}} e(x)\, dx &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1/2}{r^4}\, r^2 \sin(\theta)\, \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta\ dr \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \end{aligned}$$

- Für $R_1 \to 0$ geht diese Energie gegen $+\infty$.

22.3. Kurvenintegrale

22.3.1. Kurven

22.3.1 Definition:

- Eine Kurve (oder ein Weg) im $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ eines Intervalls $[a,b]$ in den $\mathbb{R}^n$.
- $\gamma(a)$ heißt Ausgangspunkt, $\gamma(b)$ heißt Endpunkt der Kurve γ.
- Falls $\gamma(a)=\gamma(b)$, so nennen wir γ eine geschlossene Kurve.
- Oft werden wir stetig differenzierbare Kurven $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ betrachten. In diesem Fall heißt $\gamma'(t)$ die Geschwindigkeit der Kurve im Punkt $t \in [a,b]$.
- Andererseits sind hin und wieder auch sogenannte stückweise stetig differenzierbare Kurven interessant: Hier ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, aber es gibt eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ des Intervalls $[a,b]$, so dass $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \in C^1([t_{i-1},t_i],\mathbb{R}^n)$ für alle $i = 1,\ldots,n$.[†] Hierfür schreiben wir im folgenden kurz $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

22.3.2 Beispiel: Es seien $p_0,\ldots,p_N \in \mathbb{R}^n$ und zu $t \in \mathbb{R}$ bezeichne $[t]$ die nächstkleinere ganze Zahl und $\{t\} := t - [t]$ den Rest. Dann wird durch

$$P_{p_0,\ldots,p_N} : [0,N] \mapsto \mathbb{R}^n\,, \quad t \mapsto \begin{cases} p_i & t \in \{0,\ldots,N\} \\ (1-\{t\})p_{[t]} + \{t\}p_{[t]+1} & \text{sonst} \end{cases}$$

eine (stückweise stetig differenzierbare) Kurve definiert, die man den $p_0,\ldots,p_n$ verbindenden Polygonzug nennt.

22.3.3 Bemerkung: Die oben definierte Operation heißt Gauß-Klammer $[\cdot]$. In Computer-Sprachen findet man sie unter Funktionsnamen wie `int`, `floor`, `truncate`. Die Operation $\{t\} := t - [t] \in [0,1[$ findet man unter Namen wie `frac`, `mod` oder `rem`.

22.3.4 Definition:

- Der $p_0,\ldots,p_n$ verbindende Polygonzug $P_{p_0,\ldots,p_N}$ hat die Länge

$$L(P_{p_0,\ldots,p_N}) := \sum_{i=1}^{N} \|p_i - p_{i-1}\|\,.$$

- Die Länge einer Kurve $\gamma \in C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ definieren wir als

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \sup_{N\in\mathbb{N}, a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b} L(P_{\gamma(t_0),\ldots,\gamma(t_N)}) \\ &= \sup_{N\in\mathbb{N}, a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b} \sum_{i=1}^{N} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\,. \end{aligned}$$

- Wenn $L(\gamma) < +\infty$, so nennen wir γ rektifizierbar.

[†] Die Ableitungen von $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ in den Endpunkten t_{i-1} und t_i kann man dabei als rechts- bzw. linksseitige Ableitung definieren.

22.3.5 Programm: Eine Octave/Matlab/Scilab-Funktion zur numerischen Approximation der Länge einer Kurve finden Sie hier: **Demos/A3/laenge.m**

```
function L = laenge(kurve, a, b, n=100)
  h = (b-a)/n;
  L = 0;
  for i=1:n
    ti1 = (i-1)*h;
    ti2 = i*h;
    dsvec = kurve(ti2)-kurve(ti1);
    ds = norm(dsvec);
    L = L+ds;
  end
endfunction
```

Sie können es einfach an den folgenden Beispielen ausprobieren.

22.3.6 Satz: Jedes $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

Für $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a,b],\mathbb{R}^n)$ gilt dasselbe, wenn man entweder das Integral auf der rechten Seite in geeignete Teilintegrale zerlegt, oder aber die endlich vielen Unstetigkeitsstellen/Undefiniertheitsstellen von γ' als für das Integral irrelevant ansieht.

Beweisskizze $\gamma' \in C^0([a,b])$ ist (wegen der Kompaktheit von $[a,b]$) gleichmäßig stetig. Somit gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle Zerlegungen $a = t_0 < \ldots < t_N = b$ von $[a,b]$ mit $t_i - t_{i-1} < \delta$ gilt

$$\sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^N \|\int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt\| = \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1})\|\gamma'(\tau_i)\| + O(\delta)$$

mit $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ beliebig. Bis auf den $O(\delta)$-Term ist dies aber einfach eine Riemann-Summe für $\|\gamma'\|$.

22.3.7 Beispiel: Die Kurve

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2\,, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

ist stetig differenzierbar mit der Geschwindigkeit

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\,.$$

Diese hat die Norm

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)} = 2|\sin(\frac{t}{2})|$$

(Additionstheorem für $\cos(t)$ anwenden). Somit gilt

$$L(\gamma) = 2\int_0^{2\pi} |\sin(\frac{t}{2})|\, dt = 4\int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = 8$$

22.3.8 Beispiel: Die Kurve

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & t = 0 \\ \begin{pmatrix} t \\ t\cos(\frac{\pi}{t}) \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist stetig und hat trotzdem unendliche Länge, was man durch Approximation mit Polygonzügen durch die Punkte

$$\gamma(0), \gamma(\frac{1}{N}), \gamma(\frac{1}{N-1}), \ldots \gamma(\frac{1}{2}), \gamma(1)$$

sehen kann.

22.3.9 Bemerkungen:

- Auch die vereinfachte Variante

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t\cos(\frac{\pi}{t}) & \text{sonst} \end{cases}$$

  ist eine Kurve unendlicher Länge (in $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$).

- Noch beeindruckendere Kurven unendlicher Länge sind fraktale Kurven, wie die Koch-Kurve (Schneeflockenkurve) oder die Peano-Kurve, welche das ganze Einheitsquadrat überdeckt.

- (Stückweise) Stetig differenzierbare Kurven haben aber immer endliche Länge.

22.3.2. Umparametrisierungen

22.3.10 Motivation:

- Für die Definition der Länge einer Kurve, sowie die im folgenden definierten Kurvenintegrale ist es unwesentlich, wie genau die Kurve durchlaufen wird.

- So ist zum Beispiel die Länge der Kurven

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

  und

$$\gamma_2 : [3\pi, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

  in beiden Fällen gleich.

22.3.11 Definition: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zwei Kurven $\gamma \in C^k([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{\gamma} \in C^k([\tilde{a}, \tilde{b}], \mathbb{R}^n)$ heißen äquivalent (in Formeln: $\gamma \sim \tilde{\gamma}$), wenn es eine stetige, streng monoton wachsende und surjektive Funktion

$$h : [a,b] \to [\tilde{a}, \tilde{b}]$$

gibt, so dass $\tilde{\gamma}(h(t)) = \gamma(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Falls $k > 0$, so verlangen wir zusätzlich $h \in C^k([a,b],[\tilde{a},\tilde{b}])$ und $h'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ (letzteres braucht man, damit die Umkehrfunktion h^{-1} ebenfalls k-fach differenzierbar ist) und für $\gamma \in C^1_{\text{stw}}$ verlangen wir $h \in C^1_{\text{stw}}([a,b],[\tilde{a},\tilde{b}])$.

22.3.12 Beispiel: Die Kurven $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : [1,2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} (t-1)^2 + 2 \\ (t-1)^4 + 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t+2 \\ t^2+1 \end{pmatrix},$$

sind äquivalent, weil gilt $\gamma_1(t) = \gamma_2(h(t))$ mit $h(t) = (t-1)^2$.

22.3.13 Bemerkung:

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es erfüllt
  - (Reflexivität) Für jede Kurve γ gilt $\gamma \sim \gamma$.
  - (Symmetrie) Für beliebige γ_1, γ_2 gilt $\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \gamma_2 \sim \gamma_1$.
  - (Transitivität) Für beliebige Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gilt

$$(\gamma_1 \sim \gamma_2 \wedge \gamma_2 \sim \gamma_3) \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 \sim \gamma_3 .$$

- Für manche Fragestellungen macht es daher Sinn, unter Kurve eine ganze Äquivalenzklasse[‡] von parametrisierten Kurven der Form $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zu verstehen.
- Eine oft verwendete und (vor allem theoretisch) sehr praktische Umparametrisierung entsteht durch Einführung der Bogenlänge

$$S : [a,b] \mapsto [0, L(\gamma)], \quad t \mapsto S(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau .$$

  und Umparametrisieren gemäß

$$\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, \quad s \mapsto \tilde{\gamma}(s) := \gamma(S^{-1}(s)) .$$

- Diese Parametrisierung $\tilde{\gamma}$ zeichnet sich dann dadurch aus, dass sie überall die Geschwindigkeit 1 hat.

22.3.14 Beispiel:

- Der rechte obere Teil des Einheitskreises könnte stetig parametrisiert werden als

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix} .$$

- Diese Kurve hat für $t \in [0,1[$ die Ableitung

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

  mit Norm

$$\|\gamma'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} .$$

[‡]Die Äquivalenzklasse $[\gamma]$ einer Kurve γ ist die Menge, welche alle zu γ äquivalenten Kurven enthält.

- Offenbar ist γ am rechten Endpunkt nicht differenzierbar, allerdings ist $\|\gamma'(t)\|$ uneigentlich integrierbar, was wir im folgenden ausnutzen werden.
- Die Bogenlängenfunktion ist gegeben als

$$S(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t)\,.$$

- und hat die Inverse

$$S^{-1} : [0, \frac{\pi}{2}] \to [0,1]\,, \quad t = S^{-1}(s) = \sin(s)\,.$$

- Somit hat die Kurve γ in der Bogenlänge-Parametrisierung die Gestalt

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(S^{-1}(s)) = \begin{pmatrix}\cos(s)\\ \sin(s)\end{pmatrix}\,.$$

- Diese Form ist erfreulicherweise sogar beliebig oft differenzierbar und erfüllt auch —wie es sich für eine Parametrisierung nach der Bogenlänge gehört—

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \|\begin{pmatrix}-\sin(s)\\ \cos(s)\end{pmatrix}\| = 1\,.$$

22.3.15 Bemerkung: An dieser Stelle können wir eine Lücke aus den ersten Teilen des Skripts schließen: Wir konnten damals nämlich einerseits Kosinus und Sinus über ihre Potenzreihen definieren, und ebenfalls konnten wir sehen, dass die Kurve $s \mapsto \begin{pmatrix}\cos(s)\\ \sin(s)\end{pmatrix}$ stetig differenzierbar auf dem Einheitskreis verläuft. Aber erst nachdem wir jetzt die Definition der Länge einer Kurve kennen, können wir den Parameter s ohne Rückgriff auf externes Wissen als „Winkel gemessen im Bogenmaß“ (d.h. als die Länge des Einheitskreisbogens vom Punkt $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ zum Punkt $\begin{pmatrix}\cos(s)\\ \sin(s)\end{pmatrix}$) identifizieren.

22.3.16 Definition: (Addition/Aneinanderhängen von Kurven) Zwei Kurven $\gamma_1 \in C^0([a_1,b_1],\mathbb{R}^n)$ und $\gamma_2 \in C^0([a_2,b_2],\mathbb{R}^n)$ (oder aber C^1_{stw} anstelle von C^0) mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ können wie folgt „addiert“ werden:

1. Wir parametrisieren die Kurven γ_1 und γ_2 mittels

$$\tilde{\gamma_1}(s) = \gamma(a_1 + s(b_1 - a_1)) \text{ und } \tilde{\gamma_2}(s) = a_2 + s(b_2 - a_2)$$

   so um, dass ihr Definitionsbereich $[0,1]$ ist.

2. Dann hängen wir beide aneinander:

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [0,2] \to \mathbb{R}^n\,, \quad s \mapsto \begin{cases}\tilde{\gamma_1}(s) & 0 \leqslant s \leqslant 1\\ \tilde{\gamma_2}(s-1) & 1 \leqslant s \leqslant 2\end{cases}\,.$$

22.3.17 Bemerkungen:

- Wegen $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ ist $\gamma_1 + \gamma_2$ für stetige Kurven γ_1, γ_2 auch wieder stetig.
- Mit der Äquivalenz bis auf Umparametrisierungen gilt für diese Addition das Assoziativgesetz
$$(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3 \;\sim\; \gamma_1 + (\gamma_2 + \gamma_3)\,.$$
- Für die Längen der Kurven gilt
$$L(\gamma_1 + \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)\,.$$

22.3.3. Kurvenintegrale 1. Art

22.3.18 Definition: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1([a,b], D)$ und $f \in C^0(D, \mathbb{R})$ (oder auch $f \in C^0(D, \mathbb{R}^k)$). Dann setzen wir

$$\int_\gamma f(x)\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$

Die neue Notation auf der linken Seite wird dabei durch den Ausdruck rechts definiert. Man nennt dieses Integral Kurvenintegral 1. Art oder unorientiertes Kurvenintegral.

22.3.19 Bemerkungen:

- Die Notation ist nicht ideal, weil insbesondere der Parameter x unmotiviert ist. Alternative Schreibweisen sind
$$\int_\gamma f\, ds\,, \quad \int_\gamma f\, \mathrm{d}\gamma \text{ oder einfach } \int_\gamma f\,.$$
- $ds := \|\gamma'(t)\|\, dt$ kann man sich als (ungerichtetes) Bogenelement oder Linienelement vorstellen.
- Mit dem Kurvenintegral 1. Art kann man physikalische Größen integrieren, die „pro Längeneinheit“ gegeben sind (wie zum Beispiel die Dichte eines Drahts oder eine Kraft pro Längeneinheit).
- Auch für $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a,b], D)$ macht die Definition Sinn, wenn man entweder das Integral auf der rechten Seite in eine Summe von Integralen über Teilintervalle zerlegt, auf denen γ stetig differenzierbar ist, oder aber die Nichtdefiniertheit von γ' an seinen endlich vielen Unstetigkeitspunkte einfach ignoriert (für das Integral spielen sie als Nullmenge ja keine Rolle).

22.3.20 Anwendungen:

- Die Länge einer Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ist gerade das Integral
$$L(\gamma) = \int_\gamma 1\, ds\,.$$

- Die Gesamtmasse eines (idealisiert) durch eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ beschriebenen Drahts, der am Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ die (Linien-)Dichte $\rho(x)$ hat, ist
$$M = \int_\gamma \rho(x)\, ds\,.$$
- Der Schwerpunkt desselben Drahts berechnet sich zu
$$S = \frac{1}{M} \int_\gamma \rho(x) x\, ds\,.$$
- Wenn $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein auf Drähte wirkendes Kraftfeld beschreibt, so ist
$$F_{\text{gesamt}} = \int_\gamma F(x)\, ds$$
die auf den obigen Draht wirkende Gesamtkraft.

22.3.21 Bemerkung:
- Die Berechnung von Masse und Schwerpunkt eines Drahts mit Kurvenintegralen erster Art ist insofern etwas unnatürlich, weil eine variable Drahtdichte ρ im Normalfall eher über den Kurvenparameter und nicht abhängig von der Position der Kurve gegeben sein wird.
- In der Praxis wird man daher zur Berechnung der Gesamtmasse eines Drahts eher ein Integral der Form $\int_a^b \rho(t)\|\gamma'(t)\|\, dt$ anstelle von $\int_a^b \rho(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt$ zu berechnen haben.

22.3.22 Beispiel: Es sei $F(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ ein Kraftfeld im $\mathbb{R}^2$. Ein dünner Stab sei durch die Kurve
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2\,, \quad s \mapsto \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$
beschrieben. Wenn das Kraftfeld gleichmäßig auf den Stab wirkt, so ist die auf den Stab wirkende Gesamtkraft gleich
$$\int_0^1 \frac{1}{1+s^2} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} 1\, ds = \begin{pmatrix} \int_0^1 \frac{s}{1+s^2}\, ds \\ \int_0^1 \frac{1}{1+s^2}\, ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(2)/2 \\ \pi/4 \end{pmatrix}.$$

22.3.23 Bemerkung: Um Kurvenintegrale erster Art numerisch zu approximieren, verwendet man keine Riemann-Summen für den Ausdruck
$$\int_\gamma f(x)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt\,.$$
Stattdessen verwendet man (analog zur Approximation der Länge) Riemann-Summen der Form
$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|\,,$$
mit einer Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ und beliebig ausgewählten Punkten $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. (FRAGE: Wo liegt der Vorteil?)

22.3.4. Kurvenintegral 2. Art

22.3.24 Motivation: Ebenso oft wie das Kurvenintegral erster Art kommt eine Variante vor, bei der es nicht nur auf die Norm des Bogenelements, sondern auch auf dessen Richtung ankommt.

22.3.25 Beispiel: Ein wichtiges physikalisches Beispiel ist die geleistete Arbeit in einem Kraftfeld längs eines Wegs. Diese hängt offenbar nicht nur vom ungerichteten $ds := \|\gamma'(t)\|\, dt$ ab, weil es natürlich einen Unterschied macht, ob $\gamma'(t)$ in Richtung, Gegenrichtung oder auch orthogonal zum Kraftfeld F ausgerichtet ist.

22.3.26 Definition: Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und f eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ (so etwas nennt man ein Vektorfeld). Für eine Kurve $\gamma \in C^1([a,b], D)$ setzen wir dann

$$\int_\gamma f(x)\cdot \vec{ds} := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt\,.$$

Die neue Notation auf der linken Seite wird dabei wieder durch den Ausdruck auf der rechten Seite definiert, in der mit $\cdot$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt gemeint ist. Man nennt dieses Integral Kurvenintegral 2. Art oder orientiertes Kurvenintegral.

22.3.27 Notation: Oft findet man alternative Notationen wie

$$\int_\gamma f(x)\cdot\, dx\,, \quad \int_\gamma f(x)\, dx\,, \quad \int_\gamma \vec{f}(\vec{x})\, \mathrm{d}\vec{x}\,, \quad \int_\gamma \vec{f}(\vec{x})\cdot \mathrm{d}\vec{x}\,, \quad \ldots$$

Für geschlossene Kurven γ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ändert man manchmal das Integralzeichen ab wie in

$$\oint_\gamma f(x)\cdot\vec{ds}$$

22.3.28 Beispiel: Die Arbeit, die bei der Bewegung eines Objekt im Kraftfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad f(x) = -\frac{x}{\|x\|^2}$$

entlang der Kurve $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ vom Feld geleistet wird, berechnet sich zu

$$\int_\gamma f(x)\cdot\vec{ds} = \int_1^2 \langle -\frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle\, dt = -\int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = -\ln(2)\,.$$

Das negative Vorzeichen zeigt, dass in diesem Fall Arbeit von außen erbracht werden muss, um die Bewegung möglich zu machen.

22.3.29 Bemerkung: Zur numerischen Approximation von Kurvenintegralen zweiter Art verwendet man Riemann-Summen der Form

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))\cdot(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))\,,$$

und vermeidet so die Berechnung der Ableitung $\gamma'(t)$. Somit erhält man eine Berechnungsfunktion für Kurvenintegrale 2. Art durch eine sehr einfache Modifikation einer Berechnungsfunktion für Kurvenintegrale 1. Art.

22.3.5. Eigenschaften der Kurvenintegrale

22.3.30 Satz: Die Kurvenintegrale 1. und 2. Art haben folgende Eigenschaften:

- Linearität im Integranden: Es gilt

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\ ds = \alpha \int_\gamma f\ ds + \beta \int_\gamma g\, ds\,.$$

  und

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g)\cdot \vec{ds} = \alpha \int_\gamma f\cdot \vec{ds} + \beta \int_\gamma g\cdot \vec{ds}\,.$$

- Beide Kurvenintegraltypen sind invariant gegenüber Umparametrisierungen: Wenn $\gamma = \tilde{\gamma}\circ h$ mit einer Umparametrisierung h, so gilt

$$\int_\gamma f\ ds = \int_{\tilde{\gamma}} f\ ds\,, \quad \int_\gamma f\ \vec{ds} = \int_{\tilde{\gamma}} f\cdot \vec{ds}\,.$$

- Additivität:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\ ds = \int_{\gamma_1} f\ ds + \int_{\gamma_2} f\ ds\,, \quad \int_{\gamma_1+\gamma_2} f\cdot \vec{ds} = \int_{\gamma_1} f\cdot \vec{ds} + \int_{\gamma_2} f\cdot \vec{ds}\,.$$

- Bei Umkehrung der Bewegungsrichtung (d.h. $\tilde{\gamma}(\tau) = \gamma(b+a-\tau)$) gilt:

$$\int_\gamma f\ ds = \int_{\tilde{\gamma}} f\ ds\,, \quad \int_\gamma f\cdot \vec{ds} = -\int_{\tilde{\gamma}} f\cdot \vec{ds}\,.$$

Beweis Dies ist alles recht klar. Der zweite Punkt ist zum Beispiel einfach die Kettenregel/Substitionsregel: Mit $t = h^{-1}(\tilde{t})$ gilt

$$\tilde{\gamma}'(\tilde{t}) = \gamma'(t)\,\frac{dt}{d\tilde{t}} = \frac{1}{h'(t)}\gamma'(t)$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\gamma}} f\cdot \vec{ds} &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tilde{t}))\cdot\tilde{\gamma}'(\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{t}\\ &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{h'(t)}\\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\ dt = \int_\gamma f\cdot\vec{ds}\end{aligned}$$

22.3.6. Kurvenintegral, Potential und Gradient

22.3.31 Definition: Ein Vektorfeld $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ besitzt ein Potential, wenn es eine Funktion $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gibt, so dass gilt

$$\forall x \in \Omega : \; f(x) = \nabla\varphi(x) \, .$$

22.3.32 Beispiel: Das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3 \, , \quad f(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$$

besitzt die Potentiale $\varphi(x) = -\frac{1}{\|x\|} + C$ mit beliebigem $C \in \mathbb{R}$.

22.3.33 Bemerkung:

- Offenbar ist das Potential eine mehrdimensionale Verallgemeinerung der Stammfunktion.
- In den Ingenieurwissenschaften und der Physik wird die Potentialbedingung fast immer als
$$\forall x \in \Omega : \; f(x) = -\nabla\varphi(x)$$
gefordert. Dies ist zwar nicht mehr analog zur Stammfunktion, führt aber dazu, dass die resultierende Kraft f in Richtung einer Verkleinerung des Potentials zeigt, was vielleicht etwas anschaulichere Beispiele ermöglicht.

Annahme Wir nehmen an, dass das Vektorfeld $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ im Kurvenintegral 2. Art

$$\int_\gamma f(x) \cdot \vec{ds}$$

ein Potential φ besitzt.

Beobachtung Dann gilt für alle $t \in [a, b]$:

$$\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t)) = \mathcal{D}\varphi(\gamma(t))\,\gamma'(t) = \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, .$$

22.3.34 Folgerung: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ besitze das Potential $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle Kurven $\gamma : [a, b] \to \Omega$

$$\int_\gamma f(x) \cdot \vec{ds} = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \, .$$

Beweis

$$\int_\gamma f(x) \cdot \vec{ds} = \int_a^b \langle \nabla\varphi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t)) \, dt = [\varphi(\gamma(t))]_a^b$$

22.3.35 Bemerkung:
- Das Wegintegral 2. Art hängt für Potentialfelder offenbar nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ ab!
- Das Wegintegral 2. Art eines Potentialfelds über eine geschlossene Kurve ist 0.
- Offenbar ist dies eine Verallgemeinerung des bekannten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für Funktion/Stammfunktion.
- Man beachte, dass diese Aussage nur für das Kurvenintegral 2. Art, nicht aber für das Kurvenintegral 1. Art gilt!

22.3.36 Anwendung: Die in einem Potentialfeld (z.B. ein zeitunabhängiges elektrisches oder gravitatives Feld) entlang eines Wegs geleistete Arbeit hängt nur von Anfangs- und Endpunkt des Wegs ab.

22.3.37 Beispiel:
- Das elektrische Feld einer Punktladung ist in $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ gegeben als

$$E(x) = Q\frac{x}{\|x\|^3}\,.$$

- Es besitzt das Potential (im Ingenieursinn, d.h. $E = -\nabla\varphi$)

$$\varphi(x) = \frac{Q}{\|x\|}\,.$$

- Um nun eine Testladung q vom Punkt $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ zum Punkt $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ (in entsprechenden Einheiten) zu bewegen, muss man die Arbeit

$$W = qQ(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}qQ$$

leisten.
- Offenbar ist hier keine lästige Kurvenintegration nötig!

Frage Hat jedes Vektorfeld $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Potential?

Antwort Nein, denn für ein solches Vektorfeld muss nach dem Satz von Schwarz (Symmetrie der Hesse-Matrix) gelten:

$$\forall i,j = 1,\ldots,n: \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,.$$

Diese Bedingungen sind normalerweise nicht erfüllt.
Ein konkretes Beispiel dafür ist etwa $f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$.

Frage Es sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld. Sind die notwendigen Bedingungen

$$\forall i, j = 1, \ldots, n: \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

auch hinreichend für die Existenz eines Potentials?

Antwort Fast! Allerdings kann es Gegenbeispiele geben, wenn das Gebiet eine besondere Art von „Löchern“ hat. Ein solches Gegenbeispiel ist durch $\Omega := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ und $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ gegeben.
Bemerkung und Frage: Solche „Felder“ sind nicht außergewöhnlich, sondern treten auch in Physik und Elektrotechnik auf. Wo?
Zweite Frage: Welcher komplexen Funktion entspricht das Gegenbeispiel, wenn man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert?

22.3.38 Definition: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn sich jede geschlossene Kurve $\gamma \in C^0([a, b], \Omega)$ *stetig auf einen Punkt* $x_* \in \Omega$ *zusammenziehen lässt*. Explizit: ..., wenn es zu jeder geschlossenen Kurve $\gamma \in C^0([a, b], \Omega)$ eine *stetige* Abbildung

$$\Phi : [a, b] \times [0, 1] \to \Omega\,, \quad (t, s) \mapsto \Phi(t, s)$$

und ein $x_* \in \Omega$ gibt, so dass

$$\Phi(t, 0) = \gamma(t)\,, \qquad t \in [a, b] \tag{22.1}$$
$$\Phi(t, 1) = x_*\,, \qquad t \in [a, b] \tag{22.2}$$
$$\Phi(a, s) = \Phi(b, s)\,, \qquad s \in [0, 1]\,. \tag{22.3}$$

Beispiele Folgende Aussagen sind anschaulich klar:

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ oder auch Kugeln $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ sind einfach zusammenhängend (ziehe alles in 0 zusammen).
- $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend (der Rand des Einheitskreises lässt sich nicht stetig auf ein $x_* \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ zusammenziehen).
- $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ ist einfach zusammenhängend.
- $\mathbb{R}^3 \backslash \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \}$ ist nicht einfach zusammenhängend.
- Ein Volltorus oder reale Gebilde wie Autoreifen oder Kaffeetassen mit Henkel sind nicht einfach zusammenhängend

Bis auf den ersten Punkt sind die Beweise dieser Aussagen zwar interessant, aber auch arbeitsaufwändig. Das Gebiet der Mathematik, welches sich mit derartigen Aussagen auseinandersetzt, heißt algebraische Topologie.

22.3.39 Satz: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei einfach zusammenhängend und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann sind die Bedingungen

$$\forall i, j = 1, \ldots, n: \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

notwendig und hinreichend für die Existenz eines Potentials $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f = \nabla\varphi$.

Beweisskizze

- Später werden wir (wenigstens für $n = 2$ und $n = 3$) die Sätze von Green und Stokes beweisen, mit denen man zeigen kann, dass unter den obigen Bedingungen an $\mathcal{D}f$ Kurvenintegrale über homotope (d.h. ineinander stetig deformierbare) Kurven immer den gleichen Wert ergeben.
- Weil Ω einfach zusammenhängend ist, sind alle Kurven mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop.
- Daher kann man ein Potential φ ausgehend von einem Punkt $p \in \Omega$ durch Integration längs einer beliebigen Kurve von p nach x definieren. (Wenn Ω aus mehreren separaten Teilen bestehen sollte, muss man von mehreren Punkten aus integrieren.)

22.3.40 Bemerkung:

- Die Bedingungen

  $$\forall i, j = 1, \ldots, n: \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

  sind äquivalent zu

  $$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n: \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0\,.$$

- Für $n = 2$ ist dies offenbar eine Gleichung, für $n = 3$ sind es drei Gleichungen, allgemein sind es $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen.
- Wenn man für $n = 2$ setzt

  $$\operatorname{rot}(f) := \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$$

  und für $n = 3$ setzt

  $$\operatorname{rot}(f) := \nabla \times f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$$

  so kann man die Bedingungen in beiden Fällen als $\operatorname{rot}(f) = 0$ formulieren.
- rot steht dabei für Rotation. Der Hintergrund dieser Bezeichnung ist, dass man diese Größe als eine Art „Drehdichte“ eines Vektorfelds ansehen kann[§]. Im Englischen wird dieser Operator übrigens meist mit curl bezeichnet.

[§]Dies wird im Abschnitt über den Satz von Stokes noch deutlicher.

22.4. Flächenintegrale

22.4.1. Volumenberechnung k-dimensionaler Parallelotope

Frage Es seien $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$. Wie berechnet man das k-dimensionale Volumen (Fläche, Maß) des Parallelotops (Parallelepipeds)

$$P(x_1, \dots, x_k) = \{x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in [0,1]\}\,?$$

Wissen Wir kennen die Antwort bereits in folgenden Fällen:

- $k = 1$, $n = 3$: $\operatorname{vol}(P(x_1)) = \|x_1\| = \sqrt{x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2}$.
- $k = n$: $\operatorname{vol}(P(x_1, \dots, x_n)) = |\det(x_1, \dots, x_n)|$
- $n = 3$, $k = 2$:

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(P(x_1, x_2)) &= \|x_1 \times x_2\| \quad [= \|x_1\|\|x_2\| \sin(\sphericalangle(x_1, x_2))] \\ &\overset{\text{formal}}{=} \left| \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & x_{1,1} & x_{2,1} \\ \vec{e}_2 & x_{1,2} & x_{2,2} \\ \vec{e}_3 & x_{1,3} & x_{2,3} \end{vmatrix} \right| \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} x_{1,2} & x_{2,2} \\ x_{1,3} & x_{2,3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,3} & x_{2,3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} \end{vmatrix}^2} \end{aligned}$$

ERINNERUNG: $\left|\dots\right|$ ist auch eine Kurzschreibweise für die Determinante.

Antwort Im allgemeinen Fall kann man das Volumen eines k-dimensionalen Parallelotops $P(x_1, \dots, x_k)$ im $\mathbb{R}^n$ berechnen, indem man

1. die k Vektoren $x_1, \dots, x_k$ als Spalten einer Matrix $X = \left(x_1 | \dots | x_k\right) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ nebeneinander schreibt,
2. die Matrix $G := X^T X = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ berechnet,
3. und dann setzt $\operatorname{vol}(P(x_1, \dots, x_k)) := \sqrt{\det(G)}$.

   BEMERKUNG: Gleich werden wir sehen, dass $\det(G) \geqslant 0$, so dass wir die Wurzel problemlos ziehen können.

22.4.1 Definition: Die Matrix

$$G(x_1, \dots, x_k) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

nennt man die Gramsche Matrix der Vektoren $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Ihre Determinante nennt man Gramsche Determinante.

22.4.2 Satz: Die Gramsche Matrix $G = G(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ ist symmetrisch. Für linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ ist sie symmetrisch positiv definit (und ihre Determinante daher positiv), für linear abhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ ist sie singulär (und ihre Determinante somit 0).

Beweis Die Symmetrie ist wegen $G = X^T X$ mit $X = (x_1|\cdots|x_k)$ offensichtlich. Außerdem gilt für ein beliebiges $y \in \mathbb{R}^k$

$$y^T G y = y^T X^T X y = (Xy)^T Xy = \|Xy\|^2 \geqslant 0\,.$$

Falls aber für $y \neq 0$ gilt $\|Xy\| = 0$, so ist äquivalent dazu $Xy = 0$, was gerade die lineare Abhängigkeit der Vektoren x_i bedeutet.

Beispiele

- $n = 3$, $k = 1$: Für $x = \big(4, -2, 3\big)^T$ errechnen wir

$$\mathrm{vol}(P(x)) = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \|x\| = \sqrt{29}\,.$$

- $n = 3, k = 2$: Für $x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\mathrm{vol}(P(x,y)) = \sqrt{\det(\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix})} = \sqrt{\begin{vmatrix}14&32\\32&77\end{vmatrix}} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

- $n = 4, k = 2$: Für $x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(P(x,y)) &= \sqrt{\det(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\2&6\\3&7\\4&8\end{pmatrix})}\\ &= \sqrt{\begin{vmatrix}30&70\\70&174\end{vmatrix}} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}\end{aligned}$$

22.4.3 Übung: Man beweise, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\|x \times y\| = \sqrt{\det(G(x,y))}\,.$$

Frage Warum gilt

$$\mathrm{vol}(P(x_1,\dots,x_k)) = \sqrt{\det(G(x_1,\dots,x_k))}\,?$$

Begründung

1. Für $k = n$ gilt für $X = \big(x_1|\cdots|x_k\big)$

$$\sqrt{\det(X^TX)} = \sqrt{\det(X^T)\det(X)} = \sqrt{\det(X)^2} = |\det(X)|$$

was der uns schon bekannten Formel $\mathrm{vol}(x_1,\dots,x_k) = |\det(x_1,\dots,x_k)|$ entspricht.

2. Für $k < n$ sieht man leicht, dass der Ausdruck $\sqrt{\det(X^TX)}$ sich nicht ändert, wenn man X durch QX mit einer Drehmatrix Q ersetzt (für $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $Q^TQ = I$ gilt ja $(QX)^T(QX) = X^T(Q^TQ)X = X^TX$).

3. Mit einer solchen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kann man aber die Vektoren $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$ so in neue Vektoren $\tilde{x_1},\dots,\tilde{x_k} \subset \mathbb{R}^n$ drehen, dass ihre letzten $n-k$ Komponenten Null sind.

4. Für $\tilde{x_1},\dots,\tilde{x_k}$ ist es aber wohl sinnvoll, die aufgespannte k-Fläche zu berechnen, indem man nur die ersten k Komponenten betrachtet und den Betrag der Determinante der so abgeschnittenen Vektoren des $\mathbb{R}^k$ berechnet. Nach Punkt 1 wird das Ergebnis aber auch durch unsere Formel korrekt wiedergegeben.

22.4.2. Flächenintegrale 1. Art

22.4.4 Definition:

- $F \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^1-parametrisiertes k-dimensionales Flächenstück (oder einfach k-Flächenstück), wenn $F = \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ eine messbare Menge ist und $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$, so dass $\Phi|_\Omega$ außerhalb einer Nullmenge $N \subset \Omega$ injektiv ist.

- Eine k-dimensionale Fläche (oder einfach k-Fläche) $F \subset \mathbb{R}^n$ ist dann eine endliche Vereinigung $F = F_1 \cup \ldots \cup F_N$ von k-Flächenstücken $(F_1,\Omega_1,\Phi_1),\dots,(F_N,\Omega_N,\Phi_N)$, welche sich höchstens in Nullmengen überlappen (d.h. $\Phi_i^{-1}(F_i \cap F_j)$ soll für alle $i,j \in \{1,\dots,N\}$ mit $i \neq j$ eine Nullmenge sein).

22.4.5 Beispiel: Die Einheitssphäre $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ kann man mit Hilfe von Kugelkoordinaten durch ein einziges Flächenstück

$$\Omega = [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ \sin(\varphi)\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

darstellen.

22.4.6 Beispiel: Die Oberfläche des Zylinders

$$Z = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \wedge z \in [0,1] \}$$

könnte man darstellen als Vereinigung der parametrisierten Flächenstücke ($B_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$ bezeichne die Einheitskreisscheibe)

$$\Phi_1 : B_1 \to \mathbb{R}^3 , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_2 : B_1 \to \mathbb{R}^3 , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\Phi_3 : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3 , \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} .$$

Frage Wie berechnet man den k-Flächeninhalt eines parametrisierten Flächenstücks $F = \Phi(\Omega)$?

Antwort Man zerlegt $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ in kleine k-dimensionale Würfel der Form $Q = [x_1, x_1 + h] \times \cdots \times [x_k, x_k + h]^k$ mit $x = (x_1, \ldots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Ein solcher Würfel Q wird dann unter Φ approximativ in das Parallelotop $\Phi(x) + \mathcal{D}\Phi(x)([0,h]^k)$ abgebildet. Die Fläche dieses Parallelotops ist aber nach dem vorigen Abschnitt gerade

$$\sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi(x)^T \mathcal{D}\Phi(x))} \cdot h^k = \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi(x)^T \mathcal{D}\Phi(x))} \cdot \operatorname{vol}(Q) .$$

Somit ist die Gesamtfläche approximativ als

$$\sum_{Q \in Z} \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi(x)^T \mathcal{D}\Phi(x))} \operatorname{vol}(Q)$$

gegeben, was eine Riemann-Summe für

$$\int_\Omega \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi(x)^T \mathcal{D}\Phi(x))}\, dx$$

ist.

22.4.7 Definition: (Flächenintegral 1. Art) Das Flächenintegral 1. Art über ein parametrisiertes Flächenstück $F = \Phi(\Omega)$ definieren wir als

$$\int_F f \, dF := \int_\Omega f(\Phi(x)) \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi(x)^T \mathcal{D}\Phi(x))}\, dx .$$

Wenn eine k-Fläche F aus mehreren k-Flächenstücken $F_1, \ldots, F_N$ zusammengesetzt ist, so setzen wir

$$\int_F f \, dF := \sum_{i=1}^N \int_{F_i} f \, dF .$$

22.4.8 Bemerkung: Der Flächeninhalt bzw. das Volumen einer k-Fläche ist somit gegeben als

$$\mathrm{vol}(F) = \int_F 1 \, dF = \int_F dF \, .$$

Der (geometrische) Schwerpunkt von F berechnet sich als

$$x_S = \frac{1}{\mathrm{vol}(F)} \int_F x \, dF \, .$$

22.4.9 Beispiel: Die Oberfläche der Einheitssphäre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ wird parametrisiert durch

$$\Phi : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \, , \quad \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

mit Ableitung

$$\mathcal{D}\Phi(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} .$$

Hieraus berechnet sich

$$\sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi(\theta,\varphi)^T \mathcal{D}\Phi(\theta,\varphi))} = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{vmatrix}} = |\sin\theta| \, .$$

Und somit erhalten wir

$$\int_F dF = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta = 4\pi \, .$$

22.4.10 Bemerkungen:

- Für 2-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$ kann man das Flächenelement dF auch mit dem Kreuzprodukt darstellen. Dies führt dann zur Formel

$$\int_F f \, dF := \int_\Omega f(\Phi(x)) \| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \| \, \mathrm{d}(x_1, x_2) \, .$$

- Für das vorstehende Beispiel würde das ergeben:

$$\begin{aligned} \int_F dF &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \| \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \| \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 4\pi \, . \end{aligned}$$

- Die folgenden Integrale sind somit Spezialfälle des allgemeinen Flächenintegrals 1. Art:
  - Das Kurvenintegral 1. Art mit dem Volumenelement

$$\|\gamma'(t)\| \, dt = \sqrt{\det G(\gamma'(t))} \, dt \, .$$

– Das zweidimensionale Flächenintegral 1. Art mit dem Volumenelement

$$\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\|\,\mathrm{d}(x,y)=\sqrt{\det G(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y})}\,\mathrm{d}(x,y)\,.$$

– Die Transformationsformel mit dem Volumenelement

$$|\det(\mathcal{D}\Phi(x))|\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)=\sqrt{\det G(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\ldots\frac{\partial\Phi}{\partial x_n})}\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n)\,.$$

22.4.11 Übung: Man parametrisiere den Rand $F=\partial K$ des Körpers

$$K=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\mid x_3\in[0,1],\,x_1^2+x_2^2\leqslant 1-x_3\}$$

mit Hilfe zweier Flächenstücke. Man berechne den Flächeninhalt $\mathrm{vol}(F)$ von F und die Lage des Schwerpunkts $x_S:=\frac{1}{\mathrm{vol}(F)}\int_F x\,dF$.

