

NOTES DE TYPOLOGIE ANALYTIQUE  
ORIENTATION DE L'OBJET ET RECTANGLE MINIMAL

Georges Laplace

Le dessein de cette note de typologie analytique est d'exposer les résultats de ma recherche expérimentale concernant l'orientation de l'objet.

La fixation de critères pertinents et précis d'orientation de l'objet conditionne nécessairement, de toute évidence, tant la cohérence de l'étude typométrique que la classification typologique en levant toute ambiguïté quant à la latéralité ou la transversalité de la retouche.

1. MODULE ET INDICES FONDAMENTAUX

La typologie analytique utilise couramment les trois dimensions du parallélépipède droit circonscrivant l'objet, longueur, largeur, hauteur ou épaisseur, pour définir un module et trois indices élémentaires :

a - un module géométrique ...  $M_g = (L \times l)^{1/2}$ , de préférence  
au module arithmétique ...  $M_a = \frac{L + l}{2}$  ;

b - un indice d'allongement ...  $I_a = \frac{L}{l}$  ;

c - un indice de carénage ...  $I_c = \frac{1}{e}$  ;

d - un indice géométrique de carénage ...  $I_{gc} = \frac{(L \times l)^{1/2}}{e}$ .

Je crois opportun de rappeler que, lorsque la longueur relative, définie par la projection de la distance proximo-distale sur l'axe des ordonnées, est inférieure à la largeur relative, l'indice d'allongement relatif, calculé à partir des longueur et largeur absolues, est exprimé par l'inverse de l'indice d'allongement absolu.

## 2. DEFINITIONS DIVERSES DU RECTANGLE OPTIMAL

Longueur et largeur de l'objet étant celles du rectangle qui le circonscrit, il faut définir clairement par une orientation adéquate le rectangle optimal.

### 2.1. Axe de percussion

Selon F. Bordes (Bordes, 1961), "l'axe d'un éclat est la ligne imaginaire qui prolonge l'axe de percussion, passe par le point d'impact et sépare le cône ou le conchoïde en deux parties plus ou moins égales". Outre que le point d'impact est rarement ponctuel, l'axe ou, plus exactement, la direction de percussion ne peut être fixée, dans les meilleurs cas, qu'avec une approximation angulaire de plusieurs degrés. On ne peut s'y référer qu'avec cette réserve.

### 2.2. Axe de symétrie

D'après F. Bordes (Bordes, 1961), "l'axe de l'outil sera placé selon le plan de symétrie maximale de l'outil". Cependant, "dans le cas d'un racloir déjeté double, ... chacun des racloirs déjeté formant l'outil double sera considéré comme ayant son propre axe. En effet, autrement, l'axe de symétrie de l'outil double coïnciderait avec l'axe de l'éclat, ce qui serait contradictoire avec la définition du racloir déjeté". Ainsi, pour F. Bordes, le "racloir déjeté double" ne peut avoir, par définition, un axe de symétrie ! Quoique l'on puisse penser de cette conception relative de la symétrie bilatérale, il n'en demeure pas moins que l'axe de symétrie demeure trop incertain sur la majorité des objets pour que l'on puisse retenir un tel critère d'orientation.

### 2.3. Axe de travail

H.L. Movius (Movius 1968) introduit "le concept d'axe de travail" pour les burins, sans toutefois le définir strictement. Il précise seulement que "bien que l'axe de travail ne coïncide pas obligatoirement avec l'axe de l'outil quand l'extrémité fonctionnelle est orientée de façon dont on croit qu'il a été tenu pour son utilisation, il a néanmoins une relation constante avec cet axe". Ce même concept sera étendu (Movius 1971) aux "grattoirs aurignaciens" pour définir une longueur et une largeur maximales de ces objets. La notion fonctionnelle d'axe de travail, éminemment subjective et restreinte à certaines catégories d'outils, ne peut, de ce fait, être prise en considération pour fixer l'orientation générale des objets.

### 2.4. Longueur et largeur "maximales"

Pour les "grattoirs en bout" H.L. Movius (Movius 1968) propose la longueur du plus petit rectangle inscrivant la pièce et, comme largeur, la largeur du front. Le même auteur (Movius 1968) retient pour les "outils à dos" la longueur et la largeur maximales des objets. Ainsi, trois catégories d'outils, trois procédés de mensuration différents ! Les deux derniers, utilisant pour la mesure de la longueur et de la largeur de l'objet deux critères indépendants, présentent de ce fait un défaut de cohérence rédhibitoire pour le calcul du module et des indices élémentaires.

### 2.5. Longueur maximale et rectangle optimal

Le procédé graphique simple décrit par C.A. Möberg (Möberg 1964), complété et généralisé (Laplace 1976), fixe sans ambiguïté la dimension maximale orientée et la dimension minimale qui en découle. L'objet, posé sur sa face interne ou sur une face plane, est placé sur le diagramme millimétré défini par deux axes de coordonnées de telle manière que :

a - le talon ou la partie proximale touche l'axe des abscisses en au moins un point ;

b - le bord latéral senestre touche l'axe des ordonnées en au moins un point ;

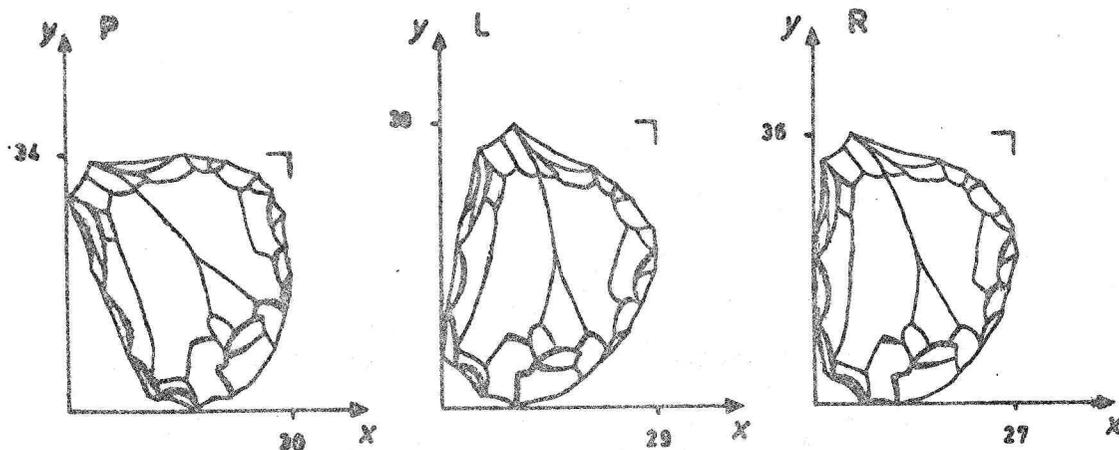
c - le bord distal se trouve à une distance verticale maximale de l'axe des abscisses lorsque la dimension verticale est dominante, le bord dextre à une distance horizontale maximale de l'axe des ordonnées lorsque la dimension horizontale est dominante, dans les limites fixées par les deux premières conditions. La longueur absolue étant établie dans chaque cas, on en déduit la largeur absolue par simple lecture.

