Polígonos Mágicos

Danniel Dias Augusto
Universidade Estadual do Goiás - UEG, Formosa, GO
nieldiasguto@gmail.com

Josimar da Silva Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Cornélio Procópio, PR
jrocha@utfpr.edu.br

Resumo: Neste trabalho definimos Polígonos Mágicos $P(n, k)$ e Polígonos Mágicos Degenerados $D(n, k)$ e suas principais propriedades, tais como a soma mágica e o valor que corresponde ao vértice raiz. Discutiremos também a existência de polígonos mágicos $P(n, k)$ e polígonos mágicos degenerados $D(n, k)$ para determinados valores de n e k.

Palavras-chave: Combinatória; Polígonos Mágicos; Polígonos Mágicos Degenerados.

1 Introdução

Quadrados Mágicos que são conhecidos desde tempos antigos em que povos de diferentes culturas têm atribuído, muitas vezes, características místicas [1, 2, 10]. Além de serem utilizados para fins recreativos, atualmente podemos encontrar aplicações para quadrados mágicos na Física, na Ciência da Computação, no Processamento de Imagem e na Criptografia [4, 5, 8], dentre outras. Desta forma, tem sido desenvolvidos diversos métodos para construção de polígonos mágicos satisfazendo diversas propriedades particulares e diversas generalizações têm sido apresentadas, como podemos ver em [3, 7].

Observando que quadrados mágicos de ordem 3 podem ser representados por pontos representados por vértices, pontos médios e o centro geométrico de um quadrado, podemos observar em [6] uma extensão da mesma idéia para polígonos mágicos de ordem 3, onde algumas propriedades foram obtidas, bem como a condição de existência para tais polígonos, apresentando-se uma construção para tais estruturas. No entanto, mesmo antes deste trabalho outras tentativas de construção de estruturas semelhantes a quadrados mágicos foram propostas, como pode ser visto em [9].

No presente trabalho abordaremos uma generalização do trabalho apresentado em [6] e mostraremos que propriedades válidas para polígonos mágicos de determinada ordem podem não ser válidas para polígonos mágicos de outras ordens. Além disso, abordaremos um novo padrão de estrutura através de uma variação do conceito de polígonos mágicos, o que chamaremos de polígonos mágicos degenerados.

2 Polígonos Mágicos $P(n, k)$

Um **polígono mágico** $P(n, k)$ de n lados e de ordem $k + 1$, é formado por $\frac{k^2 n}{2} + 1$ pontos, constituídos pelos vértices de $\frac{k}{2}$ polígonos regulares de tamanhos variados com n lados e com lados correspondentes paralelos e centrados num vértice raiz (ou central) e pontos de interseção de $\frac{kn}{2}$ segmentos de reta com extremidades nos lados do polígono maior e que interceptam este vértice raiz com os lados dos polígonos envolvidos de modo a particionar estes lados em k segmentos; os $\frac{k^2 n}{2} + 1$ pontos são rotulados por números de 1 a $\frac{k^2 n}{2} + 1$ de tal forma que a soma dos valores correspondentes a $k + 1$ pontos sobre uma mesma aresta ou sobre os segmentos determinados pelos pontos diametralmente opostos do polígono maior é um valor fixo, chamado de **soma mágica**. Nas figuras 1 e 2 vemos exemplos de Polígonos Mágicos $P(4, 4)$ e $P(8, 2)$, respectivamente.

Teorema 1. *Num polígono mágico $P(n, k)$, temos as seguintes propriedades:*

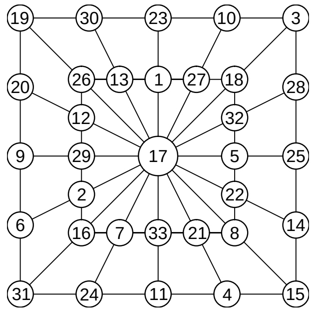

Figura 1: Exemplo de Polígono Mágico $P(4,4)$

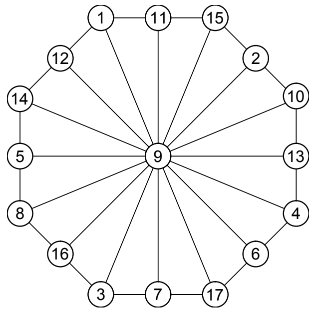

Figura 2: Exemplo de Polígono Mágico $P(8,2)$

(i) *a soma mágica é* $(k+1)\frac{k^2n+4}{4}$;

(ii) *o valor correspondente ao vértice raiz é* $c = \frac{k^2n+4}{4}$;

(iii) *a soma* S_j *dos valores que representam os* j*-ésimos pontos que particionam cada aresta no polígono mágico tomados no sentido horário, satisfazem*

$$S_j = \frac{kn[k^2n+4]}{8}$$

Para o caso particular onde $k = 2$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2. *Existe um polígono mágico* $P(n,2)$ *se, e somente se,* n *é par maior ou igual a 4.*