22.4.3. Motivation orientierter Flächenintegrale

Beobachtung In verschiedenen Fragestellungen spielt nicht nur die Größe einer Fläche eine Rolle, sondern auch ihre Ausrichtung. Beispiele aus der Praxis sind:

- Die von einem Solarmodul gelieferte Leistung berechnet sich näherungsweise als

$$P(t)=\alpha\,A\,\langle\vec{n}(t),\vec{I}(t)\rangle\,.$$

  Hierbei bezeichnet $A>0$ die Fläche des Solarmoduls, $\vec{n}(t)$ die Einheitsnormale zur Fläche zur Zeit t, $\vec{I}=\vec{I}(t)$ den Intensitätsvektor der Sonnenstrahlung, und $\alpha\in[0,1]$ einen Verlustparameter.

- Wenn eine Substanz der konstanten Konzentration c in einem konstanten Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}$ transportiert wird, so strömt durch eine ebene Fläche der Größe A mit Normalenrichtung $\vec{n}$ die Substanzmenge (Einheit: Masse/Zeit)

$$Q=A\,\langle\vec{n},c\,\vec{u}\rangle\,.$$

22.4.4. Hyperebenen, Normalen und Kreuzprodukt

- Es sei H ein k-dimensionaler linearer Teilraum des $\mathbb{R}^n$, welcher von den linear unabhängigen Vektoren $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n$ aufgespannt wird.

- Auf H senkrecht stehende Vektoren nennt man Normalenvektoren zu H. Man kann sie berechnen durch Lösung des homogenen LGS

$$\begin{array}{rcl} \langle v_1, \vec{n} \rangle & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle v_k, \vec{n} \rangle & = & 0 \end{array}$$

  nach $\vec{n} \in \mathbb{R}^n$.

  (Wir verwenden hier für $\vec{n}$ den Vektorpfeil, um die Normale $\vec{n}$ von der Dimension n zu unterscheiden.)

- Weil $v_1, \ldots, v_k$ als linear unabhängig vorausgesetzt wurden, ist der Rang des LGS gleich k und die Normalenvektoren bilden einen $n-k$-dimensionalen Unterraum.

- Im Spezialfall $k = n-1$ nennt man H eine Hyperebene (für $n = 3$ und $k = 2$ einfach Ebene). Hier ist der Unterraum der Normalenvektoren folglich eindimensional.

- Die Normalenrichtung einer durch $v_1, \ldots, v_{n-1}$ aufgespannten Hyperebene kann man auch bestimmen durch

$$\begin{aligned} \wedge(v_1, \ldots, v_{n-1}) &\overset{\text{formal}}{:=} \begin{vmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{n-1,1} & \vec{e}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{1,n} & \ldots & v_{n-1,n} & \vec{e}_n \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \begin{vmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{n-1,1} \\ \vdots & \text{ohne Zeile i} & \vdots \\ v_{1,n} & \ldots & v_{n-1,n} \end{vmatrix} \vec{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, \vec{e}_i) \vec{e}_i \,. \end{aligned}$$

  ($\vec{e}_i$ bezeichnet den i-ten Einheitsvektor der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$.)

- Der so errechnete Vektor $v := \wedge(v_1, \ldots, v_{n-1})$ (das sogenannte äußere Produkt) verallgemeinert das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$:
  - v steht senkrecht auf den v_i,
  - v hat die Länge $\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_{n-1}))$, wobei $P(v_1, \ldots, v_{n-1})$ das von den Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ aufgespannte Parallelotop ist,
  - und v ist außerdem so gerichtet, dass $\det(v_1, \ldots, v_{n-1}, v) > 0$.

- Im $\mathbb{R}^2$ wird $\wedge$ nur auf einen einzelnen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ angewendet, und es ergibt sich:

$$\wedge(v) = \begin{vmatrix} v_1 & \vec{e}_1 \\ v_2 & \vec{e}_2 \end{vmatrix} = v_1 \vec{e}_2 - v_2 \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} .$$

  Dieser Vektor steht senkrecht zu v und hat offenbar auch gleiche Länge wie v.

- Später ist auch folgende Kurznotation praktisch:

$$\wedge(V) := \wedge(v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad \text{wenn } V = (v_1 | \ldots | v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}\,.$$

- Der $\wedge$-Operator liefert auch eine alternative Möglichkeit, das Volumen des Parallelotops $P(v_1, \ldots, v_k)$ im Spezialfall $k = n-1$ auszurechnen. Genauer gilt mit $V = (v_1 | \ldots | v_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$

$$\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_{n-1})) = \sqrt{\det(V^T V)} = \|\wedge(V)\|\,.$$

BEWEISSKIZZE: Mit $v := \wedge(v_1, \ldots, v_{n-1})$ und $n := \frac{v}{\|v\|}$ kann man aus den obigen Formeln ausrechnen:

$$\mathrm{vol}(P(v_1, \ldots, v_{n-1})) = \det(v_1, \ldots, v_{n-1}, n) = \frac{1}{\|v\|}\langle v, v\rangle = \|v\|\,.$$

22.4.5. Normalenvektoren von Hyperflächen

Frage Wie definiert man Normalen von (gekrümmten) Hyperflächen?
(Hyperfläche: $n-1$-dimensionale Fläche im $\mathbb{R}^n$)

22.4.12 Definition:
- Es sei $F = \Phi(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ein $n-1$-dimensionales parametrisiertes Flächenstück.
- $\vec{n} \in C^0(F, \mathbb{R}^n)$ heißt Normalenvektorfeld zu F, wenn für alle $x \in \Omega$ gilt

$$\langle \vec{n}(\Phi(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x)\rangle = \ldots = \langle \vec{n}(\Phi(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}}(x)\rangle = 0$$
$$\iff \quad \vec{n}(\Phi(x))\mathcal{D}\Phi(x) = 0^T \quad \iff \quad \mathcal{D}\Phi(x)^T \vec{n}(\Phi(x)) = 0\,.$$

- Zu jedem parametrisierten Flächenstück F gibt es ein durch die Parametrisierung definiertes Normalenfeld, nämlich

$$\wedge(\mathcal{D}\Phi(x)) = \wedge(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n-1}}(x))\,.$$

22.4.13 Beispiel:
- Die Parametrisierung

$$\Phi : \Omega = [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

liefert den (nach außen gerichteten) Normalenvektor

$$\wedge\,(D\Phi)(\theta, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) =$$
$$\sin(\theta) \begin{pmatrix}\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ \sin(\theta)\sin(\varphi)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} = \sin(\theta)\,\Phi(\theta, \varphi)\,.$$

- Ein Tausch der Variablen gemäß

$$\tilde{\Phi} : \Omega = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 , \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\theta, \varphi)$$

würde die nach innen gerichtete Normale gleicher Länge ergeben.

22.4.6. Flächenintegrale 2. Art

22.4.14 Definition: (Flächenintegral 2. Art, orientiertes Flächenintegral) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ und $F = \Phi(\Omega)$ eine parametrisierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Dann definieren wir das Flächenintegral 2. Art als

$$\int_F f \cdot d\vec{F} := \int_\Omega \langle f(\Phi(x)), \wedge(\mathcal{D}\Phi(x)) \rangle \, dx .$$

Für $n = 3$ bedeutet dies einfach

$$\int_F f \cdot d\vec{F} := \int_\Omega \langle f(\Phi(x)), \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x) \rangle \, dx .$$

22.4.15 Bemerkungen: Mit Hilfe des Einheitsnormalenvektorfelds

$$\vec{n} : F \to \mathbb{R}^n , \quad \vec{n}(\Phi(x)) := \frac{\wedge(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n})}{\| \wedge(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}) \|}$$

kann man das Flächenintegral 2. Art auch als Flächenintegral 1. Art schreiben:

$$\begin{aligned} \int_F f \cdot d\vec{F} &= \int_\Omega \langle f(\Phi(x)), \vec{n}(\Phi(x)) \rangle \, \| \wedge(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}) \| \, dx \\ &= \int_F \langle f, \vec{n} \rangle \, dF \end{aligned}$$

Diese Form findet man ebenfalls sehr oft in der Literatur. Sie ist insbesondere dann gut geeignet, wenn das Normalenvektorfeld bereits anderweitig bekannt ist (wie z.B. bei der Sphäre, was wir gleich sehen werden).

Beobachtung

- Falls die Fläche F innerhalb einer Niveaufläche $N = g^{-1}(c)$ einer Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ liegt, so gilt $g(\Phi(x)) = c$ für alle $x \in \Omega$ und Ableiten dieser Gleichung liefert sofort

$$0 = \mathcal{D}(g \circ \Phi)(x) = \mathcal{D}g(\Phi(x))\mathcal{D}\Phi(x) = (\nabla g(\Phi(x)))^T \mathcal{D}\Phi(x) .$$

- Folglich steht $\nabla g(\Phi(x))$ senkrecht auf der Fläche F an der Stelle $\Phi(x)$ und eine Normale zu F mit Länge 1 kann man hieraus durch Normieren erhalten.

22.4.16 Beispiel: Das Vektorfeld $\vec{n}(x) = x$ ist ein Normalenvektorfeld für die Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, weil diese gerade die Niveaufläche $g^{-1}(1)$ der Funktion $g(x) = \|x\|^2$ mit Gradient $\nabla g(x) = 2x$ ist.

22.4.17 Anwendung:

- Wir sind an der Leistung interessiert, welche die Sonne auf die Erde strahlt.
- Dazu legen wir den Koordinatenursprung in den Erdmittelpunkt und nehmen an, dass die Einstrahlung durch die Intensität $\vec{I} = -I_0\vec{e}_1$ beschrieben wird.
- Der von der Sonne beschienene Teil F der Erdoberfläche kann dann durch

$$\Phi : \Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \begin{pmatrix}\varphi\\ \theta\end{pmatrix} \mapsto R \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ \sin(\varphi)\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

  parametrisiert werden, wobei R den Erdradius bezeichnet.
- Analog zur früheren Rechnung für $R = 1$ erhält man

$$\wedge(\mathcal{D}\Phi) = -R^2 \sin(\theta) \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ \sin(\varphi)\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

- Die absorbierte Leistung berechnet sich somit als

$$\begin{aligned} P = \int_F \vec{I}\cdot d\vec{F} &= \int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix}I_0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\sin(\theta)\\ *\\ *\end{pmatrix}\right\rangle R^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= I_0 \int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) R^2 \sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= I_0 \frac{\pi}{2}\cdot 2R^2 = I_0\pi R^2 \end{aligned}$$

- Dieses Produkt von Intensität und „Wirkungsquerschnitt“ ist natürlich auch gerade das Ergebnis, welches man erwarten würde.
- Um quantitative Aussagen zu erhalten, setzen wir $I_0 = 1366\,\mathrm{W/m^2} \cdot 0.4 \approx 500\,\mathrm{W/m^2}$ (Solarkonstante mal Reduktionsfaktor wegen Atmosphärenverlusten) und $R = 6.37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ ein, woraus sich eine Leistung von $7 \cdot 10^{16}\,\mathrm{W}$ ergibt. Dies ist etwa 4000-mal mehr als der augenblickliche Energieverbrauch der Menschheit.

22.4.7. Eigenschaften der Flächenintegrale

22.4.18 Bemerkung: Wie die Kurvenintegrale 1. und 2. Art sind auch die Flächenintegrale linear im Integranden und additiv im Integrationsbereich. Sie sind auch weitgehend unabhängig von der Wahl der Parametrisierung einer Menge $F \subset \mathbb{R}^3$, was wir im folgenden genauer ausführen.

Beobachtung Oft sind Hyperflächen nicht in parametrisierter Form $F = \Phi(\Omega)$ gegeben, sondern sind als Rand $F = \partial\Omega$ eines Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oder als Niveaumenge einer Funktion (z.B. $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$) spezifiziert.

Frage Machen für solchermaßen definierte Flächen die Größen $\int_F f \, dF$ bzw. $\int_F f \cdot d\vec{F}$ unabhängig von der Parametrisierung Sinn?

Antwort

- $\int_F f \, dF$ ist unabhängig von der Parametrisierung $F = \Phi(\Omega)$, sofern
  1. $\Phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.
  2. Φ ist außerhalb einer Nullmenge injektiv (sonst könnte die Menge F mehrfach überdeckt werden).
- $\int_F f \cdot d\vec{F}$ ist unter denselben Voraussetzungen bis auf das Vorzeichen wohldefiniert. Dieses Vorzeichen ist dann für alle Parametrisierungen gleich, für welche die Richtung des Normalenvektorfelds übereinstimmt.

Beweisidee Wenn $\Phi_1(\Omega_1) = F = \Phi_2(\Omega_2)$ mit $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, so kann man die Gleichheit

$$\int_{\Omega_1} f(\Phi_1(x)) \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi_1{}^T \mathcal{D}\Phi_1)} \, dx = \int_{\Omega_2} f(\Phi_2(\tilde{x})) \sqrt{\det(\mathcal{D}\Phi_2{}^T \mathcal{D}\Phi_2)} \, \mathrm{d}\tilde{x}$$

aus der Transformationsformel folgern (angewendet auf die „Kartenwechselabbildung“ $\Psi : \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : \Omega_1 \to \Omega_2$).

22.4.19 Bezeichnung: Die Vorgabe der Normalenrichtung einer Fläche nennt man auch Orientierung der Fläche.

22.5. Integralsätze

22.5.1. Motivation

- In Physik und Ingenieurwissenschaften treten oft Erhaltungssätze der folgenden Form auf

$$\int_\Omega \text{„Quellen-/Senkendichte“} \, dx = \int_{\partial\Omega} \text{„Flussdichte“} \cdot d\vec{F}$$

- Den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

$$\int_{[a,b]} f'(x) \, dx = f(b) - f(a)$$

kann man dabei als eine eindimensionale Variante dieses Prinzips wie folgt auffassen: f' ist eine Zuwachsdichte, welche über $\Omega = [a,b]$ integriert wird. Die Integration über den Rand $\partial\Omega = \{a,b\}$ entspricht einfach der Auswertung an den Randpunkten, wobei die „Orientierung“ das Vorzeichen $+1$ für b und -1 für a liefert.

- In diesem Abschnitt werden wir verwandte Sätze in höheren Dimensionen kennenlernen.

22.5.2. Der HDI im $\mathbb{R}^n$

22.5.1 Definition: (Äußere Normale) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (d.h. offen, beschränkt), für welches $\partial\Omega$ eine Hyperfläche ist. Ein Vektorfeld $\vec{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt äußeres Einheitsnormalenvektorfeld oder kurz äußere Normale, wenn es erstens ein Normalenvektorfeld für $\partial\Omega$ ist, zweitens für alle $x \in \partial\Omega$ gilt $\|\vec{n}(x)\| = 1$, und wenn es drittens für alle $x \in \partial\Omega$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

$$\{x + s\vec{n} \mid s \in]0,\varepsilon[\} \cap \Omega = \varnothing\,.$$

22.5.2 Beispiel: Das Vektorfeld $\vec{n}(x) = x$ ist die äußere Normale für den Rand der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

22.5.3 Satz: (HDI-Variante im $\mathbb{R}^n$, HDI-$\mathbb{R}^n$) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitze als Rand eine Fläche $\partial\Omega$, die durch die äußere Normale $\vec{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ orientiert ist. Ferner sei $\varphi \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. Dann gilt für $i = 1,\dots,n$

$$\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) n_i(x)\,dF\,,$$

wobei $n_i(x)$ die i-te Komponente der äußeren Normalen $\vec{n}(x)$ bezeichnet.

Beweisidee Wir nehmen an, dass $\varphi \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ zu $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann. Dann gilt (was man sich mit einer Skizze klarmachen kann)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)\,dx &= \int_\Omega \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}\,dx \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_\Omega \varphi(x+he_i)\,dx - \int_\Omega \varphi(x)\,dx\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\Omega+he_i} \varphi(x)\,dx - \int_\Omega \varphi(x)\,dx\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{(\Omega+he_i)\setminus\Omega} \varphi(x)\,dx - \int_{\Omega\setminus(\Omega+he_i)} \varphi(x)\,dx\right) \\
&= \int_{\partial\Omega} \varphi(x) n_i(x)\,dF\,.
\end{aligned}$$

22.5.4 Beispiel: Es gilt für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und beliebige $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\,dx = \int_\Omega \frac{\partial x_i}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} x_i n_i\,dF\,.$$

22.5.5 Beispiel: Wenn wir $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $\partial\Omega = S^1$ betrachten, so gilt bei Parametrisierung von $\partial\Omega$ durch $x(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} = n(t)$

$$\pi = \mathrm{vol}(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x_1 n_1 \, dF = \int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(t)\, dt = \pi\,.$$

22.5.3. Der Gaußsche Integralsatz

Beobachtung Meist treten partielle Ableitungen von Funktionen und Vektorfeldern in Kombinationen auf, die eine *koordinatenunabhängige* Bedeutung haben. Insbesondere sind dies der Gradient für Funktionen, sowie für Vektorfelder die Divergenz und Rotation.
Ein Beispiel für den Begriff „Koordinatenunabhängigkeit“ ist dabei etwa, dass der Satz „In Richtung des Gradienten wächst die Funktion“ im Gegensatz zu „in x_1-Richtung wächst die Funktion“ immer richtig ist.

22.5.6 Definition: (Divergenz) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann setzen wir:

$$\mathrm{div}\, f(x) := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \mathrm{Spur}\, \mathcal{D}f(x)\,.$$

Diese Größe nennt man Divergenz[¶] Formal schreibt man auch oft

$$\mathrm{div}\, f = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n\end{pmatrix} = \nabla \cdot f\,.$$

22.5.7 Satz: (Gaußscher Integralsatz) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitze als Rand eine Fläche $\partial\Omega$, die durch die äußere Normale $\vec{n} : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ orientiert ist. Ferner sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle f(x), \vec{n}(x)\rangle \, dF = \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot d\vec{F}\,.$$

Beweis Man wendet HDI-$\mathbb{R}^n$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\varphi = f_i$ an und summiert auf.

22.5.8 Übung: Umgekehrt folgt auch HDI-$\mathbb{R}^n$ sehr einfach aus dem Gaußschen Integralsatz. (Wie?)

22.5.9 Anwendung:

- Bei der Berechnung der auf die Erdoberfläche eingestrahlten Gesamtleistung der Sonnenstrahlung hatten wir ein sehr „einsichtiges“ Ergebnis erhalten (Leistung mal Wirkungsquerschnitt).
- Die dahinter liegende „Einsicht“ ist aber gerade die Anwendung des Gaußschen Satzes auf die Funktion $f(x) = \vec{I}$ und das Gebiet

  $$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \in [0, 2R], x_2^2 + x_3^2 \leqslant R^2\} \backslash B_R^3(0)$$

  (ein Zylinder aus dem auf einer Seite eine Kugel herausgeschnitten wird).

[¶] lat. Auseinanderstreben. Positive Divergenz bedeutet ein lokales Auseinanderstreben von Vektorpfeilen.

- Der Rand von Ω besteht dann nämlich aus den drei Flächenstücken E (Erdoberfläche), M (Zylindermantel) und K (äußere senkrecht zu $\vec{I}$ stehende Kreisscheibe).
- Weil $\vec{I}$ konstant ist, gilt natürlich $\operatorname{div} I = 0$ und somit

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div} \vec{I}\, dx = \int_E \vec{I} \cdot \vec{n}_E(x)\, dF + \int_M \vec{I} \cdot \vec{n}_M(x)\, dF + \int_K \vec{I} \cdot \vec{n}_K(x)\, dF$$

- Nun ist aber $\vec{I} \cdot \vec{n}_M = 0$, somit fällt dieser Term weg und es gilt

$$\int_E \vec{I} \cdot \vec{n}_E(x)\, dF = -\int_K \vec{I} \cdot \vec{n}_K(x)\, dF\,,$$

  wobei in beiden Fällen die äußere Normale verwendet werden muss.
- Das Integral auf der rechten Seite berechnet sich aber wegen

$$\vec{I} \cdot \vec{n}_K = \begin{pmatrix} -I_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -I_0$$

  sehr einfach zu $-\pi R^2 I_0$.
- Somit hat das gesuchte Integral den Wert $\pi R^2 I_0$.

22.5.4. Der Greensche Integralsatz

Beobachtung

- Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise differenzierbarem Rand $\partial\Omega$.
- Ferner sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ und $f^\perp = \begin{pmatrix} f_2 \\ -f_1 \end{pmatrix}$ das um 90 Grad im Uhrzeigersinn rotierte Feld.
- Der Gaußsche Integralsatz liefert dann

$$\int_\Omega \operatorname{div} f^\perp(x)\, \mathrm{d}(x_1, x_2) = \int_{\partial\Omega} \langle f^\perp(x), n(x) \rangle\, dF$$

- Nun gilt aber (nach Definition der 2-dimensionalen Rotation)

$$\operatorname{div} f^\perp(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) =: \operatorname{rot}_{2D} f(x)$$

- und

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \langle f^{\perp}(x), n(x)\rangle \, dF &= \int_{\partial\Omega} (f_2(x)n_1(x) - f_1(x)n_2(x)) \\ &= \int_{\gamma} f(x)\cdot\vec{ds}\,,\end{aligned}$$

  wobei γ eine Kurve ist, welche $\partial\Omega$ so parametrisiert, dass $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -n_2(x) \\ n_1(x) \end{pmatrix}$ an der Stelle $x = \gamma(t)$ (die Geschwindigkeit ist also gleich der um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Normale).

22.5.10 Folgerung: (Greenscher Integralsatz) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit stückweise differenzierbarem Rand $\partial\Omega$ und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \mathrm{rot}_{2D}\, f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\cdot\vec{ds}\,,$$

wobei $\partial\Omega$ so parametrisiert werden muss, dass das Gebiet Ω in Bewegungsrichtung „links“ liegt.

22.5.11 Bemerkungen:

- Der Satz von Green ist also eine „gedrehte“ Version des zweidimensionalen Satzes von Gauß.
- Man beachte, dass die Randkurve so durchlaufen werden muss, dass Ω auf der linken Seite liegt (ansonsten erhält man das falsche Vorzeichen).
- Man kann sich dies als eine „Rechte-Hand-Regel“ vorstellen, bei welcher der Daumen einer auf das Gebiet gestellten Hand in eine imaginäre x_3-Normale weist und die Finger dann die Umlaufrichtung der Randkurve angeben.

22.5.12 Beispiel: Sei wieder $\Omega = B_1(0)$ die Einheitskreisscheibe.

- Für $f(x) = x$ ist $\mathrm{rot}(f) = 0$ und $f(x)$ steht auch senkrecht auf jedem Tangentenvektor des Einheitskreises, so dass tatsächlich gilt

$$0 = \int_{\Omega} \underbrace{\mathrm{rot}_{2D}\, f(x)}_{=0}\, dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{f(x)\cdot\vec{ds}}_{=0} = 0\,.$$

- Für $f(x) = x^{\perp} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ ist $\mathrm{rot}(f) = 2$ und $f(x)$ ist an jedem Punkt genau gleich dem Tangentenvektor der Randparametriesierung $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, so dass auch hier gilt

$$2\pi = 2\,\mathrm{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} \mathrm{rot}_{2D}\, f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f(x)\cdot\vec{ds} = L(\partial\Omega) = 2\pi\,.$$

22.5.5. Der Satz von Stokes

Beobachtung Für eine zweidimensionale Fläche $F \subset \mathbb{R}^3$ macht der Satz von Green ebenfalls Sinn in folgender Form

$$\int_F \operatorname{rot} f(x) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial F} f(x) \cdot \vec{ds}\,.$$

Im Gegensatz zum Satz von Green ist die dreidimensionale Rotation $\operatorname{rot} f$ hier aber wieder ein Vektor und erst das Skalarprodukt mit dem Flächenelement $d\vec{F} = \vec{n}\, dF$ macht einen Skalar daraus.

22.5.13 Satz: (Stokes) Es sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine stückweise glatte Fläche. Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot} f(x) \cdot d\vec{F} = \int_{\partial F} f(x) \cdot \vec{ds}\,.$$

(Hierbei bezeichnet ∂F die Kurve, welche sich als Bild der Ränder der Parameterbereiche ergibt. Das Integral auf der linken Seite ist daher ein Flächenintegral, das auf der rechten Seite ein Kurvenintegral.)

Beweisidee Man benutzt die Parametrisierung von Flächenstücken der Form $F = \Phi(\Omega)$, um die Aussage des Satzes von Stokes für F und $f \in C^1(F, \mathbb{R}^3)$ in den Satz von Green für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ (die mit $\mathcal{D}\Phi^{-1}$ transformierte Tangentialkomponente von f) zu überführen.

22.5.14 Bemerkung: Wieder müssen die Parametrisierungen nach der „Rechte-Hand-Regel“ zueinander passen — sonst unterscheidet sich das Vorzeichen!

22.5.15 Beispiel:

- Wir betrachten in $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{x | x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ das Feld

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Es gilt $\operatorname{rot} f(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$.
- Sei nun F ein Flächenstück, dass durch differenzierbare Abbildung einer Kreisscheibe nach Ω entsteht (d.h. die z-Achse darf nicht getroffen werden).
- Dann gilt $\int_{\partial F} f \cdot \vec{ds} = 0$, d.h. für jede Kurve γ, die den Rand ∂F parametrisiert, gilt

$$\int_\gamma f \cdot \vec{ds} = \int_\gamma f \cdot \vec{ds} = 0\,.$$

22.5.16 Anwendung: Die Maxwell-Differentialgleichungen der Elektrodynamik ergeben sich aus physikalischen Beobachtungen, sowie den Sätzen von Gauß und Stokes:

- Ladungen sind die Quellen des elektrischen Flusses: Für ein beliebiges Volumen $V \subset \mathbb{R}^3$ gilt
$$\int_V \rho \, dx \overset{\text{Beobachtung}}{=} \int_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{F} \overset{\text{Gauss}}{=} \int_V \operatorname{div}(\vec{D}) \, dx$$
Durch Betrachtung von $V = B_r(x_0)$ mit beliebigem $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und kleinem $r > 0$ erhält man
$$\operatorname{div}(\vec{D})(x_0) = \rho(x_0) \, .$$

- Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ hat keine Quellen (es gibt keine magnetischen Ladungen)
$$\text{Für alle Volumen } V: \; 0 = \int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{F} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \, .$$

- Induktionsgesetz:
$$\text{Für alle Flächen } A: \; \int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{F} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \, .$$

- Durchflutungsgesetz: Elektrische Ströme oder Änderungen des elektrischen Flusses sind Quellen des magnetischen Felds
$$\text{Für alle Flächen } A: \; \int_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = -\int_A \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \cdot d\vec{F}$$
$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \, .$$

- Hinzu kommen noch materialabhängige Beziehungen der Form $D = D(E, \ldots)$ und $B = B(H, \ldots)$.

- Auch muss die Ladungserhaltungsgleichung gelten:
$$\forall V: \; \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx + \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \, .$$

22.5.17 Bemerkung: Die Maxwellschen Differentialgleichungen sind ein System partieller Differentialgleichungen. Es werden insgesamt 12 Funktionen gesucht, welche von Ort und Zeit abhängen, und die Beziehungen zwischen ihnen beinhalten partielle Ableitungen nach Ort und Zeit.

22.5.6. Ausblick: Differentialformen

- Es gibt eine mathematische Theorie, die den Hauptsatz der Differentialrechnung, sowie die Sätze von Gauß und Stokes als Spezialfälle enthält.

- Wir wollen diese Theorie im für die Anwendungen wichtigsten Fall des $\mathbb{R}^3$ kurz skizzieren, vor allem, weil man sich etliche Beziehungen in dieser Kurzform sehr gut merken kann.
- Diese Theorie betrachtet Funktionen (Potentiale), Vektorfelder (Kräfte), Flüsse und Dichten als Objekte in Vektorräumen Λ^k für $k = 0, 1, 2, 3$ („alternierende k-Differentialformen“).
- Objekte in Λ^k sind insbesondere dadurch charakterisiert, dass sie über k-dimensionale geometrische Objekte integriert werden können, nämlich
  - Funktionen über Punkte durch Auswertung,
  - Vektorfelder über Kurven mit dem Kurvenintegral 2. Art
  - Flüsse (die man auch durch Vektorfelder beschreiben kann) mit dem Flächenintegral 2. Art
  - und Dichten über räumliche Gebiete mittels räumlicher Integration.
- Es gibt zwischen diesen Räumen einen „Ableitungsoperator“ (sog. äußere Ableitung)
$$d : \Lambda^k \to \Lambda^{k+1} .$$
Dieser entspricht für $k = 0$ dem Gradienten, für $k = 1$ der Rotation und für $k = 2$ der Divergenz, d.h.
$$\Lambda^0 \xrightarrow[\text{grad}]{d} \Lambda^1 \xrightarrow[\text{rot}]{d} \Lambda^2 \xrightarrow[\text{div}]{d} \Lambda^3$$
- Wenn man d zweimal hintereinander anwendet, kommt 0 heraus, d.h. $\operatorname{rot}\operatorname{grad}(\varphi) = 0$ und $\operatorname{div}\operatorname{rot}(f) = 0$.
- Der allgemeine Satz von Stokes lautet dann in diesem Formalismus einfach
$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega ,$$
wobei S ein $k+1$-dimensionaler Bereich und $\omega \in \Lambda^k$ ist.
- Er beinhaltet den HDI, sowie die Sätze von Gauß, Green und Stokes als Spezialfälle.

23. Funktionentheorie

- In diesem Kapitel wollen wir Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Definitions- und Wertebereich $\mathbb{C}$ genauer betrachten.
- Es wird sich dabei herausstellen, dass die Forderung nach komplexer Differenzierbarkeit äußerst einschränkend ist: Im wesentlichen sind nur komplexe Potenzreihen möglich!
- Für diese eingeschränkte Funktionenklasse gelten dann auch sehr starke Aussagen, was zu einer mathematisch sehr schönen und abgeschlossenen Theorie führt.
- Diese nennt man oft einfach „Funktionentheorie“.

23.1. Einführung

23.1.1. Erinnerung

- Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat die Form $z = x + y\boldsymbol{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
- $x = \mathfrak{Re}(z) \in \mathbb{R}$ nennt man Realteil, $y = \mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{R}$ Imaginärteil von $z = x + y\boldsymbol{i}$.
- $\mathbb{C}$ ist ein Körper: Man kann genau wie in $\mathbb{R}$ addieren, multiplizieren und dividieren. Dabei gilt $\boldsymbol{i}^2 = -1$.
- Man kann allerdings die Ordnungsoperationen $<$, $\leqslant$, ... nicht für alle komplexen Zahlen definieren, wenigstens nicht so, dass aus $\mathbb{R}$ bekannte Rechenregeln (wie etwa $0 < x^2$) erhalten bleiben.
- $\overline{z} = x - y\boldsymbol{i}$ bezeichnet die zu $z = x + y\boldsymbol{i}$ konjugiert komplexe Zahl.
- $z\overline{z} = x^2 + y^2$ liefert die Größe $|z|^2$ (das Quadrat des Absolutbetrags einer komplexen Zahl).
- Es gilt auch
$$\mathfrak{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathfrak{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\boldsymbol{i}}.$$
- $\mathbb{C}$ kann mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung
$$\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad z = x + y\boldsymbol{i} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z) \\ \mathfrak{Im}(z) \end{pmatrix}$$

mit der Inversen

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}\,, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto z = x + y\boldsymbol{i}\,.$$

Diese Vorstellung von $\mathbb{C}$ als zweidimensionale reelle Ebene nennt man auch Gaußsche Zahlenebene.

- Teilmengen $G \subset \mathbb{C}$ entsprechen eineindeutig Teilmengen $\tilde{G} = \Phi(G) \subset \mathbb{R}^2$. Beispielsweise entsprechen die reellen Zahlen $\{z \mid \mathfrak{Im}(z) = 0\}$ gerade der x-Achse in der Gaußschen Zahlenebene.
- Auch Operationen auf $\mathbb{C}$ entsprechen oft uns schon bekannten Abbildungen des $\mathbb{R}^2$. Zum Beispiel:
  - Der Absolutbetrag $|z|$ von $z \in \mathbb{C}$ ist die Euklidische Norm $\|\Phi(z)\|_2$.
  - Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.
- Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ hat keine Entsprechung im $\mathbb{R}^2$, obwohl man so etwas natürlich definieren könnte als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{\text{in } \mathbb{R}^2 \text{ wie } \mathbb{C}}{\cdot} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix}\,.$$

- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann zu $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erweitert werden, so dass insbesondere die Rechenregel $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ $(e^{z+w} = e^z e^w)$ weiter gilt. (Dies ist klar, weil die Definition ja mit Hilfe der in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gleichermaßen gültigen Potenzreihe geschieht.)
- Es gilt die Eulersche Formel

$$\exp(x + y\boldsymbol{i}) = e^{x+y\boldsymbol{i}} = e^x\,(\cos y + \boldsymbol{i}\sin y)\,.$$

Insbesondere gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{\boldsymbol{i}\varphi} = \cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi\,,$$

woraus für $\varphi = \pi$ folgt

$$e^{\boldsymbol{i}\pi} + 1 = 0$$

- $z = e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ hat für $\varphi \in \mathbb{R}$ wegen

$$z\overline{z} = e^{\boldsymbol{i}\varphi}e^{-\boldsymbol{i}\varphi} = e^0 = 1$$

immer den Betrag 1, liegt also auf dem Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene.

- Jede komplexe Zahl kann man darstellen als

$$z = re^{\boldsymbol{i}\varphi}\,, \quad r \in \mathbb{R}_0^+, \varphi \in \mathbb{R}\,.$$

Hierbei ist $r = |z|$ der Betrag von z. $\varphi = \arg(z)$ nennt man das Argument von z. Es ist bis auf die Addition eines ganzzahligen Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt.

- Hieraus sieht man auch die geometrische Bedeutung der Multiplikation: Wenn $z_1 = r_1 e^{\boldsymbol{i}\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{\boldsymbol{i}\varphi_2}$, so gilt $z_1 z_2 = (r_1 r_2)e^{\boldsymbol{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$, d.h. die Beträge multiplizieren sich und die Argumente addieren sich.

23.1.2. Abbildungen in $\mathbb{C}$

Erinnerung $\mathbb{C}$ kann mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden mit Hilfe der bijektiven Abbildung

$$\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad z = x + y\boldsymbol{i} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(z) \\ \mathfrak{Im}(z) \end{pmatrix}$$

Beobachtung Jede Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht eineindeutig einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mittels $\tilde{f} := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ und umgekehrt $f = \Phi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \Phi$. Manchmal stellt man dies durch ein sogenanntes kommutatives Diagramm dar:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \Phi \downarrow\uparrow \Phi^{-1} & & \Phi \downarrow\uparrow \Phi^{-1} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

„Kommutativ“ heißt hier, dass man immer dasselbe Ergebnis herausbekommt, wenn man den Pfeilen folgt ($\Phi \circ f = \tilde{f} \circ \Phi$ und $f \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \circ \tilde{f}$)*.

23.1.1 Bezeichnung: Wir bezeichnen die zu $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gehörende Funktion $\tilde{f} := \Phi \circ f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auch mit $\Phi(f)$.

23.1.2 Beispiel:

$$f(z) = \exp(z) \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix} .$$

23.1.3 Bemerkung: Recht oft ist $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ implizit durch die Art der Definition von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben: Aus

$$f(x + y\boldsymbol{i}) = u(x, y) + v(x, y)\boldsymbol{i} ,$$

ersieht man nämlich sofort

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} .$$

23.1.4 Bemerkung:

- Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entspricht also genau einer Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Ihr Graph ist daher im (reell) vierdimensionalen Raum enthalten, wofür uns Menschen leider die Anschauung weitgehend fehlt.
- Daher behilft man sich oft durch Betrachtung der Abbildungen

  $$|f|, \mathfrak{Re}(f), \mathfrak{Im}(f) : \quad \mathbb{C} \to \mathbb{R} ,$$

  deren Graphen man sich als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ vorstellen kann.

*Man beachte, dass $f \circ g$ bedeutet: Zuerst g anwenden, dann f!

23.1.3. Stetigkeit

Beobachtung Die Abbildung $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ ist eine Isometrie, d.h.

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\| = |v - w|\,, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}\,.$$

Deswegen entsprechen konvergente Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergenten Folgen $(\tilde{z}_n = \Phi(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$ und umgekehrt. Hieraus kann man sofort folgern, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann stetig ist, wenn $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig ist. $\tilde{f}$ ist aber genau dann stetig, wenn ihre beiden Komponenten (die dem Real- und Imaginärteil von f entsprechen) stetig sind.

23.1.4. Differenzierbarkeit

23.1.5 Definition: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$. Dann heißt f komplex differenzierbar in $z_* \in G$, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$a = \lim_{z \to z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}\,. \tag{*}$$

Dieses a bezeichnet man mit $f'(z_*)$. (Hierbei bedeutet die rechte Seite analog zum reellen Fall, dass dasselbe $a \in \mathbb{C}$ für beliebige Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_* \neq z_n \to z_*$ herauskommt.) f heißt komplex differenzierbar oder holomorph, wenn es komplex differenzierbar in allen Punkten $z_* \in G$ ist.

Beobachtung Äquivalent zu $(*)$ ist die Forderung, dass es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$f(z) - f(z_*) = a(z - z_*) + o(|z - z_*|)\,.$$

Dies bedeutet offenbar, dass f in z_* durch die komplex-lineare Funktion $f(z_*) + a(z - z_*)$ gut approximiert wird.

Beispiele Folgende Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomorph:

- Konstante Funktionen $f(z) = a \in \mathbb{C}$,
- Lineare Funktionen $f(z) = az$ für $a \in \mathbb{C}$,
- Monome $f(z) = z^k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ (Beweis wie in $\mathbb{R}$),
- Komplexe Polynome $f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$ für $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{C}$.
- Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ innerhalb ihres Konvergenzkreises $\{z \mid |z - z_0| < R\}$ mit $R = (\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$.

(Die Ableitungen sehen dabei genauso aus wie im Reellen.)

23.1.6 Bemerkung: Die Aussage für Polynome folgt, weil man Summen- und Produktregel der Differentiation analog zum Reellen zeigen kann, d.h.

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= f'(z)+g'(z)\,,\\ (fg)(z) &= f'(z)g(z)+f(z)g'(z)\,.\end{aligned}$$

Auch die Quotientenregel

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$$

und die Kettenregel

$$(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$$

kann man ganz analog beweisen, so dass auch die Verkettung und der Quotient holomorpher Funktionen wieder holomorph sind (letzterer außerhalb der Nullstellen des Nenners). Die Differenzierbarkeit von Potenzreihen beweist man auch analog zum reellen Fall.

Frage Welche Beziehung hat die komplexe Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zur reellen Differenzierbarkeit von $\tilde{f} = \Phi(f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Antwort Die Abbildung $l_a : z \mapsto az$ entspricht in $\mathbb{R}^2$ der Abbildung

$$\Phi(l_a) : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a_1x_1-a_2x_2\\a_1x_2+a_2x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1 & -a_2\\ a_2 & a_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\,.$$

Diese 2×2-Matrix hat offenbar eine ganz spezielle Form. Die zugehörige lineare Abbildung $\Phi(l_a)$ entspricht einer Drehstreckung, welche um den Winkel $\arg(a)$ dreht und um den Faktor $|a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$ streckt. (Man vergleiche mit der geometrischen Interpretation der komplexen Multiplikation!)