### 2.6. Conclusion

Ainsi, on ne peut raisonnablement retenir que deux procédés : avec réserve, le procédé basé sur l'axe de percussion, et sans réserve, le procédé fondé sur la longueur maximale.

## 3. ORIENTATION ET RECTANGLE MINIMAL

### 3.1. Largeur minimale et rectangle minimal



Ma première figure représente trois orientations différentes du même objet, un Racloir plat latéro-transversal (R23), portant le numéro 39 sur la liste des pièces examinées), sur un diagramme millimétré défini par les axes x et y :

a - à gauche, l'orientation P selon l'axe de percussion, établie avec le minimum d'erreur possible ;

b - au milieu, l'orientation L selon la longueur maximale décrite en 2.5., mettant en évidence ce que j'ai appelé "l'effet de diagonale" ;

c - à droite, l'orientation R selon le nouveau procédé que j'ai dénommé du "rectangle minimal". En effet, ce rectangle présente, dans tous les cas, l'aire minimale, donc le plus petit module géométrique :  $MgP = 31,94$        $MgL = 33,20$        $MgR = 31,20$

### 3.2. Le rectangle minimal

L'objet, posé sur sa face interne ou sur une face plane, est placé sur le nomogramme millimétré défini par deux axes de coordonnées, matérialisés par une équerre d'épaisseur convenable, de telle manière que :

a - le talon ou la partie proximale touche l'axe des abscisses en au moins un point, l'axe de percussion formant avec l'axe des abscisses un angle supérieur à 45 degrés ;

b - le bord latéral senestre touche l'axe des ordonnées en au moins un point ;

c - le bord latéral dextre se trouve à une distance horizontale minimale de l'axe des ordonnées lorsque la dimension verticale est dominante, le bord distal se trouve à une distance verticale minimale de l'axe des abscisses lorsque la dimension horizontale est dominante, dans la limite fixée par les deux premières conditions ;

d - la dimension dominante soit minimale, dans les limites fixées par les trois premières conditions.

On établit ainsi le point de surface ou point d'aire matérialisant l'angle supérieur dextre du rectangle minimal et, en conséquence, la longueur et la largeur absolues de l'objet.

## 4. APPLICATION A UN ECHANTILLON DE RACLOIRS LATERO-TRANSVERSAUX ET DE POINTES DE LA COUCHE MOYENNE D'OLHA 2

### 4.1. Données fondamentales à deux variables

Les mensurations dimensionnelles planes, x et y, ont été effectuées sur 188 pièces de la couche moyenne d'Olha 2 comportant la totalité des Racloirs latéro-transversaux plats (R23) et carénoïdes (R323), des Pointes plates marginales simples (P11) et à épaulement P12), plates profondes simples (P21), parfois doubles (PP21) et à épaulement (P22), parfois anglées (P22a) ou doubles (PP22), des Pointes carénoïdes profondes simples (P321), parfois anglées (P321a) ou doubles (PP321), ou à épaulement (P322), parfois anglées (P322a), selon les procédés de l'axe de percussion (P), de la longueur maximale (L) et du rectangle minimal (R). Ces

TABLEAU I

N° TP	P		L		R		N° TP	P		L		R	
	x	y	x	y	x	y		x	y	x	y	x	y
01 R23	26	34	30	38	26	35	*51 R23			24	27	23	26
02 R23	38	30	43	27	41	27	*52 R23			33	31	32	28
03 R23(R21a)	25	30	24	35	22	33	53 R23	42	26	43	27	40	26
04 R23(R21a)	23	32	21	36	19	35	54 R23	26	26	29	24	24	28
05 R23	23	38	23	38	23	38	55 R23	40	31	41	33	37	31
06 R23	40	39	32	52	31	50	56(R23)P21	36	39	32	42	32	42
07 R23	39	39	39	45	38	38	57 R23	28	31	26	34	25	34
08 R23	28	28	26	35	25	31	*58 R23			31	36	29	35
09 R23	33	40	32	41	32	40	*59 R23			46	30	46	30
10 R23	39	44	41	48	38	45	60 R23	34	29	35	29	35	28
11 R23	34	25	37	24	34	24	61 R23	36	32	36	32	32	29
12 R23	35	23	36	23	35	23	*62 R323 (P322)			26	43	25	42
13 R23	20	29	23	21	20	29	63 R323 (P322)	31	27	35	23	35	23
14 R23	27	34	25	34	23	33	*64 R323 (R321a)			22	26	21	25
*15 R23			27	29	24	25	65 R323	34	28	37	22	37	22
16 R23	34	24	39	29	34	24	*66 R323			28	39	26	35
17 R23	35	29	35	30	33	29	*67 R323 (R321a)			27	43	23	41
*18 R23			22	34	22	34	68 R323	39	25	39	29	39	25
*19 R23			27	28	24	25	69 R323	31	22	32	22	32	21
20 R23	23	24	20	28	19	28	70 R323	32	23	33	22	33	22
21 R23	30	32	26	36	26	36	71 (R323)R322a	28	25	34	30	30	23
22 R23	52	37	53	38	51	35	72 R323	46	31	47	32	46	30
23 R23	38	28	39	26	39	26	73 P11	20	30	23	32	20	29
24 R23	16	27	16	27	16	27	74 P11	21	31	21	32	21	31
25 R23	34	51	34	52	34	51	75 P11	19	44	18	44	11	44
*26 R23			36	32	36	32	76 P11	23	38	23	38	23	37
27 R23(R21a)	41	56	40	62	36	61	77 P11	23	50	24	51	22	50
*28 R23			36	30	36	30	78 P11	29	51	29	51	29	51
*29 R23			31	48	29	48	79 P11	42	64	30	71	30	70
30 R23	40	29	41	28	40	28	80 P11	18	47	18	47	18	47
31 R23	26	28	28	28	24	26	81 P11	30	49	30	49	30	49
32 R23	41	33	41	33	37	30	82 P12	19	44	18	44	18	44
33 R23	25	37	25	37	25	35	83 P12	19	42	19	42	19	42
34(R23)P21	35	34	42	28	42	28	84 P12	28	41	28	42	28	39
35 R23	33	34	36	26	36	26	85 P12	32	43	31	44	31	44
36 R23	37	24	38	23	37	23	86 P21	25	48	26	50	25	48
37 R23	35	30	42	33	36	29	87 P21	34	45	34	47	34	42
38 R23	35	28	36	28	35	27	88 P21	39	50	33	55	32	55
39 R23	30	34	29	38	27	36	*89 P21			27	36	26	34
40 R23	21	28	25	29	20	28	90 P21	20	50	20	50	20	50
41 R23	29	25	30	24	29	24	91 P21	30	39	32	40	28	39
42 R23	26	35	26	40	23	38	92 P21	29	48	26	51	25	51
43 R23	52	30	53	27	53	26	93 P21	45	57	45	57	42	57
44 R23	28	28	30	24	30	22	*94 P21			30	50	30	50
45 R23	25	23	30	19	26	19	*95 P21			24	39	24	27
46 R23	21	41	22	42	21	41	96 P21	19	46	18	47	18	47
47 R23	43	40	48	41	42	36	*97 P21			25	37	25	37
48 R23	30	43	29	43	29	43	*98 P21			16	38	16	38
49(R23)R21a	23	30	18	34	17	34	99 P21	30	39	23	47	21	46
*50 R23			30	35	30	35	100 P21	22	53	22	53	21	53