3 Polígonos Mágicos Degenerados $D(n,k)$

Um **polígono mágico degenerado** $D(n,k)$, de n lados e de ordem $k+1$, é formado por $k^2(n-2)+k+1$ pontos rotulados por valores distintos do conjunto $\{1,2,\cdots,k^2(n-2)+k+1\}$, dos quais n são vértices de um polígono de n lados, sendo um destes vértices o vértice raiz, pontos que dividem cada aresta deste polígono em k segmentos de mesmo comprimento e pontos de interseção de segmentos de retas com extremidades no vértice raiz e em pontos sobre o polígono original que estão fora das arestas adjacentes ao vértice raiz com $k-1$ polígonos regulares semelhantes ao polígono original, com um de seus vértices no vértice raiz e outros dois vértices nos pontos que particionam a aresta adjacente a este vértice no polígono original de tal forma a soma dos valores atribuídos a $k+1$ pontos que se encontram nas arestas dos polígonos ou sobre os segmentos que partem do vértice raiz é constante, chamada de **soma mágica.** As Figuras 4, 5 e 6 ilustram a existência de polígonos mágicos degenerados.

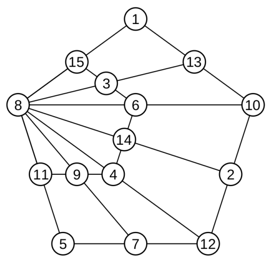

Figura 3: Exemplo de Polígono Mágico Degenerado $D(5, 2)$

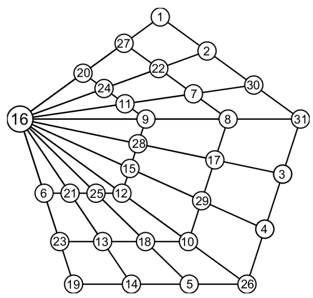

Figura 4: Exemplo de Polígono Mágico Degenerado $D(5, 3)$

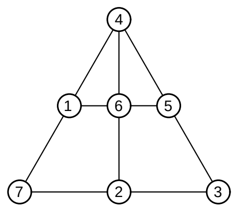

Figura 5: Exemplo de Polígono Mágico Degenerado $D(3, 2)$

Teorema 3. *Um polígono mágico degenerado $D(n, k)$ possui as seguintes propriedades:*

(i) a soma mágica é $(k+1)\frac{k^2(n-2)+k+2}{2}$;

(ii) o valor correspondente ao vértice raiz é $c = \frac{k^2(n-2)+k+2}{2}$;

(iii) a soma S_i dos valores atribuídos aos i-ésimos pontos sobre as arestas na representação do polígono mágico degenerado, satisfazem

$$S_i = (n-2)k\frac{k^2(n-2)+k+2}{2}$$

Corolário 1. *Se k e n são números inteiros positivos, tais que k é ímpar e n é par, então não existem polígonos mágicos degenerados $D(n, k)$.*

4 Conclusão

Os Polígonos Mágicos $P(n, 2)$ já haviam sido estudados em [6] onde obteve-se condições necessárias e suficientes para a existência de polígonos mágicos $P(n, 2)$ tais como as apresentadas neste artigo. No entanto, não temos ainda condições necessárias e suficientes para a existência de Polígonos Mágicos $P(n, k)$ e para os Polígonos Mágicos Degenerados $D(n, k)$ apresentados neste trabalho, para todos os valores de n e k, embora discutimos a não existência de exemplos para n e k satisfazendo algumas condições. Desta forma, este tema constitui um campo fecundo para estudos futuros, estando em aberto construções para determinadas classes de Polígonos Mágicos e Polígonos Mágicos Degenerados, bem como a determinação da quantidade de Polígonos Mágicos e Polígonos Mágicos Degenerados não isométricos, para determinados valores de n e k.

Referências

[1] Andress, W.R. Basic properties of pandiagonal magic squares, Amer. Math. Monthly 67 (1960) 143–152.

[2] Cammann, S. The evolution of magic squares in China, J. Am. Oriental Soc. 80 (1960) 116–124.

[3] Chan, C.Y.J. et al., A construction of regular magic squares of odd order, Linear Algebra and its Applications 457 (2014) 293–302

[4] Chu, K.L.; Drury, S.W.; Styan, G.P.H.; Trenkler, G. Magic Moore–Penrose inverses and philatelic magic square with special emphasis on the Daniels–Zlobec magic square, Croatian Oper. Res. Rev. 2 (2011) 4–13.

[5] Ganapathy, G.; Mani, K. Add-on security model for public-key cryptosystem based on magic square implementation, in: Proc. World Congress on Engineering and Computer Science 1 WCECS, 2009.

[6] Jakicic, V.; Bouchat, R. Magic Polygons and their properties, http://www.arxiv.org/abs/1801.02262v1, 2018.

[7] Kim, Y.; Yoo, J. An algorithm for constructing magic squares, Discrete Applied Mathematics 156 (2008) 2804–2809.

[8] Loly, P. D. Franklin squares: a chapter in the scientific studies of magical squares, Complex Systems 17 (2007) 143–161. .

[9] Pickover, C.A. The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars, second printing and first paperback printing, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003 (original printing and e-book: 2002).

[10] Rosser, B.; Walker, R.J. The algebraic theory of diabolic magic squares, Duke Math. J. 5 (1939) 705–728.