23.1.7 Folgerung: Die Abbildung

$$f : G \to \mathbb{C}\,, \quad f(x+y\boldsymbol{i}) = u(x,y)+v(x,y)\boldsymbol{i}$$

ist genau dann holomorph, wenn für die Jacobi-Matrix $\mathcal{D}\tilde{f}$ der Abbildung

$$\tilde{f} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}u(x,y)\\v(x,y)\end{pmatrix}$$

gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Diese Gleichungen nennt man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Beispiele

- Die Konjugation
$$f : z = x + y\boldsymbol{i} \mapsto x - y\boldsymbol{i} = \overline{z}$$
ist nicht holomorph, weil die erste Cauchy-Riemannschen Differentialgleichung
$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial(-y)}{\partial y}$$
nicht erfüllt ist.
- Gleiches gilt für die reellwertigen Funktionen $\mathfrak{Re}$, $\mathfrak{Im}$ oder den Absolutbetrag, wenn man sie als Funktionen mit Bild in $\mathbb{C}$ auffasst (also mit Imaginärteil 0).
- Die durch $f(x + y\boldsymbol{i}) = x^2 - y^2 + 2xy\boldsymbol{i}$ definierte Funktion ist wegen
$$\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} = 2x = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial(2xy)}{\partial x}$$
holomorph in $\mathbb{C}$. (FRAGE: Wie kann man f einfacher schreiben?)

23.1.8 Übung: Ist die Funktion
$$f(z) = (\mathfrak{Re}(z))^2 + \mathfrak{Im}(z)\boldsymbol{i}$$
holomorph?

23.1.9 Definition: Eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$ (oder $G \subset \mathbb{R}^2$) nennen wir Gebiet, wenn sie zusammenhängend ist, d.h. zwei beliebige Punkte $x, y \in G$ können durch eine stetige Kurve miteinander verbunden werden.

Beobachtung Es sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann bestimmen sich der Realteil $\mathfrak{Re}(f) : G \to \mathbb{R}$ und der Imaginärteil $\mathfrak{Im}(f) : G \to \mathbb{R}$ gegenseitig bis auf additive (reelle) Konstanten.

Beweis Wir schreiben $f(x+y\boldsymbol{i}) = u(x, y)+v(x, y)\boldsymbol{i}$. Wegen der CR-Differentialgleichungen gilt für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{G} = \Phi(G)$
$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = (\nabla v)^{\perp}$$
Folglich legt eine Vorgabe von u (und damit ∇u) auch den Gradienten ∇v fest. Weil $\tilde{G} \subset \mathbb{R}^2$ aber auch zusammenhängend ist, ist jede Funktion durch ihren Gradienten bis auf eine additive Konstante bestimmt (man definiere sie durch Integration des Gradienten ausgehend von einem festen Punkt).

23.1.10 Bemerkung:
- Wir werden bald sehen, dass die Forderung nach einfacher komplexer Differenzierbarkeit $f \in C^1(G, \mathbb{C})$ sofort die vollkommene Glattheit $f \in C^\infty(G, \mathbb{C})$ beinhaltet.

- Hieraus folgt auch $\tilde{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Wir dürfen daher die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen[†] $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$ nochmals nach x und y differenzieren, was (geeignet zusammengefasst) für u und v folgende Gleichungen liefert

$$\Delta u = 0 \text{ und } \Delta v = 0 \quad \text{wobei } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- Den Differentialoperator Δ nennt man Laplace-Operator. Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche die sogenannte Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, nennt man harmonisch.

- Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion sind daher (betrachtet als Funktionen auf $\mathbb{R}^2$) immer harmonisch.

- Umgekehrt ist $\Delta u = 0$ gerade die Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot}(\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}) = 0$ für das Vektorfeld $f = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix}$, welches daher *in einem einfach zusammenhängenden Gebiet* ein Gradient einer Funktion v ist. Für dieses v ist dann $f(x + y\boldsymbol{i}) = u(x, y) + \boldsymbol{i}v(x, y)$ holomorph.

23.2. Komplexe Kurvenintegrale

23.2.1 Definition: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. $C^1_{\text{stw}}([a, b], G)$ sei die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $\gamma : [a, b] \to G$, d.h. $\gamma \in C^0([a, b], G)$ und es gibt eine Unterteilung $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ von $[a, b]$, so dass für $i = 1, \ldots, n$ gilt $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \in C^1([t_{i-1}, t_i], G)$. γ heißt geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$. γ heißt doppelpunktfrei, wenn es (ausgenommen von den Endpunkten im Falle geschlossener Kurven) injektiv ist.

23.2.2 Bemerkung: Der Definitionsbereich von γ ist ein reelles Intervall und keine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$! Diese Differenzierbarkeit von γ hat daher nichts mit Holomorphie und komplexer Differenzierbarkeit zu tun, sondern die hier definierten Kurven in $\mathbb{C}$ entsprechen genau den schon bekannten stückweise differenzierbaren Kurven im $\mathbb{R}^2$!

Erinnerung (Komplexwertige Integration über ein Intervall) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann hatten wir definiert

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b \mathfrak{Re}(f)(t)\, dt + \boldsymbol{i} \int_a^b \mathfrak{Im}(f)(t)\, dt\,.$$

23.2.3 Beispiel:

$$\int_a^b (t + t^2\boldsymbol{i})\, dt = \int_a^b t\, dt + \boldsymbol{i} \int_a^b t^2\, dt = \frac{b^2 - a^2}{2} + \boldsymbol{i}\frac{b^3 - a^3}{3}\,.$$

[†]Wir kürzen hier partielle Ableitungen nach x und y durch entsprechende Subskripte ab.

23.2.4 Definition: (Komplexes Kurvenintegral) Es sei $G \subset \mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a,b], G)$. Dann definieren wir das komplexe Kurvenintegral als

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \overset{\mathbb{C}}{\cdot} \gamma'(t)\, dt\,.$$

Im Integranden wird dabei einfach komplex multipliziert.

23.2.5 Bemerkung: Wie für das Kurvenintegral 1. und 2. Art im $\mathbb{R}^n$ gilt auch hier, dass das komplexe Kurvenintegral linear im Integranden ist und additiv, wenn die Kurve aus mehreren Stücken besteht. Und wie das Kurvenintegral 2. Art ist es auch invariant unter (orientierungserhaltenden) Umparametrisierungen von γ und wechselt das Vorzeichen, wenn die Orientierung umgekehrt wird (z.B. mittels $\tilde\gamma(t) = \gamma(b - t + a)$). Wenn $|f(z)| \leqslant C$ für alle $z \in G$, so gilt die Abschätzung

$$|\int_\gamma f(z)\, dz| = |\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt| \leqslant C \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\, dz}_{=:L(\gamma)} = CL(\gamma)\,,$$

wobei $L(\gamma)$ wieder die Länge von γ bezeichnet.

23.2.6 Beispiel: Das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

für $f(z) = z^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto e^{\boldsymbol{i}t}$$

berechnet man als

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} e^{\boldsymbol{i}kt}\boldsymbol{i}e^{\boldsymbol{i}t}\, dt = \boldsymbol{i}\int_0^{2\pi} e^{\boldsymbol{i}(k+1)t}\, dt = \begin{cases} 0 & k \neq -1 \\ 2\pi\boldsymbol{i} & k = -1 \end{cases}.$$

23.2.1. Homotopie von Kurven

23.2.7 Motivation: Wir werden sehen, dass die genaue Art des Weges von einem Anfangspunkt p zu einem Endpunkt q für komplexe Kurvenintegrale über holomorphe Funktionen oft unwesentlich ist—ganz analog zu Kurvenintegralen 2. Art $\int_\gamma f(x)\, \vec{ds}$, wenn $\operatorname{rot}(f) = 0$ (oder noch einfacher, wenn $f = \nabla\varphi$ für ein Potential φ).
Im folgenden werden wir Kurvenklassen einführen, für die solche Integrale gleich sind.

23.2.8 Definition: (Homotopie bei festem Anfangs- und Endpunkt)

- Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{\text{stw}}([a,b], G)$ seien Kurven in G, welche denselben Anfangspunkt p und Endpunkt q haben, d.h. $p = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ und $q = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$.

- Dann nennen wir γ_1 homotop zu γ_2 (geschrieben: $\gamma_1 \sim \gamma_2$), wenn γ_1 in stetiger Weise *innerhalb von* G in γ_2 deformiert werden kann, wobei die Endpunkte festgehalten werden.

- Mathematisch exakt fordert man hierfür die Existenz einer Homotopie $H \in C^0([a,b] \times [0,1], G)$ mit

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_1(t) & t &\in [a,b]\,, \\ H(t,1) &= \gamma_2(t) & t &\in [a,b]\,, \\ H(a,s) &= p & s &\in [0,1]\,, \\ H(b,s) &= q & s &\in [0,1]\,. \end{aligned}$$

  (Man zeichne sich hierzu ein Bild!)

23.2.9 Bemerkung: Man beachte, dass H nur in das erlaubte Gebiet G abbilden darf, und die Art der Homotopie daher von G abhängt. Genauer sollte man daher eigentlich sagen: γ_1 ist homotop zu γ_2 in G, und entsprechend abkürzend schreiben $\gamma_1 \overset{G}{\sim} \gamma_2$.

23.2.10 Beispiel: Die Kurven

$$\gamma_1 : [-1,1] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto t$$

und

$$\gamma_2 : [-1,1] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto \exp(\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}(-1+t))$$

sind homotop (in $\mathbb{C}$).
Eine mögliche Homotopie wäre etwa

$$H(t,s) = (1-s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t) = (1-s)t + s\exp(\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}(-1+t))$$

23.2.11 Definition: (Homotopie geschlossener Kurven)

- Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{\text{stw}}([a,b], G)$ seien geschlossene Kurven in G.

- Dann nennen wir γ_1 homotop zu γ_2 (geschrieben wieder: $\gamma_1 \sim \gamma_2$), wenn γ_1 in stetiger Weise *innerhalb von* G in γ_2 deformiert werden kann.

- Mathematisch exakt fordert man hierfür die Existenz einer Homotopie $H \in C^0([a,b] \times [0,1], G)$ mit

$$\begin{aligned} H(t,0) &= \gamma_1(t) & t &\in [a,b]\,, \\ H(t,1) &= \gamma_2(t) & t &\in [a,b]\,, \\ H(a,s) &= H(b,s) & s &\in [0,1]\,. \end{aligned}$$

  (Machen Sie sich auch hierzu ein Bild!)

23.2.12 Beispiel: Für $G = \mathbb{C}$ und $z_* \in \mathbb{C}$ sind die Kurven

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to G\,, \quad t \mapsto e^{\boldsymbol{i}t}$$

und

$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto z_*$$

homotop in G. Eine mögliche Homotopie wäre etwa

$$H(t, s) = (1 - s)\gamma_1(t) + s\gamma_2(t) = (1 - s)e^{\boldsymbol{i}t} + sz_*\,.$$

In $\tilde{G} := \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ließe sich dieselbe Kurve aber nicht stetig auf einen Punkt $z_* \in \tilde{G}$ zusammenziehen.

23.2.13 Definition: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a, b], G)$ sei eine geschlossene Kurve in G. γ heißt zusammenziehbar oder nullhomotop, wenn es homotop zu einer konstanten Kurve $\gamma(t) = z_* \in G$ ist.

23.2.14 Definition: Ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ (Gebiet=offen und zusammenhängend) heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve nullhomotop ist.

23.2.15 Beispiel: Die Gebiete $G_1 = \mathbb{C}$ oder $G_2 = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ sind einfach zusammenhängend, das Gebiet $G_3 = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ nicht (weil man den Einheitskreis in G_3 nicht stetig auf einen Punkt hin zusammenziehen kann).

23.2.2. Kurvenintegrale und Homotopie von Kurven

23.2.16 Satz: Es sei G ein Gebiet und $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1_{\text{stw}}([a, b], G)$ zwei homotope Wege (entweder als geschlossene Kurven oder mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt). Für jedes holomorphe $f : G \to \mathbb{C}$ gilt dann

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Beweisskizze

- Am einfachsten sieht man dies, wenn γ_1 und γ_2 zusammen den Rand eines Gebietes $D \subset \mathbb{C}$ bilden[‡] (was in der Praxis auch oft der Fall ist).
- Hier betrachtet man die zu $\overline{f}$ assoziierte Funktion

$$F = \Phi(\overline{f}) : \tilde{D} \to \mathbb{R}^2\,, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \Phi(\overline{f}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{Re}(f(x + y\boldsymbol{i})) \\ -\mathfrak{Im}(f(x + y\boldsymbol{i})) \end{pmatrix}\,.$$

- Die Holomorphie von f liefert dann gerade die Bedingungen $\mathrm{rot}(F) = 0$ und $\mathrm{div}(F) = 0$ und Real- bzw. Imaginärteil des komplexen Kurvenintegrals entsprechen gerade den in Gauss und Green auftretenden Kurvenintegralen für F.

[‡]D.h. ∂D wird durch $\gamma_1 \oplus (-\gamma_2)$ parametrisiert.

- Der Beweis für den allgemeinen Fall ist technisch aufwendiger und kann zum Beispiel durch stückweise lineare Approximation der Homotopieabbildung $H : \gamma_1 \sim \gamma_2$ oder durch Transformation mit H geschehen (der Definitionsbereich von H ist ja ein einfaches Quadrat im $\mathbb{R}^2$, auf das die Sätze von Gauß und Green angewendet werden können).

23.2.17 Folgerung: (Cauchy) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a,b], G)$ eine geschlossene und (in G!) auf einen Punkt $z_* \in G$ zusammenziehbare Kurve und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

Beweis Wenn $\tilde{\gamma}(t) = z_*$ der konstante Weg ist, so folgt sofort

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\, dz = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t)) \underbrace{\tilde{\gamma}'(t)}_{=0}\, dt = 0\,.$$

23.2.18 Folgerung: (Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $\gamma \in C^1_{\text{stw}}([a,b], G)$ und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann hängt das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

nur von den Endpunkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab.

Beweis Aus zwei Wegen γ_1 und γ_2 von $p = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ nach $q = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ kann man einen geschlossenen Weg als $\gamma_{\text{ges}} = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ bilden (zuerst läuft man γ_1 entlang von p nach q, dann $-\gamma_2$ entlang zurück nach p). Für diesen gilt aber

$$0 = \int_{\gamma_{\text{ges}}} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_2} f(z)\, dz\,.$$

23.2.19 Anwendungen:

- Für $f(z) = \exp(\sin(\exp(z)))$ und

  $$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto 5\sin(t) t^4 e^{it}$$

  gilt

  $$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

  GRUND: f ist holomorph in $\mathbb{C}$ und γ ist geschlossen und zusammenziehbar in $\mathbb{C}$.

- Für

  $$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto (2 + \sin(t)) e^{it}$$

ist

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi \boldsymbol{i}\,.$$

GRUND: Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ ist holomorph im Gebiet $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und die Kurve γ ist homotop in G zu $\tilde{\gamma}(t) = e^{it}$, für welche wir den Wert des Integrals schon berechnet haben.

23.2.20 Bemerkungen:

- Die Aussagen dieses Abschnitts gelten analog auch für Kurvenintegrale über rotationsfreie Strömungen im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^n$ (bei geeigneter Definition der Rotation).
- Dies ist etwas allgemeiner als der Fall von Gradientenfeldern $f = \nabla\varphi$ im $\mathbb{R}^n$, für welche die Aussagen der obigen Sätze offensichtlich sind.

23.2.3. Stammfunktionen: Der HDI in $\mathbb{C}$

23.2.21 Definition: $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann heißt $F : G \to \mathbb{C}$ Stammfunktion von f, falls $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

23.2.22 Satz: Wenn $f : G \to \mathbb{C}$ die Stammfunktion $F : G \to \mathbb{C}$ besitzt, so kann man das Kurvenintegral von f über $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ berechnen als

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Beweis Dies folgt sofort aus der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))\,dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.\end{aligned}$$

Alternativ könnte man es aus dem HDI im $\mathbb{R}^2$ angewandt auf Real- und Imaginärteil von f folgern.

23.2.23 Satz: (Existenz von Potential/Stammfunktion) Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ besitzt jede holomorphe Funktion eine (bis auf eine Konstante bestimmte) holomorphe Stammfunktion F. Diese kann man durch geeignete Integration längs Kurven berechnen.

Beweisidee Man setzt für ein beliebiges $z_* \in G$ und $c \in \mathbb{C}$

$$F(z) = \begin{cases} c & z = z_* \\ \int_{\gamma_{z \leftarrow z_*}} f(z)\,dz & \text{sonst} \end{cases}.$$

Hierbei ist $\gamma_{z\leftarrow z_*}$ eine frei wählbare z und z_* verbindende Kurve (das Integral ist ja unabhängig von der genauen Kurve!).
Die Holomorphie dieser Funktion F zu zeigen ist aufwendiger, folgt allerdings einfach aus der lokalen Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen, die wir im nächsten Abschnitt erhalten werden.

23.2.24 Bemerkung:

- Wenn G nicht einfach zusammenhängend ist, kann ein holomorphes f eine auf ganz G definierte Stammfunktion besitzen, muss es aber nicht.
- Beispiele für diese Situationen sind $G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und die Funktionen $f(z) = \frac{1}{z^2}$ (welche die Stammfunktion $F(z) = -\frac{1}{z}$ hat) bzw. $f(z) = \frac{1}{z}$ (welches keine in ganz G definierte Stammfunktion haben kann, weil $\int_{\partial B_1(0)} f(z)\,dz = 2\pi\boldsymbol{i} \neq 0$).
- Eingeschränkt auf das einfach zusammenhängenden Gebiet $\tilde{G} := \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ (statt nur des Nullpunkts nimmt man die ganze negative reelle Achse aus $\mathbb{C}$ heraus), besitzt aber auch $\frac{1}{z}$ die (bis auf Addition einer Konstanten $C \in \mathbb{C}$ eindeutige) Stammfunktion

$$\log : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}\,, \quad \log(z) := \ln(|z|) + \boldsymbol{i}\arg(z)\,.$$

- Diese nennt man den komplexen Logarithmus.

23.3. Potenzreihendarstellung holomorpher Funktionen

23.3.1 Satz: Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. $B_R(z_*)$ sei eine zusammen mit ihrem Rand in G enthaltene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_* und Radius R. Dann gilt für alle $z \in B_R(z_*)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\boldsymbol{i}} \int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\,.$$

Hierbei soll die Kreislinie wieder so parametrisiert werden, dass das Kreisinnere links liegt, also z.B. als $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_* + Re^{\boldsymbol{i}t}$.

Beweis Die $\partial B_R(z_*)$ parametrisierende Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ ist homotop in $G\backslash\{z\}$ zu jeder der Kurven

$$\gamma_\varepsilon : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \quad t \mapsto z + \varepsilon e^{\boldsymbol{i}t} \text{ für } \varepsilon > 0\,.$$

Daher gilt aber

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \\
&= \underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \underbrace{\frac{f(w)-f(z)}{w-z}}_{\text{beschränkt}}\,dw}_{\to 0} + f(z) \underbrace{\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{w-z}\,dw}_{=2\pi\boldsymbol{i}}
\end{aligned}$$

23.3.2 Folgerung: Die holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ besitzt in jeder ganz in G enthaltenen Kreisscheibe $B_R(z_*) \subset G$ eine (eindeutige) Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_*)^k \,,$$

deren Koeffizienten man berechnen kann mittels

$$c_k := \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{(w - z_*)^{k+1}}\, dw \qquad (k \in \mathbb{N}_0) \,.$$

Beweis Es gilt nach dem vorhergehenden Satz

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{w - z_* - (z - z_*)}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{\partial B_R(z_*)} \frac{f(w)}{w - z_*} \, \frac{1}{1 - \frac{z - z_*}{w - z*}}\, dw \end{aligned}$$

Nun gilt für $q = \frac{z - z_*}{w - z_*}$ die Abschätzung $|q| = \frac{|z - z_*|}{R} < 1$, so dass Einsetzen der geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_*}{w - z*}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_*}{w - z*} \right)^k$$

die Behauptung liefert.

23.3.3 Bemerkungen:

- Der Konvergenzkreis dieser lokalen Potenzreihe um $z_* \in G$ erstreckt sich offenbar mindestens bis zum Rand von G. Er erstreckt sich sogar genau bis zum Rand von G, wenn G maximal groß gewählt wurde.
- Weil man jede Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzkreises unendlich oft differenzieren kann, ist auch jede holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar.
- Dies ist zwar einerseits schön, schränkt aber andererseits die möglichen Funktionen erheblich ein. Definitionen wie

  $$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

  lassen sich nicht sinnvoll ins Komplexe übertragen!
- Unter Zuhilfenahme der Ableitungen von f kann man die lokale Potenzreihe um z_* auch einfach als Taylorentwicklung von f um z_* erhalten:

  $$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_*)}{k!} (z - z_*)^k \,.$$

- Im Gegensatz zu unendlich oft reell differenzierbaren Funktionen $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ hat die Taylorreihe $T_{f,z_*,\infty}(z)$ im Falle holomorpher Funktionen für alle $z_* \in G$ einen positiven Konvergenzradius!

Beispiele

- Um $z_* = 0$ besitzt die Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{1\} \to \mathbb{C}\,, \quad f(z) = \frac{1}{1-z}$$

die Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$. Der Konvergenzradius ist 1 und damit genau gleich dem Abstand von z_* zum Punkt 1.

- Um $z_* = -1$ besitzt dasselbe f die Potenzreihendarstellung

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1/2}{1-\frac{z+1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}(z+1)^k$$

mit Konvergenzkreis $B_2(-1)$. Dieser erstreckt sich offenbar wieder genau bis zur Undefiniertheitsstelle von f im Punkt 1.

23.3.4 Bemerkung: Aus der lokalen Potenzreihendarstellung folgen einige interessante Aussagen, welche die Besonderheit holomorpher Funktionen nochmals betonen.
Sei dazu $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

- Falls $\mathfrak{Re}(f)$ oder $\mathfrak{Im}(f)$ ein inneres Maximum oder Minimum $z_* \in G$ besitzen, so ist f konstant.
- Falls $|f|$ in G ein inneres Maximum oder ein inneres *positives* (!) Minimum $z_* \in G$ besitzt, so ist f konstant.

Beide Aussagen sieht man leicht aus der Potenzreihenentwicklung, weil ein nichtkonstantes f nahe z_* durch ein Polynom der Form $p(z) = a + b(z - z_*)^k$ approximiert wird.

23.3.5 Folgerung: (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nichtkonstante Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Beweisskizze Man sieht leicht, dass immer gilt $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$. Somit muss $|p|$ ein Minimum in einem Punkt $z_* \in \mathbb{C}$ haben. Wenn p nichtkonstant ist, muss z_* nach der vorhergehenden Bemerkung eine Nullstelle sein.

23.4. Singularitäten

23.4.1. Isolierte Singularitäten

23.4.1 Definition: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Einen Punkt $z_* \notin G$ (!) nennt man isolierte Singularität von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(z_*)\backslash\{z_*\} \subset G$.

23.4.2 Beispiel: 0 ist isolierte Singularität einer beliebigen auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ definierten holomorphen Funktion. Konkrete Beispiele wären

- $f(z) = z$ (hebbare Singularität),
- $f(z) = \frac{1}{z}$ (Pol) oder
- $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ (wesentliche Singularität).

23.4.2. Laurent-Entwicklung

Beobachtung In der Umgebung einer solchen Singularität ist die Taylor-Entwicklung unpraktisch, weil sie immer nur in Teilbereichen von $B_\varepsilon(z_*)$ konvergiert.

23.4.3 Satz: (Laurent-Entwicklung) Es sei für $0 \leqslant r < R$

$$G = K_{r,R}(z_*) := \{z \mid r < |z_*| < R\}$$

ein Kreisring und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann besitzt f in G eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_*)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_*)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_*)^k} \,. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser sogenannten Laurent-Reihe kann man berechnen als

$$c_k = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_*)^{k+1}} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \,,$$

wobei γ eine positiv orientierte Parametrisierung einer Kreislinie $\{z \mid |z - z_*| = \rho\}$ mit $r < \rho < R$ ist.

Beweisskizze

- Man stellt $f(z)$ mit Hilfe der Darstellungsformel durch ein Kurvenintegral über γ dar, wobei γ einen kleinen Kreis $\partial B_\varepsilon(z)$ parametrisiert, der samt seinem Rand in G enthalten ist.
- Durch Homotopie und Auftrennung kann man γ durch zwei Kurven ersetzen, die den Rand eines Kreisrings $K_{r+\varepsilon,R-\varepsilon}(z_*)$ parametrisieren.
- Geeignete Anwendung der geometrischen Reihe in den Integralen über die beiden Randkurven liefert die Behauptung.

23.4.4 Definition: (Klassifikation isolierter Singularitäten) z_* sei isolierte Singularität von $f : G \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_*)^k$ sei die Laurent-Entwicklung um z_*, die auf einer punktierten Kreisumgebung $B_R(z_*)\backslash\{z_*\} = K_{0,R}(z_*)$ definiert ist. Dann heißt z_*

1. hebbare Singularität, wenn in der Laurent-Entwicklung $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$ gilt. Offenbar kann man dann f holomorph in z_* fortsetzen.

2. Pol oder Polstelle, wenn es ein $k > 0$ gibt mit $c_{-k} \neq 0$ und $c_{-k-1} = c_{-k-2} = \ldots = 0$. k heißt die Ordnung des Pols.

3. wesentliche Singularität, wenn $c_k \neq 0$ für unendlich viele negative k.

Beispiele Sei $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$

- $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ hat in 0 eine hebbare Singularität. Die Laurent-Reihe ist eine normale Potenzreihe, nämlich einfach

$$\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}\,.$$

- $f(z) = \frac{1}{z^k}$ mit $k > 0$ hat in 0 einen Pol k-ter Ordnung mit offensichtlicher Laurent-Entwicklung.

- $\exp(\frac{1}{z})$ hat in 0 eine wesentliche Singularität mit Laurent-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{(-k)!}z^k\,.$$

23.4.3. Kurvenintegrale um isolierte Singularitäten

23.4.5 Satz: (Residuensatz) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei ferner $\gamma : [a,b] \to G$ eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve, welche nullhomotop (zusammenziehbar) in $G \cup \{z_1,\ldots,z_n\}$ ist, und die isolierten Singularitäten $z_1,\ldots,z_n$ entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft.[§] Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} 2\pi i \mathrm{Res}_{z_k}(f)\,,$$

wobei das Residuum $\mathrm{Res}_{z_k}(f)$ einfach der Koeffizient c_{-1} der in der Umgebung von z_k gültigen Laurent-Reihe von f ist.

Beweisidee

- Man zieht γ auf einen Punkt zusammen, wobei man kleine Kreise um die Singularitäten $z_1,\ldots,z_n$ im Bereich der Gültigkeit der jeweiligen Laurent-Entwicklung abspaltet.

[§]Eine etwas allgemeinere Form dieses Satzes erlaubt beliebige geschlossene Kurven $\gamma : [a,b] \to G$. Die Residuen müssen dann allerdings mit der sogenannten Windungszahl gewichtet werden.

- Gliedweise Integration der Laurent-Reihe liefert dann sofort die Behauptung (siehe das Eingangsbeispiel zu Kurvenintegralen).

Frage Wie berechnet man das Residuum $\mathrm{Res}_z(f)$? (Wenn man es wieder über ein Kurvenintegral berechnen muss, ist durch die obige Formel ja nicht so viel gewonnen.)

Antwort

- Manchmal sind die Laurent-Reihen (oder wenigstens ihr Koeffizient für $k = -1$) aus irgendeinem Grund leicht ersichtlich, wie zum Beispiel bei $f(z) = \frac{e^z}{z^4}$ ($\mathrm{Res}_0(f) = \frac{1}{3!}$) oder aber bei $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{(z+\boldsymbol{i})^2}$ (mit $\mathrm{Res}_{-1}(f) = 1$, $\mathrm{Res}_1(f) = 3$, $\mathrm{Res}_{-\boldsymbol{i}}(f) = 0$).

- Für Pole der Ordnung m, die gegeben sind als $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_*)^m}$ mit einer nahe z_* holomorphen Funktion $h(z)$, gilt (warum?)

$$\mathrm{Res}_{z_*}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} h \right)(z_*) \,.$$

- Im Fall $m = 1$ bedeutet dies einfach

$$\mathrm{Res}_{z_*}(f) = h(z_*) \quad \left[= \lim_{z \to z_*} f(z)(z - z_*) \right] .$$

  Die Verwendung des Ausdrucks in Klammern ist dabei günstiger, wenn $h(z)$ nicht einfach verfügbar ist und sich der Limes mit Hilfe der Regel von l'Hospital berechnen lässt (wie z.B. bei $f(z) = \frac{1}{1-z^4}$ und $z_* = \boldsymbol{i}$).

23.4.6 Anwendung:

- Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-\boldsymbol{i})(z+\boldsymbol{i})} \,.$$

- Die Residuen sind nach der obigen Formel (im einfachsten Fall $m = 1$) offenbar

$$\mathrm{Res}_{\boldsymbol{i}}(f) = \frac{1}{2\boldsymbol{i}} \,, \quad \mathrm{Res}_{-\boldsymbol{i}}(f) = -\frac{1}{2\boldsymbol{i}} \,.$$

- Hieraus kann man schließen, dass für eine doppelpunktfreie, geschlossene und in $G = \mathbb{C}\backslash\{\pm\boldsymbol{i}\}$ verlaufende Kurve γ das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$ nur die Werte $0, \pm\pi$ annehmen kann.

- Dabei tritt der Wert 0 offenbar auf, falls entweder beide oder keiner der Pole $\pm\boldsymbol{i}$ im Innern von γ liegen.

- Der Wert π tritt auf, wenn γ nur $\boldsymbol{i}$ mit positiver Orientierung oder nur $-\boldsymbol{i}$ mit negativer Orientierung umläuft.

- Der Wert $-\pi$ tritt im umgekehrten Fall auf.
- Hiermit kann man auch ein uneigentliches reelles Integral berechnen: Falls nämlich γ_R einen positiv orientierten Halbkreis um 0 mit Radius $R > 1$ parametrisiert, so gilt

$$\begin{aligned} \pi &= \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+1}\, dz \\ &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+1}\, dx + \int_{S_R} \frac{1}{z^2+1}\, dz \\ &\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx \quad (R \to \infty) \end{aligned}$$

  weil das komplexe Kurvenintegral über den Halbkreis

$$S_R = \{z \in \mathbb{C} \mid (|z| = R) \wedge (\mathfrak{Im}(z) > 0)\}$$

  einen Beitrag der Ordnung $O(\frac{1}{R^2} \cdot R) = O(\frac{1}{R})$ liefert.

23.5. Abschließende Bemerkungen

- Die Funktionentheorie ist ein altehrwürdiges Gebiet der Mathematik, für welches hier nur ein Einblick gegeben werden konnte.
- Sie enthält schöne und vollständige Resultate, die das Verständnis für manche wichtigen Zusammenhänge fördern.
- Die Theorie holomorpher Funktionen in $\mathbb{C}$ ist äquivalent zur Theorie harmonischer Funktionen (d.h. Funktionen u mit $\Delta u = 0$) im $\mathbb{R}^2$, allerdings ist die Formulierung in $\mathbb{C}$ oft eleganter.
- In vieler Hinsicht ähnliche Eigenschaften (Maximumprinzip, Randintegraldarstellung, ...) haben daher auch harmonische Funktionen im $\mathbb{R}^n$ für allgemeines n. Hierbei ist nur der Fall $n \geqslant 2$ interessant, der Fall $n = 1$ ist trivial.

Teil VI.

Stochastik

24. Wahrscheinlichkeitstheorie

24.1. Einführung

Beobachtung Deterministische Modelle beschreiben die Realität nicht exakt aufgrund verschiedener Faktoren:

- Die Modelle sind nur in den seltensten Fällen vollkommen, sondern stellen meist ein vereinfachtes Abbild der Realität dar.
- Die Modelle enthalten Parameter (wie etwa den Anfangszustand), die nicht genau genug bekannt sind oder aus technischen bzw. Kostengründen nicht genau genug bestimmt oder festgelegt werden können.
- Es gibt (wahrscheinlich) fundamentale Grenzen der Determiniertheit, die aus Physik (Quantenmechanik) oder Philosophie/Religion (Willensfreiheit) begründet werden können.
- Manchmal wird die Realität absichtlich so gestaltet, dass sie nicht deterministisch vorhergesagt werden kann (Glücksspiel, Börse).

Beispiele

- Signalanalyse: Im Detail unbekannte Eigenschaften von Sender, Empfänger oder Leitung wirken sich auf ein übertragenes Signal aus und müssen geeignet kontrolliert werden.
- Radioaktiver Zerfall oder Photoeffekt: Die Beschreibung dieser Phänomene mit Hilfe der Quantenmechanik beinhaltet eine nicht deterministische Komponente.
- Schadstoffausbreitung im Boden: Die Vorhersage ist nicht genau möglich, weil die Beschaffenheit des Bodens nicht genau bekannt ist. Exakte Ausmessungen der Bodenbeschaffenheit sind unmöglich, weil dabei der Boden zerstört würde.
- Wettervorhersage: Die Vorhersage des Wetters ist selbst für kurze Zeiträume (z.B. einen Tag) nicht in allen Fällen zuverlässig möglich. Für eine Woche ist die Vorhersage bereits äußerst unsicher und für einen Monat kann man genauso gut raten.
- Börse: Die Vorhersage von Marktentwicklungen (z.B. Fallen oder Steigen von Aktienkursen) nur aufgrund öffentlich zugänglicher Information ist in einem idealen Markt (keine Manipulationen, Korruption, Insiderwissen) unmöglich.

Beobachtung

- Nicht deterministische Prozesse sind fundamental schwieriger zu verstehen und zu kontrollieren als deterministische.
- Anstatt *eines* möglichen Ergebnisses eines „Experiments“ muss nämlich mit dem Eintreten *verschiedener* Ergebnisse gerechnet werden, anstatt *einer* möglichen Zeitentwicklung müssen *mehrere* in Betracht gezogen werden.
- Allerdings sind nicht alle theoretisch möglichen Ergebnisse gleich „wichtig“: Erstens sind nicht alle gleich „wahrscheinlich“, zweitens sind die Auswirkungen nicht immer gleich bedeutend.
- Die Formalisierung und Quantifizierung dieser Begriffe wird im Vordergrund dieser Vorlesung stehen.

24.2. Grundlagen

24.2.1. Grundidee

Idee Wir quantifizieren den Begriff Wahrscheinlichkeit wie folgt:

1. Eine Menge Ω repräsentiert die möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments.
2. Diese Ergebnisse sollten sich gegenseitig ausschließen und alle möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments abdecken.
3. Teilmengen von Ω repräsentieren mögliche Ereignisse.
4. Ein Maß $\mathbf{P}$ weist einem Ereignis $A \subset \Omega$ eine Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(A)$ zu.

24.2.1 Beispiel: (Würfeln mit einem Würfel)

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Augenzahlen)
- $A = \{2, 4, 6\}$ repräsentiert das Ereignis „Würfele eine gerade Zahl“.
- $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$ weist diesem Ereignis die passende Wahrscheinlichkeit zu (für nicht-gezinkte Würfel).

24.2.2 Beispiel: (Kugelstoßen)

- $\Omega = \mathbb{R}_0^+$ (Weite in Metern)
- $A = [10, 11]$ repräsentiert das Ereignis „zwischen 10 und 11 Metern weit“

- $\mathbf{P}(A)$ weist diesem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zu (in der Praxis wahrscheinlich empirisch ermittelt)
- Man beachte: Wenig sinnvoll ist hier die Frage nach der Wahrscheinlichkeit von einpunktigen Ereignissen wie etwa $\mathbf{P}(\{10\})$. Für diese ist hier der einzig sinnvolle reelle Wert nämlich $\mathbf{P}(\{10\}) = 0$, weil die Kugel mit beliebig kleiner Wahrscheinlichkeit exakt bei 10 Metern Entfernung liegenbleiben wird.

Beobachtung Die mengentheoretischen Grundoperationen übersetzen sich dann direkt in die Sprache der Ereignisse wie zum Beispiel:

- $A \cap B$: Ereignisse A und B finden statt
- $A \cup B$: Ereignisse A oder B finden statt
- $A \backslash B$: Ereignis A, aber nicht B findet statt
- $\complement A$: Ereignis A findet nicht statt

24.2.3 Bezeichnungen: Es sei M eine Menge.

- Dann bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M (die Menge aller Teilmengen von M).
- $|M|$ bezeichnet die Zahl der Elemente in M für eine endliche Menge. Wenn M unendlich viele Elemente enthält, schreiben wir $|M| = \infty$.

Fragen

- Was sind $\mathcal{P}(\varnothing)$, $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\{1,2\})$?
- Wie viele Elemente hat eine Potenzmengen $\mathcal{P}(M)$, wenn M endlich ist?
- Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

24.2.4 Problem: (Ärgerlich!) Für ein endliches Intervall $\Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}$ existiert keine Funktion $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, welche für *alle* $A \subset \Omega$ definiert ist, vernünftige Eigenschaften (wie $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ für $A \cap B = \varnothing$) besitzt, $\mathbf{P}([a,b]) > 0$ für $b > a$ erfüllt, und einpunktigen Intervallen $[x,x] = \{x\}$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(\{x\}) = 0$ zuweist. Insbesondere ist es nicht möglich, die für $[a',b'] \subset \Omega := [a,b]$ durch $\mathbf{P}([a',b']) = \frac{b'-a'}{b-a}$ definierte Gleichverteilung auf alle Teilmengen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ sinnvoll fortzusetzen.

Abhilfe Wir verzichten auf die Auswertung von $\mathbf{P}$ auf allen denkbaren Teilmengen und beschränken uns auf die Definition von $\mathbf{P}$ für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (die aber alle uns interessierenden und praktisch relevanten Mengen enthält).

24.2.2. Maße und Wahrscheinlichkeitsräume

24.2.5 Bezeichnung:

- Zwei Mengen A, B heißen disjunkt, wenn $A \cap B = \varnothing$.
- Endlich viele Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_N$ oder unendlich viele Mengen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißen paarweise disjunkt, wenn $A_i \cap A_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$.
- Manchmal kennzeichnet man disjunkte Vereinigungen durch $\cup$ bzw. $\dot\bigcup$.

24.2.6 Definition: (Kolmogorov) Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ zur Beschreibung eines Zufallsexperiments besteht aus

1. einer Menge Ω bestehend aus Ergebnissen des Experiments,
2. einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ bestehend aus Teilmengen von Ω, den sogenannten Ereignissen, und
3. einer Funktion $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$, welche jedem Ereignis $A \in \mathcal{A}$ eine Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(A)$ zuordnet.

Dabei soll $\mathcal{A}$ folgendes erfüllen (man nennt es dann „σ-Algebra“):

- Für $A \in \mathcal{A}$ ist auch $\complement A \in \mathcal{A}$.
- Für beliebige Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- $\varnothing \in \mathcal{A}$ (woraus auch folgt $\Omega \in \mathcal{A}$)

Für $\mathbf{P}$ soll gelten:

- σ-Additivität*: Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt
$$\mathbf{P}(\dot\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)\,.$$
- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Beispiele

- Für das Werfen eines Würfels könnte man
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und
  - $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{6}$ (fairer Würfel)

  wählen.
  - Das Ereignis „man würfelt eine 6“ entspräche dann der Menge $A = \{6\}$,

*Im Gegensatz zur einfachen Additivität erlaubt die σ-Additivität abzählbar unendliche Indexmengen.

  - das Ereignis „man würfelt keine 6“ entspräche der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Es könnte sein, dass man sowieso nur daran interessiert ist, ob man eine 6 würfelt oder nicht. Dann könnte man das Würfelexperiment auch mit demselben Ω aber

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, \{6\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$$

und

$$\mathbf{P}(\varnothing) = 0\,, \quad \mathbf{P}(\{6\}) = \frac{1}{6}\,, \quad \mathbf{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6}\,, \quad \mathbf{P}(\Omega) = 1$$

beschreiben.

- Für das gleichzeitige Werfen zweier Würfel W_1 und W_2 könnte man
  - $\Omega = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
  - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ und
  - $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{36}$

  wählen. Die erste Komponente eines Elements $(i, j) \in \Omega$ könnte dabei die Augenzahl von W_1 bezeichnen, die zweite die Augenzahl von W_2.