Qe

Qe

Nº TP	P		L		R		Nº TP	P		L		R	
	x	y	x	y	x	y		x	y	x	y	x	y
*101 P21			21	37	20	36	145 P22	37	40	42	24	42	24
102 P21	17	32	16	33	15	32	146 P22	24	35	22	37	22	36
*103 P21			16	51	15	51	*147(P22)R23			34	41	31	40
104 P21	22	40	21	41	20	41	*148 P22			20	35	20	33
105 P21	26	34	22	37	22	37	149 P22	52	58	52	60	51	58
*106 P21			24	51	24	51	*150 P22			24	32	23	39
107 P21	20	36	20	37	20	35	*151 P22			31	52	31	46
*108 P21			22	43	22	42	*152 P22			28	38	27	37
109 P21	31	31	25	32	25	32	*153 P22			25	41	25	41
*110 P21			24	44	23	42	*154 P22			27	47	27	47
*111 P21			18	39	18	39	*155 P22			20	34	20	32
112 P21	31	52	31	52	30	52	Q 156 P22a	21	34	18	34	18	34
*113 P21			19	40	19	40	*157 PP22			47	27	46	26
*114 P21			21	44	21	44	158 P321	27	38	21	41	20	41
115 P21	16	45	16	45	16	45	159 P321	16	37	16	37	16	37
116 P21	27	53	27	56	27	53	160 P321	28	45	21	56	18	54
*117 P21			21	32	19	29	161 P321	32	36	27	42	26	42
118 P21	31	46	34	49	31	46	162 P321	29	41	28	42	27	42
119 P21	32	44	31	49	31	45	163 P321a	18	39	18	40	18	39
120 P21	20	38	19	40	19	39	164 P321	34	49	30	54	30	54
121 P21	23	34	17	40	16	38	165 P321	34	44	36	47	32	45
*122 P21			26	38	25	38	*166 P321a			11	28	11	28
123 P21	32	39	23	48	23	48	*167 P321			26	39	24	38
124 P21	27	38	26	38	24	36	*168 P321			13	37	13	37
125 P21	26	37	26	38	25	36	169 P321	29	32	24	38	24	38
126 P21	17	30	16	32	15	31	170 P321	16	45	16	45	14	44
127 P21	19	31	21	31	21	33	171 P321	15	43	15	43	15	43
*128 P21			22	42	22	41	172 P321	26	34	24	35	24	35
129 P21	24	29	21	34	21	33	*173 P321			20	36	18	35
130 P21	19	45	19	45	19	45	174 P321	41	21	41	21	41	21
*131 P21			23	42	23	42	*175 P321			14	38	14	38
*132 P21			21	39	21	39	*176 P322			45	25	45	23
*133 P21			19	50	19	50	*177 P322			19	46	19	46
*134 P21			45	22	45	21	*178 P322			42	20	42	20
*135 P21			15	41	15	41	179 P322	22	35	21	35	21	35
*136 P21			22	47	21	47	*180 P322			45	15	45	15
*137 PP21			18	50	18	47	*181 P322			47	18	47	18
138(P22)R23	38	51	38	51	36	46	*182 P322			15	34	15	34
*139 P22a			35	55	35	55	183 P322	17	33	14	37	14	36
140 P22	18	27	18	28	18	28	*184 P322			21	35	21	35
141 P22a	20	32	18	33	18	33	*185 P322a			16	33	15	31
142 P22a	17	37	17	37	17	37	*186 PP321			17	48	16	47
143 P22	23	45	21	47	21	46	*187 PP321			18	49	18	49
144 P22	19	39	19	40	19	39	*188 PP321			16	53	15	52

mesurations sont présentées dans le Tableau I. La matière utilisée est le silex à l'exception de deux objets en quartzite (Qe) et d'un objet en quartz (Q).

On notera :

a - que seulement 124 objets sur 188 ont pu être plus ou moins approximativement orientés selon l'axe de percussion, ce qui met en évidence, si besoin était, les limites du procédé ;

b - que les types primaires sans signe et sigle de tendance sont communs aux orientations selon l'axe de percussion et selon le rectangle minimal ;

c - que lorsque un type primaire est suivi d'un sigle de tendance, le sigle de tendance est déterminé par l'orientation du rectangle minimal ;

d - que lorsqu'un type primaire est précédé d'un sigle de tendance, le type primaire est déterminé par l'orientation du rectangle minimal, le signe de tendance étant déterminé par l'orientation de l'axe de percussion.

#### 4.2. Modules arithmétiques et géométriques

Les modules ou moyennes arithmétiques et géométriques, calculés pour les 124 objets dont l'axe de percussion a pu être fixé avec une relative approximation sont présentés dans le Tableau II. On constate :

a - que dans 54 cas le module arithmétique du rectangle minimal (MaR) est inférieur aux modules arithmétiques établis à partir de l'axe de percussion (MaP) ou de la longueur maximale (MaL), que dans 45 cas MaR est égal à MaP ou à MaL et, enfin, que dans 3 cas MaL est minimal ;

b - que dans 70 cas le module géométrique du rectangle minimal (MgR) est inférieur aux modules géométriques établis à partir de l'axe de percussion (MgP) ou de la longueur maximale (MgL), que dans 40 cas MgR est égal à MgP ou à MgL et, enfin, que dans 14 cas MgR est égal à MgP et à MgL.

En conclusion, ces résultats rendent manifeste l'adéquation du module géométrique MgR relativement au module arithmétique MaR à l'expression du rectangle minimal.