- Wenn die beiden Würfel nicht unterscheidbar sind, so wäre

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \{1, \ldots, 6\}^2 \mid x \leqslant y\}$$

eine vielleicht sogar noch besser zum Experiment passende Wahl. Allerdings wäre hier $\mathbf{P}(\{i, j\}) = \frac{1}{18}$ für $i \neq j$. [†]

- Wenn es sogar nur auf die Summe der Augen beider Würfel ankommen sollte, wäre

$$\Omega_3 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

eine dritte Alternative. Die zugehörige Funktion $\mathbf{P}$ wird in einer Übung bestimmt.

24.2.7 Bemerkung: • Wir sehen aus diesen Beispielen, dass man bei der Wahl von Ω und $\mathcal{A}$ je nach Anwendung eine gewisse Freiheit hat.

24.2.8 Übung: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man zeige

1. Für $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B \in \mathcal{A}$ und es gilt

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)\,.$$

2. Aus $A \cap B = \varnothing$ folgt $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

3. Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mathbf{P}(\complement A) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

[†] Einen ähnlichen Effekt würde man übrigens erreichen, wenn man $\Omega = \Omega_1$ beibehält und $\mathcal{A}$ so einschränkt, dass jedes $A \in \mathcal{A}$ mit (i, j) auch (j, i) enthält.

4. $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.
5. Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$ gilt $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.
6. Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$.
7. Für alle $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

24.2.9 Definition:
- Ein einelementiges Ereignis $A = \{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ nennt man Elementarereignis.
- Wenn $|\Omega| = n \in \mathbb{N}$ und alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$ haben, so nennt man das Experiment ein Laplace-Experiment.

Frage Welche der obigen Beispiele sind Laplace-Experimente?

24.2.10 Bemerkung: Für viele Anwendungen ist der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ nicht direkt zugänglich. Am Beispiel Wettervorhersage können wir dies sehen: Ausschöpfend wäre hier ja am ehesten etwas wie

$$\Omega = \{\text{alle physikalischen Zustände der Atmosphäre}\},$$

und da scheint die Zuweisung von Wahrscheinlichkeiten für relevante Teilmengen doch reichlich problematisch. Eine Abhilfe werden wir bald kennenlernen: Der möglicherweise sehr feingranulare Raum Ω selber wird gar nicht benutzt, statt dessen arbeitet man nur mit beobachtbaren Größen, den sogenannten Zufallsvariablen.

24.2.3. Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

- In diesem Abschnitt betrachten wir die Fälle $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ (Ω endlich) bzw. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ (Ω ist abzählbar unendlich).
- Hier ist die Annahme $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ keine Einschränkung (sie ist insbesondere gegeben, wenn Ω dem Experiment gut angepasst ist).
- Die Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ sind dann messbar. Ihre Wahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit p_i.
- Die Wahrscheinlichkeit beliebiger Ereignisse $A \subset \Omega$ lässt sich dann wegen der Additivität immer berechnen als

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\{i \mid \omega_i \in A\}} p_i \,.$$

- Besonders einfach ist der Fall Ω endlich und $p_i = \frac{1}{|\Omega|}$ (Laplace-Experiment). Hier gilt einfach

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \,.$$

Wenn man A als die „günstigen Ergebnisse“ des Zufallsexperiments betrachtet, so schreibt man dies oft als

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|\text{günstige Ergebnisse}|}{|\text{alle Ergebnisse}|}\,.$$

24.2.11 Beispiel: (Ziehen aus einer Urne) In einer Urne seien n unterscheidbare Kugeln, die mit $1, \ldots, n$ nummeriert sind. Es sollen k Kugeln gezogen werden, wobei das Ziehen entweder mit oder ohne Zurücklegen erfolgen soll. Außerdem ist es wichtig, ob die Reihenfolge der gezogenen Kugeln beachtet wird oder nicht.
$|\Omega|$ berechnet sich dann je nach Situation wie folgt:

- Mit Zurücklegen, Reihenfolge wichtig:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, \ldots, n\}^k \quad \text{(alle } k\text{-Tupel)} \\ |\Omega| &= n^k\,. \end{aligned}$$

  Den Beweis kann man etwa mit Hilfe eines Baumdiagramms führen.

  Dies ist ein Laplace-Experiment, so dass jedes $\omega \in \Omega$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n^k}$ besitzt.

- Ohne Zurücklegen, Reihenfolge wichtig: Hier ist

$$\begin{aligned} \Omega &= k\text{-Tupel mit verschiedenen Elementen} \\ |\Omega| &= n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,. \end{aligned}$$

  Der Beweis kann wieder durch ein Baumdiagramm geschehen, welches alle k-Tupel mit verschiedenen Einträgen aufzählt: n Möglichkeiten für den ersten Eintrag, $n-1$ Möglichkeiten für den zweiten, usw.

  Auch dies ist ein Laplace-Experiment.

- Ohne Zurücklegen, Reihenfolge unwichtig:

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{geordnete } k\text{-Tupel mit verschiedenen Elementen} \\ &= \text{alternativ: } k\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \ldots, n\} \\ |\Omega| &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}\,. \end{aligned}$$

  (Das vorherige Ergebnis wird durch die Zahl der Permutationen von k Objekten, nämlich $k!$, geteilt.)

  Wiederum ist dies ein Laplace-Experiment.

- Mit Zurücklegen, Reihenfolge unwichtig. Es gilt

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{geordnete } k\text{-Tupel mit möglicherweise gleichen Elementen} \\ |\Omega| &= \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

  (Beweisidee: Zur k-ten Stelle des geordneten Tupels wird $k-1$ addiert. Das entstehende k-Tupel wählt aus $\{1, \ldots, n+k-1\}$ ohne doppelten Einträge aus.)

- Dies ist aber kein Laplace-Experiment mehr: $\{(1,\dots,1)\}$ ist um den Faktor $k!$ weniger wahrscheinlich als $\{(1,\dots,k)\}$.
- Das Wissen von $|\Omega|$ alleine hilft hier nicht viel.
- Aus diesem Grund wird diese Darstellung nur selten verwendet. Auch bei unserer Untersuchung des zweifachen Würfelns haben wir sie vermieden.

24.2.12 Anwendungen: Es ist wichtig die vorstehenden Beispiele in praktischen Situationen wiederzuerkennen. Beispielsweise:

- Wenn man mit einem Würfel k-mal hintereinander würfelt und die Ergebnisse als Tupel notiert, gibt es 6^k mögliche solche Tupel.
- Wenn man mit k (ununterscheidbaren) Würfeln gleichzeitig (oder ohne dass man die Reihenfolge im Endergebnis beachtet) würfelt, so gibt es $\binom{6+k-1}{k}$ verschiedene Möglichkeiten (z.B. 21 für $k=2$).
- Es gibt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten, um aus 49 unterscheidbaren Kugeln 6 Stück (gleichzeitig bzw. ohne die Reihenfolge im Endergebnis zu beachten) auszuwählen.
- Wenn man wissen will, wie hoch die Chance ist, dass von n Menschen wenigstens zwei am selben Tag Geburtstag haben, so kann man auf verschiedene Weisen argumentieren:
  1. Man nummeriert die Leute und betrachtet ihre Geburtstage als ein Tupel aus $\{1,\dots,365\}^n$ (wir vernachlässigen dabei Geburtstage am 29. Februar). Dies entspricht einer Ziehung mit Reihenfolge und Zurücklegen, von denen es 365^n mögliche gibt.

     Die *ungünstigen* (d.h. alle haben verschiedene Geburtstage) entstehen durch Ziehung mit Reihenfolge ohne Zurücklegen, so dass es $\frac{365!}{(365-n)!}$ Möglichkeiten gibt.

     Daher ist die Wahrscheinlichkeit für „alle Geburtstage verschieden“

     $$\bar{p} = \frac{365!}{(365-n)!365^n} = \frac{\binom{365}{n}n!}{365^n}$$

     und die Wahrscheinlichkeit für „Auftreten gleicher Geburtstage“ einfach

     $$p = 1 - \bar{p}\,.$$

  2. Eine Alternative wäre, die Geburtstage als n Ziehungen mit Zurücklegen und ohne Reihenfolge zu betrachten. Dies ist aber viel schwieriger, weil dies kein Laplace-Experiment mehr ist.

24.2.13 Bemerkung:

- Natürlich gibt es auch wichtige Nicht-Laplace-Modelle.
- Ein sehr einfaches ist das sogenannte Bernoulli-Experiment. Hier gibt es zwei Zustände, die mit den Wahrscheinlichkeiten p und $1-p$ angenommen werden. Also
  1. $\Omega = \{0,1\}$

2. $\mathbf{P}(\{1\}) = p$ und $\mathbf{P}(\{0\}) = 1 - p$.

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ nennt man hier auch Bernoulli-Verteilung mit Parameter p.

- Alle Zufallsexperimente, bei denen es letztendlich auf eine ja-nein-Entscheidung hinausläuft, können als Bernoulli-Experiment modelliert werden.
- Beispiele sind: Münzwurf ($p = \frac{1}{2}$), mit Standard-Würfel 6 würfeln ($p = \frac{1}{6}$), ...

24.2.4. Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

24.2.14 Modellproblem: Wir werfen eine Kugel zufällig auf eine ebene Fläche (wählen zufällig einen Punkt aus $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aus). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kugel auf einer Teilfläche landet (der Punkt in $A \subset \Omega$ liegt)?

Antwort

- Falls die Fläche eben und überall gleich beschaffen ist und der Wurf nicht bestimmte Stellen favorisiert, so würden wir die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)}$$

erwarten.

- Andererseits: Falls die Fläche nicht eben oder nicht gleichförmig ist, so wird die Wahrscheinlichkeit nicht mehr durch dieses einfache Flächenverhältnis gegeben sein...
- Selbst für die einfache und naheliegende Definition

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(\Omega)}$$

sehen wir, dass wir das Volumen sowohl von Ω als auch von A benötigen: Ω und A sollten messbar sein.

24.2.15 Beispiel: Wir wählen zufällig einen Punkt aus $\Omega = [-1, 1]^2$ aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass er in der Einheitskreisscheibe $B = \{x \in \Omega \mid \|x\|_2 < 1\}$ liegt, ist

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{vol}(B)}{\mathrm{vol}(Q)} = \frac{\pi}{4}\,.$$

24.2.5. Beziehung zur Maßtheorie

24.2.16 Definition: Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ besteht aus

1. einer Menge Ω,

2. einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ bestehend aus Teilmengen von Ω, und
3. einer Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, welche jedem $A \in \mathcal{A}$ ein Maß $\mu(A)$ zuordnet.

Dabei soll $\mathcal{A}$ folgendes erfüllen:

- Für $A \in \mathcal{A}$ ist auch $\complement A \in \mathcal{A}$.
- Für beliebige Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- $\varnothing \in \mathcal{A}$ (woraus auch folgt $\Omega \in \mathcal{A}$)

Für μ soll gelten:

- Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\,.$$

Beobachtung

- Offenbar ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ einfach ein spezielles Maß, für das die Normierung $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ gilt.
- Daher ist auch die Wahrscheinlichkeitstheorie für den Mathematiker im wesentlichen dasselbe wie die Maßtheorie.
- Für die Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist es essentiell, dass die Maßtheorie kontinuierliche Maße, diskrete Maße sowie die Kombination von beiden erlaubt (siehe die folgenden Beispiele).

Beispiele Beispiele für einfache allgemeinere Maße sind etwa:

- das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ mit $\mu(A) = |A|$,
- ein diskretes Maß auf $\mathbb{R}$ mit $\mu(A) = |A \cap \mathbb{N}|$ für $A \subset \mathbb{R}$, welches alle natürlichen Zahlen in A zählt.
- ein kontinuierliches Maß im $\mathbb{R}^n$, welches durch Integration einer nichtnegativen (integrierbaren) Dichte $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ definiert ist:

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)\, dx\,, \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

- ein diskretes Maß auf $\mathbb{R}$ der Form

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\{1 \leqslant i \leqslant n | x_i \in A\}} p_i$$

für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^+$.

- eine Summe von diskretem und kontinuierlichem Maß wie etwa

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)\,dx + \sum_{\{1\leqslant i\leqslant n | x_i \in A\}} p_i\,, \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

- und viele mehr.

24.2.17 Bemerkung:

- Den Ausdruck

$$\mu(A) = \int_A \rho(x)\,dx\,, \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

  hatten wir ja schon für die Berechnung der Masse eines Körpers kennengelernt.

- Offenbar kann man die Berechnung der Masse eines Körpers A bei gegebener Dichteverteilung ρ als Anwendung eines Maßes auffassen.

- Auch die Summe von diskretem und kontinuierlichem Maß ist in der Praxis sehr nützlich, zum Beispiel wenn man an einigen Punkten eine sehr große Masse konzentriert hat, die man nicht genauer auflösen möchte (Bleikugel in Styropor, Sterne in Milchstraße, ...).

Frage Was ist denn nun mit dem ominösen $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$?

Antwort $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum.

- Wenn Ω endlich oder abzählbar ist, kann und wird normalerweise $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ sein.

- Ansonsten kann $\mathcal{A}$ in *allen* praktisch relevanten Fällen so gewählt werden, dass es *alle* praktisch interessanten Teilmengen $A \subset \Omega$ enthält.

- Für diese Teilmengen $A \subset \Omega$ ist dann per Definition $\mu(A)$ wohldefiniert, so dass wir sie auch messbar nennen.

- In Zukunft werden wir daher statt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einfach (Ω, μ) schreiben (genau genommen ist $\mathcal{A}$ als Definitionsbereich von μ ja auch in der verkürzten Schreibweise enthalten).

- Außerdem werden wir davon ausgehen, dass alle auftretenden Mengen messbar sind.

24.2.6. Etwas Zusatzwissen

24.2.18 Satz: (Lebesgue-Maß) Es gibt ein *Maß* $\mathcal{L}$ auf $\Omega = \mathbb{R}^n$, das sogenannte (n-dimensionale) Lebesgue-Maß, welches

1. alle „interessanten“ Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messen kann und
2. auf allen Riemann-messbaren Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{vol}(A) := \int_A 1\,dx$ übereinstimmt.

Im Folgenden werden wir daher alle Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $\mathcal{L}$-messbar oder einfach messbar nennen, für welche $\mathcal{L}(A)$ definiert ist.

Beweisidee Man *definiert* „interessante“ Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ als solche, die man als abzählbare Vereinigungen, abzählbare Durchschnitte und (einfache) Komplementbildung aus mehrdimensionalen Intervallen konstruieren kann. Alle in diesem Sinn „interessanten“ Mengen bilden dann die sogenannte Borel-Algebra $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Die Konstruktion eines $A \in \mathcal{B}$ aus mehrdimensionalen Intervallen liefert gleichzeitig eine Berechnungsvorschrift für $\mathcal{L}(A)$.

24.2.19 Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist $\mathcal{L}$-messbar, und es gilt $\mathcal{L}(\mathbb{Q}) = 0$ (Übung).

24.3. Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

24.3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

24.3.1 Beispiel: Beim Würfeln mit einem fairen Würfel ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$) bezeichne A das Ereignis $\{6\}$ und B das Ereignis $\{2,4,6\}$ (gerade Zahl). Die Wahrscheinlichkeit von A beträgt $\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$. Wenn allerdings jemand die Zusatzinformation B liefert („Es wurde eine gerade Zahl gewürfelt“), so ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A gleich $\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$.

24.3.2 Definition: (Bedingte Wahrscheinlichkeit) $A, B \subset \Omega$ seien Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ und es gelte $\mathbf{P}(B) > 0$. Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B ist dann gegeben als

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}\,.$$

24.3.3 Bemerkung:

- $\mathbf{P}(\cdot|B)$ stellt dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf B dar.
- Dieses kann man sogar auf beliebige (messbare) Teilmengen $A \subset \Omega$ anwenden, allerdings ist $\mathbf{P}(A|B) = 0$ für $A \cap B = \varnothing$.

24.3.4 Beispiel:

- Ω sei ein beliebiger Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum.
- Dann gilt für alle $A \subset \Omega$, dass $\mathbf{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.
- Nun sei $B \subset \Omega$ mit $\mathbf{P}(B) > 0$. Dann gilt für alle $A \subset B$

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{|A \cap B|}{|B|}\,.$$

24.3.5 Folgerungen: Sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- $A \subset \Omega$ sei beliebig und $B_1, \dots B_n \subset \Omega$ seien paarweise disjunkt und erfüllen $\mathbf{P}(B_i) > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Dann gilt für $B = \dot{\bigcup}_{i=1}^n B_i$

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)\,.$$

- Für Ereignisse $A, B \subset \Omega$ mit $\mathbf{P}(A) > 0$ und $\mathbf{P}(B) > 0$ gilt

$$\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A)}$$

- Es sei $\Omega = \dot{\bigcup}_{i=1}^n B_i$ mit paarweise disjunkten $B_i \subset \Omega$, die $\mathbf{P}(B_i) > 0$ erfüllen. Außerdem sei $A \subset \Omega$ mit $\mathbf{P}(A) > 0$. Dann gilt die Bayes-Formel

$$\mathbf{P}(B_i|A) = \frac{\mathbf{P}(B_i \cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{k=1}^n \mathbf{P}(A|B_k)\mathbf{P}(B_k)}\,.$$

24.3.6 Anwendung:

- Beim ELISA-Test auf die HIV-Infektion werden (im Schnitt) von 1000 Infizierten 999 als krank erkannt (Sensitivität 99,9%), ärgerlicherweise werden aber auch von 1000 Gesunden zwei als krank gemeldet (Spezifität 99,8%).
- FRAGE: Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person HIV-infiziert ist, falls der ELISA Test positiv ausfällt?
- ANTWORT: Ohne weiteres Wissen ist die Aufgabe nicht lösbar!
- ZUSATZWISSEN: Wir interessieren uns für Deutschland, wo nach Schätzungen etwa $0,05\%$ der Bevölkerung HIV-infiziert sind.
- Wir modellieren die Wahl einer zufälligen deutschen Person mit dem Ergebnisraum $\Omega = \{\text{deutsche Bevölkerung}\}$.
- Diese unterteilt sich disjunkt in Gesunde und Kranke, d.h.

$$\Omega = B_{\text{gesund}} \cup B_{\text{krank}}\,.$$

- $A \subset \Omega$ seien nun diejenigen Personen, die auf den Test ansprechen.
- Die obigen Daten liefern

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A|B_{\text{gesund}}) &= 2 \cdot 10^{-3} \\ \mathbf{P}(A|B_{\text{krank}}) &= 0.999 \\ \mathbf{P}(B_{\text{krank}}) &= 5 \cdot 10^{-4} \\ \mathbf{P}(B_{\text{gesund}}) &= 1 - \mathbf{P}(B_{\text{krank}}) = 0.9995 \end{aligned}$$

- Somit liefert die Bayes-Formel

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(B_{\text{krank}}|A) &= \frac{\mathbf{P}(A|B_{\text{krank}})\mathbf{P}(B_{\text{krank}})}{\mathbf{P}(A|B_{\text{krank}})\mathbf{P}(B_{\text{krank}}) + \mathbf{P}(A|B_{\text{gesund}})\mathbf{P}(B_{\text{gesund}})} \\ &= \frac{0.999 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{0.999 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.9995} \\ &\approx \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

- Aus diesem Grund wird im Falle eines positiven ELISA-Testausgangs ein aufwendigerer und teurerer Test höherer Spezifität nachgeschaltet.

24.3.2. Unabhängigkeit

Beobachtung

- Manchmal bringt das Zusatzwissen „Ereignis B liegt vor“ nichts, um die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A zu spezifizieren!
- Genauer gilt dann

$$\mathbf{P}(A|B) \left[:= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}\right] = \mathbf{P}(A)$$

- Für das Würfelexperiment mit $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ wäre das zum Beispiel der Fall für $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{1, 4\}$.

24.3.7 Definition: (Unabhängigkeit)

- Zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ heißen unabhängig, wenn gilt

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\,.$$

- Allgemeiner nennt man Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig (manchmal auch „in ihrer Gesamtheit unabhängig“ oder „stochastisch unabhängig“), wenn für *beliebige* Indexteilmengen $J \subset \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i \in J} A_i) = \prod_{i \in J} P(A_i)\,.$$

24.3.8 Notation: Es ist nützlich, die Notationen $\bigcup_{i\in J}$, $\bigcap_{i\in J}$, $\sum_{i\in J}$, $\prod_{i\in J}$ auch für $J = \varnothing$ zu definieren, und zwar wie folgt:

$$\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing\,, \quad \bigcap_{i\in\varnothing} A_i = \Omega\,, \quad \sum_{i\in\varnothing} \alpha_i = 0\,, \quad \prod_{i\in\varnothing} \alpha_i = 1\,.$$

Die Motivation dahinter ist, dass man Rekursionen wie etwa

$$\sum_{i\in\{1,\dots,n\}} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \alpha_n + \sum_{i\in\{1,\dots,n-1\}} \alpha_i$$

auch für $n = 1$ Sinn verleihen möchte.

24.3.9 Beispiel:

- Bei einem n-fachen Würfeln sind die Ereignisse

$$A_i := \text{i-ter Wurf hat Ergebnis } \alpha_i$$

  voneinander unabhängig.

- Entsprechendes gilt für den n-fachen Münzwurf.

Beobachtung Diese Beispiele sind typisch, denn oftmals deutet die Unabhängigkeit von Ereignissen darauf hin, dass Ω aus einfacheren Bestandteilen (hier: den Einzelwürfen) zusammengesetzt ist.

24.3.10 Bemerkung:

- Besonders wichtig ist die (paarweise) Unabhängigkeit, die man für zwei Ereignisse A und B durch die Bedingung $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gegeben hat.

- Hier gilt: Wenn A und B unabhängig sind, so sind es auch die Paarungen A und $\complement B$, $\complement A$ und B, $\complement A$ und $\complement B$. (Beweis?)

- Die Unabhängigkeit ist offenbar symmetrisch: Wenn A unabhängig von B ist, so ist auch B unabhängig von A.

24.3.3. Mehrstufige Zufallsexperimente

Beobachtung Manchmal ist ein Zufallsexperiment zusammengesetzt aus mehreren Bestandteilen, die man nacheinander ausführt. Die Wahrscheinlichkeit der Ausgänge eines Teilexperiments können dabei von den Ausgängen der vorhergehenden abhängen.

24.3.11 Beispiel: Wenn man zwei Kugeln nacheinander aus einer Urne zieht, die 5 rote und 8 weiße enthalten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel rot ist, gleich $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, wenn die erste rot war, und gleich $\frac{5}{12}$, wenn die erste weiß war.

24.3.12 Definition: Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ mit endlichem[‡] Ergebnisraum Ω beschreibt ein mehrstufiges Zufallsexperiment, wenn

1. $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$

[‡]der Einfachheit halber

2. für alle $k = 1, \ldots, n$ und alle $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_k$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_k = \alpha_k) \\
&= \mathbf{P}(\omega_1 = \alpha_1) \cdot \mathbf{P}(\omega_1 = \alpha_2 | \omega_1 = \alpha_1) \cdots \\
&\quad \cdot \mathbf{P}(\omega_k = \alpha_k | \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_{k-1} = \alpha_{k-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\omega_i = \alpha_i | \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_{i-1} = \alpha_{i-1})
\end{aligned}$$

24.3.13 Notation: $\mathbf{P}(\omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_k = \alpha_k)$ ist hier eine Kurzschreibweise für $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_k = \alpha_k\})$. Analog steht $\mathbf{P}(\omega_i = \alpha_i | \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_{i-1} = \alpha_{i-1})$ für $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \alpha_i\} | \{\omega \in \Omega \mid \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_{i-1} = \alpha_{i-1}\})$.

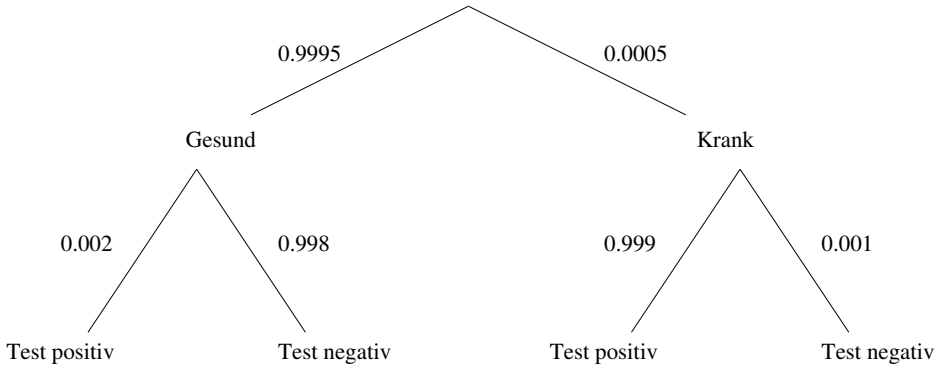
24.3.14 Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit, dass die k-te Komponente ω_k von $\omega \in \Omega$ einen bestimmten Wert α_k annimmt, hängt nur von den Werten $(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1})$ ab.

24.3.15 Folgerung: Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ ergibt sich als ein Produkt bedingter Wahrscheinlichkeiten gemäß

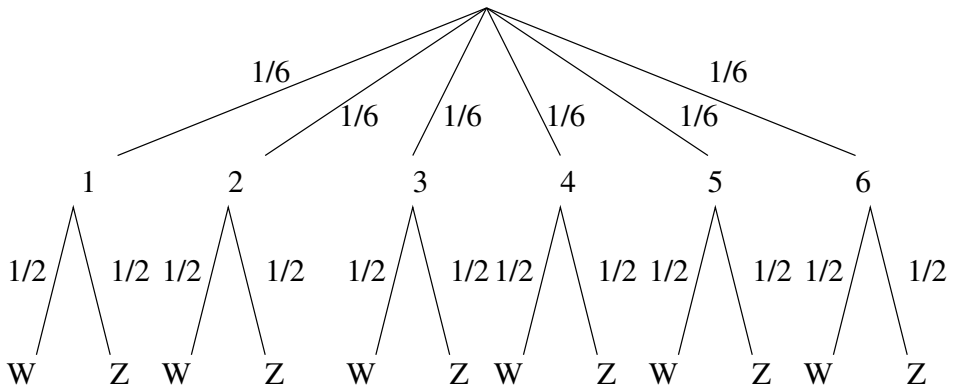
$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) &= \mathbf{P}(\omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_n = \alpha_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\omega_i = \alpha_i | \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_{i-1} = \alpha_{i-1}) \,.
\end{aligned}$$

24.3.16 Definition: (Wahrscheinlichkeitsbaum, Entscheidungsbaum) Ein Wahrscheinlichkeitsbaum ist eine graphische Darstellung eines mehrstufigen Zufallsexperiments, bei der entsprechend den Werten der ersten, zweiten, ..., n-ten Komponente von $\omega \in \Omega$ nacheinander verzweigt wird. Die Blätter des Baums entsprechen den Elementen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Omega$ eines mehrstufigen Zufallsexperiments und sind eindeutig durch den zu ihnen führenden Weg spezifiziert. Längs eines solchen Wegs *Wurzel* $\to \alpha_1 \to \ldots \to \alpha_n$ trägt man nacheinander die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(\omega_1 = \alpha_1), \mathbf{P}(\omega_2 = \alpha_2 | \omega_1 = \alpha_1), \ldots, \mathbf{P}(\omega_n = \alpha_n \mid \omega_1 = \alpha_1 \ldots, \omega_{n-1} = \alpha_{n-1})$ auf. Die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}$ ergibt sich dann als Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des Wegs.

24.3.17 Beispiel: Das ELISA-Experiment könnte man durch folgenden Wahrscheinlichkeitsbaum beschreiben:



24.3.18 Beispiel: Das Würfeln eines Standard-Würfels, gefolgt von einem Münzwurf könnte man durch folgenden Baum beschreiben:



Beobachtung

- Beim zweiten Beispiel gilt für alle bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(\omega_i = \alpha_i | \omega_1 = \alpha_1, \ldots, \omega_{i-1} = \alpha_{i-1}) = \mathbf{P}(\omega_i = \alpha_i)\,.$$

- Diese besonders einfache Situation entspricht dem Fall stochastisch unabhängiger Experimente. Das Ergebnis des i-ten Experiments hängt nämlich offenbar von keinem vorhergehenden ab.
- Durch $\mathbf{P}_i(\{\alpha_i\}) := \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega_i = \alpha_i\})$ kann man dann ein Maß auf Ω_i definieren.
- Das Maß $\mathbf{P}$ auf Ω ergibt sich dann als sogenanntes Produktmaß aus den $\mathbf{P}_i$ und $(\Omega, \mathbf{P})$ ist der Produktraum der $(\Omega_i, \mathbf{P}_i)$ (siehe die folgende Definition).

24.3.19 Definition: Es seien $(\Omega_1, \mathbf{P}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathbf{P}_n)$ Wahrscheinlichkeitsräume. Dann definieren wir den Produktraum

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n\,.$$

Auf Ω ist dann durch die $\mathbf{P}_i$ das (Produktmaß) $\mathbf{P}$ definiert, welches

$$\mathbf{P}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i(A_i)$$

für beliebige (messbare) Teilmengen $A_i \subset \Omega_i$ erfüllt.

24.3.20 Übung: Es sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und die messbare Menge $A \subset A$ sei unabhängig von sich selber.

1. Was folgt für $\mathbf{P}(A)$?
2. Geben Sie Beispiele für solche Mengen A.

24.3.21 Übung: $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise unabhängig, d.h. A_i und A_j sind unabhängig für alle Indexpaare i, j mit $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Im allgemeinen folgt daraus aber *nicht*, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig sind.

1. Was bedeutet die Unabhängigkeit *zweier* Teilmengen A_i und A_j für $i \neq j$ genau?
2. Was bedeutet die Unabhängigkeit von $A_1, \ldots, A_n$ genau?
3. $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ sei ein Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum. Man finde drei Ereignisse $A_1, A_2, A_3 \subset \Omega$, die nur paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

24.3.22 Übung: Die Unabhängigkeit der nichttrivialen Ereignisse $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{1, 2\}$ beim Würfeln mit einem Standardwürfel legt nahe, dass man den Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ auch als Produkt zweier Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega_1, \mathbf{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathbf{P}_2)$ schreiben kann. Man setze dies in geeigneter Weise um.

24.4. Zufallsvariablen

24.4.1. Motivation

Beobachtungen

- In Anwendungen haben Ereignisse A sehr oft die Form

$$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in [a, b]\} \quad \big[=: X^{-1}([a, b])\big]$$

  wobei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ irgendeine Eigenschaft der Ergebnisse $\omega \in \Omega$ misst.

  Beispiel: „Niederschlagsmenge an Station X ist gleich 0“ bei einer Wettervorhersage.

- In Anwendungen haben interessante Ereignisse oft die Form

$$A = X^{-1}([a, b])\,,$$

  wobei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Bewertung (Kosten, Nutzen) der Ergebnisse $\omega \in \Omega$ liefert.

  Beispiel: Für Versicherungen wären Ereignisse wie „Hurrikan-Schäden im nächsten Monat betragen mehr als 10 Milliarden Dollar“ interessant, für einen Lottospieler Ereignisse wie „Zahl der Richtigen ist größer 5.

- In Anwendungen ist Ω meist nicht genau spezifizierbar. Die einzig mögliche Herangehensweise ist die Durchführung einer Messung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ oder mehrerer Messungen $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$, welche einem Zustand ω einen Messwert $X(\omega)$ zuordnet.

  Beispiel: Im Falle einer Wettervorhersage könnte Ω alle möglichen Zustände der Atmosphäre bezeichnen und $X(\omega) \in \mathbb{R}^k$ sämtliche Messungen einer Wetterstation für einen gegebenen Zustand $\omega \in \Omega$.

Idee Wir führen Funktionen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ein (die sogenannten Zufallsvariablen), welche

- Zustände $\omega \in \Omega$ messen können
- Zustände $\omega \in \Omega$ bewerten können
- Ω vielleicht sogar erst einmal beschreiben (wenn auch meist unvollständig).

24.4.2. Definition

24.4.1 Definition: (Zufallsvariable, ZV) Eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω ist eine Funktion $X : \Omega \to \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{E}$ eine beliebige Menge sein darf.
Die bei weitem wichtigsten Spezialfälle sind $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ (X heißt dann eindimensionale bzw. skalare Zufallsvariable), oder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^k$ (X heißt dann mehrdimensionale Zufallsvariable).
Im folgenden werden wir fast ausschließlich diese beiden Fälle $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^k$ betrachten.

24.4.2 Bezeichnung: Zufallsvariablen bezeichnet man meist mit den Großbuchstaben X, Y, Z.

24.4.3 Satz: Jede Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathcal{E}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ „induziert“ auf $\mathcal{E}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_X$, welches für $A \subset \mathcal{E}$ definiert ist als

$$\mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X^{-1}(A)) .$$

$\mathbf{P}_X(A)$ ist offenbar genau dann definiert, wenn $\mathbf{P}(X^{-1}(A))$ definiert ist. Anders ausgedrückt: $A \subset \mathcal{E}$ ist $\mathbf{P}_X$-messbar $\iff$ $X^{-1}(A) \subset \Omega$ ist $\mathbf{P}$-messbar. Wie bereits früher diskutiert, dürfen (und werden) wir davon ausgehen, dass sämtliche auftretenden Teilmengen $\mathbf{P}$- bzw. $\mathbf{P}_X$-messbar sind.

Beweis Dass $\mathbf{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ersieht man aus

$$\mathbf{P}_X(\dot{\bigcup_i} A_i) = \mathbf{P}(X^{-1}(\dot{\bigcup_i} A_i)) = \mathbf{P}(\dot{\bigcup_i} X^{-1}(A_i)) = \sum_i \mathbf{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_i \mathbf{P}_X(A_i)$$

und

$$\mathbf{P}_X(\mathcal{E}) = \mathbf{P}(X^{-1}(\mathcal{E})) = \mathbf{P}(\Omega) = 1 .$$

24.4.4 Notation: X^{-1} bezeichnet hier die Urbildabbildung $X^{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}(\Omega)$ von $X : \Omega \to \mathcal{E}$. Es kann auf *Teilmengen* von $\mathcal{E}$ angewendet werden und liefert *Teilmengen* von Ω. X^{-1} bezeichnet hier *nicht* die übliche Umkehrfunktion, die nur für bijektive Abbildungen X definiert ist, und von $\mathcal{E}$ nach Ω abbilden würde. X^{-1} bezeichnet hier auch *nicht* die Kehrwertabbildung, also die Abbildung $\omega \mapsto \frac{1}{X(\omega)}$. (Diese Abbildung würde auch nur für Wertebereiche wie $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ oder $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ Sinn machen.)

24.4.5 Beispiel:
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ sei der Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum für das Würfeln mit zwei Standardwürfeln.

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei definiert als $X((\omega_1, \omega_2)) = \omega_1 + \omega_2$ (Summe der Augenzahlen).
- Dann gilt für $A = \{2, 3\}$ (alternativ: $A = [2, 3]$)

$$\mathbf{P}_X(A) = \mathbf{P}(\underbrace{X^{-1}(A)}_{=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

- Offenbar ist $\mathbf{P}_X$ das in den Übungen schon berechnete Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\tilde{\Omega} = \{2, 3, \ldots, 12\}$, allerdings anwendbar auf beliebige Teilmengen von $\mathbb{R}$.

24.4.6 Folgerung:

- Statt mit einer möglicherweise intransparenten Menge Ω kann man beobachtbare Phänomene mit den wohlbekannten Räumen $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ oder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^k$ beschreiben.
- Statt eines möglicherweise unbekannten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$ auf Ω kann man dann Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbf{P}_X$ auf $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^k$ betrachten.
- Diese $\mathbf{P}_X$ können durch Wiederholung des Zufallsexperiments und Registrierung der auftretenden X-Werte bestimmt werden, *ohne dass man den Zusammenhang* $X = X(\omega)$ *verwenden muss*!
- Ω wird aber wichtig, wenn man sich für mehrere Zufallsvariablen (z.B. X und Y) interessiert, welche die Ergebnisse eines Zufallsexperiments messen oder bewerten.

  Falls hier gilt $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$, so ist nämlich die Beschreibung beliebiger Korrelationen (Wechselbeziehungen) der Messungen $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ möglich, weil beide Werte ja durch eine „versteckte Variable“ („hidden variable“) ω determiniert werden.

24.4.7 Beispiel:

- Im Beispiel der Wettervorhersage könnte Ω der Raum aller physikalisch sinnvollen Zustände der Erdatmosphäre sein. Ein zugehöriges „Zufallsexperiment“ (welches wir immer wieder beobachten) wäre dann der tatsächliche Zustand zu einer Zeit T.
- Die ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}^{k_X}$ könnte dann die Messungen der Wetterstation S_X zur Zeit T bezeichnen, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^{k_Y}$ die Messungen der Wetterstation S_Y zur selben Zeit T.
- Durch wiederholte Beobachtung an den Stationen kann man eine (auf Teilmengen des $\mathbb{R}^{k_X}$ definierte) Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}_X$ für das Auftreten gewisser Messwertereignisse an der Station S_X erhalten, entsprechend eine Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}_Y$ für die Station S_Y.
- Oftmals (bei nicht zu weit entfernten Stationen) werden jedoch Messungen in X mit denen in Y korreliert sein (wenn etwa in Erlangen die Sonne scheint, dann oft auch in Regensburg). Um diese Korrelation beschreiben zu können, braucht man den gemeinsamen Definitionsbereich Ω für X und Y.

24.4.3. Verteilung, Verteilungsfunktion, Verteilungsdichte

Verteilung

24.4.8 Definition: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine skalare Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$. Dann heißt das durch $\mathbf{P}$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ die Verteilung der Zufallsvariablen X.

24.4.9 Bemerkung:

- Wie im vorigen Abschnitt schon erwähnt, kann $\mathbf{P}_X$ als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ auch unabhängig vom Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ diskutiert werden.

- Die Abhängigkeit von $(\Omega, \mathbf{P})$ ist nur dann wichtig,
  1. wenn $(\Omega, \mathbf{P})$ gut bekannt und gut handhabbar ist (Beispiel: Würfeln mit zwei Würfeln und X als Augensumme)
  2. oder aber das Zusammenspiel mehrerer Zufallsvariablen X,Y, ... untersucht werden soll.

Beispiele

- Wenn man die Zufallsvariable X =*Augenzahl beim Würfeln eines Standardwürfels* betrachtet, so gilt
$$\mathbf{P}_X(A) = \frac{1}{6}|A \cap \{1,2,3,4,5,6\}|$$
für beliebiges $A \subset \mathbb{R}$.

- Wenn die Werte von X „gleichverteilt“ im Intervall $[a,b]$ sind, so gilt
$$\mathbf{P}_X(A) = \frac{1}{b-a}\,\mathrm{vol}(A \cap [a,b])$$
für beliebiges (messbares) $A \subset \mathbb{R}$.

In beiden Fällen ist eigentlich egal, was für ein Ω dahintersteckt.

Verteilungsfunktion

24.4.10 Definition: Statt der recht abstrakten Verteilung $\mathbf{P}_X$ einer skalaren ZV X wird oft auch die sogenannte Verteilungsfunktion
$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]\,, \quad F_X(x) := \mathbf{P}_X(]-\infty, x])$$
verwendet. Falls $X : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$, so gilt auch
$$F_X(x) = \mathbf{P}_X(]-\infty, x]) = \mathbf{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbf{P}(\text{„}X \leqslant x\text{“})\,,$$
wobei man mit der Notation „$X \leqslant x$“ das Ereignis
$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} = X^{-1}(]-\infty, x])$$
bezeichnet.

Beispiele

- Für das Würfeln eines Standardwürfels erhalten wir die Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{6}[x] & 1 \leqslant x < 6 \\ 1 & x \geqslant 6 \end{cases}.$$

  Hierbei bezeichnet $[x]$ die Gauß-Klammer, also die kleinste ganze Zahl kleiner oder gleich $x \in \mathbb{R}$.

- Für die Gleichverteilung von X im Intervall $[a, b]$ ergibt sich

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

24.4.11 Eigenschaften: Aus den Maßeigenschaften von $\mathbf{P}_X$ ergibt sich für die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folgendes:

1. Für $a \leqslant b$ gilt $F_X(b) - F_X(a) = \mathbf{P}_X(]a, b])$.
2. $F_X(-\infty) = 0$ (heißt: $F_X(x) \to 0$ für $x \to -\infty$) und $F_X(+\infty) = 1$ (heißt: $F_X(x) \to 1$ für $x \to +\infty$)
3. F_X ist monoton wachsend, d.h. $F_X(x) \leqslant F_X(y)$ für $x \leqslant y$
4. F_X ist überall rechtsseitig stetig[§], d.h. $F_X(x) = \lim_{y \downarrow x} F_X(y)$.
5. F_X hat höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

Beweisskizze

1. Dies folgt wegen

$$\begin{aligned} F(b) = \mathbf{P}(]-\infty, b]) = \mathbf{P}(]-\infty, a] \cup]a, b]) \\ = \mathbf{P}(]-\infty, a]) + \mathbf{P}(]a, b]) = F(a) + \mathbf{P}(]a, b]) \end{aligned}$$

2. Wegen der σ-Additivität muss das Gesamtmaß 1 irgendwo in $\mathbb{R}$ lokalisiert sein.
3. Folgt aus dem ersten Punkt und $\mathbf{P}(]x, y]) \geqslant 0$.
4. Wegen der σ-Additivität gilt $\lim_{y \downarrow x} \mathbf{P}(]x, y]) = 0$ (man vergleiche mit der Übung zum nicht σ-additiven Maß).

[§]Wenn man $F_X(x) = \mathbf{P}_X(]-\infty, x[)$ definiert hätte, wäre es überall linksseitig stetig gewesen.

5. Überabzählbar viele Sprungstellen müssten sich an einer Stelle in $\mathbb{R}$ häufen und dort einen unendlich großen Sprung hervorrufen.

24.4.12 Bemerkung: Die Verteilungsfunktion F_X ist recht praktisch, weil sie kein Maß, sondern eine ganz normale Funktion ist. Sie hat allerdings den gewichtigen Nachteil, dass ihre Werte nicht direkt damit zusammenhängen, an welchen Stellen „etwas passiert".

Verteilungsdichte

Beobachtung In den Anwendungen hat die Verteilung $\mathbf{P}_X$ einer *skalaren* Zufallsvariablen X praktisch immer die folgende explizite Form

$$A \subset \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_X(A) = \int_A \rho(x)\,dx + \sum_{\{i|x_i\in A\}} p_i\,.$$

wobei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ eine integrierbare Funktion ist, $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ und $p_1, p_2, \ldots \in \mathbb{R}^+$.

24.4.13 Notation: Wenn A ein (offenes, halboffenes, abgeschlossenes) Intervall mit den Grenzen $a \leqslant b$ und ρ eine integrierbare Funktion ist, so setzen wir

$$\int_A \rho(x)\,dx := \int_a^b \rho(x)\,dx\,.$$

wobei das rechte Integral (abhängig von A) als eigentliches oder uneigentliches Riemann-Integral verstanden werden soll.

Idee

- Für $i = 1, 2, \ldots$ seien $x_i \in \mathbb{R}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ gegeben.
- Wir definieren für $i = 1, 2, \ldots$ die folgenden Delta-Ausdrücke:

  $$\tilde\delta_{x_i}(A) := \begin{cases} 1 & x_i \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

  Diese $\tilde\delta$-Operatoren sind offenbar Maße.
- Man kann mit ihnen kompliziertere diskrete Maße linear kombinieren:

  $$\mathbf{P}_X = \sum_i p_i\tilde\delta_{x_i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_X(A) := \sum_i p_i\tilde\delta_{x_i}(A) = \sum_{\{i|x_i\in A\}} p_i\,.$$

- Außerdem setzen wir

  $$\int_A \delta_{x_i}(x)\,dx := \tilde\delta_{x_i}(A)\,,$$

  und können formal weiter schreiben

  $$\mathbf{P}_X(A) = \int_A (\rho(x) + \sum_i p_i\delta_{x_i}(x))\,dx\,.$$

- Die Größe $f_X := \rho + \sum_i p_i \delta_{x_i}$ nennt man die Verteilungsdichte. Den ersten Teil ρ nennt man den „kontinuierlichen Anteil“, den zweiten Teil den „diskreten Anteil“ dieser Dichte.

24.4.14 Bemerkung:

- Die Objekte der Form δ_{x_*} für $x_* \in \mathbb{R}$ nennt man Delta-Distributionen.
- Man kann mit ihnen nur recht einfache Operationen durchführen, nämlich
  1. Linearkombinationen bilden wie etwa $\frac{1}{6}\delta_1 + \ldots + \frac{1}{6}\delta_6$ und
  2. sie mit stetigen Funktionen $g(x)$ multiplizieren und integrieren. Dabei ergibt sich

$$\int_A g(x)\delta_{x_*}(x)\,dx = \begin{cases} g(x_*) & x_* \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Andere Operationen wie zum Beispiel Quadrieren $(\delta_{x_i})^2$ machen normalerweise keinen Sinn.
- Man kann sich δ_{x_*} als eine Funktion *vorstellen*, welche außerhalb des Punkts x_* den Wert 0 hat, aber im Punkt x_* den Wert $+\infty$ in einer Weise annimmt, welche $\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta_{x_*}(x)\,dx = 1$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ liefert.
- Graphisch kann man einen Term $p_*\delta_{x_*}$ darstellen als eine senkrechte Linie an der Stelle x_* mit der Länge p_*. Oft setzt man auch noch einen Punkt auf das Ende der Linie.
- In den Anwendungen werden mit solchen Delta-Distributionen Punktmassen, Punktkräfte, Stöße, plötzliche Entladungen und ähnliches modelliert, aber eben auch diskrete Wahrscheinlichkeiten.

24.4.15 Definition: Die ZV X besitzt eine Verteilungsdichte f_X, wenn es eine integrierbare Funktion $f_X^{\text{cont}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ und eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Punkten $x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ zusammen mit Werten $p_1, p_2, \ldots \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt

$$\mathbf{P}_X(]a,b]) = \int_{]a,b]} f_X(x)\,dx\,,$$

wobei $f_X := f_X^{\text{cont}} + f_X^{\text{disc}}$ mit $f_X^{\text{disc}} := \sum_i p_i \delta_{x_i}$. Das Integral versteht sich dann als

$$\int_{]a,b]} f_X(x)\,dx := \int_a^b f_X^{\text{cont}}(x)\,dx + \sum_{\{i \mid x_i \in]a,b]\}} p_i\,.$$

24.4.16 Bezeichnung: Wenn $f_X = f_X^{\text{cont}}$, so nennt man X eine stetig verteilte Zufallsvariable (engl. *continuous random variable*). Wenn $f_X = f_X^{\text{disc}}$, so heißt X eine diskret verteilte Zufallsvariable (engl. *discrete random variable*).

24.4.17 Bemerkungen:

- Wegen $\mathbf{P}_X(\mathbb{R}) = 1$ folgt

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X^{\text{cont}}\, dx + \sum_i p_i\,.$$

- Die Funktion f_X^{cont} ist nicht ganz eindeutig bestimmt. Man kann sie nämlich offenbar an einzelnen Punkten (oder allgemeiner: auf einer Nullmenge) abändern, ohne dass es die definierende Eigenschaft beeinflusst.

- Wegen

$$\int_a^b f_X(x)\, dx = \mathbf{P}_X(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$$

ist f_X nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine verallgemeinerte Ableitung der Verteilungsfunktion F_X.

- Dort wo F_X differenzierbar ist, ist $f_X = F_X'$. Wenn F_X an einer Stelle x_* aber einen Sprung der Höhe p_* hat, so tritt in f_X ein Delta-Term $p_*\delta_{x_*}$ auf.

Beispiele

- Für das Würfeln eines Standardwürfels erhalten wir die Verteilungsdichte

$$f_X = f_X^{\text{disc}} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \delta_i\,.$$

- Für die Gleichverteilung von X im Intervall $[a,b]$ erhalten wir dagegen

$$f_X(x) = f_X^{\text{cont}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

24.5. Kenngrößen von Verteilungen

24.5.1. Einführung

24.5.1 Motivation: Die Verteilung $\mathbf{P}$ eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathbf{P})$ enthält im Idealfall *alle* vorhandenen Information über ein System, ebenso enthält die Verteilung $\mathbf{P}_X$ einer Zufallsvariablen X (sowie F_X und f_X) dann *alle* vorhandenen Information über X, wenn man X isoliert betrachtet. Allerdings haben $\mathbf{P}$ oder $\mathbf{P}_X$ (sowie äquivalent dazu F_X und f_X) normalerweise eine recht komplizierte Struktur, und es gibt wichtige Fragestellungen, die man schon mit einigen wenigen Zahlen recht gut beantworten kann.

Beispiele

- Wenn X den Gewinn/Verlust im Laufe eines Glücksspiels oder in der Wirtschaft misst, ist der sogenannte Erwartungswert ein recht gutes Kennzeichen dafür, ob sich ein bestimmter Spielzug oder ein Geschäft grundsätzlich lohnt.
- Ein Fertigungsprozess oder eine Signalübertragung müssen oft mit zufälligen Fehlern leben, die gewisse Toleranzen nicht übersteigen dürfen. Die sogenannte Varianz ist dabei ein sehr gutes Maß für zufällige Abweichungen eines Produkts/Signals von seinem Sollwert.

24.5.2 Bemerkung: Experimentell lassen sich Erwartungswert bzw. Varianz als Mittelwert bzw. mittlere quadratische Abweichung bei oftmaliger Ausführung eines Zufallsexperiments bestimmen.

24.5.2. Erwartungswert

24.5.3 Definition: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine skalare Zufallsvariable mit Verteilungsdichte f_X. Dann ist der sogenannte Erwartungswert definiert als

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx\,.$$

24.5.4 Beispiel: Für die Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$f_X(x) = f_X^{\mathsf{cont}}(x) + f_X^{\mathsf{disc}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(x)$$

würde sich der Erwartungswert berechnen als

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x f_X^{\mathsf{cont}}(x)\, dx}_{=\int_0^{\frac{1}{2}} x\, dx = \frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(x)\, dx}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}\,.$$

24.5.3. Varianz und Standardabweichung

24.5.5 Definition: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine skalare Zufallsvariable mit Verteilungsdichte f_X. Dann ist die sogenannte Varianz $\mathrm{Var}[X]$ von X definiert als

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mathrm{E}[X])^2 f_X(x)\, dx\,.$$

24.5.6 Bemerkung: Die obige Berechnung der Varianz geschieht in zwei Schritten:

1. Man berechnet zuerst $\mu := \mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$.
2. Dann berechnet man $\mathrm{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} (x - \mu)^2 f_X(x)\, dx$.

24.5.7 Satz: Alternativ kann man $\mathrm{Var}[X]$ berechnen als

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - (\mathrm{E}[X])^2\,.$$

Beweis Mit $\mu := \mathrm{E}[X]$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx - 2\mu \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx}_{=\mu} + \mu^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx}_{=1}\,.\end{aligned}$$

24.5.8 Bemerkung: Meist ist der Rechenaufwand für diese Variante etwas kleiner.

24.5.9 Beispiel:

- Für die obige Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$f_X(x) = f_X^{\mathsf{cont}}(x) + f_X^{\mathsf{disc}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(x)$$

  hatten wir den Erwartungswert zu $\mu := \mathrm{E}[X] = \frac{3}{8}$ berechnet.

- Die Varianz ergibt sich dann durch eine beliebige der beiden Formeln zu

$$\mathrm{Var}[X] = \left\{ \begin{array}{c} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)^2 \\ \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \end{array} \right\} = \frac{5}{192}\,.$$

24.5.4. Integration von Zufallsvariablen

Beobachtung Die Varianz einer skalaren ZV X kann man als Erwartungswert der quadrierten Abweichung $X - \mathrm{E}[X]$ auffassen. Das heißt, wenn man definiert

$$\mathrm{E}[g(X)] := \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx\,,$$

so gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2\,.$$

Frage Kann man $\mathrm{E}[g(X)]$ auch berechnen, wenn man statt der Verteilungsdichte f_X die Verteilungsfunktion F_X, die Verteilung $\mathbf{P}_X$ auf $\mathbb{R}$ oder auch nur das Maß $\mathbf{P}$ auf Ω gegeben hat?

Antwort Zur Berechnung von $\mathrm{E}[g(X)]$ gibt es verschiedene Möglichkeiten, die alle auf dasselbe Ergebnis führen:

1. Man kann ein sogenanntes Maßintegral (siehe unten) mit Hilfe des Maßes $\mathbf{P}$ definieren:
$$\mathrm{E}[g(X)] := \int_\Omega g(X(\omega))\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\,.$$

2. Dasselbe geht auch mit der Verteilung $\mathbf{P}_X$ (die ja auch ein Maß ist):
$$\mathrm{E}[g(X)] := \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x)\,.$$

3. Mit der Verteilungsfunktion F_X kann ein sogenanntes Stieltjes-Integral (siehe unten) berechnet werden:
$$\mathrm{E}[g(X)] := \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}F_X(x)\,.$$

4. Unter Verwendung der Verteilungsdichte $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhält man eine einfache Integration plus Summation:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[g(X)] &:= \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X^{\mathsf{cont}}(x)\,dx + \sum_i p_i g(x_i)\,.\end{aligned}$$

24.5.10 Bemerkungen:

- Um ein Maßintegral $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$ zu berechnen, approximiert man die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit einfachen Funktionen $\tilde{f}$, die auf einer disjunkten Zerlegung $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ stückweise konstant sind, d.h.
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} c_1 & x \in A_1 \\ c_2 & x \in A_2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$
und für die das Maß-Integral einfach als
$$\int_\Omega \tilde{f}\,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^\infty c_i \mu(A_i)$$
definiert werden kann. Eine sinnvolle Konvention ist hier $0 \cdot \infty = 0$ im Falle von $c_i = 0$ und $\mu(A_i) = +\infty$.

- Das Stieltjes-Integral
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}h(x)$$

mit einer monotonen Verteilungsfunktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ approximiert man analog zum Riemann-Integral mit Summen der Form

$$U_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - h(x_{i-1})) \inf_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)\,,$$
$$O_\Delta(f) := \sum_{i=1}^{n} (h(x_i) - h(x_{i-1})) \sup_{\xi \in [x_{i-1}, x_i]} f(\xi)\,.$$

Es gilt:

- Das Riemann-Integral entspricht offenbar dem Spezialfall $h(x) = x$.
- Wenn h differenzierbar ist, so gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}h(x) = \int_a^b f(x)h'(x)\,dx$.

24.5.11 Eigenschaften: Alle oben erwähnten Integrale (Maßintegral, Stieltjes-Integral, Integral/Summe mit Dichte) haben die schon vom Riemann-Integral her bekannten Eigenschaften:

- Linearität: Für Funktionen f, g, Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und eine Teilmenge A von Ω bzw. $\mathbb{R}$ (je nach Integraltyp) gilt
$$\int_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$$
- Positivität: Für $f \geqslant 0$ ist auch $\int_A f \geqslant 0$.
- $\int_A f = 0$ falls A eine Nullmenge ist oder $f|_A \equiv 0$.
- Falls $f|_A \equiv c \in \mathbb{R}$ so gilt $\int_A f = c \int_A 1$.
- Additivität: Für $A = A_1 \cup A_2$ gilt
$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f\,.$$

24.5.12 Bemerkungen:

- Die Integration mit Verteilungsdichte f_X ist normalerweise die praktischste Methode, um $E(g(X))$ auszurechnen.
- Das Maßintegral ist wegen seiner großen Allgemeinheit von theoretischer Bedeutung, die praktische Anwendung ist aber oft schwierig (siehe Übung unten). Eine Ausnahme von dieser Regel ist, wenn die zu integrierende Funktion bereits „einfach“ (stückweise konstant) gegeben ist.
- Das Stieltjes-Integral ist für numerische Approximationen recht angenehm, da man dabei weder mit Maßen noch mit allgemeinen Dichten, sondern nur mit der (allerdings im allgemeinen unstetigen) Verteilungsfunktion F_X arbeiten muss.

- Wenn $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ diskret ist mit $\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, so ist oft die Formel

$$\mathrm{E}[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i g(X(\omega_i))$$

die bequemste Berechnungsmethode. Sie lässt sich durch Zusammenfassen von Punkten mit gleichem X-Wert einfach auf die Maßintegration zurückführen.

24.5.13 Übung:

- Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem beliebigen Maßraum (Ω, μ) ist dadurch definiert, dass die Mengen $f^{-1}(I)$ für beliebige Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ μ-messbar sind. (Dies ist in der Praxis eigentlich immer erfüllt.)
- Überlegen Sie sich, wie man eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ mit einfachen Funktionen approximieren und damit das Integral $\int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ näherungsweise berechnen könnte.
- Worin liegt wohl die technische Schwierigkeit dieses Vorgehens?

24.5.5. Erwartungswert

24.5.14 Definition: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine skalare Zufallsvariable, deren Verteilung durch eine der Größen $\mathbf{P}$ (Maß auf Ω), $\mathbf{P}_X$ (Maß auf $\mathbb{R}$), F_X (Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$) bzw. f_X (Verteilungsdichte mit kontinuierlichem und/oder diskreten Teil) bestimmt ist. Dann definieren wir den Erwartungswert von X als die Größe

$$\mathrm{E}[X] = \int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{d}F_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx\,,$$

wobei irgendeines der Integrale verwendet werden darf.

24.5.15 Beispiel: Für die Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$f_X(x) = f_X^{\mathsf{cont}}(x) + f_X^{\mathsf{disc}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(x)$$

würde sich der Erwartungswert berechnen als

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x f_X^{\mathsf{cont}}(x)\,dx}_{=\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{8}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(x)\,dx}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}\,.$$

24.5.6. Varianz

24.5.16 Definition: Es sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine skalare Zufallsvariable, deren Verteilung durch eine der Größen $\mathbf{P}$ (Maß auf Ω), $\mathbf{P}_X$ (Maß auf $\mathbb{R}$), F_X (Verteilungsfunktion auf $\mathbb{R}$) bzw.

f_X (Verteilungsdichte mit kontinuierlichem und/oder diskreten Teil) bestimmt ist. Dann definieren wir die Varianz als die „mittlere quadratische Abweichung“ von $\mathrm{E}[X]$:

$$\mathrm{Var}[X] := \mathrm{E}[(X - \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{=:E\in\mathbb{R}})^2] = \int_\Omega (X(\omega) - E)^2 \,\mathrm{d}\mathbf{P} =$$
$$\int_{\mathbb{R}} (x-E)^2 \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X = \int_{\mathbb{R}} (x-E)^2 \,\mathrm{d}F_X = \int_{\mathbb{R}} (x-E)^2 f_X(x)\,dx\,,$$

wobei wieder eine beliebige der Integrationen verwendet werden darf.
Weiter definieren wir die Standardabweichung als $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.

24.5.17 Bemerkung: Wegen $\mathrm{E}[1] = 1$ und mit $E := \mathrm{E}[X] \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[(x-E)^2] = \mathrm{E}[x^2 - 2Ex + E^2]$$
$$= \mathrm{E}[x^2] - 2E\mathrm{E}[x] + E^2 = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$$

Die entstandene Formel $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2$ ist ohne elektronische Hilfsmittel normalerweise einfacher zu berechnen.

24.5.18 Beispiel: Für die obige Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$f_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(x)$$

würde sich die Varianz berechnen als

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \mathrm{E}[X]^2 \\ &= \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{9}{64} \\ &= \frac{8+24-27}{192} = \frac{5}{192}\,. \end{aligned}$$

24.5.19 Bemerkung:

- Wenn $|\Omega| = \infty$, so kann man sich leicht Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ überlegen, für welche die Begriffe Erwartungswert und Varianz keinen Sinn machen (siehe Übung).
- Die Konstruktion solcher Problemfälle geschieht, indem man Bereichen mit kleiner Wahrscheinlichkeit so große Werte von X zuweist, dass die Integralapproximationen nicht konvergieren.
- In der Praxis[¶] spielen solche Zufallsvariablen jedoch keine wesentliche Rolle, und wir werden im Folgenden davon ausgehen, dass $\mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ für die uns interessierenden X wohldefiniert sind.

[¶] wenigstens außerhalb von Katastrophenstudien

24.5.7. Diskretes Beispiel

24.5.20 Beispiel: Ein Spielcasino bietet Ihnen folgendes Spiel an: Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt und die Summe der Augenzahlen betrachtet. Im Falle eines Ergebnisses kleiner oder gleich 10 müssen Sie einen Einsatz α zahlen, für ein Ergebnis von 11 oder 12 bekommen Sie das Zehnfache von α zurück. Sollte man sich auf dieses Spiel einlassen?

Vorbemerkung Die erste und wichtigste Frage ist natürlich der „Erwartungswert“ des Spiels. Um diesen zu berechnen, modellieren wir es wie folgt:

1. Es sei $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ und $\mathbf{P}$ durch die Gleichverteilung gegeben.

2. Der Gewinn/Verlust wird durch die ZV X mit Werten

$$X : \{1, \dots, 6\}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (\omega_1, \omega_2) \mapsto \begin{cases} -\alpha & \omega_1 + \omega_2 \leqslant 10 \\ 10\alpha & \omega_1 + \omega_2 > 10 \end{cases}$$

   beschrieben.

24.5.21 Rechnung: Weil die Funktion X nur zwei Werte annimmt (und daher eine „einfache“ Funktion ist) und weil $(\Omega, \mathbf{P})$ eine sehr einfache Struktur hat (Laplace-Raum), ist hier die Maß-Integration mit $\mathbf{P}$ am einfachsten:

$$\mathrm{E}[X] = 10\alpha \cdot \mathbf{P}(\text{„}X = 10\alpha\text{“}) - \alpha \cdot \mathbf{P}(\text{„}X = -\alpha\text{“})\,,$$

und wegen

$$\mathbf{P}(\text{„}X = 10\alpha\text{“}) = \mathbf{P}(\{(5,6),(6,5),(6,6)\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

und

$$\mathbf{P}(\text{„}X = -\alpha\text{“}) = 1 - \mathbf{P}(\text{„}X = 10\alpha\text{“}) = \frac{11}{12}$$

erhalten wir

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{12} \cdot 10\alpha - \frac{11}{12} \cdot \alpha = -\frac{\alpha}{12}\,.$$

Das Spiel lohnt sich also wohl nicht...

24.5.22 Übung: Noch einige Fragen zum Nachdenken über dieses Beispiel:

- Sollte man auf das umgekehrte Spiel eingehen? Welche Voraussetzungen könnten in der Praxis noch wichtig sein?

- Man berechne auf die gleiche Weise die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ für dieses Beispiel. Wie könnte man diese Werte sinnvoll interpretieren?

24.5.8. Kontinuierliches Beispiel

24.5.23 Beispiel: Beim Wurf eines Dart-Pfeils auf eine Zielscheibe vom Radius R gehen wir davon aus, dass der Pfeil trifft und dass alle Punkte der Scheibe mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden können. Die uns interessierende Größe ist, wie weit der Pfeil vom Zentrum entfernt ist. Um dies mathematisch zu modellieren, betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant R\}$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{\pi R^2}\operatorname{vol}(A)$ für $A \subset B_R(0)$. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist dann einfach die Entfernung eines Punktes vom Zentrum also $X(\omega) = \|\omega\|$. Die Verteilungsfunktion F_X berechnet sich dann für $0 \leqslant r \leqslant R$ wie folgt

$$F_X(r) = \mathbf{P}_X(]-\infty, r]) = \mathbf{P}(B_r(0)) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 .$$

Weil F_X nicht springt, hat die zugehörige Dichte keine Dirac-Delta-Anteile und ist gegeben als

$$f_X(r) = F_X'(r) = \begin{cases} 0 & r \leqslant 0 \\ \frac{2r}{R^2} & 0 < r < R \\ 0 & r \geqslant R \end{cases} .$$

Der Erwartungswert $\mathrm{E}[X]$ berechnet sich damit zu

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} r f_X(r)\, dr = \int_0^R r\frac{2r}{R^2}\, dr = \frac{2}{3}R,$$

die Varianz berechnet sich dann zu

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{\mathbb{R}} (r - \frac{2}{3}R)^2 f_X(r)\, dr = \int_0^R (r - \frac{2}{3}R)^2 \frac{2r}{R^2}\, dr = \frac{R^2}{18}$$

und die Standardabweichung wäre $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \frac{R}{3\sqrt{2}}$.

24.5.9. Tschebyscheffsche Ungleichung

Beobachtung Die Varianz enthält offenbar Informationen darüber, wie sehr die möglichen Ergebnisse von einem Mittelwert abweichen (sie misst ja gerade solche Abweichungen!).

Frage Lässt sich das quantifizieren?

24.5.24 Satz: (Tschebyscheffsche Ungleichung) Es sei X eine beliebige Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbf{P}_X$, Erwartungswert $E := \mathrm{E}[X] < \infty$, Varianz $\mathrm{Var}[X] < \infty$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$. Dann gilt für beliebiges $d > 0$

$$\mathbf{P}(\text{„}|X - E| \geqslant d\sigma\text{“}) = \mathbf{P}_X(\{x \in \mathbb{R} \mid |x - E| \geqslant d\sigma\}) \leqslant \frac{1}{d^2},$$

bzw. (äquivalent dazu)

$$\mathbf{P}(\text{„}|X - E| < d\sigma\text{“}) = \mathbf{P}_X(]E - d\sigma, E + d\sigma[) \geqslant 1 - \frac{1}{d^2}.$$

24.5.25 Anwendung: Für ein durch eine ZV X mit Erwartungswert $E := \mathrm{E}[X]$ und Standardabweichung $\sigma := \sigma(X)$ beschriebenes Zufallsexperiment liegen höchstens $\frac{1}{9}$ aller Ergebnisse außerhalb des Intervalls $]E - 3\sigma, E + 3\sigma[$ und mindestens $\frac{8}{9}$ der beobachteten Ergebnisse in diesem Intervall.

Beweis Ohne Einschränkung können wir $\mathrm{E}[X] = 0$ annehmen (ansonsten arbeiten wir einfach mit $Y := X - \mathrm{E}[X]$). Dann gilt aber

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\ &\geqslant \int_{|x|\geqslant d\sigma} x^2 \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\ &\geqslant d^2\sigma^2 \int_{|x|\geqslant d\sigma} 1 \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\ &= d^2\sigma^2\, \mathbf{P}_X(\{x \mid |x| \geqslant d\sigma\}),\end{aligned}$$

und wegen $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$ folgt die Behauptung.

24.5.26 Bemerkung:

- Die Abschätzung ist scharf, weil für die spezielle Verteilung

$$\mathbf{P}_X = \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{-\varepsilon} + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\varepsilon}$$

mit $\varepsilon = d\sigma$ Gleichheit gilt.
Übung: Man folge dem Beweis, um zu sehen, wie man darauf kommt!
Frage: Welches Zufallsexperiment könnte diese Verteilung beschreiben?

- Allerdings haben viele wichtige Verteilungen nicht diese Gestalt, sondern konzentrieren sich im Gegenteil um $\mathrm{E}[X]$ herum. In diesen Fällen ist die Tschebyscheffsche Ungleichung viel zu pessimistisch.

- Beispielsweise liegt für die sehr wichtige Normalverteilung nur etwa $2.7 \cdot 10^{-3}$ der Verteilung außerhalb des Bereichs $]E-3\sigma, E+3\sigma[$, was die Tschebyscheff-Ungleichung um den Faktor 40 überschätzt (siehe oben).

24.6. Einige wichtige Verteilungen

24.6.1. Diskrete Verteilungen

Gleichverteilung

24.6.1 Definition: X heißt gleichverteilt auf den (paarweise verschiedenen) Punkten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, wenn $\mathbf{P}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_{x_k}$.

24.6.2 Bemerkung: Erwartungswert und Varianz einer gleichverteilten ZV berechnen sich als

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 .$$

24.6.3 Beispiel: Augenzahlen beim Würfeln.

Bernoulli-Verteilung

24.6.4 Definition: X heißt Bernoulli-verteilt wenn es die Verteilung

$$\mathbf{P}_X = (1-p)\tilde{\delta}_0 + p\tilde{\delta}_1$$

besitzt.

24.6.5 Beispiel: Alle möglichen Ja/Nein-Entscheidungen.

24.6.6 Bemerkung: Erwartungswert und Varianz einer Bernoulli-verteilten ZV berechnen sich als

$$\mathrm{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)\,.$$

24.6.7 Übung: (trivial)

- Wann ist die Varianz einer Bernoulli-Verteilung 0?
- Was bedeutet das?

Binomialverteilung

24.6.8 Definition: X heißt binomialverteilt, wenn es die Verteilung

$$\mathbf{P}_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tilde{\delta}_k$$

besitzt.

24.6.9 Bemerkung:

- Die Binomialverteilung $B(n,p)$ ist für $n=1$ einfach die Bernoulli-Verteilung zum Parameter p.
- Umgekehrt ergibt sie sich aber auch durch Addition von n unabhängigen Bernoulli-Verteilungen.
- Beispielsweise beschreibt $B(n,\frac{1}{2})$ die Verteilung der Summe von n Münzwürfen mit Ergebnissen aus $\{0,1\}$.

24.6.10 Satz: Erwartungswert und Varianz dieser binomialverteilten ZV X berechnen sich als

$$\mathrm{E}[X] = np\,, \quad \mathrm{Var}[X] = np(1-p)\,.$$

Dies ist offenbar gerade das n-fache von Erwartungswert/Varianz der Bernoulli-Verteilung.

Beweis Dies folgt am einfachsten aus einem späteren allgemeinen Resultat, welches besagt, dass $E(\sum_i X_i) = \sum_i \mathrm{E}[X_i]$ und $\mathrm{Var}[\sum_i X_i] = \sum_i \mathrm{Var}[X_i]$ für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Die Behauptung folgt dann, wenn man die Binomialverteilung durch Addition von n unabhängigen Bernoulli-Variablen erhält.

Geometrische Verteilung

24.6.11 Definition: Die ZV X heißt geometrisch verteilt, falls

$$\mathbf{P}_X = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}(1-p)\tilde{\delta}_k$$

für ein $p \in]0,1[$.

24.6.12 Beispiel: Mehrfache Durchführung eines Bernoulli-Experiments (z.B. Münzwurf) bis zum Erfolgsfall.

24.6.13 Satz: Es gilt für die geometrische Verteilung

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{1-p}, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{p}{(1-p)^2}.$$

Beweis

- Zuerst gilt wegen der Formel für die geometrische Reihe

$$\mathrm{E}[1] = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1}(1-p) = (1-p)\sum_{k=0}^{\infty} p^k = 1.$$

- Als nächstes gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}(1-p) &= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{dp}p^k \\ &= (1-p)\frac{d}{dp}\left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\right) = (1-p)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}.\end{aligned}$$

- Auch die Berechnung der Varianz geschieht mit demselben Trick. Die Rechnung fängt an mit

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^2] &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p^{k-1}(1-p) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)p^{k-1}(1-p)}_{=(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\sum_{k=1}^{\infty}p^{k+1}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1}(1-p)}_{=E(X)} \\ &= \ldots\end{aligned}$$

  Der Rest der Rechnung ist eine Übung.

Poisson-Verteilung

24.6.14 Definition: Die ZV X heißt Poisson-verteilt, falls

$$\mathbf{P}_X = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \tilde{\delta}_k$$

für ein $\lambda > 0$. Der Parameter λ heißt Rate, Häufigkeit oder Intensität der Verteilung.

24.6.15 Interpretation: Die Poisson-Verteilung zählt zufällige Ereignisse, die während eines bestimmten Zeitraum geschehen zum Beispiel:

1. Zahl radioaktiver Zerfälle pro Sekunde
2. Schäden eines Versicherers im Geschäftsjahr
3. Zahl von Kundenanrufen bei einem Call-Center pro Tag
4. ...

24.6.16 Übung: Wie sieht die Poisson-Verteilung graphisch aus? Man mache sich das Verhalten klar und plotte es mit Matlab oder einem CAS.

24.6.17 Satz: Es gilt für die Poisson-Verteilung

$$\mathrm{E}[X] = \lambda\,, \quad \mathrm{Var}[X] = \lambda\,.$$

Beweis Übung.

24.6.2. Kontinuierliche Verteilungen

Gleichverteilung

24.6.18 Definition: Eine ZV X ist gleichverteilt im Intervall $[a, b]$, wenn sie die Verteilungsdichte

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

24.6.19 Satz: Die ZV X sei gleichverteilt im Intervall $[a, b]$. Dann gilt

$$\mathrm{E}[X] = \frac{a+b}{2}\,, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{12}(b-a)^2\,.$$

Beweis Übung.

Normalverteilung (Gauß-Verteilung)

24.6.20 Definition: Eine ZV X heißt normalverteilt (Gauß-verteilt), wenn sie die Verteilungsdichte

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

für $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ besitzt. Für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ ergibt sich die Standardnormalverteilung mit der Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Oft bezeichnet man die Normalverteilung mit $N(\mu, \sigma^2)$, die Standardnormalverteilung entsprechend mit $N(0,1)$.

24.6.21 Satz: Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit Parametern μ, σ^2. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} 1 \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx &= 1\,, \\ \mathrm{E}[X] &= \mu\,, \\ \mathrm{Var}[X] &= \sigma^2\,. \end{aligned}$$

Beweis Wir zeigen die Aussage zuerst für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X:

- Zuerst gilt

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^2}{2}}\,dx_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_2^2}{2}}\,dx_2\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}\,\mathrm{d}(x_1, x_2) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi\,, \end{aligned}$$

  und somit

$$\mathrm{E}[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1\,.$$

- Zweitens gilt

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0\,,$$

  weil der Integrand antisymmetrisch ist.

- Drittens gilt

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}} x \cdot x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

  und somit für das standardnormalverteilte X

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

Die entsprechenden Aussagen für die Verteilung $N(\mu, \sigma^2)$ folgt, weil

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

gerade die Dichte der transformierten Zufallsvariable $Y = \sigma X + \mu$ ist. Hierfür gilt aber

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[\sigma X + \mu] = \sigma \underbrace{\mathrm{E}[X]}_{=0} + \mathrm{E}[\mu] = \mu$$

und

$$\mathrm{Var}[\sigma X + \mu] = \mathrm{Var}[\sigma X] = \mathrm{E}[\sigma^2 X^2] = \sigma^2 \underbrace{\mathrm{E}[X^2]}_{=1} = \sigma^2 .$$

24.6.22 Bemerkungen:

- Die Normalverteilung ist äußerst wichtig! Das liegt vor allem daran, dass sie als Grenzwert entsteht, wenn sich eine Zufallsvariable X aus vielen kleinen und voneinander unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ additiv zusammensetzt.

- In der Praxis kommt dies sehr oft vor (Beispiel: Zusammensetzung eines Fehlers aus mehreren kleineren Fehlern). Daher beobachtet man für Zufallsvariablen relativ oft eine Normalverteilung, oder nimmt das Vorliegen einer Normalverteilung mangels besserer Alternativen auch oft einfach an.

- Ein Spezialfall davon ist die Binomialverteilung $\mathrm{Bin}(n, p)$, die sich ja durch n-fache Durchführung eines Bernoulli-Experiments $\mathrm{Ber}(p)$ und Addition der Ergebnisse ergibt. Hier gilt

  $$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

  mit $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

  Hiervon kann man sich mit Matlab oder einem CAS leicht graphisch überzeugen.

- Das allgemeine Resultat für dieses Phänomen werden wir etwas später kennenlernen („Zentraler Grenzwertsatz“).

- Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ ist

  $$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds ,$$

  was sich nicht in elementaren Funktionen (Polynome, $\exp$, $\sin$, $\cos$, etc) ausdrücken lässt. Man kann Φ aber ohne Schwierigkeiten beliebig genau numerisch approximieren.

- Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ berechnet sich daraus einfach zu $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

- In Matlab (bzw. einem CAS) findet man die Funktion erf („error function“), welche definiert ist als
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt\,.$$
Diese hängt mit Φ zusammen über $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}})$.
- Die Dichte f_X normalverteilter ZV fällt äußerst schnell ab! Aus diesem Grund beträgt etwa die Wahrscheinlichkeit, mit welcher Werte von X außerhalb des Intervalls $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ liegen, nur
$$\mathbf{P}_X(\mathbb{R}\backslash[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx 2.7 \cdot 10^{-3}\,.$$
Dies ist viel weniger als der Wert $\frac{1}{9}$, der sich mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung ergeben würde.

Exponentialverteilung

24.6.23 Definition: Eine ZV X heißt exponentialverteilt, wenn sie die Verteilungsdichte
$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geqslant 0 \end{cases}$$
für ein $\lambda > 0$ besitzt.

24.6.24 Satz: Die ZV X sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Dann gilt
$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}\,, \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Beweis Siehe Übungen.

Beispiele

- Lebensdauer eines radioaktiven Atoms
- Lebensdauer mancher technischer Komponenten oder Werkzeuge (z.B. wenn diese durch zufällige auftretende Ereignisse beschädigt werden)
- ...

24.7. Mehrdimensionale Zufallsvariablen

24.7.1. Motivation

- Meist besteht eine Messung nicht nur aus der Feststellung eines skalaren Parameters, und/oder es kommt nicht nur auf eine skalare Größe zur Beurteilung einer Situation an.

  Beispiele:

  - Messung mehrere Daten an einer Wetterstation
  - Detailliertere Kosten/Nutzenaufschlüsselung eines Ereignisses
  - ...

- Dementsprechend sind in vielen praktisch relevanten Fällen mehrere Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ oder (alternativ und äquivalent dazu) eine vektorwertige Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ relevant.
- Aus diesem Grund werden wir unsere Theorie in diesem Abschnitt auf mehrere Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ bzw. (äquivalent dazu) auf eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable X übertragen.
- Erfreulicherweise ist diese Verallgemeinerung dank unseres ausreichend abstrakten Rahmens *ohne wesentliche Änderung möglich*!!

24.7.2. Mehrdimensionale Verteilungen

24.7.1 Bezeichnung: Wir sagen $x \leqslant y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$, wenn $x_i \leqslant y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

24.7.2 Übung: Welche Ordnungseigenschaften hat diese Relation $\leqslant$? Welche Art von Ordnungsrelation ist es daher?

24.7.3 Übung: Man skizziere die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.

24.7.4 Definition: Es sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Eine mehrdimensionale oder multivariate Zufallsvariable ist eine (messbare) Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
- Die Verteilung $\mathbf{P}_X$ von X ist das durch

$$A \subset \mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_X(A) := \mathbf{P}(X^{-1}(A)) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

  definierte Wahrscheinlichkeitsmaß *auf* $\mathbb{R}^n$.
- Die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ ist definiert als

$$F_X(x) := \mathbf{P}_X(\{y \in \mathbb{R}^n \mid y \leqslant x\}) .$$

- Auch eine Verteilungsdichte f_X kann man mittels

$$\int_A f_X(x)\, dx = \mathbf{P}_X(A)$$

  definieren, was wir später noch etwas genauer ausführen.

24.7.5 Bemerkung: Wie im skalaren Fall muss $(\Omega, \mathbf{P})$ gar nicht genau bekannt sein, um mit X zu arbeiten. Die Kenntnis der Verteilung $\mathbf{P}_X$ (oder alternativ der Verteilungsfunktion F_X oder der Verteilungsdichte f_X) auf $\mathbb{R}^n$ reicht aus.

24.7.6 Beispiel:

- Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit Werten im $\mathbb{R}^n$, für welche $\mathbf{P}_X$ definiert ist als

$$\mathbf{P}_X(A) = \frac{|B_1(0) \cap A|}{|B_1(0)|} \text{ für messbares } A \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leqslant 1\}$.

- Die Verteilungsfunktion F_X würde dann $x \in \mathbb{R}^n$ auf das (skalierte) Volumen des Durchschnitts

$$\frac{|B_1(0) \cap \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \leqslant x\}|}{|B_1(0)|}$$

abbilden. Schon im $\mathbb{R}^2$ ist das nicht angenehm ausrechenbar, im $\mathbb{R}^3$ noch weniger. Wir verzichten daher darauf...

Verteilungsdichten im $\mathbb{R}^n$

Erinnerung Oft war die Verwendung der Verteilungsdichte f_X die bequemste Art, um Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte, Varianzen, ... zu berechnen.