TABLEAU II

N°	MaP	MaL	MaR	MgP	MgL	MgR	N°	MaP	MaL	MaR	MgP	MgL	MgR
001	30,0	34,0	29,5	29,7	33,8	29,3	078	35,0	35,0	35,0	38,5	38,5	38,5
002	34,0	35,0	34,0	33,8	34,1	33,3	079	53,0	50,5	50,0	51,8	46,2	45,8
003	27,5	29,5	27,5	27,4	29,0	26,9	080	32,5	32,5	32,5	29,1	29,1	29,1
004	27,5	28,5	27,0	27,1	27,5	25,8	081	39,5	39,5	39,5	38,3	38,3	38,3
005	30,5	30,5	30,5	29,6	29,6	29,5	082	31,5	31,0	31,0	28,9	28,1	28,1
006	39,5	42,0	40,0	39,5	40,8	39,4	083	30,5	30,5	30,5	28,2	28,2	28,2
007	39,0	42,0	38,0	39,0	41,9	38,0	084	34,5	35,0	33,5	33,9	34,3	33,0
008	28,0	30,5	28,0	28,0	30,2	27,8	085	37,5	37,5	37,5	37,1	36,9	36,9
009	36,5	36,5	36,0	36,3	36,2	35,8	086	36,5	38,0	36,5	34,6	36,1	34,6

Nº	MaP	MaL	MaR	MgP	MgL	MgR	Nº	MaP	MaL	MaR	MgP	MgL	MgR
010	41,5	44,5	41,5	41,4	44,4	41,4	087	39,5	40,5	38,0	39,1	40,0	37,8
011	29,5	30,5	29,0	29,2	28,8	28,6	088	44,5	44,0	43,5	44,2	42,6	42,0
012	29,0	29,5	29,0	28,4	28,8	28,4	090	35,0	35,0	35,0	31,5	31,5	31,5
013	24,5	25,0	24,5	24,1	26,7	24,1	091	34,5	36,0	33,5	34,2	35,8	33,0
014	30,5	29,2	28,0	30,3	29,2	27,5	092	38,5	38,5	38,0	37,3	36,4	35,7
016	29,0	34,0	29,0	28,6	30,6	28,6	093	51,0	51,0	51,0	50,6	50,6	50,6
017	32,0	32,5	31,0	31,9	32,4	30,9	096	32,5	32,5	32,5	29,6	29,1	29,1
020	23,5	24,0	23,1	23,5	23,7	23,1	099	34,5	35,0	33,5	34,2	32,9	31,1
021	31,0	31,0	31,0	31,0	30,6	30,6	100	37,5	37,5	37,5	34,1	34,1	34,1
022	44,5	45,5	43,0	43,9	44,9	42,2	102	24,5	24,5	23,5	23,3	23,0	21,9
023	33,0	32,5	32,5	32,6	31,8	31,8	104	31,0	31,0	30,5	29,7	29,3	28,6
024	21,5	21,5	21,5	20,8	20,8	20,8	105	30,0	29,5	29,5	29,7	28,5	28,5
025	42,5	43,0	42,5	41,6	42,0	41,6	107	28,0	28,5	27,5	26,8	27,2	26,5
027	48,5	51,0	48,5	47,9	49,8	46,9	109	31,0	28,5	28,5	31,0	28,3	28,3
030	34,5	34,5	34,0	34,1	33,9	33,5	112	41,5	41,5	41,0	40,1	40,1	39,5
031	27,0	28,0	25,0	27,0	28,0	25,0	115	30,5	30,5	30,5	26,8	26,8	26,8
032	37,0	37,0	33,5	36,8	36,8	33,3	116	40,0	41,5	40,0	37,8	38,9	37,8
033	31,0	31,0	29,0	30,4	30,4	28,4	118	38,5	41,5	38,5	37,8	40,8	37,8
034	34,5	35,0	35,0	34,5	34,3	34,3	119	38,0	39,0	38,0	37,5	39,0	37,3
035	33,5	31,0	31,0	33,5	30,6	30,6	120	29,0	29,5	29,0	27,6	27,6	27,2
036	30,5	30,5	30,0	29,8	29,6	29,2	121	28,5	28,5	27,0	28,0	26,2	24,7
037	32,5	37,5	32,5	32,4	37,2	32,3	123	35,5	35,5	35,5	35,3	33,2	33,2
038	31,5	32,0	31,0	31,3	31,7	30,7	124	32,5	32,0	30,0	32,0	31,4	29,4
039	32,0	33,5	31,5	31,9	33,2	31,2	125	31,5	32,0	30,5	31,0	31,4	30,0
040	24,5	27,0	24,0	24,2	26,9	23,7	126	23,5	24,0	23,0	22,6	22,6	21,6
041	27,0	27,0	26,5	26,9	26,8	26,4	127	25,0	27,0	25,0	24,3	26,3	24,3
042	30,5	33,0	25,5	30,2	32,2	29,6	129	26,5	27,5	27,0	26,4	26,7	26,3
043	41,0	40,0	39,5	39,5	37,8	37,1	130	32,0	32,0	32,0	29,2	29,2	29,2
044	28,0	27,0	26,0	28,0	26,8	25,7	138	44,5	44,5	41,0	44,0	44,0	40,7
045	24,0	24,5	22,5	24,0	23,9	22,2	140	22,5	23,0	22,5	22,0	22,4	22,0
046	31,5	32,0	31,5	29,3	30,4	29,3	141	26,0	25,5	25,5	25,3	24,4	24,4
047	41,5	44,5	39,0	41,5	44,4	38,9	142	27,0	27,0	27,0	25,1	25,1	25,1
048	36,5	36,0	36,0	35,9	35,3	35,3	143	34,0	34,0	33,5	32,9	31,4	31,1
049	26,5	26,0	25,5	26,3	24,7	24,0	144	29,0	29,5	29,0	27,2	27,6	27,2
053	34,0	35,0	33,0	33,0	34,1	32,2	145	33,5	33,0	33,0	33,3	31,7	31,7
054	25,5	26,5	25,5	25,5	26,4	25,5	146	29,5	29,5	29,0	29,0	28,5	28,1
055	35,5	37,0	34,0	35,2	36,8	33,9	149	55,0	56,0	54,5	54,9	55,9	54,4
056	37,5	37,0	37,0	37,7	36,7	36,7	156	27,5	26,0	26,0	26,7	24,7	24,7
057	29,5	30,0	29,5	29,5	29,7	29,2	158	32,5	31,0	30,5	32,0	29,3	28,6
060	31,5	32,0	31,5	31,4	31,9	31,9	159	26,5	26,5	26,5	24,3	24,3	24,3
061	34,0	34,0	30,5	33,9	33,9	30,5	160	36,5	38,5	36,0	35,5	34,3	31,2
063	29,0	29,0	29,0	28,9	28,4	28,4	161	34,0	34,5	34,0	33,9	33,7	33,0
065	31,0	29,5	29,5	30,9	28,5	28,5	162	35,0	35,0	34,5	34,5	34,3	33,7
068	32,0	34,0	32,0	31,2	33,6	31,2	163	28,5	29,0	28,5	26,5	26,8	26,5
069	26,5	27,0	26,5	26,1	26,5	25,9	164	41,5	42,0	42,0	40,8	40,2	40,2
070	27,5	27,5	27,5	27,1	26,9	26,9	165	39,0	41,5	38,5	38,7	41,1	37,9
071	26,5	29,0	26,5	26,5	28,6	26,3	169	30,5	31,0	31,0	33,6	30,2	30,2
072	38,5	39,5	38,0	37,8	38,8	37,1	170	30,5	30,5	29,0	26,8	26,8	24,8
073	25,0	27,5	24,5	24,5	27,1	24,1	171	29,0	29,0	29,0	25,4	25,4	25,4
074	26,0	26,5	26,0	25,5	25,9	25,5	172	30,0	29,5	29,5	29,7	29,0	29,0
075	31,5	31,0	30,5	28,9	28,1	27,3	174	31,0	31,0	31,0	29,3	29,3	29,3
076	30,5	30,5	30,0	29,6	29,6	29,2	179	28,5	28,0	28,0	27,7	27,1	27,1
077	36,5	37,5	36,0	33,9	35,0	33,2	183	25,0	25,5	25,0	23,7	22,8	22,4