Frage Wie sieht die Verteilungsdichte einer $\mathbb{R}^n$-wertigen ZV aus?

Antwort Zusätzlich zu „Volumendichten“ (Dichte $\rho(x)$ auf einem Volumen V) und „Zähldichten“ (Wahrscheinlichkeiten p_i auf Punkten $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$) können hier auch noch „Liniendichten“ (auswertbar als Kurvenintegrale 1. Art) und „Flächendichten“ (auswertbar als Flächenintegrale 1. Art) auftreten. All diese Dichten müssen nichtnegativ sein.

24.7.7 Beispiel:

- Im $\mathbb{R}^2$ sei $\mathbf{P}_X(A)$ gegeben als

$$\mathbf{P}_X(A) = \frac{1}{\pi}\int_{A\cap B} x_1^2 \,\mathrm{d}(x_1, x_2) + \frac{1}{2\pi}\int_{A\cap S} x_2^2 \, ds + \frac{1}{4}\tilde{\delta}_0(A)$$

für $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ und $S = \partial B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

- Dies kann man dann für gegebene Teilmengen A auswerten. Zum Beispiel erhält man

$$\mathbf{P}_X(\mathbb{R}^2) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_B x_1^2 \,\mathrm{d}(x_1, x_2)}_{=\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_S x_2^2 \, ds}_{=\pi} + \frac{1}{4} = 1$$

- Die Verteilungsdichte könnte man dann definieren als

$$f_X(x) = \frac{x_1^2}{\pi} + \frac{x_2^2}{2\pi}\delta_S(x) + \frac{1}{4}\delta_0(x)$$

wobei $\delta_S(x)$ eine „Dirac-Linie“ ist. Ein Integral wie

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) f_X(x) \, dx$$

wird dann berechnet, indem man es in die Einzelteile zerlegt, also

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x) f_X(x)\, dx = \int_B g(x) \frac{x_1^2}{\pi}\, dx + \int_S g(x) \frac{x_2^2}{2\pi}\, ds + \frac{1}{4} g(0)\,.$$

- Solch komplizierte Wahrscheinlichkeitsmaße kommen in Anwendungen auch vor: Wie könnte etwa die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable „Golfballposition“ aussehen? Die Löcher hätten auf jeden Fall „Punktwahrscheinlichkeiten“, während ein Graben oder eine Rinne eine „Linienwahrscheinlichkeit“ liefern könnte.

24.7.8 Bezeichnung: Wieder werden wir einfach von der „Dichte“ f_X sprechen und Integrale wie

$$\int_A g(x) f_X(x)\, dx$$

betrachten. Je nach Anwendung muss dies dann als ein (oder die Summe mehrerer)

- Volumenintegrale mit Volumendichte,
- Flächenintegrale 1. Art mit Flächendichte,
- Kurvenintegrale 1. Art mit Liniendichte,
- und/oder eine gewichtete Zählung von Punkten in A

verstanden werden.

24.7.9 Definition: (Erwartungswert) $X : (\Omega, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}^n$ sei eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbf{P}_X$, Verteilungsfunktion F_X und Verteilungsdichte f_X. Dann berechnet sich der Erwartungswert von X über ein beliebiges der folgenden Integrale:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x\, \mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x\, \mathrm{d}F_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x f_X(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

24.7.10 Definition: (Kovarianz) $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sei eine $\mathbb{R}^n$-wertige Zufallsvariable, die (alternativ) durch $(\Omega, \mathbf{P})$, die Verteilung $\mathbf{P}_X$, die Verteilungsfunktion F_X oder die Verteilungsdichte f_X beschrieben wird. Der Erwartungswert von X sei $E := \mathrm{E}[X] \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}(X) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert als

$$\mathrm{Cov}(X) := \mathrm{E}[(X - E)(X - E)^T]\,.$$

Alternativ (und meist einfacher) kann man sie wieder berechnen als

$$\mathrm{Cov}(X) = \mathrm{E}[XX^T] - (\mathrm{E}[X])^2\,.$$

Die Matrixeinträge von $\mathrm{Cov}(X)$ sind die sogenannte Kovarianz $\mathrm{Cov}(X_k, X_l)$ der *skalaren* Zufallsvariablen X_k und X_l:

$$(\mathrm{Cov}(X))_{kl} = \mathrm{Cov}(X_k, X_l) := \mathrm{E}[(X_k - E_k)(X_l - E_l)]\,.$$

Auch diese kann man alternativ berechnen als

$$(\mathrm{Cov}(X))_{kl} = \mathrm{Cov}(X_k, X_l) := \mathrm{E}[X_k X_l] - E_k E_l\,.$$

24.7.11 Beispiel:

- Wir betrachten im $\mathbb{R}^2$ die durch

  $$\mathbf{P}_X(A) = \frac{|B_1(0) \cap A|}{\pi} \text{ für messbares } A \subset \mathbb{R}^2$$

  definierte Verteilung. Diese wird durch die (Volumen/Flächen)dichte

  $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \|x\| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  beschrieben.

- Hier berechnet sich der Erwartungswert zu

  $$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\pi}\int_{B_1(0)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi r\, dr = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

- Die Einträge C_{kl} der Kovarianzmatrix $C := \mathrm{Cov}(X)$ berechnen sich dann zu[‖]

  $$C_{kl} = \frac{1}{\pi}\int_{B_1(0)} x_k x_l \,\mathrm{d}(x_1, x_2) = \delta_{kl}\int_{r=0}^{1} r^3\, dr = \frac{1}{4}\delta_{kl}\,.$$

- Somit erhalten wir $\mathrm{Cov}(X) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

24.7.12 Eigenschaften:

- $\mathrm{Cov}(X)$ ist offenbar eine symmetrische Matrix.

- Es gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

  $$\begin{aligned} \xi^T \mathrm{Cov}(X)\xi &= \xi^T \left(\int (X-E)(X-E)^T\right)\xi \\ &= \int \underbrace{\xi^T (X-E)(X-E)^T \xi}_{=|\langle \xi, X-E\rangle|^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

- Die Eigenwerte von $\mathrm{Cov}(X)$ liegen daher in $\mathbb{R}_0^+$.

- Für die Diagonale gilt $(\mathrm{Cov}(X))_{kk} = \mathrm{Var}[X_k]$.

- Manchmal nennt man die Spur der Kovarianzmatrix auch die totale Varianz von X:

  $$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Spur}(\mathrm{Cov}(X)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i]\,.$$

[‖] Unbedingt nachrechnen!

24.7.3. Beispiele mehrdimensionale Verteilungen

Diskrete Verteilungen

- Auch im Mehrdimensionalen kann man natürlich Verteilungen der Form

$$\mathbf{P}_X = \sum_{i\in I} p_i \tilde{\delta}_{x_i}$$

mit $I = \{1, \dots, N\}$ oder $I = \mathbb{N}$, $p_i > 0$ und $x_i \in \mathbb{R}^n$ betrachten.

- Hier gibt es nichts wesentlich Neues, außer dass man mit Vektoren und Matrizen rechnen muss. Der Erwartungswert berechnet sich hier als

$$E := \mathrm{E}[X] = \sum_{i\in I} p_i x_i \in \mathbb{R}^n$$

und die Kovarianzmatrix berechnet sich als

$$\mathrm{Cov}(X) = \sum_{i\in I} p_i (x_i - E)(x_i - E)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Die n-dimensionale Normalverteilung

24.7.13 Definition: Es sei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix und $\mu \in \mathbb{R}^n$. Eine $\mathbb{R}^n$-wertige ZV X heißt normalverteilt oder mehrdimensional normalverteilt oder multivariat normalverteilt, wenn sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-2} (x-\mu))$$

besitzt, wobei $\Sigma^2 \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{spd}}$ und $\mu \in \mathbb{R}^n$ die Kovarianzmatrix und der Erwartungswerts der Verteilung sind. (Σ selber ist dann offenbar eine verallgemeinerte Standardabweichung.) Wir bezeichnen diese Normalverteilung dann mit $N(\mu, \Sigma^2)$. $N(\mu, \Sigma^2)$ entsteht aus der multivariaten Standardnormalverteilung $N(0, \mathbb{1})$ mit Verteilungsdichte

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}\|\hat{x}\|^2)$$

durch die Variablentransformation

$$x := \Sigma\hat{x} + \mu$$

(verallgemeinert skalieren und um den gewünschten Erwartungswert verschieben).

24.7.14 Übung: Man plotte mit Matlab oder einem CAS die Dichten der folgenden multivariaten Normalverteilungen:

1. $N(0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})$,
2. $N(0, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$,
3. $N(0, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix})$.

24.7.15 Anwendungen:

- Wenn ein Experiment die Messung mehrerer unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ beinhaltet, so ist die Verteilung $f_{(X_1,\dots,X_n)}$ multivariat normalverteilt. Σ^2 ist in diesem Fall eine Diagonalmatrix.
- Wenn hingegen die gemeinsame Verteilung $(X_1, \dots, X_n)$ durch eine multivariate Normalverteilung mit nichtdiagonaler Kovarianzmatrix $C := \Sigma^2$ beschrieben wird, so sind Einzelvariablen voneinander abhängig.**

24.7.4. Randverteilungen

24.7.16 Definition: Die Komponentenfunktionen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}$ einer multivariaten ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sind skalare Zufallsvariablen. Die Verteilung $\mathbf{P}_{X_k}$ von X_k kann man aus der Verteilung $\mathbf{P}_X$ berechnen durch

$$A \subset \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_{X_k}(A) = \mathbf{P}_X(\mathbb{R}^{k-1} \times A \times \mathbb{R}^{n-k}) \,.$$

Man nennt $\mathbf{P}_{X_k}$ die Randverteilungen von $\mathbf{P}_X$, die zugehörigen Verteilungsfunktionen F_{X_k} Randverteilungsfunktionen und die zugehörigen Verteilungsdichten f_{X_k} Randverteilungsdichten.

24.7.17 Bemerkung:

- Man kann F_{X_k} aus F_X berechnen durch

$$F_{X_k}(x_k) = \underbrace{\lim_{x_1\to\infty} \dots \lim_{x_n\to\infty}}_{\text{ohne } x_k} F_X(x_1, \dots, x_n) \,.$$

- Ebenso kann man f_{X_k} aus f_X berechnen durch

$$f_{X_k}(x_k) = \underbrace{\int_{x_1=-\infty}^{\infty} \dots \int_{x_n=-\infty}^{\infty}}_{\text{ohne } x_k} f_X(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{ohne } x_k}) \,.$$

24.7.18 Beispiel:

- Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dann ist die Randdichte von X gleich mit

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y) \, dy = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases} .$$

- Analog gilt $f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$.

**Dies bedeutet zum Beispiel, dass man im Fall $C_{ij} \neq 0$ den Wert von X_i mit Hilfe eines bekannten Werts von X_j besser vorhersagen kann.

24.7.5. Bedingte Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsvariablen

Erinnerung Es seien $A, B \subset \Omega$ Ereignisse im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit war definiert als

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}\,.$$

Frage Wie überträgt sich das auf eine bivariate ZV (X, Y) mit Verteilung $\mathbf{P}_X$, wenn A durch Festlegung von X-Werten und B durch Festlegung von Y-Werten entsteht?

Antwort

- Das Ereignis „$X \in \tilde{A}$“ mit $\tilde{A} \subset \mathbb{R}$ entspricht der Menge

  $$A = \tilde{A} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2\,,$$

  ebenso entspricht das Ereignis „$Y \in \tilde{B}$“ der Menge $B = \mathbb{R} \times \tilde{B} \subset \mathbb{R}^2$.

- Es gilt dann

  $$\mathbf{P}(X \in \tilde{A}|Y \in \tilde{B}) := \frac{\mathbf{P}_{(X,Y)}(A \cap B)}{\mathbf{P}_{(X,Y)}(B)} = \frac{\mathbf{P}_{(X,Y)}(\tilde{A} \times \tilde{B})}{\mathbf{P}_Y(\tilde{B})}$$

  wobei $\mathbf{P}_Y(\cdot) := \mathbf{P}_Y(\mathbb{R} \times \cdot)$ die Randverteilung von Y bezeichnet.

- Dies ist die Verteilung einer neuen Zufallsvariable, die wir mit „$X|Y \in \tilde{B}$“ (gesprochen: „X unter der Bedingung $Y \in \tilde{B}$“).

- Durch einen Grenzübergang $\tilde{B} = B_\varepsilon(y)$ mit $\varepsilon \to 0$ kann man hieraus auch Zufallsvariablen „$X|Y = y$“ (gesprochen: „X unter der Nebenbedingung $Y = y$“) herleiten.

- Für deren Verteilungsdichte kann man dann zeigen

  $$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}\,.$$

  Hierbei nennt man $f_{X|Y=y}(x)$ die Verteilungsdichte von X unter der Bedingung, dass der Wert $Y = y$ (z.B. durch eine Messung) festgelegt ist.

- Erinnerung: Die Randverteilung $f_Y(y)$ hatten wir dabei schon früher eingeführt als

  $$f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\,.$$

- Offenbar sichert der Faktor $\frac{1}{f_Y(y)}$, dass

  $$\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y=y}(x)\, dx = \int_{x\in\mathbb{R}} \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)}\, dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx = 1\,,$$

  wie es sich für eine Zufallsvariable gehört.

24.7.19 Bemerkung: Analog gilt natürlich auch

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\,.$$

24.7.20 Beispiel:

- Wir betrachten wieder den zweidimensionalen Zufallsvektor (X,Y) mit Dichte

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \|x\|_2 < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Falls nun z.B. für die Zufallsvariable X der Wert $\frac{1}{2}$ festgelegt wird, so hat $Y|X=\frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{Y|X=\frac{1}{2}}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})} = \frac{f_{(X,Y)}(\frac{1}{2},y)}{\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} & y \in]-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

24.7.21 Verallgemeinerung: Bei mehr als zwei Zufallsvariablen kann man auch mehrere Restriktionen betrachten, wie etwa

$$Z = \text{„}(X_1, X_2)|X_3 = a, X_4 = b\text{“}$$

((X_1,X_2) unter den Bedingungen $X_3 = a$ und $X_4 = b$). Deren Verteilungsdichte wäre dann

$$f_Z(x_1,x_2) = \frac{f_{(X_1,X_2,X_3,X_4)}(x_1,x_2,a,b)}{f_{(X_3,X_4)}(a,b)}\,.$$

24.7.6. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Erinnerung Die Ereignisse $A_1,\ldots,A_n \subset \Omega$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I \subset \{1,\ldots,n\}$ gilt

$$\mathbf{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbf{P}(A_i)\,.$$

24.7.22 Definition: Die Zufallsvariablen $X_1,\ldots,X_n$ heißen unabhängig, wenn für beliebige messbare Teilmengen $B_1,\ldots,B_n \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbf{P}_X(\underbrace{\prod_{k=1}^{n} B_k}_{:=B_1\times\ldots\times B_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}_{X_k}(B_k)\,.$$

Hierbei ist $\mathbf{P}_X$ die Verteilung der ZV $X = (X_1,\ldots,X_n)$.

24.7.23 Interpretation: Diese Definition besagt, dass für $k = 1,\ldots,n$ die Ereignisse $A_k := X_k^{-1}(B_k)$ (alternativ: „$X_k \in B_k$“, „X_k liegt in B_k“) nach der alten Definition unabhängig sind.

24.7.24 Beispiel:

- Beim Würfeln mit zwei Würfeln bezeichne X_1 die Augenzahl des ersten und X_2 die Augenzahl des zweiten Würfels.
- Wenn wir die Unabhängigkeit der Augenzahlen annehmen, so sind die Ereignisse „$X_1 \in B_1 := \{1,2\}$“ und „$X_2 \in B_2 := \{3,4,5\}$“ unabhängig.
- Es gilt dann
$$B_1 \times B_2 = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$
und somit
$$\mathbf{P}_X(B_1 \times B_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{P}_{X_1}(\{1,2\})\cdot\mathbf{P}_{X_2}(\{3,4,5\})\,.$$

24.7.25 Satz: Diese Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X = (X_1,\ldots,X_n)$ ist äquivalent zu folgenden Forderungen:

1. Die Verteilungsfunktion F_X berechnet sich als Produkt der Randverteilungsfunktionen F_{X_k}, d.h.
$$F_X(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)\,.$$
2. Die Verteilungsdichte f_X berechnet sich als Produkt der Randverteilungsdichten f_{X_k}, d.h.
$$f_X(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k)\,.$$

Beweisidee

1. Es gilt
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbf{P}_X(\{y\in\mathbb{R}^n \mid y \leqslant x\}) \\ &= \mathbf{P}_X(\prod_{k=1}^{n}\{y_k\in\mathbb{R} \mid y_k \leqslant x_k\}) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}_{X_k}(]-\infty,x_k]) \\ &= \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k) \end{aligned}$$
2. Für $B = B_1\times\ldots\times B_n$ gilt
$$\int_B f_X(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n) = \mathbf{P}_X(B) = \prod_{k=1}^{n}\mathbf{P}_{X_k}(B_k) = \prod_{k=1}^{n}\int_{B_k} f_{X_k}(x)\,dx\,.$$
Die Aussage für die Punktwerte erhält man, wenn man B als Würfel der Kantenlänge ε um einen festen Punkt x wählt und den Grenzwert $\varepsilon\to 0$ betrachtet.

24.7.26 Übung:

- Die Forderung der Darstellbarkeit einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

ist eine sehr starke Einschränkung.

- Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind so darstellbar?
  1. $f(x_1, x_2) = 1$
  2. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2 + x_1$
  3. $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$
  4. $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$

24.7.27 Folgerung: Wenn zwei skalare ZV X und Y unabhängig sind, so ist $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Beweis Wenn wir die Erwartungswerte

$$E_X = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx \text{ und } E_Y = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy$$

einführen, so gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (x - E_X)(y - E_Y) f_{(X,Y)}\, \mathrm{d}(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (x - E_X)(y - E_Y) f_X(x) f_Y(y)\, \mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} (x - E_X) f_X(x)\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (y - E_Y) f_Y(y)\, dy \right) \\
&= 0 \cdot 0 = 0\,.
\end{aligned}$$

24.7.28 Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht! So sind zum Beispiel für die zweidimensionale Dichte

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Zufallsvariablen X und Y nicht unabhängig, weil f_X nicht als Produkt $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ geschrieben werden kann (warum nicht?).
Andererseits hatten wir in diesem Fall bereits $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ berechnet. Folglich ist $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ zwar ein sehr nützlicher und notwendiger Indikator für die Unabhängigkeit von X und Y, aber bei weitem nicht hinreichend dafür!

24.7.29 Übung: Folgern Sie, dass für unabhängige ZV X und Y (oder allgemeiner, falls X,Y beliebig mit $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$) gilt $\mathrm{E}[XY] = \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$.

24.7.7. Korrelation

Beobachtung Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen hängt von ihrer Skalierung ab.

Frage Gibt es eine verwandte Größe, die von Skalierungen unabhängig ist?

Idee Man „normiert“ $\mathrm{Cov}(X,Y)$ mit Hilfe von $\mathrm{Var}[X]$ und $\mathrm{Var}[Y]$.

24.7.30 Definition: (Korrelation) Es seien X und Y zwei skalare Zufallsvariablen. Dann ist die Korrelation von X und Y definiert als

$$\mathrm{Cor}(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\sqrt{\mathrm{Var}[Y]}} \in [-1,1]\,.$$

24.7.31 Bemerkung:

- Dies ist vollkommen analog zur bereits bekannten Formel

$$\cos \sphericalangle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\,.$$

- Der Hintergrund davon ist, dass für mittelwertfreie X und Y

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] = \int_\Omega X(\omega)Y(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) =: \langle X,Y\rangle_{L^2(\Omega)}$$

  tatsächlich ein Skalarprodukt (das sogenannte L^2-Skalarprodukt) ist. Die zugehörige Norm ist dann

$$\|X\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{\langle X,X\rangle_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\mathrm{Cov}(X,X)} = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}\,.$$

- Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sieht man dann aber auch, dass der Wertebereich tatsächlich in $[-1,1]$ enthalten sein muss.
- Eine Korrelation von 1 zwischen X und Y liegt genau dann vor, wenn

$$Y = \lambda X + c \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 \text{ und } c \in \mathbb{R}$$

  gilt (wenigstens außerhalb einer Nullmenge).
- Bei einer Korrelation von -1 ist dieselbe lineare Beziehung mit $\lambda < 0$ erfüllt.
- Unabhängige Zufallsvariablen X und Y haben die Korrelation 0.
- Die Umkehrung gilt normalerweise nicht (die unendlich vielen Bedingungen in $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ können nicht einfach durch eine einzige ersetzt werden).
- Sie gilt aber für multivariat normalverteilte Zufallsvariablen (die ja durch Angabe von Erwartungswert und Kovarianzmatrix bereits vollständig festgelegt sind).

Funktionen unabhängiger Zufallsvariablen

24.7.32 Satz: $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ seinen unabhängige ZV und $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien (messbare) Funktionen. Dann sind die Zufallsvariablen

$$G_i := g_i \circ X_i : \ \omega \mapsto g_i(X_i(\omega)) , \quad i = 1, \ldots, n$$

ebenfalls unabhängig. BEZEICHNUNG: Man schreibt oft auch $G_i = g_i(X_i)$.

Beweis Es seien $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ und $B_i := g_i^{-1}(A_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt wegen $G_i = g_i \circ X_i$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{(G_1,\ldots,G_n)}(\prod_{i=1}^n A_i) &= \mathbf{P}(\prod_{i=1}^n G_i^{-1}(A_i)) \\
&= \mathbf{P}(\prod_{i=1}^n (g_i \circ X_i)^{-1}(A_i)) = \mathbf{P}(\prod_{i=1}^n X_i^{-1}(g_i^{-1}(A_i))) \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i^{-1}(B_i)) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(G_i^{-1}(A_i)) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}_{G_i}(A_i)
\end{aligned}$$

24.7.33 Beispiel:

- Wenn X_1 und X_2 unabhängig voneinander sind, so sind auch $Y_1 = X_1^2$ und $Y_2 = X_2^3$ unabhängig voneinander.
- Wenn X_1 und X_2 die Augenzahlen zweier unabhängiger Würfelexperimente bezeichnen, so sind auch die ZV $G_1 = g(X_1)$ und $G_2 = g(X_2)$ mit $g(x) = x \bmod 2$ („gerade oder ungerade?“) voneinander unabhängig.

24.8. Grenzwertsätze

24.8.1. Addition von Zufallsvariablen

24.8.1 Problem: Es seien X und Y skalare Zufallsvariablen mit gemeinsamer multivariater Verteilung $\mathbf{P}_{(X,Y)}$. Wie berechnet man die Verteilung $\mathbf{P}_Z$ der Zufallsvariablen $Z = X + Y$?

Antwort

- Es gilt für $A \subset \mathbb{R}$
$$\mathbf{P}_Z(A) = \mathbf{P}_{(X,Y)}(\{(x,y) \mid x + y \in A\}) .$$
- Für die Dichte f_Z der skalaren ZV $Z = X + Y$ bedeutet das
$$\begin{aligned}
\int_A f_Z(z)\, dz \qquad &= \qquad \int_{\{(x,y)|x+y\in A\}} f_{(X,Y)}(x,y)\, \mathrm{d}(x,y) \\
&\overset{z=x+y,\, y=z-x}{=} \quad \int_{z\in A}\int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, z-x)\, dx\, dz \\
&\overset{\text{alternativ: } x=z-y}{=} \quad \int_{z\in A}\int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(z-y, y)\, dy\, dz .
\end{aligned}$$

- Wenn man A als kleine Umgebung von z wählt, kann man hieraus schließen

$$f_Z(z) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, z-x)\, dx = \int_{y\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(z-y, y)\, dy\,.$$

24.8.2 Beispiel:

- Sei $X = (X_1, X_2)$ eine bivariate ZV mit Dichte

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\tilde{\delta}_{B_1(0)} = \frac{1}{\pi}\begin{cases} 1 & x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dann berechnet sich die Dichte f_Z der ZV $Z = X_1 + X_2$ als

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{x\in\mathbb{R}} f_X(x, z-x)\, dx \\ &= \text{Länge des Schnitts von } B_1(0) \text{ mit der Geraden } x_1 + x_2 = z \\ &= \begin{cases} 0 & |z| \geqslant \sqrt{2} \\ 2(1 - \sqrt{1 - z^2/2}) & z \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\end{cases}. \end{aligned}$$

24.8.3 Bemerkung:

- Wenn X und Y unabhängig sind mit Verteilungsdichten f_X und f_Y, so gilt für die Verteilungsdichte f_Z von $Z = X + Y$

$$f_Z(z) = \int_{x\in\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x, z-x)\, dx = \int_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$

- Diesen letzten Ausdruck bezeichnet man als Faltung oder Konvolution von f_X und f_Y und schreibt dafür $f_Z = f_X * f_Y$.

- WISSEN: Die Faltung ist auch in der Signalverarbeitung eine sehr wichtige Operation, weil $F * S$ das Ergebnis der Anwendung eines Filters F auf ein Signal S liefert.

24.8.4 Beispiel:

- $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig voneinander und alle identisch Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

- Man kann dann ausrechnen (Übung), dass $f_Z = f_{X_1} * \ldots * f_{X_n}$ die Dichte der Binomialverteilung $B(n, p)$ ist.

- Dies muss auch so sein, da wir die Binomialverteilung mittels n-facher Durchführung unabhängiger Bernoulli-Experimente definiert hatten.

24.8.2. Gesetz der großen Zahlen

Frage Wie bestimmt man experimentell den Erwartungswert einer skalaren Zufallsvariablen X mit einer unbekannten Verteilung $\mathbf{P}_X$?

Idee Man führt das zugehörige Zufallsexperiment n-mal unabhängig durch und erhält so ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$, welches man Stichprobe nennt. Dann verwendet den Mittelwert $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ als Schätzung für den Erwartungswert $\mu := \mathrm{E}[X]$.

Frage Warum funktioniert das? Wie gut ist diese Schätzung?

24.8.5 Satz: (Gesetz der großen Zahlen)

- Es seien $(X_1, \ldots, X_n)$ unabhängige Zufallsvariablen mit identischer Verteilung $\mathbf{P}_{X_i} = \mathbf{P}_X$, welche Erwartungswert $\mathrm{E}[X] = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$ besitzt.
- Dann gilt für $Z_n := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

$$\mathrm{E}[Z_n] = \mu\,, \quad \mathrm{Var}[Z_n] = \frac{\sigma^2}{n}\,, \quad \sigma(Z_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

- Weiter gilt

$$\mathbf{P}(|Z_n - \mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\,.$$

Beweis

- Die Beziehung $\mathrm{E}[Z_n] = \mu$ gilt wegen der Linearität des Erwartungswerts sogar für abhängige ZV $X_1, \ldots, X_n$.
- Weil die X_i unabhängig sind gilt $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ falls $i \neq j$ und somit

$$\mathrm{Var}[Z_n] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \frac{1}{n^2} n \mathrm{Var}[X] = \frac{\sigma^2}{n}\,.$$

- Anwendung der Ungleichung von Tschebyscheff in der Form

$$\mathbf{P}(\text{„}|Z_n - \mu| \geqslant \varepsilon\text{“}) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[Z_n]}{\varepsilon^2}$$

liefert dann die letzte Behauptung.

24.8.6 Folgerung:

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X lässt sich durch wiederholtes Ausführen des zugehörigen Zufallsexperiments bestimmen.
- Um eine Genauigkeit ε mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \delta$ zu erreichen, muss man

$$n \geqslant \frac{\sigma^2}{\delta\varepsilon^2}$$

Versuche durchführen.

- Es gilt also $n = O(\varepsilon^{-2})$ bzw. $\varepsilon = O(\sqrt{n})$, was einen recht hohen Aufwand zum Erreichen einer bestimmten Genauigkeit impliziert.
- Diese $O(\sqrt{n})$-Abhängigkeit der Genauigkeit ist typisch für die auf Zufall basierenden Monte-Carlo-Verfahren.

24.8.7 Beispiel: (Monte-Carlo-Integration)

- Es sei
$$I := \int_{[0,1]} g(x)\, dx$$
für eine beschränkte (und messbare) Funktion $g : [0,1] \to [a,b]$ zu berechnen.
- Wir approximieren das Integral durch zufällige Auswahl von n Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ und Setzen von
$$I_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,.$$
- FRAGE: Wie groß ist der Fehler $|I - I_n|$ mit welcher Wahrscheinlichkeit?
- ANTWORT: Wenn X gleichverteilt in $[0,1]$ ist und $G := g(X)$, so gilt
$$I = \mathrm{E}[g(X)] = \mathrm{E}[G]\,.$$
- Die obige Berechnung von I_n kann man damit als Approximation von $\mathrm{E}[G]$ durch den Mittelwert $Z_n = \frac{1}{n}(G_1 + \ldots + G_n)$ ansehen.
- Weil $\mathrm{Bild}(G) \subset [a,b]$ gilt $\mathrm{Var}[G] \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ (Übung).
- Somit gilt die Abschätzung
$$|I - I_n| \leqslant \varepsilon$$
mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1 - \delta$, falls $n \geqslant \frac{(b-a)^2}{4\delta\varepsilon^2}$.
- Falls etwa $[a,b] = [0,1]$ und $\delta = \varepsilon = 0.01$, so gilt für $n \geqslant 250000$ mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit, dass $|I - I_n| \leqslant 0.01$.
- BEMERKUNG: Da man normalerweise mehr Informationen über den Integranden g besitzt, sind durch andere Verfahren oft schnellere und sicherere Approximationen solcher Integrale möglich. *Wenn man aber nur die Messbarkeit von g voraussetzt, so ist dieses Approximationsverfahren optimal!*

24.8.8 Bemerkung:
- Das Gesetz der großen Zahlen kann auch verwendet werden, um die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ einer skalaren Zufallsvariablen X durch wiederholtes Ausführen des zugehörigen Zufallsexperiments zu bestimmen.

- Eine Möglichkeit ist, zuerst $\mu = \mathrm{E}[X]$ zu bestimmen und danach die Varianz als Erwartungswert $\mathrm{E}[Y]$ für $Y := (X-\mu)^2$ in einer gesonderten Reihe von Stichproben zu approximieren gemäß

$$\mathrm{Var}[X] \approx \sigma_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

- Oft ist es aber effizienter, nur eine Reihe von Ziehungen $x_1,\dots,x_n$ zu verwenden und daraus Erwartungswert und Varianz zu bestimmen.

- In diesem Fall verwendet man meist die Formeln

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad \sigma_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_n)^2\,.$$

- Diese (für große n kleine) Korrektur durch Verwendung des Faktors $\frac{1}{n-1}$ anstelle des eigentlich erwarteten Faktors $\frac{1}{n}$ heißt korrigierte Stichprobenvarianz.

- Sie ist dadurch motiviert, dass das durch Mittelung berechnete μ_n normalerweise besser als der tatsächliche Erwartungswert $\mu = \mathrm{E}[X]$ an die jeweilige Stichprobe $x_1,\dots,x_n$ angepasst ist. Ohne die Korrektur würde die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ daher meist unterschätzt (siehe Übung).

24.8.3. Der zentrale Grenzwertsatz

Beobachtungen In Anwendungen beobachtet man oft, dass zufällige Abweichungen („Fehler“) einer Messreihe normalverteilt sind.

Frage Gibt es dafür einen tieferen Grund?

Antwort Falls die Messfehler durch Addition von kleineren und voneinander unabhängigen Fehlern entsteht, kann man zeigen, dass der entstehende Fehler durch eine Normalverteilung gut approximiert wird.

24.8.9 Satz: (Zentraler Grenzwertsatz) Es seien $X_1,\dots,X_n$ voneinander unabhängige skalare Zufallsvariablen, die alle eine identische Verteilung $\mathbf{P}_X$ mit Erwartungswert $\mathrm{E}[X]=\mu$ und Varianz $\mathrm{Var}[X]=\sigma^2>0$ besitzen. Dann gilt für die Verteilung $\mathbf{P}_{Z_n}$ der ZV $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\mathbf{P}_{Z_n} \rightharpoonup N_{\mu,\frac{\sigma^2}{n}} \quad (n\to\infty)\,.$$

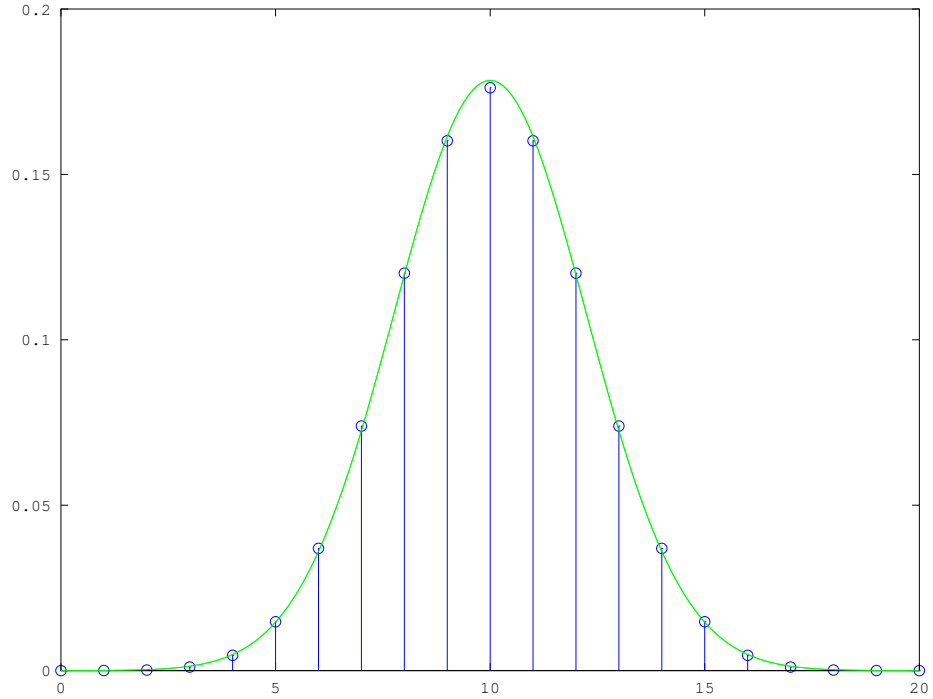
Die durch $\rightharpoonup$ bezeichnete „schwache“ Konvergenz kann man dabei so definieren, dass die Größe $\sup_{x\in\mathbb{R}}|F_{Z_n}(x) - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma/\sqrt{n}})|$ für die *Verteilungsfunktionen* von Z_n und $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$ gegen 0 konvergiert.

Beweis Eine Beweisskizze wird im folgenden Abschnitt gegeben, nach einer kurzen Einführung verschiedener Hilfsmittel wie charakteristische Funktion und Fouriertransformation.

24.8.10 Beispiel: Ein Standardbeispiel für den zentralen Grenzwertsatz sind (diskrete) Bernoulli-Verteilungen. Summiert ergeben sie die (immer noch diskreten) Binomialverteilungen

$$B(n,p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tilde{\delta}_k \,.$$

Die folgende Graphik für $n = 20$ und $p = \frac{1}{2}$ zeigt, dass diese in gewissem Sinne nahe bei der kontinuierlichen Normalverteilung liegen. Auf der anderen Seite sieht man aber auch, dass man eine „starke“ Konvergenz (z.B. als punktweise Konvergenz von *Verteilungsdichten* statt *Verteilungsfunktionen*) nicht erwarten darf.



24.8.11 Bemerkungen:

- Man kann auch Fehlerabschätzungen angeben. Diese hängen davon ab, wie schnell $\mathbf{P}_X$ „abfällt“ (es gehen dabei „höhere Momente“ $\mathrm{E}[|x|^k] = \int |x|^k \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x)$ für $k > 2$ ein).

- Die Voraussetzung der identischen Verteilung kann man abschwächen, zum Beispiel indem man in gewissem Rahmen variierende $\mathrm{E}[X_i] = \mu_i$ und $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma_i^2$ erlaubt (Grenzwertsatz von Lyapunov).

- Auch die Voraussetzung der Unabhängigkeit kann man abschwächen, obwohl man sie natürlich nicht ganz fallenlassen kann (Gegenbeispiel: $X_1 = \ldots = X_n = X = Z_n$).

24.8.4. Zum Beweis des Grenzwertsatzes

24.8.12 Definition: (Charakteristische Funktion) Die charakteristische Funktion $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}_X$ ist definiert als

$$\phi_X(t) := \mathrm{E}[e^{itx}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \,\mathrm{d}\mathbf{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x)\, dx\,.$$

24.8.13 Bemerkung:

- ϕ_X ist natürlich einfach die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(f_X)$ von f_X, wenn man diese für beliebige (integrierbare) f als

$$(\mathcal{F}(f))(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx$$

  definiert.

- Weil die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ invertierbar ist, ist auch die Verteilung $\mathbf{P}_X$ durch Angabe von ϕ_X eineindeutig bestimmt.

24.8.14 Eigenschaften: Wir werden folgende Eigenschaften der charakteristischen Funktion benötigen, die sich direkt aus Eigenschaften der Fourier-Transformation ergeben:

- $\phi_X \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.
- Es gilt $\phi_X(0) = 1$.
- Es gilt $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$.
- Wenn für X die Momente $\mathrm{E}[X^k]$ für $k \in \mathbb{N}$ existieren, so ist ϕ_X k-fach stetig differenzierbar.
- Für unabhängige ZV X, Y gilt $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t)$.

Beweisskizze (des Zentralen Grenzwertsatzes)

- $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige ZV mit identischer Verteilungsdichte f_X.
- Es sei $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$ und f_{Z_n} bezeichne die zugehörige Dichte.
- Wir wollen zeigen, dass Z_n eine Normalverteilung approximiert.
- Es gilt

$$f_{Z_n} = f_{\frac{1}{\sqrt{n}}X} * \cdots * f_{\frac{1}{\sqrt{n}}X}$$

- Für die charakteristische Funktionen bedeutet dies

$$\phi_{Z_n}(t) = \left[\phi_{\frac{1}{\sqrt{n}}X}(t)\right]^n$$

- Ohne wesentliche Einschränkung sei $\mu := \mathrm{E}[X] = 0$ und $\mathrm{Var}[X] = 1$ (sonst zeigt man den Satz für $\tilde{X}_i = \frac{1}{\sigma}(X_i - \mu)$ und folgert daraus die Aussage für die X_i).

- Es gilt dann (Taylor)

$$\phi_X(t) = \underbrace{\Phi_X(0)}_{=\mathrm{E}[1]} + \underbrace{\Phi'_X(0)}_{=i\mathrm{E}[X]} t + \frac{1}{2} \underbrace{\Phi''_X(0)}_{=i^2\mathrm{E}[X^2]} t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)\,.$$

- Wegen $\phi_{\frac{1}{\sqrt{n}}X}(t) = \Phi_X(\frac{t}{\sqrt{n}})$ bedeutet dies

$$\phi_{\frac{1}{\sqrt{n}}X}(t) = 1 - \frac{1}{2n}t^2 + o(t^2/n)\,.$$

- Folglich gilt

$$\phi_{Z_n}(t) \approx (1 - \frac{1}{2n}t^2)^n\,,$$

- und die Eigenschaften der Exponentialfunktion liefern dann

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t^2}{2n})^n = \exp(-\frac{t^2}{2})\,.$$

- Nun ist aber die Dichte der Normalverteilung $f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ eine Eigenfunktion der Fourier-Transformation zum Eigenwert $\sqrt{2\pi}$.
- Folglich approximiert $\phi_{Z_n}(t)$ die charakteristische Funktion $\phi_{N(0,1)}$ der Normalverteilung in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.
- Daraus folgt aber auch die schwache Konvergenz der Z_n gegen die Normalverteilung (sog. Levysches Theorem).

24.8.5. Ein Ausflug in die Statistik

24.8.15 Problem:

- Der Parameter $\mathrm{E}[X]$ einer ZV X soll geschätzt werden. Hierzu wird eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_N$ genommen und der Wert

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

berechnet.

- Frage: Kann man ohne weitere Kenntnis von X etwas darüber aussagen, wie klein $|\mu - \mu_N|$ mit welcher Wahrscheinlichkeit ist?
- Beachte: Unsere frühere Fehlerabschätzung setzte die Kenntnis von $\mathrm{Var}[X]$ voraus.