TABLEAU III

	P	L	R	P	L	R		P	L	R	P	L	R
	x	x	x	1	1	1		x	x	x	1	1	1
14	0	1	2	0	1	2	34	8	4	4	5	3	2
15	1	1	3	1	2	3	35	5	3	4	0	0	1
16	4	6	4	4	6	4	36	2	5	4	1	1	3
17	4	2	3	4	2	3	37	2	2	4	1	0	0
18	3	9	8	3	9	8	38	3	2	2	1	2	2
19	7	4	7	7	5	8	39	4	4	2	4	1	0
20	6	3	7	6	3	7	40	3	1	2	1	1	0
21	4	9	7	5	9	9	41	3	5	2	1	2	0
22	3	4	4	4	7	7	42	2	3	4	1	0	1
23	8	6	6	11	9	10	43	1	2	0	0	0	0
24	2	4	5	5	10	9	44	0	0	0	0	0	0
25	4	4	6	7	4	7	45	1	1	0	1	1	0
26	7	8	4	7	10	7	46	1	0	1	0	0	0
27	4	2	3	5	5	5	47	0	1	0	0	0	0
28	6	3	2	8	6	5	48	0	1	0	0	0	0
29	5	4	3	7	6	5	49	0	0	0	0	0	0
30	6	7	6	10	5	6	50	0	0	0	0	0	0
31	5	3	4	5	3	5	51	0	0	2	0	0	1
32	5	5	6	5	6	4	52	3	2	0	1	1	0
33	2	2	2	3	4	0	53	0	1	1	0	0	0

	P	L	R	P	L	R		P	L	R	P	L	R
	y	y	y	L	L	L		y	y	y	L	L	L
19	0	1	1	0	0	0	46	2	0	4	3	0	5
20	0	0	0	0	0	0	47	1	6	2	1	7	2
21	1	1	2	0	0	0	48	2	2	2	2	3	3
22	1	3	3	0	0	0	49	2	3	1	2	3	1
23	3	3	4	0	0	0	50	3	2	3	3	2	3
24	4	7	6	1	0	0	51	3	4	3	3	4	4
25	4	0	1	1	0	0	52	1	3	1	3	3	2
26	1	2	5	0	0	2	53	2	1	2	2	3	3
27	3	4	4	4	1	3	54	0	0	1	0	1	1
28	7	7	5	5	3	2	55	0	1	1	0	1	1
29	5	3	5	3	2	3	56	1	2	0	1	2	0
30	8	1	2	4	3	2	57	1	1	1	1	1	1
31	6	1	5	6	1	4	58	1	0	1	1	0	1
32	6	6	2	6	5	4	59	0	0	0	0	0	0
33	2	6	5	1	4	7	60	0	1	0	0	1	0
34	9	5	3	11	6	5	61	0	0	1	0	0	1
35	3	4	6	8	7	9	62	0	1	0	0	1	0
36	2	2	7	3	6	8	63	0	0	0	0	0	0
37	5	7	4	6	9	8	64	1	0	0	1	0	0
38	5	8	5	7	8	4	65	0	0	0	0	0	0
39	8	0	5	8	3	7	66	0	0	0	0	0	0
40	3	6	2	5	6	3	67	0	0	0	0	0	0
41	3	4	2	5	7	5	68	0	0	0	0	0	0
42	1	6	5	2	9	8	69	0	0	0	0	0	0
43	3	2	2	4	4	2	70	0	0	1	0	0	1
44	5	3	4	5	3	4	71	0	1	0	0	1	0
45	6	4	5	6	4	5							

4.3. Données fondamentales à deux variables groupées par classes

L'intervalle de classes étant le millimètre et la valeur centrale de classe un nombre entier, les données fondamentales sont groupées de la classe 14 à la classe 53 incluses pour les valeurs des x et des largeurs, et de la classe 19 à la classe 71 inclus pour les y et les longueurs. Le groupement des données par classes est présenté dans le Tableau III.

4.4. Données statistiques fondamentales à deux variables

Elles comportent les quatre moyennes ( $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{L}$ ), les quatre coefficients de variation ( $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_l$ ,  $V_L$ ), les quatre écarts-types ( $s_x$ ,  $s_y$ ,  $s_l$ ,  $s_L$ ), les deux covariances ( $s_{xy}$ ,  $s_{lL}$ ), les deux coefficients de corrélation ( $r_{xy}$ ,  $r_{lL}$ ), les quatre sommes ( $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_l$ ,  $S_L$ ), les deux sommes de produits ( $S_{xy}$ ,  $S_{lL}$ ) et les quatre sommes de carrés ( $S_x^2$ ,  $S_y^2$ ,  $S_l^2$ ,  $S_L^2$ ). Ces données figurent dans le Tableau IV.

TABLEAU IV

	P	L	R		P	L	R
N .....	124	124	124	N .....	124	124	124
$\bar{x}$ .....	28,879	28,856	27,371	$\bar{l}$ .....	26,694	25,508	24,460
$\bar{y}$ .....	36,637	38,081	36,944	$\bar{L}$ .....	38,823	41,129	39,855
$V_x$ .....	29,111	31,993	31,883	$V_l$ .....	25,364	26,203	25,376
$V_y$ .....	24,520	26,592	27,205	$V_L$ .....	20,237	19,461	20,285
$s_x$ .....	8,407	9,136	8,727	$s_l$ .....	6,771	6,684	6,207
$s_y$ .....	8,984	10,127	10,051	$s_L$ .....	7,856	8,004	8,085
$s_{xy}$ ...	1,907	-12,045	-14,280	$s_{lL}$ ...	23,815	26,592	22,360
$r_{xy}$ ...	0,025	-0,130	-0,163	$r_{lL}$ ...	0,448	0,497	0,446
$S_x$ ...	3581	3541	3394	$S_l$ ...	3310	3163	3033
$S_y$ .....	4543	4722	4581	$S_L$ ...	4814	5100	4942
$S_{xy}$ ..	131432	133362	123630	$S_{lL}$ ..	131432	133362	123630
$S_x^2$ ..	112109	111385	102264	$S_l^2$ ..	93994	86177	78925
$S_y^2$ ..	176369	192430	181663	$S_L^2$ ..	194484	217638	205002