Antwort

- Ohne weitere Kenntnis von X ist die Antwort: Nein!

- Es sind dann nämlich Zufallsvariablen X möglich, die sich nur dann moderat verhalten, wenn man von einer Ausnahmemenge sehr geringer Wahrscheinlichkeit absieht.
- BEISPIEL: Berechnung der Kosten für Atomstrom.

Zusatzannahme X sei *normalverteilt* mit *unbekannten* Parametern μ und σ^2.

Frage $(x_1, \ldots, x_N)$ sei eine Stichprobe für die $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte ZV X und

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{und} \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_N)^2$$

seien die daraus berechneten Schätzungen für μ und σ^2.
Kann man ohne Kenntnis der tatsächlich vorliegenden Parameter μ und σ^2 etwas über den Fehler aussagen?

Antwort

- Interessanterweise: Ja!
- Man kann nämlich zeigen, dass die Zufallsvariable

  $$T = \frac{\mu_N - \mu}{\frac{\sigma_N}{\sqrt{N}}}$$

  die nur von N (aber nicht von μ und σ!) abhängende t-Verteilung t_n für $n := N - 1$ besitzt.
- Für t_n sind aber Verteilungsdichte f_{t_n}, Verteilungsfunktion F_{t_n} sowie deren Inverse $F_{t_n}^{-1}$ numerisch berechenbar (`tpdf`, `tcdf`, `tinv` in MATLAB/OCTAVE).
- Damit kann man dann folgende a-posteriori-Fehlerabschätzung abgeben: Wenn β eine Sicherheitswahrscheinlichkeit (Konfidenzniveau) ist (z.B. 0.95 oder 0.99), so fordern wir

  $$\mathbf{P}(T \in [-c, c]) = F_{t_n}(c) - F_{t_n}(-c) = 2F_{t_n}(c) - 1 \stackrel{!}{=} \beta$$
  $$\iff c = F_{t_n}^{-1}\left(\frac{\beta + 1}{2}\right).$$

  (Hierbei wurde ausgenutzt, dass die t-Verteilung symmetrisch ist, d.h. $f_{t_n}(-x) = f_{t_n}(x)$ und daher $F_{t_n}(-c) = 1 - F_{t_n}(c)$.)
- Für den Fehler $|\mu_N - \mu|$ bedeutet dies

  $$\mathbf{P}(|\mu_N - \mu| \leqslant c\frac{\sigma_N}{\sqrt{N}}) = \beta$$

  für $c = F_{t_{N-1}}^{-1}(\frac{1+\beta}{2})$.

- Für $\beta = 0.95$, $\sigma_N = 1$ und $N = 1000$ erhält man so, dass die Abschätzung

$$|\mu - \mu_N| \leqslant 0.062\ldots$$

mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent gilt. Das Intervall $[\mu_N - 0.062, \mu_N + 0.062]$ nennt man dabei das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\beta = 0.95$.

- Die t-Verteilung wird auch Student-Verteilung genannt[††]. Für größere n approximiert t_n recht schnell die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$, welche man daher oft als gute Approximation verwenden kann.

24.8.16 Bemerkung:

- Man kann auch zeigen, dass die Zufallsvariable

$$C = \frac{(N-1)\sigma_N^2}{\sigma^2}$$

der sogenannten χ^2-Verteilung („chi-Quadrat-Verteilung“) genügt, welche wieder nur von dem Parameter $n := N - 1$ (aber nicht von μ und σ^2) abhängt.

- Dies kann man verwenden, um für die Größe $\frac{\sigma_N^2}{\sigma^2}$ zu einem Konfidenzniveau β ein Konfidenzintervall $[1 - \varepsilon_1(\beta), 1 + \varepsilon_2(\beta)]$ zu erhalten.

[††]Ihr Entdecker publizierte unter dem Pseudonym „Student“.

25. Stochastische Prozesse

25.1. Motivation

- Ein Prozess beschreibt laut Lexikon einen Verlauf oder eine Entwicklung. Fast immer hat man dabei eine zeitliche Entwicklung im Auge.
- In der Mathematik werden Prozesse als Abbildungen $X : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$ einer geordneten Indexmenge $\mathcal{T}$ in irgendeine Ergebnismenge (bei uns meist $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ oder $\mathcal{E} = \mathbb{R}^k$) modelliert.
- Die Indexmenge $\mathcal{T}$ kann dabei diskret sein (z.B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ oder $\{1, \ldots, n\}$) oder aber kontinuierlich (z.B. $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}$ oder $[t_1, t_2]$).
- Ein Prozess kann deterministisch sein, d.h. die Funktion $X : \mathcal{T} \to \mathcal{E}$ ist eindeutig festgelegt.
- Ein Prozess kann stochastisch sein. In diesem Fall hängt das Ergebnis $X(\omega, t)$ noch von einem zusätzlichen (zufälligen) Parameter $\omega \in \Omega$ ab, d.h. $X : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathcal{E}$, wobei $(\Omega, \mathbf{P})$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.
- Im letzteren Fall entsteht durch
  - Festlegen eines $\omega \in \Omega$ ein deterministischer Prozess $t \mapsto X(\omega, t)$, die sogenannte Musterfunktion oder Realisierung
  - Festlegen eines Zeitpunkts $t \in T$ eine Zufallsvariable $\omega \mapsto X(\omega, t)$, wie wir sie im ersten Teil der Vorlesung betrachtet haben.

Beispiele (aus der Praxis)

- Die Temperatur an einer Wetterstation A im Zeitintervall $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ hängt von einem undurchsichtigen Wahrscheinlichkeitsraum wie etwa $\Omega =$ „Weltwetter“ ab. Für jedes $\omega \in \Omega$ wird die Temperaturkurve an der Station A durch die Musterfunktion $t \mapsto X(\omega, t)$ beschrieben.
- Der Aktienkurs der Siemens-Aktie im Zeitraum $\mathcal{T} = [T_1, T_2]$ hängt von einem undurchsichtigen Wahrscheinlichkeitsraum wie etwa $\Omega =$ „Weltwirtschaft“ ab.
- Die Pendelbewegung eines Federpendels kann nach dem Anstoßen/Loslassen zur Zeit $t = 0$ durch die Auslenkungsfunktion $A : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ beschrieben werden. Die Pendelbewegung hängt im Idealfall nur vom Anfangszustand (Position, Geschwindigkeit) ab und ist deterministisch, wenn dieser festliegt.

- Ein stochastischer Prozess könnte aus der deterministischen Pendelbewegung entstehen durch zufällige Wahl des Anfangszustands, zufällige Stöße oder zufällige Luftströmungen.
- An einem Server-Knotenpunkt treffen Datenpakete nacheinander ein. Die Nummerierung der Datenpakete kann als diskreter Zeitbereich $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ angesehen werden. Die Länge der Datenpakete stellt einen (oft als zufällig betrachteten) Prozess $\mathcal{T} \to \mathbb{N}$ dar.
- Die zufällige Auswahl von (gleichlangen) Musikstücken kann man mit $\Omega = \{1, \dots, N\}$ und $\mathcal{T} = [0, T]$ beschreiben, wobei $X(\omega, t)$ die Amplitude des Tonsignals des Musikstücks mit Nummer ω zur Zeit t beschreibt.
- Bei Tonaufnahmen kann man das Tonsignal als kontinuierlichen Prozess betrachten, der sowohl deterministische (Melodie) als auch zufällige Komponenten (Variationen, kleine Störungen) beinhaltet.
- Die Diskretisierung des obigen Tonsignals durch Abtastung macht aus einem kontinuierlichen Prozess (kontinuierlichen Signal) einen diskreten Prozess (ein diskretes Signal).
- Ein Staubkorn auf einer Flüssigkeitsoberfläche vollführt eine irreguläre Wanderbewegung. Man beobachtet den Zusammenhang $\Delta x \approx \sqrt{\Delta t}$ zwischen dem Beobachtungszeitintervall Δt und der in dieser Zeit zurückgelegten Distanz Δx.

  GENAUER: δX ist normalverteilt mit Variation proportional zu Δt.
- Ähnlich sehen auch Aktienkurse aus.

Beispiele (aus der Mathematik)

- Jede Funktion $X : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ beschreibt einen deterministischen Prozess. Je nach $\mathcal{T}$ ist dieser Prozess kontinuierlich (z.B. für $\mathcal{T} = \mathbb{R}$) oder diskret (etwa für $\mathcal{T} = \mathbb{N}$).
- Jede gewöhnliche Differentialgleichung (ordinary differential equation, ODE): Suche $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)) && t > 0 \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

  beschreibt einen kontinuierlichen deterministischen Prozess.
- Eine lineare Differenzengleichung

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_d &\in \mathbb{R} && \text{vorgegeben} \\ x_n &= \sum_{k=1}^{d} a_k x_{n-k} && \text{für } n > d \end{aligned}$$

oder etwas allgemeiner (warum?) eine lineare Iteration wie

$$\begin{aligned} x_0 &\in \mathbb{R}^d && \text{vorgegeben} \\ x_n &= Ax_{n-1} && n \geqslant 1 \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ beschreibt einen diskreten deterministischen Prozess.

- Wenn man die Anfangsbedingung der obigen ODE oder Parameter in f zufällig wählt, erhält man einen kontinuierlichen stochastischen Prozess.
- Wenn man die Anfangsbedingung $x_0 \in \mathbb{R}^d$ oder die Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ der obigen linearen Iteration zufällig wählt (vielleicht sogar in jedem Schritt!), so erhält man einen diskreten stochastischen Prozess.
- Jede (messbare) Funktion $X : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$ beschreibt einen stochastischen Prozess, der je nach Art von $\mathcal{T}$ kontinuierlich oder diskret ist.

25.2. Grundlegende Definitionen

25.2.1 Definition:

- Es sei $(\Omega, \mathbf{P})$ ein Maßraum und $\mathcal{T}$ eine geordnete Indexmenge (kontinuierlich wie $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_0^+$ oder $[a, b]$ oder diskret wie z.B. $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$).
- $\mathcal{E}$ sei ein Wertebereich (meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$).
- Ein stochastischer Prozess ist dann einfach eine (messbare) Funktion $X : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathcal{E}$.

Beobachtungen

- Für alle $\omega \in \Omega$ ist
$$X^\omega : \mathcal{T} \to \mathcal{E}, \quad t \mapsto X^\omega(t) = X(\omega, t)$$
ein deterministischer Prozess, den man Musterfunktion oder Realisierung nennt.
- Für alle $t \in \mathcal{T}$ ist
$$X_t : \Omega \to \mathcal{E}, \quad \omega \mapsto X_t(\omega) = X(\omega, t)$$
eine Zufallsvariable.

25.2.2 Bemerkung:

- In der Praxis ist $(\Omega, \mathbf{P})$ meist nicht bekannt!
- Wie bei den Zufallsvariablen versucht man daher, die Verwendung von Ω zu vermeiden.
- Üblicherweise betrachtet man dazu den stochastischen Prozess X als eine Menge oder ein Tupel von Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$.
- Für jedes X_t kann man dann dessen Verteilung $\mathbf{P}_{X_t}$ studieren, ohne den unbekannten Raum Ω zu kennen!
- Den Zusammenhang der X_t zu verschiedenen Zeitpunkten kann man mittels gemeinsamer Verteilungen $\mathbf{P}_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}$ beschreiben.

25.2.1. Markov-Prozesse

Idee

- Die *fundamentalen* physikalischen Gesetze in unserer Welt haben einen lokalen Charakter sowohl in Raum und Zeit.
- Insbesondere gilt, dass die Zukunft vieler elementarer Systeme bereits durch die Kenntnis des *momentanen* Zustands optimal vorhersagbar ist — tiefergehendes Wissen über die Vergangenheit bringt nichts.
- Man sagt hierzu (aus offensichtlichen Gründen), dass solche Prozesse „kein Gedächtnis“ haben.
- BEISPIELE: Bewegungsgleichungen (in der Ort/Impuls-Formulierung), Elektrodynamik (wenn man Felder berücksichtigt), Brownsche Bewegung, etc.

25.2.3 Definition: $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ist ein Markov-Prozess, wenn für beliebige Zeitpunkte $t_1,\ldots,t_n,t\in\mathcal{T}$ mit $t_1<\ldots<t_n<t$ und beliebige Zustände $s_1,\ldots,s_n\in\mathcal{E}$ gilt, dass

$$\mathbf{P}_{X_t|X_{t_1}=s_1,\ldots,X_{t_n}=s_n}=\mathbf{P}_{X_t|X_{t_n}=s_n}\,.$$

Unterscheidung Markov-Prozesse kann man noch weiter differenzieren:

1. $\mathcal{T}$ und $\mathcal{E}$ diskret
2. $\mathcal{T}$ kontinuierlich, $\mathcal{E}$ diskret
3. $\mathcal{T}$ diskret, $\mathcal{E}$ kontinuierlich
4. $\mathcal{T}$ und $\mathcal{E}$ kontinuierlich

Insbesondere nennt man Markov-Prozesse mit diskretem (sehr oft sogar endlichem) Zustandsraum $\mathcal{E}$ Markov-Ketten.

25.2.4 Beispiel:

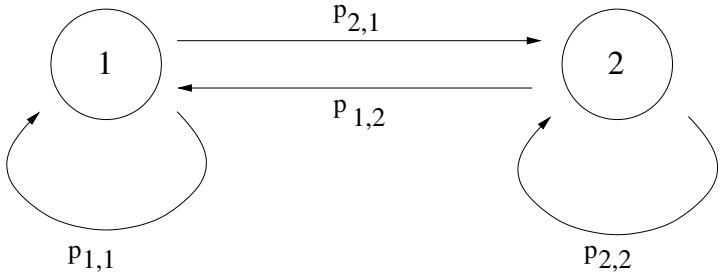
- Wir betrachten folgende einfache Markov-Kette, die man beispielsweise als Beschreibung der Zustände funktionierend/kaputt für eine Maschine interpretieren kann.
- Es seien $\mathcal{T}=\mathbb{N}_0$ und $\mathcal{E}=\{1,2\}$.
- Der Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ sei folgendermaßen konstruiert:
  1. Es kann für X_0 ein Wert zufällig aus $\mathcal{E}$ gewählt werden.
  2. In jedem Zeitpunkt $n>0$ gibt es Wahrscheinlichkeiten, die beschreiben, ob der Wert von X_n gleich dem von X_{n-1} ist oder nicht.

- Im einfachsten Fall ist diese „Übergangswahrscheinlichkeit“ nicht von n abhängig und kann durch Angabe einer Matrix

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{pmatrix}$$

charakterisiert werden. Die Einträge $p_{i,j} = p_{i \leftarrow j}$ von P bezeichnen dabei die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs vom Zustand j in den Zustand i.

- Graphisch kann man das wie folgt darstellen:



- Nun könnte man zum Beispiel bei gegebener Matrix P Musterfunktionen mit Hilfe eines Zufallsgenerators erzeugen.

- Alternativ (und mathematisch interessanter) kann man aus einer Verteilung $\mathbf{P}_{X_n} = p_1^{(n)}\tilde{\delta}_1 + p_2^{(n)}\tilde{\delta}_2$ die Verteilung $\mathbf{P}_{X_{n+1}} = p_1^{(n+1)}\tilde{\delta}_1 + p_2^{(n+1)}\tilde{\delta}_2$ berechnen mittels

$$p^{(n+1)} = \begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \end{pmatrix} = Pp^{(n)} = P \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \end{pmatrix},$$

- woraus sich (noch einfacher) ergibt $p^{(n)} = P^n p^{(0)}$.

- Diese Beziehung kann man zum Beispiel verwenden, um das Verhalten für große n zu studieren (siehe Übung).

25.2.5 Bemerkung: Die im vorigen Beispiel konstruierte Matrix P hat einige wichtige Eigenschaften, wie zum Beispiel:

1. Ihre Einträge erfüllen $0 \leqslant p_{i,j} \leqslant 1$ (warum?).
2. Die Summen der Einträge jeder Spalte sind 1 (warum?).
3. Sie hat immer den Eigenwert 1. *

25.2.6 Bemerkung:

- Schon das Gebiet der Markov-Ketten ist groß genug, um ganze Vorlesungen darüber zu halten.

*Beweis: Die Anwendung von P erhält für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ die Summe der Komponenten, d.h. $\sum_{i=1}^n (Px)_i = \sum_{i=1}^n x_i$. Folglich hat $(P - \mathbb{1})x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ Komponentensumme 0. Daher ist $\mathrm{Bild}(P - \mathbb{1})$ ein echter linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$, so dass $P - \mathbb{1}$ nicht regulär sein kann.

- Im zeitdiskreten Fall führt das Studium der Verteilungen —wie im obigen Beispiel skizziert— auf das Studium von Iterationen im $\mathbb{R}^n$.
- Im zeitkontinuierlichen Fall wird man auf analoge Weise zum Studium gewisser gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme geführt.
- Mit kontinuierlichem $\mathcal{E}$ kann man weitere wichtige Prozesse wie die Brownsche Bewegung als Markov-Prozess beschreiben. Hier führt das Studium der zeitlichen Entwicklung von Verteilungen auf die Lösung sogenannter partieller Differentialgleichungen (Wärmeleitungsgleichung bzw. Diffusionsgleichung im Falle der Brownschen Bewegung).

Aber Viele wichtige Prozesse sind keine Markov-Prozesse!
Zum Beispiel macht es wenig Sinn, das Tonsignal von Musik oder Sprache als Markov-Prozess zu betrachten, weil man hier mit Kenntnis der Vergangenheit des Signals viel genauer auf die Zukunft schließen kann, als nur aus dem zur „Gegenwart“ vorliegenden Ton.

25.3. Parameter für stochastische Prozesse

25.3.1 Definition: Gegeben sei ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ mit (der Einfachheit halber) skalaren Werten. Dann definieren wir

1. Die Erwartungswertfunktion oder Mittelwertfunktion
$$m_X : \mathcal{T} \to \mathbb{R}\,, \quad m_X(t) := \mathrm{E}[X_t]\,.$$
2. Die Varianzfunktion
$$\mathrm{Var}_X : \mathcal{T} \to \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{Var}[X_t]\,.$$
3. Die Autokorrelationsfunktion
$$R_{XX} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}\,, \quad R_{XX}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[X(t_1)X(t_2)]\,.$$
4. Die Autokovarianzfunktion $C_{XX} : \mathcal{T}^2 \to \mathbb{R}$ als
$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= \mathrm{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) \\ &= \mathrm{E}[(X_{t_1} - m_X(t_1))(X_{t_2} - m_X(t_2))]\,. \end{aligned}$$
5. Die Autokorrelationskoeffizientenfunktion (AKKF) $\rho_{XX} : \mathcal{T}^2 \to \mathbb{R}$ als
$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \frac{C_{XX}(t_1, t_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}_X(t_1)}\sqrt{\mathrm{Var}_X(t_2)}}\,.$$

25.3.2 Bemerkung:
- Diese Größen sind zum Großteil einfach Analoga der Definitionen für Zufallsvariablen.

- Ausnahme ist die Autokorrelationsfunktion R_{XX}, welche im Falle von Zufallsvariablen der Größe $\mathrm{E}[X^2]$ entsprechen würde. Für $\mathrm{E}[X^2]$ hatten wir dort keinen speziellen Namen eingeführt, vielleicht auch, weil sie sich recht leicht durch $\bar{X} := \mathrm{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ ausdrücken lässt gemäß

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X^2] &= \mathrm{E}[(X-\bar{X})X] + \bar{X}\mathrm{E}[X] \\ &= \mathrm{E}[(X-\bar{X})^2] + \underbrace{\mathrm{E}[(X-\bar{X})\bar{X}]}_{=0} + \bar{X}^2\end{aligned}$$

- Auch R_{XX} lässt sich in analoger Weise durch C_{XX} und m_X ausdrücken (und umgekehrt C_{XX} durch R_{XX} und m_X). Es gilt hier (nachrechnen!)

$$R_{XX}(t_1,t_2) = C_{XX}(t_1,t_2) + m_X(t_1)m_X(t_2)\,.$$

- In der Signaltheorie wird meist mit der Autokorrelationsfunktion R_{XX} gearbeitet, und auch wir werden es im folgenden oft verwenden.

25.3.3 Beispiel: Es sei X_0 eine Zufallsvariable und $X_t = e^t X_0$. (Dies erhält man ja auch als den Prozess, welcher die Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung $u'(t) = u(t)$ mit zufälliger Anfangsbedingung $u(0) = X_0$ beschreibt.) Dann gilt mit $\mu := \mathrm{E}[X_0]$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_0]$

$$\begin{aligned}m_X(t) &= \mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[e^t X_0] = e^t\mu \\ C_{XX}(t_1,t_2) &= \mathrm{Cov}(X_{t_1},X_{t_2}) = e^{t_1+t_2}\,\mathrm{Cov}(X_0,X_0) = e^{t_1+t_2}\sigma^2 \\ R_{XX}(t_1,t_2) &= C_{XX}(t_1,t_2) + m_X(t_1)m_X(t_2) \\ &= e^{t_1+t_2}(\sigma^2+\mu^2)\end{aligned}$$

25.3.4 Bemerkung: Wie bei den Zufallsvariablen reichen auch für Zufallsprozesse Mittelwert und Autokorrelation/Autokovarianz im allgemeinen nicht für eine vollständige Beschreibung aus.

25.4. Stetigkeit im quadratischen Mittel

Voraussetzung Im folgenden sei $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ oder ein Intervall $\mathcal{T} = I \subset \mathbb{R}$.

Beobachtung

- Für $s,t \in \mathcal{T}$ gilt

$$\mathrm{E}[(X_s - X_t)^2] = \underbrace{\mathrm{E}[X_s^2]}_{=R_{XX}(s,s)} - 2\underbrace{\mathrm{E}[X_sX_t]}_{=R_{XX}(s,t)} + \underbrace{\mathrm{E}[X_t^2]}_{=R_{XX}(t,t)}$$

- Falls die Autokovarianzfunktion $R_{XX} : \mathcal{T}\times\mathcal{T} \to \mathbb{R}$ stetig ist, so geht diese Größe gegen 0, wenn $s \to t$!

25.4.1 Definition: Ein stochastischer Prozess heißt stetig im quadratischen Mittel (engl. mean-square continuous), wenn für alle $t \in \mathcal{T}$ gilt

$$\lim_{s \to t} \mathrm{E}[(X_s - X_t)^2] = 0\,.$$

25.4.2 Folgerung: Unstetigkeiten von Realisierungen treten nur „selten“ auf, weil es für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\mathbf{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}[(X_s - X_t)^2] < \varepsilon' \text{ für alle } s \in U_\delta(t)\,.$$

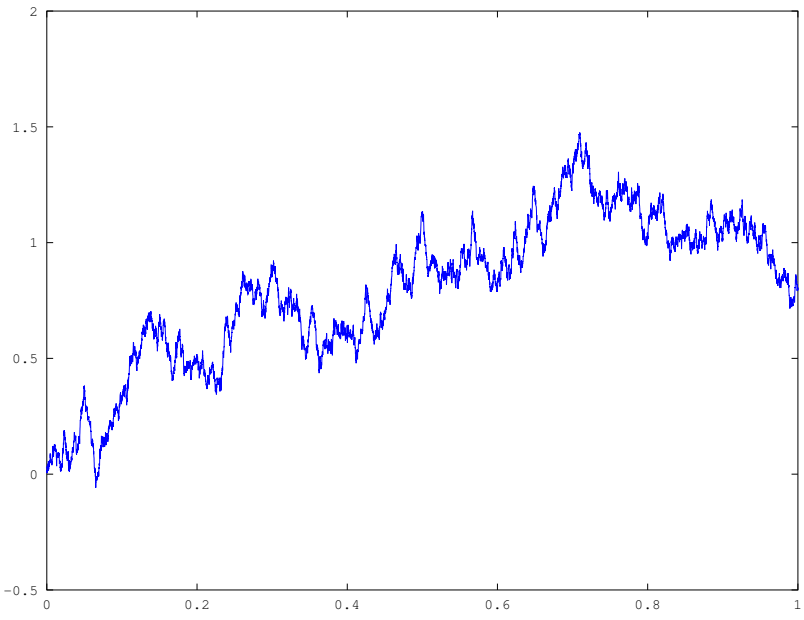
25.4.3 Bemerkung:

- Es gibt zwei typische Weisen, in denen ein stochastischer Prozess „stetig im quadratischen Mittel“ sein kann.
- Die erste Möglichkeit besteht darin, dass alle (oder fast alle) Realisierungen „gleichmäßig“ stetig sind.

  Ein Prozess mit dieser Eigenschaft ist der Wiener-Prozess $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_0^+}$, der die Brownsche Bewegung bestimmt und wie folgt definiert ist:

  1. $W_0 = 0$.
  2. Für $0 \leqslant s \leqslant t$ ist der Zuwachs $W_t - W_s$ $N(0, t-s)$-verteilt.
  3. Für beliebige $t_0 < \ldots < t_n$ sind alle Zuwächse $\Delta_i := W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ unabhängige Zufallsvariablen.

  Die folgende Graphik zeigt eine Realisierung von (W_t):



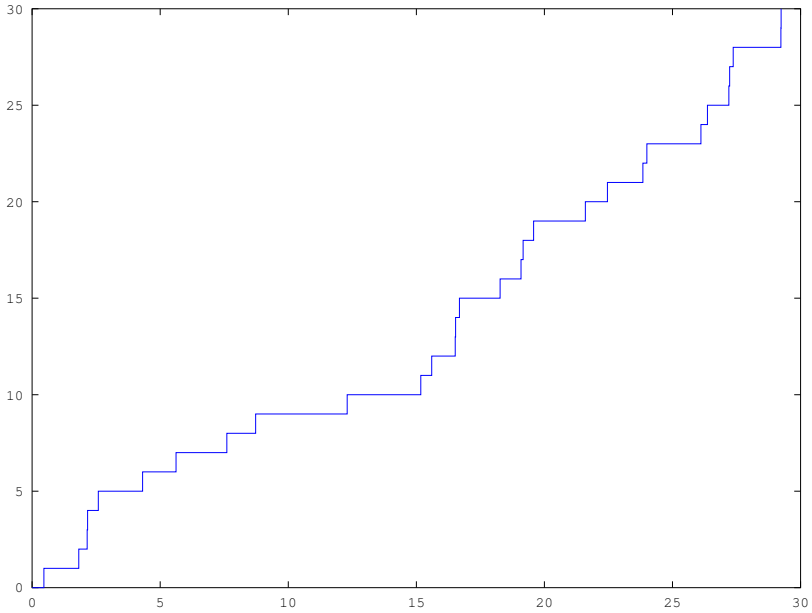
- Die zweite Möglichkeit besteht darin, dass die Realisierungen des Prozesses nur sporadisch springen.

Ein Beispiel dafür ist der Poisson-Prozess $(P_t^\lambda)_{t\in\mathbb{R}_0^+}$, mit dem man etwa die Gesamtzahl von Zerfallsereignissen beim radioaktiven Zerfall oder die Gesamtzahl von Schadensfällen bei Versicherungen im Laufe der Zeit beschreiben kann.

Dieser ist definiert wie folgt:

1. $P_0^\lambda = 0$.
2. Für $0 \leqslant s \leqslant t$ ist der Zuwachs $P_t^\lambda - P_s^\lambda$ Poisson-verteilt mit Rate $\lambda(t-s)$.
3. Für beliebige $t_0 < \ldots < t_n$ sind alle Zuwächse $\Delta_i := P_{t_i}^\lambda - P_{t_{i-1}}^\lambda$ unabhängige Zufallsvariablen.

Die folgende Graphik zeigt eine Realisierung von (P_t^1):



- Sowohl Wiener-Prozess als auch Poisson-Prozess sind Markov-Prozesse mit kontinuierlicher Zeitindexmenge $\mathcal{T} = \mathbb{R}_0^+$.
- Man errechnet leicht (siehe Übung), dass die Autokorrelationsfunktion sowohl von (W_t) als auch von (P_t^1) jeweils gleich $R_{XX}(s,t) = \min(s,t)$ ist. Dies bedeutet, dass sie sich hinsichtlich der Stetigkeit im quadratischen Mittel auch quantitativ nicht wesentlich unterscheiden, obwohl das Verhalten der Prozesse in vieler anderer Hinsicht sehr verschieden ist.

25.4.4 Übung: Wenn für den stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ gilt:

1. $\mathrm{Var}_X(t) = \mathrm{Var}[X_t] < C$ für alle $t \in \mathcal{T}$ (beschränkte Varianz)
2. Für alle $t \in \mathcal{T}$ gilt $\lim\limits_{s\to t} \mathrm{E}[(X_s - X_t)^2] = 0$
   (d.h. (X_t) ist stetig im quadratischen Mittel).

Dann ist die Autokorrelationsfunktion R_{XX} stetig.

25.4.5 Übung: 1. Man zeige, dass für den Wiener-Prozess $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_0^+}$ die Autokorrelationsfunktion gegeben ist als $R_{WW}(s,t) = \min(s,t)$.

2. Man zeige dasselbe für den Poisson-Prozess $(P_t^1)_{t\in\mathbb{R}_0^+}$.

25.5. Stationarität

Beobachtung Bei manchen (sehr einfachen) Prozessen variieren zwar die Musterfunktionen (Realisierungen) mit der Zeit, nicht aber deren Verteilung.

Annahme Der Einfachheit halber betrachten wir im folgenden nur den Fall $\mathcal{T} = \mathbb{R}$.

25.5.1 Definition: Ein Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ heißt stark stationär, wenn für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \ldots, t_n$ mit $t_1 < \ldots < t_n$ gilt, dass die Verteilung von $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ gleich der Verteilung von $(X_{t_1+\tau}, \ldots, X_{t_n+\tau})$ ist.

25.5.2 Beispiel: $X_t(\omega) = \sin(t + \omega)$ mit zufälliger in $[0, 2\pi]$ gleichverteilter Phase.

25.5.3 Problem: Obwohl relativ leicht zu formulieren und anschaulich, ist die starke Stationarität meist sehr unangenehm nachzuprüfen!

Abhilfe Man schwächt die Bedingung so ab, dass sie

- einfach zu überprüfen ist,
- für stark stationäre Prozesse gilt,
- ein gutes Indiz auch für starke Stationarität ist,
- und eine Einschränkung darstellt, die es auch von sich aus erlaubt, wichtige darauf aufbauende Aussagen zu beweisen.

25.5.4 Definition: Ein Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ heißt schwach stationär, wenn

1. Die Mittelwertfunktion ist konstant, d.h. $m_X(t) = \mathrm{E}[X_t] = m_X \in \mathbb{R}$.
2. Für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 + s, t_2 + s)\,.$$

Äquivalent zu Bedingung 2 ist, dass R_{XX} nur von $\tau := t_2 - t_1$ abhängt, d.h. es gibt eine Funktion $r_{XX} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$R_{XX}(t_1, t_2) = r_{XX}(\tau)\,, \quad \tau = t_2 - t_1\,.$$

Auch r_{XX} nennen wir Autokorrelationsfunktion.

25.5.5 Satz: Stark stationäre Prozesse sind schwach stationär.

Beweis Aus der starken Stationarität folgt sofort:

- $m_X(t) = \mathrm{E}[X_t] = \mathrm{E}[X_{t-t}] = \mathrm{E}[X_0] = m_X(0)$.
- $R_{XX}(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t] = \mathrm{E}[X_0 X_\tau] =: r_{XX}(\tau)$.

Beispiele

- Ein deterministischer Prozess $X : \Omega \times \mathcal{T} : X(\omega, t) = \tilde{X}(t)$ ist nur dann (schwach oder stark) stationär, wenn er konstant ist, d.h. wenn $\tilde{X}(t) = c \in \mathbb{R}$.
- Es sei $(\Omega, \mathbf{P}) = ([0, 2\pi[, \text{Gleichverteilungsmaß})$. Der Prozess

$$X : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to [0, 1], \quad (\omega, t) \mapsto \cos(t + \omega)$$

ist schwach stationär wegen $m_X(t) = \mathrm{E}[X_t] = 0$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\cos(t_1 + \omega)\cos(t_2 + \omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t_1 + \omega)\cos(t_2 + \omega)\,\mathrm{d}\omega \\
&\overset{\tilde{\omega}=\omega+t_1}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{t_1}^{t_1+2\pi} \cos(\tilde{\omega})\cos(\tau + \tilde{\omega})\,\mathrm{d}\tilde{\omega} \\
&\overset{\text{Periodizität}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\tilde{\omega})\cos(\tau + \tilde{\omega})\,\mathrm{d}\tilde{\omega} \\
&\overset{\text{Add.theorem}}{=} \frac{1}{2}\cos(\tau) =: r_{XX}(\tau)
\end{aligned}$$

25.5.6 Beispiel: (Weißes Rauschen)

- Einen Prozess $(w_t)_{t\in\mathbb{R}}$ nennen wir weißes Rauschen, wenn (w_t)
  1. schwach stationär ist,
  2. mittelwertfrei ist, d.h. $\mathrm{E}[w_t] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
  3. die Autokorrelationsfunktion

$$r_{XX}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases}$$

  besitzt.
- Wenn zusätzlich w_t $N(0, \sigma^2)$-normalverteilt ist, so nennt man es weißes Gaußsches Rauschen.

25.5.7 Bemerkung:
- Eine der wichtigsten Eigenschaften schwach stationärer Prozesse ist, dass sie einer Fourieranalyse zugänglich sind.

- Genauer besagt das Wiener-Khinchin-Theorem, dass für integrierbares r_{XX} die Fourier-Transformierte $\mathcal{F}(r_{XX})$ gerade das (über einen Grenzwert großer Zeitintervalle definierte) mittlere Leistungsdichtespektrum $S_{XX}(\nu)$ ist.
- Damit kann man die Anwendung von LTI-Systemen (LTI=linear time-invariant) auf solche Signale untersuchen.
- Das mittlere Leistungsdichtespektrum $S_{YY}(\nu)$ des Ausgangssignals Y ergibt sich dabei durch Multiplikation von $S_{XX}(\nu)$ mit $|H(\nu)|^2$, wobei der Frequenzgang H eine für das LTI-System charakteristische Funktion ist.

Aber Die meisten Prozesse sind nicht einmal schwach stationär...

Abhilfe Oft zerlegt man einen Prozess in Bestandteile, die teils deterministisch, teils periodisch und teils stationär sind. Z.B.:

- Ein Signal könnte aus einer periodischen (oder deterministischen) Schwingung und weißem stationären Rauschen bestehen.
- Der Wiener-Prozess ergibt sich als eine Art Summe über stationäres weißes Gaußsches Rauschen.
- Die allgemeine Brownsche Bewegung besteht aus Wiener-Prozess und einem deterministischen Drift-Term.

25.6. Nachtrag: Vektorwertige Prozesse und Kreuzkorrelation

- Analog zu vektorwertigen Zufallsvariablen sind auch vektorwertige stochastische Prozesse $X : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}^n$ interessant.
- Für diese kann man dann vektorwertige Mittelwertfunktionen $m_X(t) = \mathrm{E}[X_t]$, sowie matrixwertige Autokorrelationsfunktionen $R_{XX}(s,t) = \mathrm{E}[X_s X_t^T]$ und Autokovarianzfunktionen $C_{XX}(s,t) = \mathrm{E}[(X_s - m_X(s))(X_t - m_X(t))^T]$ definieren.
- Schwache Stationarität verallgemeinert sich völlig natürlich, indem man fordert, dass m_X ein konstanter Vektor ist und die Autokorrelation die besondere Gestalt $R_{XX}(s,t) = r_{XX}(t-s)$ (Matrizengleichung!) besitzt.
- Ein einfacher Spezialfall hiervon ist die Untersuchung der Beziehungen zwischen zwei skalaren stochastischen Prozessen $X, Y : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$.
- Hier definiert man insbesondere die Kreuzkorrelation

$$R_{XY} : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}\,, \quad R_{XY}(s,t) = \mathrm{E}[X_s Y_t]$$

und die Kreuzkovarianz

$$\begin{aligned} C_{XY}(s,t) &= \mathrm{E}[(X_s - m_X(s))(Y_t - m_Y(t))] \\ &= R_{XY}(s,t) - m_X(s)m_Y(t)\,. \end{aligned}$$

- Man nennt X und Y unkorreliert, falls $C_{XY}(s,t) = 0$ für alle $s \neq t$.
- Die schwache Stationarität des Vektors (X,Y) bedeutet hier, dass X und Y schwach stationär sind und zusätzlich die Kreuzkorrelation die besondere Gestalt $R_{XY}(s,t) = r_{XY}(t-s)$ hat.
- Man sagt dazu, dass X und Y gemeinsam schwach stationär sind.

25.6.1 Beispiel:

- Die Prozesse

$$\begin{aligned} X(t) &= \cos(t) + U(t)\,, \\ Y(t) &= \cos(t) + W(t) \end{aligned}$$

entstehen durch Störung der harmonischen Schwingung $\cos(\omega t)$ durch unkorrelierte weiße Rauschprozesse U, W.

- Dann gilt

$$\begin{aligned} R_{XY}(s,t) &= \mathrm{E}[X(s)Y(t)] \\ &= \mathrm{E}[(\cos(s) + U(s))(\cos(t) + W(t))] \\ &= \cos(s)\cos(t)\,. \end{aligned}$$

- Scherzfrage: Sind (X,Y) (gemeinsam) schwach stationär?

25.7. Ergodizität

Beobachtung

- Für viele stochastische Prozesse $X : \Omega \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ beobachtet man nicht verschiedene Versionen $X^\omega : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, aus deren Verteilung man dann Informationen wie $m_X(t)$, $\mathrm{Var}_X(t)$, $R_{XX}(t)$ berechnen kann.
- Stattdessen gibt es oft nur *einen* Prozess $x : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, den man stochastisch beschreiben will, z.B. um ihn zu charakterisieren oder sein zukünftiges Verhalten (partiell) vorherzusagen.
- Beispiele: Radiosignal, Wettermessung, Schadensfälle einer Versicherung, Belastung eines Serverknotens, ...

Frage Wie behandelt man diese Situation?

Idee

- Man könnte *ein* (unendliches oder sehr langes) Signal $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in viele Stücke einer festen Länge T unterteilen. Diese Stücke betrachtet man dann als verschiedene Realisierungen eines Prozesses X mit endlicher Zeit $\mathcal{T} = [0, T]$.
- Alternativ könnte man anstelle des Erwartungswerts $m_X \in \mathbb{R}$ eines stationären Prozesses X einfach den Zeitmittelwert

$$\langle x \rangle_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$$

über eine Musterfunktion $x(t) := X^\omega(t)$ über ein ausreichend langes Intervall $[-T, T]$ berechnen. Insbesondere dieses relativ einfache Verfahren wollen wir im Folgenden genauer untersuchen.

Frage Welche Eigenschaften muss ein stationärer Prozess $X : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ haben, damit der (konstante) Mittelwert $m_X = \mathrm{E}[X_0] \in \mathbb{R}$ (oder allgemeiner auch andere Größen wie die Varianz $\mathrm{Var}_X = \mathrm{Var}[X_0]$ oder die Autokorrelationsfunktion $r_{XX}(\tau)$) als Zeitmittelwerte über eine zufällig ausgewählte Musterfunktion $x(t) := X^\omega(t)$ berechnet werden können?

Beispiele

- Wenn $X(t) = A$ konstant in der Zeit ist mit einer durch eine Zufallsvariable A gegebenen Konstante, so gilt

$$\lim_{T\to\infty} \langle x \rangle_T = A\,.$$

Das Ergebnis ist also wieder eine Zufallsvariable und nicht gleich mit dem wohldefinierten Wert $\mathrm{E}[A] \in \mathbb{R}$!