4.5. Ajustement à une loi normale

4.5.1. Bases théoriques

Lorsque l'on considère un couple de variables, deux cas peuvent se présenter :

a - 1er cas : l'une des variables étant un facteur contrôlé et l'autre étant un facteur non contrôlé, donc aléatoire, on peut étudier comment varie la seconde en fonction de la première. Tel n'est pas le cas que nous étudions.

b - 2e cas : l'une et l'autre variable représentant des facteurs non contrôlés, donc aléatoires, le problème de la liaison entre les deux variables se pose, soit qu'il s'agisse de la question de trouver un indice qui permette de chiffrer cette liaison, et cet indice est le coefficient de corrélation de Bravais-Pearson, soit qu'il s'agisse de la question de déterminer dans quelle mesure la connaissance de l'une des variables permet de préciser notre connaissance de l'autre, et nous devons avoir recours au calcul de la régression linéaire. Les deux questions sont équivalentes, mais avec la première on fait jouer aux deux variables un rôle symétrique tandis qu'avec la seconde l'une des deux variables est considérée, plus ou moins implicitement, comme dépendante de l'autre. Tel est le cas que nous étudions, mais la réponse à ces questions n'est simple que si la population dont est tiré l'échantillon obéit à une loi de Laplace-Gauss.

Pour tester l'ajustement à une loi normale j'utilise, de préférence à une distribution de Laplace-Gauss de moyenne et écart type connus partagée en classes d'égale probabilité, une distribution de Laplace-Gauss de moyenne et d'écart type connus construite à partir des classes de la distribution observée. Pour ce faire :

a - on transcrit d'abord les limites supérieures de classes en variables de Laplace-Gauss réduites selon la formule :

$$\dots U = \frac{\text{limite supérieure} - \text{moyenne}}{\text{écart-type}} ;$$

b - à l'aide d'une table de la fonction de répartition de Laplace-Gauss, c'est-à-dire la table  $F(u)$ , on cherche pour chaque variable  $U$  la probabilité qui lui est attachée ; on obtient ainsi la probabilité cumulée ;

c - par soustraction des probabilités cumulés, on obtient la proportion théorique par classe ;

d - en multipliant chaque proportion théorique par l'effectif  $N$  de l'échantillon, on obtient l'effectif théorique de chaque classe ;

e - on écrit en regard de chaque effectif théorique l'effectif observé dans chaque classe ;

f - il reste à effectuer un test du Khi 2 à  $N-3$  degrés de liberté, en opérant les regroupements nécessaires aux deux extrémités de la distribution normale de manière à respecter la recommandation de Cochran selon laquelle on peut tolérer une valeur de l'effectif calculé entre 1 et 5 s'il y a 6 à 10 classes, et deux valeurs de cet effectif entre 1 et 5 s'il y a plus de 10 classes.

#### 4.5.2. Application

Les résultats obtenus pour l'ajustement des distributions des variables  $x$ ,  $y$ ,  $l$  et  $L$  dans les séries  $P$ ,  $L$  et  $R$  à des distributions de Laplace-Gauss de mêmes moyennes et mêmes écarts-types sont présentés dans le Tableau V.

TABLEAU V

P ... x ...	$X^2 = 23,299$	...	d.d.1. = 21-3 = 18	...	P = .179
P ... y ...	$X^2 = 28,989$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .024
L ... x ...	$X^2 = 23,233$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .108
L ... y ...	$X^2 = 23,293$	....	d.d.1. = 18-3 = 15	...	P = .078
R ... x ...	$X^2 = 25,268$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .065
R ... y ...	$X^2 = 16,102$	...	d.d.1. = 18-3 = 15	...	P = .375
P ... 1 ...	$X^2 = 18,892$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .274
P ... L ...	$X^2 = 22,846$	...	d.d.1. = 20-3 = 17	...	P = .154
L ... 1 ...	$X^2 = 20,285$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .208
L ... L ...	$X^2 = 17,875$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .331
R ... 1 ...	$X^2 = 11,458$	...	d.d.1. = 19-3 = 16	...	P = .780
R ... L ...	$X^2 = 16,206$	...	d.d.1. = 20-3 = 17	...	P = .509

En conclusion, on constate :

a - que pour x en P, l'indicateur d'écart compris entre les seuils de signification 0,05 et 0,01, ce qui signifie que l'hypothèse de l'ajustement à une distribution gaussienne est rejetée au seuil de 0,05, mais admise au seuil de 0,01. Il est opportun de souligner ici que selon F. Grémy et D. Salmon (Grémy et Salmon 1969), "les tests statistiques qui reposent sur la loi de Laplace-Gauss sont "robustes". Cela signifie qu'ils ne sont défaillants que si l'on s'écarte beaucoup de l'hypothèse de normalité. Cette défaillance revient en général à déclarer significative une situation qui ne l'est pas en réalité, c'est-à-dire à rejeter à tort l'hypothèse nulle. Une règle pratique, quand la normalité de la distribution n'est pas très certaine, est d'être plus conservateur, c'est-à-dire de ne rejeter l'hypothèse nulle que pour un risque de première espèce égal à 0,01 ou même à 0,001".

b - que pour y en L et x en R, l'indicateur d'écart est compris entre 0,10 et 0,05, ce qui signifie que l'hypothèse nulle n'est pas rejetée, mais admise avec réserve au seuil de 0,05 ;

c - que des excellents ajustements des distributions de 1 et L dans les séries P, L et R, les meilleurs, et de loin, appartiennent aux séries du rectangle minimal.

#### 4.6. Régression et corrélation

##### 4.6.1. Bases théoriques de la régression linéaire

a - Si l'on dispose, pour chaque élément d'un échantillon, de deux mesures portant sur une variable  $x$  et sur une variable  $y$  dont on a des raisons de supposer qu'elle dépend de  $x$ , on admet que la population dont est extrait l'échantillon obéit au modèle mathématique ...  $y = \alpha + \beta x + \epsilon$  ... dans lequel  $\alpha + \beta x$  est une composante certaine ou droite de régression théorique dont la pente  $\beta$  est appelée coefficient de régression théorique,  $\epsilon$  étant une composante aléatoire, variable de Laplace-Gauss, de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ .

b - On estime les trois quantités théoriques inconnues  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma^2$  par la méthode des moindres carrés. On peut alors tracer la droite de régression ajustée, d'équation ...  $y' = a + bx$  ... dans laquelle la pente  $b$ , positive ou négative, est appelée coefficient de régression empirique,  $a$  étant l'ordonnée à l'origine. Cette droite passant par les points moyens  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  est telle que la somme des carrés des écarts verticaux de chaque point observé à cette droite soit minimale. La valeur des coefficients  $b$  et  $a$  est donnée par les formules :

$$b = \frac{S(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{S(x - \bar{x})^2} \quad \text{et} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

On calcule pratiquement  $b$  comme suit :

$$b = \frac{Sxy - \frac{(Sx)(Sy)}{N}}{Sx^2 - \frac{(Sx)^2}{N}}$$

La meilleure estimation de  $\sigma^2$  est ...  $s^2 = \frac{S(y - y')^2}{N - 2}$

On calcule pratiquement  $s^2$  comme suit :

$$s^2 = \frac{Sy^2 - \frac{(Sy)^2}{N} - \frac{Sxy - \frac{(Sx)(Sy)}{N}}{Sx^2 - \frac{(Sx)^2}{N}}}{N - 2}$$

c - On peut comparer  $b$  à une valeur théorique  $\beta$  donnée. Le comparer à  $\beta = 0$  revient à chercher si la droite est horizontale, c'est-à-dire si  $y$  ne dépend pas des variations de  $x$ .