- Dagegen funktioniert die Berechnung von $m_X \in \mathbb{R}$ durch einen Zeitmittelwert für den stationären Prozess

$$X(t) = \cos(t + U)$$

mit zufälliger in $[0, 2\pi[$ gleichverteilter Phase U, weil hier für eine beliebige Musterfunktionen $x(t) := X^\omega(t) = \cos(t + U(\omega))$ gilt

$$\lim_{T\to\infty} \langle x \rangle_T = 0 = m_X\,.$$

25.7.1 Definition: $X : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei ein schwach stationärer Prozess. X heißt schwach ergodisch, wenn mit Wahrscheinlichkeit 1 für Musterfunktionen $x = X_\omega$ gilt

1. X ist „ergodisch im Mittel“, d.h.

$$\langle x \rangle_T \to m_X \text{ für } T \to \infty\,.$$

2. X ist „ergodisch in Autokorrelation“, d.h.

$$\langle x(\cdot)x(\cdot+\tau)\rangle_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\,dt \to r_{XX}(\tau) \text{ für } T\to\infty\,.$$

Die noch etwas schwächere Eigenschaft

$$\mathrm{E}[(\langle X\rangle_T - m_X)^2] \to 0 \quad (T\to\infty)$$

nennen wir ergodisch im quadratischen Mittel.

25.7.2 Satz: $X : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei ein schwach stationärer Prozess, für dessen Kovarianzfunktion

$$c_{XX}(\tau) = C_{XX}(0,\tau) = r_{XX}(\tau) - m_X^2\,.$$

gilt

$$\langle c_{XX}\rangle_T \to 0 \quad (T\to\infty)\,,$$

Dann ist X ergodisch im quadratischen Mittel.

Beweis Siehe Cramer/Leadbetter “Stationary and Related Stochastic Processes” (S. 147).

25.7.3 Beispiel:

- Im Fall $X_t = A$ (alternative Schreibweise: $X(\omega,t) = A(\omega)$) für eine Zufallsvariable A gilt wegen $c_{XX}(\tau) = \mathrm{Var}[A] \in \mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{T\to\infty}\langle c_{XX}\rangle_T = \mathrm{Var}[A]\,.$$

  Dieser stationäre Prozess ist also offenbar nur für den trivialen Fall $\mathrm{Var}[A] = 0$ (d.h. A ist deterministisch und konstant) ergodisch.

- Im Fall $X_t = \cos(t+U)$ mit einem in $[0,2\pi]$ gleichverteilten U gilt hingegen wegen $c_{XX}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(\tau)$

$$\lim_{T\to\infty}\langle c_{XX}\rangle_T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{\cos(\tau)}{2}\,\mathrm{d}\tau = 0\,.$$

  Dieser Prozess ist also laut unserem Satz ergodisch im quadratischen Mittel.

25.7.4 Bemerkung: Aus der Ergodizität im quadratischen Mittel kann man wieder folgern, dass der Fehler $|m_X - \langle X\rangle_T|$ für große T mit beliebig hoher Wahrscheinlichkeit beliebig klein ist. Die Argumentation ist dabei analog zu derjenigen für die Stetigkeit im quadratischen Mittel.

25.7.5 Anwendung: Eine Radarstation sendet ein stationäres Signal $X(t)$ aus und empfängt ein reflektiertes Signal $Y(t) = \varepsilon X(t-t_0) + N(t)$, welches aus einer abgeschwächten und zeitverschobenen Version von X sowie einem unkorrelierten Rauschen N zusammengesetzt ist. Die Kreuzkorrelation zwischen beiden Signalen ist dann

$$r_{XY}(\tau) = R_{XY}(t,t+\tau) = \mathrm{E}[X_t Y_{t+\tau}]\,.$$

was unter der Annahme der schwachen Ergodizität von X und Y durch

$$\mathrm{E}[X_t Y_{t+\tau}] \approx \langle x(\cdot) y(\cdot + \tau) \rangle_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y(t+\tau)\, dt$$

mit einer Stichprobe bestehend aus zwei festen Musterfunktion x und y approximiert werden kann. Wenn der reflektierte Bestandteil εX nicht äußerst schwach ist, so wird das auf diese Weise approximierte $r_{XY}(\tau)$ ein ausgeprägtes Maximum an der Stelle $\tau = t_0$ aufweisen, da dort positive Korrelationen über das gesamte Signal hin akkumuliert werden.

25.7.6 Experiment: Mit Matlab/Octave kann man das sehr leicht nachvollziehen. Zufällige Musterfunktionen kann man mittels `normrnd` erzeugen, die Kreuzkorrelation berechnet man mit dem Befehl `xcorr`.
Ein vollständiges Octave-Programm wäre daher bereits:

```
n = 100000; shift=1000; eps=0.1;
signal = stdnormal_rnd(1,n);
x = signal(1:n-shift);
y = eps*signal(shift+1:n)+stdnormal_rnd(1,n-shift);
plot(xcorr(x,y,2*shift));
```

25.7.7 Bemerkung:

- Die Ergodizität stationärer Prozesse kann man als eine Verallgemeinerung des Gesetzes der großen Zahlen betrachten, welches dem Spezialfall $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit identisch und unabhängig verteilten X_i entspricht.
- Die Verallgemeinerung besteht dabei vor allem darin, dass die Unabhängigkeitsbedingung der Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erheblich abgeschwächt wurde.
- So ist ja zum Beispiel die Bedingung $\langle c_{XX} \rangle_T \to 0$ für $T \to \infty$ für die Ergodizität im quadratischen Mittel bereits erfüllt, wenn die Korrelation zwischen X_s und X_t mit wachsendem $|s-t|$ klein wird (oder wenn sich positive und negative Beiträge geeignet aufheben).

Epilog

Hiermit beenden wir unsere Einführung in die Mathematik, und es ist Zeit für einen Rückblick. Wir haben in Teil I mit einer Einführung in Grundlagen angefangen, insbesondere wurden der Mengenbegriff, logische Schlussfolgerungen und der allgemeine Funktionenbegriff vorgestellt. Dies wurde in Teil II verwendet, um verschiedene Zahlensysteme zu definieren und ihre Eigenschaften zu untersuchen: natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen, dazu auch eine Vielzahl wichtiger Strukturen wie Gruppen, Körper, Polynome und Permutationen.
Weil die Welt nicht ein- sondern mehrdimensional ist, haben wir uns dann in Teil III den relativ einfachen linearen Abbildungen zwischen (mehrdimensionalen) Vektorräumen zugewendet, wobei wir unter anderem Begriffe wie Regularität und Rang, Determinanten und Eigenwerte linearer Abbildungen kennengelernt haben.
Der darauffolgende Teil IV betrachtete dann die viel allgemeineren stetigen Abbildungen zwischen sehr allgemeinen Räumen. Durch die Einführung und Verwendung von Normen kam erstmals ein *quantitativer* Aspekt hinein, allerdings wurde dieser (zur Vermeidung eines hohen technischen Aufwands) hauptsächlich zur Definition der *qualitativen* Eigenschaft der Stetigkeit verwendet.
Der folgende, umfangreichste und für viele Anwender wichtigste Teil V behandelte dann der Reihe nach Differentialrechnung, eindimensionale Integralrechnung, gewöhnliche Differentialgleichungen, mehrdimensionale Integralrechnung und Funktionentheorie.
Der letzte Teil VI enthält Grundlagen der Stochastik, welche in Anwendungen zur Beschreibung nicht vollständig bekannter Systeme verwendet wird. Dies ist fundamental schwieriger als die Beschreibung bekannter Systeme, so dass unsere Darstellung nicht umfassend sein kann. In vielen Fällen kann man aber das hier vermittelte Wissen durch Hören naheliegender weiterführender Vorlesungen (z.B. Statistik, Fourier-Transformation, Signalanalyse) ergänzen.
Im ganzen Skript wurde versucht dem Ideal zu folgen, dass es keine „vom Himmel fallenden“ Definitionen und Aussagen gibt. Dies steht im krassen Gegensatz zu einer „Ingenieurmathematik“, in der Formeln zum Berechnen verschiedener Sachverhalte aufgezählt werden, die dann gelernt und in einer Klausur angewendet werden müssen. Nach Meinung des Autors ist es aber wichtig, dass man nicht nur vorgesetzte Formeln ausrechnen kann (das kann ein Computer-Algebra-System sowieso viel besser!) sondern auch versteht, wann und wo Formeln anwendbar sind. Dazu ist es aber notwendig, dass der Zusammenhang in größerer Tiefe ausgeleuchtet wird. Inwieweit dies in diesem Skript gelungen ist, muss der Leser entscheiden.
Wie schon in der Einleitung möchte ich nochmals darauf hinweisen, dass dieses Skript zur Begleitung meiner Vorlesung gedacht ist und eigentlich nur im Zusammenhang damit beurteilt werden sollte. Ferner ist es eine Arbeit, die sich im Laufe der Zeit verbessern

soll, so dass ich für Fehlerhinweise, sowie Anmerkungen und Anregungen sehr dankbar bin.

Index

n-te Potenz, 239
n-te Wurzel, 239
$\mathcal{R}$-integrierbar, 363
ε-Kugel, 187
ε-Umgebung, 187
Äquivalenzrelation, 57

Abbildung, 19
    linear, 101
    lineare, 95, 101
Abbildungsgrad, 238, 323
abgeschlossen, 228
Abgeschlossenheit, 242
Ableitung, 250, 272
    äußere, 403
    mehrdimnesional, 271
    partielle, 274
    Richtungsableitung, 273
    totale, 271, 272
Ableitungsmatrix, 120
Abschluss, 230, 368
absolut konvergent, 207, 209, 210
Absolutbetrag, 21, 49
absolute Konvergenz, 206, 207
abzählbar unendlich, 90
AC, 90
Addition
    von Funktionen, 244
Additivität, 455
Adjungierte, 168
Admittanz, 337
ADT, 43
Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, 332
äquivalent, 375
Äquivalenz von Normen, 241
Äquivalenzklasse, 52, 57
Äquivalenzrelation, 51, 52, 227
äußere Ableitung, 403
äußeres Produkt, 172, 392
AKKF, 494
Algebraische Topologie, 384
algebraischen Topologie, 227
Algorithmus
    Euklidischer, 60
alternierende k-Differentialformen, 403
alternierende harmonische Reihe, 204, 205, 209
Anfangsbedingung, 86, 294, 322
Antilinearität, 167
Antisymmetrie, 70, 71
Archimedisches Prinzip, 188
Arcuskosinus, 76, 256
Arcussinus, 76, 256
Arcustangens, 76, 256
Argument, 27, 75, 406
Ariane
    Unfall, 60
assoziativ, 115
Assoziativgesetz, 24, 34, 35, 43
Assoziativität, 6, 55
asymptotisch stabil, 354
ATLAS, 116
aufgespannt, 105
Aufwand, 116
ausdrucksfähig, 92
Ausgangspunkt, 373
Aussage, 3
Aussageform, 6
Auswahlaxiom, 90

Autokorrelationsfunktion, 494, 498, 500
Autokorrelationskoeffizientenfunktion, 494
Autokovarianzfunktion, 494
Autokovarianzfunktionen, 500
Automorphismus, 117
autonom, 318
    ODE, 353
Axiom, 131, 157
    Körper, 56
    natürliche Zahlen, 33
    Skalarprodukt, 157
Axiom of Choice, 90

Banachraum, 204
Basis, 25, 66, 107
    orthonormiert, 161
Basisergänzungssatz, 108
Basisexistenzsatz, 108
Bayes-Formel, 439, 440
bedingt konvergent, 209
bedingte Konvergenz, 206
bedingte Verteilungsdichte, 473
Bedingte Wahrscheinlichkeit, 438
Bedingung, 438
Bernoulli-Experiment, 41, 434, 465
Bernoulli-verteilt, 461
Bernoulli-Verteilung, 435
beschränkt, 197, 200, 234
bestimmte Integral, 304
bestimmtes Integral, 303
Betrag, 21, 75
    Zahl, 49
Betragsfunktion, 21
bijektiv, 22, 81, 112, 117
bijektive Selbstabbildung, 123
Bild, 19, 128, 129
bilinear, 157
Bilinearität, 181
Binomialkoeffizient, 39, 47
binomialverteilt, 461
Binomialverteilung, 465
Bisektionsverfahren, 237, 238
BLAS, 116
Blockstruktur, 283
Börse, 427
Bogenelement, 378
Bogenlänge, 376
Bogenmaß, 377
Bolzano-Weierstraß, 199
Borel-Algebra, 438
Brownsche Bewegung, 494, 500
Bruch, 50
Bubble-Sort, 135

Cache-Optimierung, 116
Cardano-Formel, 84
CAS, 149
Cauchy-Eigenschaft, 191
Cauchy-Folge, 192
Cauchy-Kriterium für Reihen, 206
Cauchy-Produkt, 213
Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, 409
Cauchy-Schwarz Ungleichung, 182
Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 159, 171
Cayleyzahlen, 87
Charakteristische Funktion, 484
charakteristische Funktion, 363, 364, 484
charakteristisches Polynom
    einer ODE, 345
χ^2-Verteilung, 487
Church-Turing-These, 30
Computer-Algebra-System, 149
Cramersche Regel, 119

Datentyp
    abstrakter, 43
Definitheit, 158, 177, 179, 181
Definition
    explizite, 282
    implizite, 282
Definitionsbereich, 19
Definitionsmenge, 19
Delta-Ausdrücke, 449
Delta-Distributionen, 450
Determinante, 118, 119, 131, 136, 137
Determinantenberechnung
    schnelle, 141

deterministisch, 489
Dezimalsystem, 66
Diagonalgestalt, 148
diagonalisierbar, 149, 165
Diagonalmatrix, 148, 149
Diagramm
    kommutativ, 101, 110
    kommutatives, 407
Differentialgleichung
    n-ter Ordnung, 344
    gewöhnliche, 271, 294
    partielle, 271
Differentialoperator, 344, 411
Differentialungleichung, 349
Differenz, 14
Differenzengleichung, 490
Differenzenquotient, 250
differenzierbar, 120, 250, 272
    im Punkt x_*, 250
    komplex, 408
    stetig, 257, 272
Differenzierbarkeit, 95, 265
    komplexe, 405
Diffusionsgleichung, 494
Dimension, 108
    Vektorraum, 108
Dimensionssatz, 129
Dirichlet-Funktion, 363
Dirichlet-Kriterium, 210
disjunkt, 430
Disjunktion, 4
diskret, 490
diskret verteilt, 450
diskrete Metrik, 178
diskretes Maß, 436
Distributivgesetz, 35, 55
Distributivgesetze, 116
Distributivität, 6
divergent, 187, 203
Divergenz, 398
Division
    mit Rest, 52
    von Funktionen, 244
doppelpunktfrei, 411
Drehimpuls, 152
Drehmatrix, 112
Drehstreckung, 115, 147, 409
Drehung, 112
Dreiecksgestalt, 121
    obere, 121
Dreiecksungleichung, 75, 158, 177, 179, 182
Durchflutungsgesetz, 402
dynamisches System, 318

EA, 60
Ebene, 392
Eigenfunktion, 345
Eigenraum, 144
Eigenvektor, 144, 148
Eigenwert, 144, 145, 148
Einbettung, 50
eindimensionale, 445
eineindeutig, 112
einfach zusammenhängend, 384, 414
einfachen Funktionen, 454
Einheitskreisscheibe, 15
Einheitsmatrix, 112, 113, 118
Einheitsnormalenvektorfeld
    äußeres, 397
Einheitswurzel, 77
Einschränkung, 178
Element, 11
Elementarereignis, 432
endlich, 90
endlich erzeugt, 107
Endomorphismus, 117
Endpunkt, 373
Entscheidungsbaum, 442
Entwicklungspunkt, 214
Ereignisse, 428
Ereignissen, 430
Ergebnis, 430
Ergebnisse, 428
ergodisch im Mittel, 502
ergodisch im quadratischen Mittel, 503
ergodisch in Autokorrelation, 503
Ergodizität im quadratischen Mittel, 503

Erhaltungssatz, 396
error function, 466
Ersetzungssatz, 108
Erwartungswert, 452, 456, 469
Erwartungswertfunktion, 494
Erzeugendensystem, 107
ES, 107
ESP, 181
Euklidische Länge, 158
Euklidische Norm, 158, 179
Euklidische Skalarprodukt, 157, 158, 181
Euklidische Zahlenebene, 14
Euklidischer Algorithmus, 60
Euklidischer Raum
    zweidimensional, 14
Euler-Charakteristik, 59
Eulersche Formel, 79
Existenzsatz von Peano, 323
explizit, 185
explizite Definition, 282
Exponent, 25
Exponentialfunktion, 25, 239
Exponentialreihe, 150
exponentialverteilt, 466
Extremalstelle, 234, 258
Extremalwert, 258
Extremum, 258

Fakultät, 39
Faltung, 479
Fehlerabschätzung, 300
Fehlerfortpflanzungsoperator, 351
Fehlerfunktion, 310
Fehlstand, 134
Feinheit, 295, 358
Fibonacci-Zahl, 39
Fibonacci-Zahlen, 153
Fixpunktsatz, 323
Flaeche
    Fläche
      Parallelepiped, 386
Fläche
    k-dimensional, 388
Flächenintegral
    2. Art, 394
    orientiert, 394
Flächenstück
    C^1-parametrisiert, 388
Fluss, 335
Folge, 68, 153, 185
Folgenglied, 185
Folgenstetigkeit, 221
Fourier-Analysis, 158, 181
Fourier-Transformation, 484
Fourier-Transformierte, 484
Fourieranalyse, 499
Frequenzgang, 500
Frobeniusnorm, 272
Fundamentalsatz der Algebra, 82, 147, 238, 419
Fundamentalsatz der Arithmetik, 53
Fundamentalsystem, 346
Funktion, 19
    affin-lineare, 25
    linear, 25
    Polynom, 81
    stetige, 101
    trigonometrische, 26
Funktionalanalysis, 246
Funktionenraum
    n-mal stetig differenzierbare Funktionen, 258

Gamma-Funktion, 312
Gauß-Elimination, 121, 127
Gauß-Klammer, 373, 448
Gauß-verteilt, 464
Gauß-Verteilung, 464
Gaußsche Zahlenebene, 74
Gaußsches Eliminationsverfahren, 121
Gaußsche Zahlenebene, 406
GE, 121
Gebiet, 410
gekürzt, 53
gemeinsam schwach stationär, 501
geometrisch verteilt, 462
geometrische Reihe, 204
Geometrische Summe, 38

geometrischer Schwerpunkt, 366
geordneter Körper, 73
gerade
    Permutation, 134
    Zahl, 8
geschlossen, 411
geschlossene Kurve, 373
Geschwindigkeit, 373
Gesetz der großen Zahlen, 480, 504
gewöhnliche Differentialgleichung, 85, 317, 490
ggT, 53
Gitter, 295
GL, 118
Gleichgewichtspunkt, 353
Gleichheit, 12
    von Funktionen, 20
gleichmäßig stetig, 299
Gleichungsnebenbedingung, 289
Gleichungssystem
    lineares, 120
    singuläres, 283
gleichverteilt, 460
Gleichverteilung, 429
Glücksspiel, 427
goldene Schnitt, 154
Google, 155
größte untere Schranke, 200
Grad
    Polynomgrad, 81
Gradient, 285, 398
Gramsche Determinante, 386
Gramsche Matrix, 386
Graph, 20
Green, 400
Green, Satz von, 400
Greenscher Integralsatz, 400
Grenzwert, 187
Grenzwertsatz von Lyapunov, 483
Gronwall-Ungleichung, 350
Gruppe, 43, 117
    Abelsche, 43
    Kommutative, 43
    lineare, 118
Häufigkeit, 463
Häufungspunkt, 189, 228, 233
Häufungspunkte, 230
Halbgruppe, 43
Halbierungsverfahren, 237, 238
Halbordnung, 70
    irreflexive, 70
    reflexiv, 70
Halteproblem, 92
harmonisch, 411
harmonische Reihe, 204, 209
Hauptsatz, 302
    Differential- und Integralrechnung, 396
Hauptträgheitsachsen, 152
Hauptvektor, 343
HDI, 302, 303, 396
HDI-$\mathbb{R}^n$, 397
hebbare Singularität, 420, 421
hermitesch, 169
Hesse-Matrix, 286
hinreichend, 206
holomorph, 408
homöomorph, 227
Homöomorphie, 227
Homöomorphismus, 227
homogen
    lineare ODE, 333
Homogenität, 158, 179
homomorph, 101
Homomorphismus, 101
homotop, 413
homotope, 385
Homotopie, 413
HP, 233
Hyperebene, 392
Hyperfläche, 393

identifiziert, 69, 405
Identität, 24, 44
Identitätsabbildung, 24
Imaginärteil, 405
Impedanz, 87, 337
implizite Definition, 282
in ihrer Gesamtheit unabhängig, 440

Indentierung, 187
Induktion
    vollständige, 36
Induktionsanfang, 36
Induktionsannahme, 36
Induktionsgesetz, 402
Induktionsschluss, 36
Induktionsschritt, 36
Induktionsvoraussetzung, 36
induziert, 179, 181
Infimum, 200
inhomogen
    lineare ODE, 333
injektiv, 21
Innere, 230, 367
innerer Punkt, 227
instabil, 354
Integral, 296
    bestimmtes, 303, 304
    unbestimmtes, 303, 304
Integralkurve, 317, 327
Integrand, 152
Integration
    partielle, 305
Integrationsbereich, 152
Intensität, 463
Intervall
    abgeschlossen, 15
    halboffen, 15
    mehrdimensional, 357
    offen, 15
Intervallschachtelung, 199
Inverse, 118
    Funktion, 23
inverses Element, 55
invertierbar, 117
Irreflexivität, 70, 71
isolierte Singularität, 419
Isometrie, 164
isomorph, 104
Isomorphismus, 148
    linear, 104

Jacobi-Matrix, 120, 272, 274
JNF, 340
Jordan-Normalform, 340, 343

Körper, 55, 61, 71, 73, 74, 405
    geordneter, 71
Körperaxiome, 56
Körpereigenschaft, 117
kartesisches Produkt, 14
Kehrwert, 20
Kehrwertregel, 253
Kern, 128, 129
Kettenregel, 254
    mehrdimensional, 276
k-Fläche, 388
k-Flächenstück, 388
Klasse, 43
kleinste obere Schranke, 200
kleinstes gemeinsame Vielfache, 46
Koeffizient
    Polynom, 81
kommutativ, 116
kommutativen Diagramm, 50
kommutatives Diagramm, 407
Kommutativgesetz, 34, 35, 43
Kommutativität, 6, 55
kompakt, 227, 233
Kompaktheit, 242
Komplement, 229, 231
Komplementärmenge, 118
komplex differenzierbar, 408
komplex-linear, 408
komplexe Ebene, 74
komplexe Kurvenintegral, 412
Komplexes Kurvenintegral, 412
Komponenten, 97
Komposition, 24
Konfidenzintervall, 487
Konfidenzniveau, 486, 487
konjugiert komplex, 74, 405
Konjunktion, 4
konstante Folge, 188
konstante Koeffizienten
    in linearer ODE, 337
kontinuierlich, 490

kontinuierliches Maß, 436
Kontraktion, 324
konvergent, 187, 203
Konvergenz, 242
    quadratische, 269
Konvergenzkreises, 215
Konvergenzradius, 215, 252
konvergiert, 187
Konvolution, 479
Koordinaten, 110
Koordinatensystems, 110
Korrelation, 446, 477
korreliert, 446
korrigierte Stichprobenvarianz, 482
Kosinussatz, 159, 182
Kovarianz, 469, 470
Kovarianzfunktion, 503
Kovarianzmatrix, 469
Kreuzkorrelation, 500
Kreuzkovarianz, 501
Kreuzprodukt, 170
kritischer Punkt, 259, 286, 290
Kronecker-Delta, 109, 160
Kryptoverfahren
    asymmetrisches, 63
    symmetrisch, 63
Kugelkoordinaten, 372
Kurve, 293, 373, 376
    doppelpunktfreie, 411
    geschlossene, 373, 411
    parametrisierten, 376
Kurvenintegral
    1. Art, 378
    2. Art, 380
    komplexes, 412
    orientiert, 380
    unorientiert, 378
    Wegunabhängigkeit, 415

L^2-Skalarprodukt, 477
Länge, 159, 373
Längenerhaltung, 164
Ladungserhaltungsgleichung, 402
Lagrange-Multiplikator, 290, 292
Lambda-Kalkül, 30
Landau-Symbole, 264
Landausche O-Notation, 264
Laplace-Experiment, 432
Laplace-Gleichung, 411
Laplace-Operator, 411
Larry Page, 155
Laurent-Entwicklung, 420
Laurent-Reihe, 420
Lebesgue-Maß, 437
    n-dimensional, 437
Lebesgue-messbar, 438
Leibniz-Kriterium, 212
Leistungsdichtespektrum, 500
Lemma von Euklid, 53
LGS, 120
Limes, 187
Limes inferior, 202
Limes superior, 202
linear, 25, 86, 101, 319
    Ableitung, 252
linear abhängig, 106, 132
linear time-invariant, 500
linear unabhängig, 106
lineare Algebra, 95
lineare Gruppe, 118
lineare Hülle, 105
lineare Iteration, 491
Lineares Gleichungssystem, 120
Linearität, 212, 455
    konjugierte, 167
Linearkombination, 86, 105, 106, 110
Linearkombinationen, 101
Linienelement, 378
Lipschitz-stetig, 241
Lipschitz-Stetigkeit, 241
$\mathcal{L}$-messbar, 438
Logarithmus, 25
    komplexer, 417
    Logarithmus
        natürlicher, 26
lokale Schrittweite, 295
Lorentzkraft, 172
Lorenz-Attraktor, 351

LTI-System, 500

Maß, 364, 436
Maßintegral, 454, 455
Maßraum, 435
Maßtheorie, 313, 436
mächtig
    gleich mächtig, 90
    weniger, 90
    weniger oder gleich, 90
Majorantenkriterium, 207
    Integral, 311
Markov-Ketten, 492
Markov-Prozess, 492
Maschenregel, 347
Mass
    Maß
      Parallelepiped, 386
Maß, 428
Matlab, 116, 125
Matrix, 102, 111
    adjungierte, 168
    Dreiecksgestalt, 121
    Gramsche, 386
    transponierte, 124, 165
Matrix-Addition, 113
Matrix-Matrix-Produkt, 115, 276
Matrix-Vektor-Produkt, 102, 112, 116
Matrixelement, 111
Matrixeintrag, 111
Matrixprodukt, 115, 116
Matrizen, 111
maximale Element, 201
Maximalstelle, 234, 258
Maximalwert, 258
Maximum, 201, 286
    globales, 258
    lokales, 258
Maximumsnorm, 180
Maxwellsche Differentialgleichungen, 402
mean-square continuous, 496
mehrdimensional normalverteilt, 471
mehrdimensionale Zufallsvariable, 467
mehrstufiges Zufallsexperiment, 441
Menge, 11
Mengendifferenz, 14
Mengenlehre, 17
messbar, 435, 437, 438, 456
Methode, 43
Metrik, 177
metrischen Raum, 177, 186
Michaelis-Menten, 321
minimales Element, 201
Minimalstelle, 234, 258
Minimalwert, 258
Minimum, 201, 286
    globales, 258
    lokales, 258
Minorantenkriterium, 208
Mittelpunktsregel, 297, 301
Mittelwert, 452, 480
Mittelwertfunktion, 494
Mittelwertfunktionen, 500
Mittelwertsatz
    Differentialrechnung
      2. Form, 260
      3. Form, 260
      1. Form, 260
mittlere quadratische Abweichung, 452
Monoid, 43
monoton fallend, 197
monoton wachsend, 190, 197
Monte-Carlo-Integration, 481
Monte-Carlo-Verfahren, 481
Multilinearität, 131
Multiplikation, 245
    natürlicher Zahlen, 34
    Vektor mit Skalar, 97
    von Funktionen, 244
multivariat normalverteilt, 471
multivariate Zufallsvariable, 467
multivariaten Standardnormalverteilung, 471
Musterfunktion, 489, 491

Nabla-Symbol, 286
nach oben beschränkt, 197, 200
nach unten beschränkt, 197, 200

Nachbarvertauschung, 135
natürlichen Logarithmus, 239
nautische Meile, 371
Nebenbedingung, 289
Negation, 4
neutrales Element, 35, 43, 55
Newton-Verfahren, 95, 120, 268
nichtinvertierbar, 118
nichtregulär, 118
Norm, 179, 240
    Euklidische, 158
Normäquivalenz, 241
Normale
    äußere, 397
Normalenvektor, 392
Normalenvektorfeld, 393
normalverteilt, 464, 471
Normalverteilung, 464
normierten Vektorräumen, 198
Normierung, 131
notwendige, 206
Nullfolge, 188, 194
nullhomotop, 414
Nullmenge, 364
Nullstelle, 82, 237
Nullvektor, 97
numerisch, 302
Numerische Lineare Algebra, 155
Numerische Mathematik, 302
NV, 268

obere Schranke, 200
Obersumme, 296
    mehrdimensional, 358
Octave, 116
ODE, 490
offen, 227, 249
Offenheit, 242
Oktaven, 87
Oktonionen, 87
Optimierung, 292
ordinary differential equation, 490
Ordnung, 70, 421
    lineare, 70
    totale, 70
orientiert, 132
Orientierung, 396
orthogonal, 116, 160, 164, 165
orthogonale Matrix, 242
Orthogonalisierungsverfahren
    Gram-Schmidt, 162
orthonormal, 162
Orthonormalbasis, 161

Paar, 14
paarweise disjunkt, 430
paarweise verschieden, 40
Parallelepipeds, 386
Parallelogrammgleichung, 182
Parallelotop, 131
Parallelotops, 386
Parameter, 27
Partialsumme, 203
partielle Differentialgleichung, 494
    System, 402
partielle Integration, 305
Partition, 295
Peano-Axiome, 33
Permutation, 45, 46, 123
Permutationsmatrix, 123, 140
Perron-Frobenius-Theorie, 155
Phase, 75
Phasenfluss, 335
Phasenraum, 328
    erweiterter, 329
Phasenverschiebung, 87
p-Norm, 180
Poisson-Prozess, 497
Poisson-verteilt, 463
Pol, 420, 421
Polardarstellung, 75
Polarkoordinaten, 75, 370
Polstelle, 421
Polygonzug, 373
Polynom, 25, 81
    charakteristisches, 145
      einer ODE, 345
    multivariat, 243

multivariates, 281
Polynomdivision, 81
positiv definit, 157
positiv orientiert, 171
Positivität, 455
Potential, 382, 416
Potenzmenge, 14, 429
Potenzreihe, 78, 150, 214, 417
Primzahl, 53
Produkt
äußeres, 392
Produktmaß, 443
Produktraum, 443
Produktregel, 253, 292
Programmiersprache
funktionale, 30
Projektion, 113
orthogonale, 162
Prozess, 489
punktierten Kreisumgebung, 420

QK, 207
quadratische Form, 235
quadratische Konvergenz, 269
Quantenmechanik, 427
Quantor, 7
All-Quantor, 7
Existenz-Quantor, 7
Quaternionen, 87
Quotientenkriterium, 207
Quotientenregel, 253

Rückwärtssubstitution, 122
radialsymmetrisch, 371
Rand, 230, 367
Randverteilung, 472, 473
Randverteilungsdichte, 472
Randverteilungsfunktion, 472
Rang, 128
Rate, 463
rationale Funktion, 221
rationale Zahlen, 50
Raum
n-mal stetig differenzierbare Funktionen, 258
linearer, 95
stetig differenzierbare Funktionen, 257
Reaktionskonstante, 322
Realisierung, 489, 491
Realteil, 405
rechte Seite, 120
Rechte-Hand-Regel, 171
reellwertige Folgen, 185
Reflexivität, 13, 51, 70, 376
Regel von Sarrus, 135
regulär, 117
Lösung, 269
Regularitätssatz, 325
Reihe, 78, 203
Reihenfolge, 209
Reihenwert, 203
rektifizierbar, 373
rekursiv, 38, 185
Relation, 28
Repräsentant, 52, 193
Residuensatz, 421
Residuum, 421
Resonanzfrequenz, 348
Restklasse, 57
Restklassenring, 58
Richtung, 159
Richtungsableitung, 273
Richtungsfeld, 328
Riemann-Integral, 455
Riemann-integrierbar, 296, 359
Riemann-Summe
mehrdimensional, 360
Riemannsche Obersumme, 296
Riemannsche Summe, 297
Riemannsche Untersumme, 296
Ring, 58
$\mathcal{R}$-integrierbar, 296, 359
$\mathcal{R}$-messbar, 364
$\mathcal{R}$-Nullmenge, 364
Rotation, 136, 385, 398
Runge-Kutta-Verfahren, 326
Russellsche Paradoxon, 16

σ-Additivität, 430

Sarrusregel, 135
Sattelpunkt, 287
Satz
    Arzela-Ascoli, 323
    Cauchy, 415
    Fubini, 361
    Fubini, allgemein, 365
    Fundamentalsatz der Algebra, 82
    implizite Funktionen, 284
    lokale Umkehrfunktion, 278
    Peano, 323
    Picard-Lindelöf, 323
    Pythagoras, 182
    Stokes (allgemein), 403
Satz von Pythagoras, 161
Satz von Rolle, 260
Satz von Schwarz, 279
Satz von Stokes, 385
Scheinwiderstand, 87
Scherung, 113
Scherungsinvarianz, 132
Scherungsmatrix, 140
Schnitt, 14
Schrittweite, 295
schwach ergodisch, 502
schwach stationär, 498
Schwache Stationarität, 500
Schwerpunkt, 390
Scilab, 116, 238
Seemeile, 371
Selbstabbildung, 44, 112, 117
    bijektiv, 44
selbstadjungiert, 169
Sensitivität, 439
Signalverarbeitung, 479
Signum, 49, 133, 134
singulär, 118
Singularität, 419
    hebbare, 420, 421
    isolierte, 419
    wesentliche, 420, 421
Skalar, 98
Skalarprodukt, 158, 180
    Euklidisches, 157
Skalarprodukts, 158
Skalierung, 97, 113
    von Funktionen, 244
Spaltenzahl, 111
Spann, 105
Spatprodukt, 171
Spektraltheorie, 144
Spektrum, 144, 354
Spezifität, 439
Spiegelung, 113
Spur, 145
stückweise stetig, 360
stabil, 354
    asymptotisch, 354
Staffelform, 126
Stammfunktion, 302, 416
Standardabweichung, 457
Standardbasis, 109
Standardnormalverteilung, 464
stark stationär, 498
starrer Körper, 152
stationärer Punkt, 326, 353
stationärer Punkte, 353
Stellenwertsystem, 66
stetig, 219, 221, 223
    gleichmäßig, 299
stetig differenzierbar, 257, 272
    stetig differenzierbar
      stückweise, 373
stetig im Punkt $x_* \in X$, 223
stetig im quadratischen Mittel, 496
stetig verteilt, 450
Stetigkeit, 221, 231, 242, 266
Stetigkeit im quadratischen Mittel, 503
Stichprobe, 480
Stieltjes-Integral, 454, 455
Stochastik, 313
stochastisch, 489
stochastisch unabhängig, 440
stochastischer Prozess, 491
Stokes, Satz von, 401
streng monoton wachsend, 190
Struktur, 43
strukturerhaltend, 101

Student-Verteilung, 487
Stufenform, 126, 127
    reduziert, 129
Stufenfunktion, 296
Substitution, 306
Substitutionssatz, 369
Summennorm, 180
Supremum, 200
surjektiv, 21
Symmetrie, 51, 177, 181, 376
symmetrisch, 151, 152, 157, 165, 169, 441
symmetrisch positiv definit, 287
symmetrisches Eigenwertproblem, 235
System
    dynamisches, 318
    gewöhnlicher Differentialgleichungen, 150
    gewöhnlicher Differentialgleichungen, 318
Systemmatrix, 120

t-Verteilung, 486
Tacoma Narrows Bridge, 143
Tangens, 256
Tangenten, 250
Tautologie, 5
Taylor-Polynom, 265
Taylor-Reihe, 214
Taylorentwicklung, 265
    mehrdimensional, 281
Taylorreihe, 266
Teiler
    größter gemeinsamer, 53, 82
teilerfremd, 53, 82
Teilfolge, 190, 191
Teilmenge, 13, 118
Tensoren, 286
totale Varianz, 470
Totalität, 70, 71
Trägheitsmatrix, 152
Trägheitstensor, 152
Transformationssatz, 369
Transitivität, 14, 51, 70, 376
Transponierte, 165
Transposition, 134
Transpositionen, 134
Tschebyscheffsche Ungleichung, 459
Tupel, 13, 15
Tupelnotation, 15
Tupelschreibweise, 133
Turing-äquivalent, 30

überabzählbar, 90
Überlauf, 60
Umgebung
    Umgebung
        ε-Umgebung, 223
Umgebungsstetigkeit, 223
Umgekehrte Dreiecksungleichung, 182
umgekehrte Dreiecksungleichung, 177, 223
umgekehrten Dreiecksungleichung, 222
Umkehrfunktion, 23, 81
unabhängig, 440, 474
Unabhängigkeit, 440
unbestimmte Integral, 304
unbestimmtes Integral, 303
ungerade
    Permutation, 134
    Zahl, 8
Ungleichungsnebenbedingungen, 292
unitär, 168
unkorreliert, 501
untere Schranke, 200
Untergruppe, 117
Untersumme, 296
    mehrdimensional, 358
Unterteilung, 295
Untervektorraum, 100, 117, 118
Unvollständigkeitssatz, 92
Urbild, 20, 231
Urbildabbildung, 445
Urnenexperiment, 433
UVR, 100

Varianz, 452, 457
Varianzfunktion, 494
Vektor, 75, 97, 98
Vektoraddition, 74, 97

Vektorfeld, 328, 380
Vektornotation, 15
Vektorprodukt, 170
Vektorraum, 95, 97, 179, 245
    Euklidischer, 98
Vektorraumisomorphismus, 110
Vereinigung, 14
Verfahren
    Runge-Kutta, 326
Vergleichssatz
    Nullfolgen, 194
Verkettung, 24
Verknüpfung, 117
vertauscht, 101
Vertauschungen, 134
Verteilung, 447, 467
Verteilungsdichte, 450, 467
Verteilungsfunktion, 447, 467
Vervollständigung, 193
vollständig, 69, 73, 192
vollständigen Induktion, 36
vollständigen normierten Vektorraum, 204
vollständige Induktion, 36
Volumen, 131, 136
    Gebiet, 364
    mehrdimensionales Intervall, 358
    Parallelepiped, 386
Volumenintegral, 152
Vorwärtssubstitution, 122
Vorzeichen, 134

Wärmeleitungsgleichung, 494
Wahrheitswert, 3
Wahrheitswert-Tabellen, 4
Wahrscheinlichkeit, 428, 430, 438
Wahrscheinlichkeitsbaum, 442
Wahrscheinlichkeitsraum, 430
Wahrscheinlichkeitstheorie, 313, 436
Wechselbeziehung, 446
Wechselstromwiderstand, 87
Weg, 373
weißes Gaußsches Rauschen, 499
Weißes Rauschen, 499
weißes Rauschen, 499
Wertebereich, 19
wesentliche Singularität, 420, 421
Wettervorhersage, 427
Widerspruchsbeweis, 9
widerspruchsfrei, 92
Wiener-Khinchin-Theorem, 500
Wiener-Prozess, 496, 497, 500
Windungszahl, 238, 421
Winkel, 159, 180
Winkelgeschwindigkeit, 152
WK, 207
Wurzelkriterium, 207

Zahlen
    ganze, 49
    natürliche, 33
    natürliche mit Null, 36
    rational, 50
Zeilenstufenform, 126
Zeilenzahl, 111
zeitharmonisch, 348
Zeitmittelwert, 502
Zentraler Grenzwertsatz, 465, 482
Zerlegung, 295
    mehrdimensional, 358
Zielbereich, 19
Zielmenge, 19
Ziffer, 66
Zufallsexperiment, 428, 430
Zufallsvariable, 432, 445, 489, 491
    mehrdimensionale, 445
    skalare, 445
zugehörige Norm, 181
zusammenhängend, 410
Zusammensetzung, 24
zusammenziehbar, 414
ZV, 445
Zweizeilenform, 133
Zykel, 46
    2-Zykel, 134
Zykelschreibweise, 133
Zylinderkoordinaten, 371