Pour ce faire, on forme ...  $t = \frac{b - \beta}{s_b}$ , c'est-à-dire ...  $t = \frac{b - 0}{s_b}$  ... et on recherche le degré de signification de l'indicateur de différence  $t$  dans la table de distribution du  $t$  de Student-Fischer à  $N-2$  degrés de liberté.

On calcule pratiquement  $s_b$  comme suit :

$$s_b = \left( \frac{s^2}{Sx^2 - \frac{(Sx)^2}{N}} \right)^{1/2}$$

#### 4.6.2. Bases théoriques de la corrélation

a - Si nous considérons une distribution de Laplace-Gauss à deux dimensions : cette distribution est centrée sur un point d'abscisse  $\underline{\mu}_x$  et d'ordonnée  $\underline{\mu}_y$  où la probabilité est la plus forte ; la distribution marginale de x, compte non tenu de y, est gaussienne, de moyenne  $\underline{\mu}_x$  et de variance  $\underline{\sigma}_x^2$ , et il est de même de la distribution marginale de y, compte non tenu de x, de moyenne  $\underline{\mu}_y$  et de variance  $\underline{\sigma}_y^2$  ; chaque colonne représente une distribution partielle d'y, gaussienne, pour une valeur donnée de x, les moyennes de ces distributions partielles, de variance constante  $\underline{\sigma}_{y/x}^2$ , indépendante de x et plus petite que  $\underline{\sigma}_y^2$ , étant alignées sur la droite de régression de y sur x ; chaque ligne représente une distribution partielle de x, gaussienne, pour une valeur donnée de y, les moyennes de ces distributions partielles, de variance constante  $\underline{\sigma}_{x/y}^2$ , indépendante de y et plus petite que  $\underline{\sigma}_x^2$ , étant alignées sur la droite de régression de x sur y ; les deux droites de régression sont distinctes et l'ensemble de la distribution peut être pratiquement enveloppée par une ellipse, la probabilité de se trouver à l'extérieur de cette ellipse demeurant très faible.

b - L'indice d'allongement de l'ellipse est un coefficient  $\underline{\rho}$  ou coefficient de corrélation théorique, compris entre -1 et +1, dont la valeur absolue indique la forme de l'ellipse, c'est-à-dire le degré de liaison entre x et y pouvant aller de l'indépendance ( $\underline{\rho} = 0$ ) à la relation linéaire entre x et y ( $\underline{\rho} = 1$ ), le signe  $\underline{\rho}$  indiquant le sens de la variation relative de x et y ( $\underline{\rho}$  est positif si x et y varient dans le même sens ;  $\underline{\rho}$  est négatif si x et y varient en sens contraire).

c - On estime  $\underline{\rho}$  par r ou coefficient de corrélation empirique de Bravais-Pearson donné par la formule :

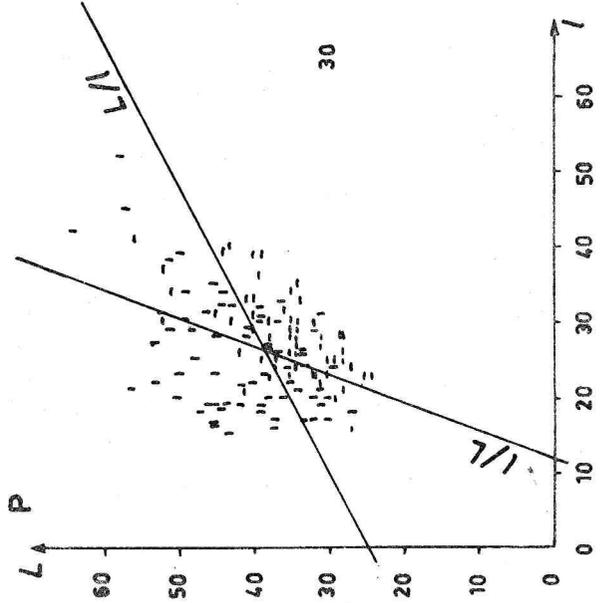
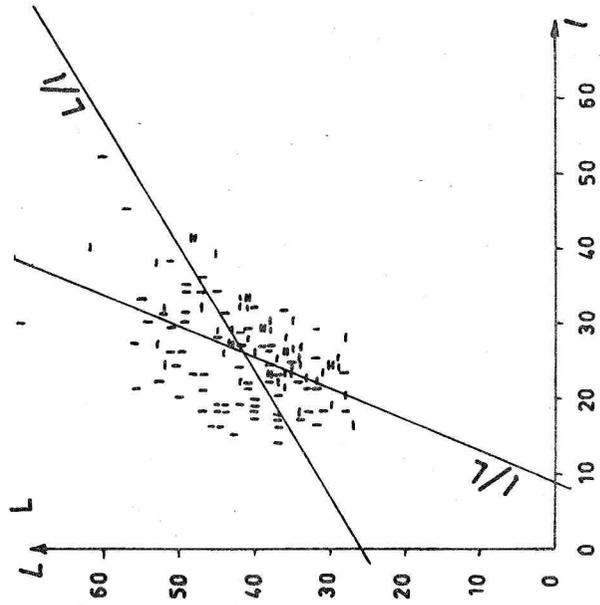
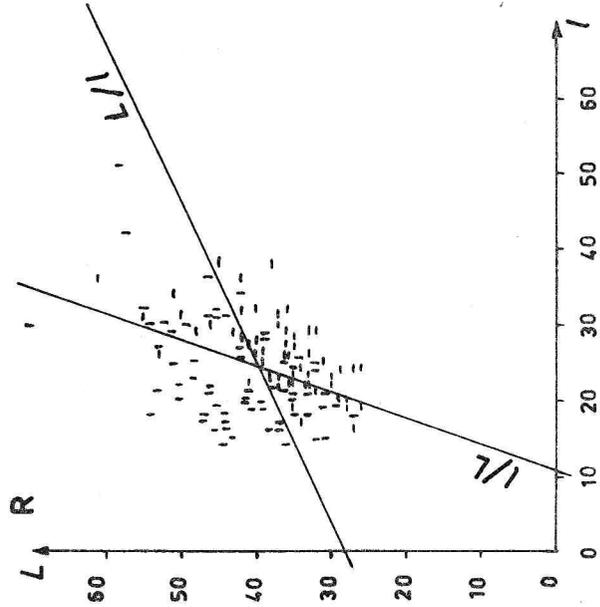
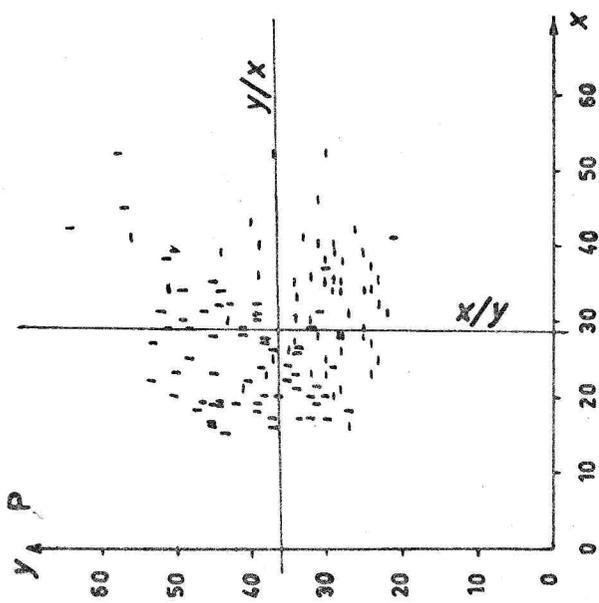
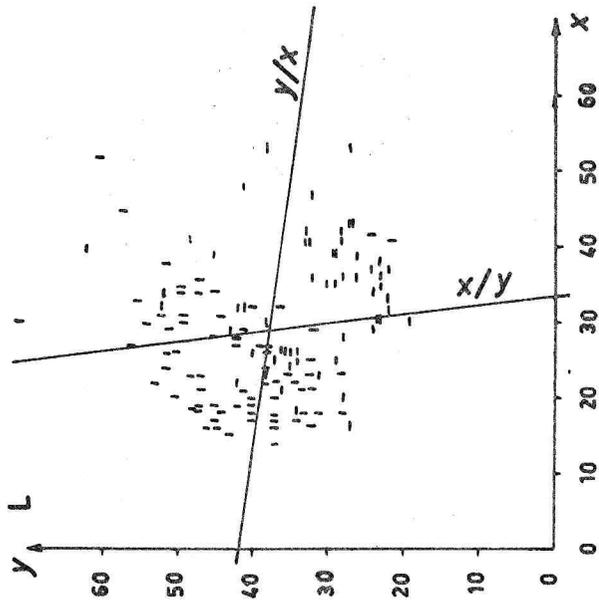
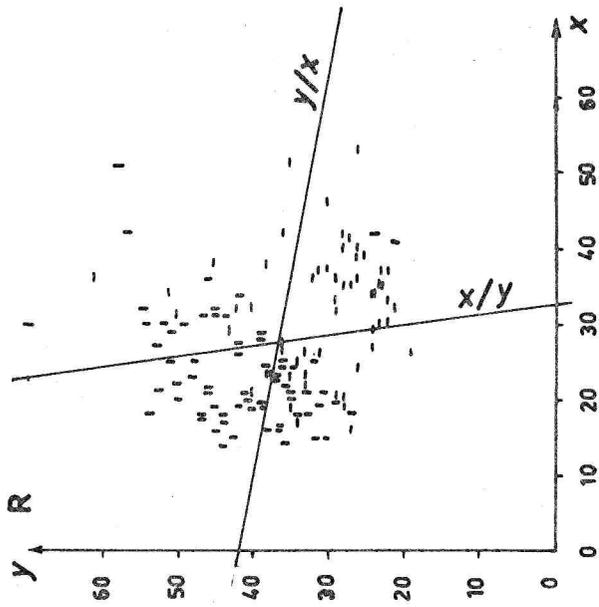
$$r = \frac{S(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(S(x - \bar{x})^2 S(y - \bar{y})^2)^{1/2}}$$

On calcule pratiquement r comme suit :

$$r = \frac{S_{xy} - \frac{(S_x)(S_y)}{N}}{\left( \left( S_x^2 - \frac{(S_x)^2}{N} \right) \left( S_y^2 - \frac{(S_y)^2}{N} \right) \right)^{1/2}}$$

d - On peut comparer r à une valeur théorique  $\underline{\rho}$  donnée. Le comparer à  $\underline{\rho} = 0$  revient à tester l'hypothèse de l'indépendance de x et de y.

Or, la distribution de r autour de  $\underline{\rho}$  est très compliquée, en général très asymétrique. Fisher a proposé une transformation de r en une variable z qui a une distribution de Laplace-Gauss et qui est donné par



la formule ...  $z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ .

Soit un échantillon d'effectif N, dont le coefficient de corrélation est r et qui est tiré d'une population caractérisée par un coefficient de corrélation  $\underline{r\hat{h}}$ . Considérons z et  $\underline{z\hat{\eta}}$ , transformées respectives de r et de  $\underline{r\hat{h}}$  : z est distribuée de façon gaussienne autour de  $\underline{z\hat{\eta}}$  avec une variance ...  $\underline{\sigma_z^2} = \frac{1}{N-3}$ .

En conclusion, on calcule la valeur ...  $U = \frac{z - \underline{z\hat{\eta}}}{\underline{\sigma_z}}$ , c'est-à-dire  $U = \frac{z - 0}{\underline{\sigma_z}}$  ... et on recherche le degré de signification de l'indicateur de différence U dans la table P(u) de la loi normale centrée réduite, dite table de l'écart-réduit, donnant les valeurs de u ayant la probabilité P d'être dépassées en valeur absolue.

Remarquons que le test  $\underline{r\hat{h}} = 0$  peut être résolu de façon différente en calculant le coefficient de régression empirique  $b_{y/x}$  et en le comparant à zéro.

#### 4.6.3. Application

a - La seconde figure comporte six graphiques où les Raclairs latéro-transversaux sont représentés par des petits traits horizontaux et les Pointes par des petits traits verticaux. Les trois graphiques supérieurs sont construits avec les données x et y obtenues respectivement au moyen de l'axe de percussion (P), de la longueur maximale (L) et du rectangle minimal (R). Dans les trois graphiques inférieurs, les données x et y sont remplacées par les largeurs (l) et les longueurs (L) absolues.

On constate : que les deux distributions, celle des Raclairs latéro-transversaux et celle des Pointes, quoique bien individualisées, se réunissent pour former un seul nuage, un seul ensemble ; que dans les graphiques supérieurs, et particulièrement dans le graphique P(x,y), chaque nuage tend à former un cercle ; que dans les graphiques supérieurs, chaque nuage tend à former une ellipse relativement ventrue.

b - Le calcul des divers coefficients de régression linéaire b et des ordonnées à l'origine a correspondantes permet de dresser le Tableau VI des six couples de droites de régression tracées sur les graphiques de la seconde figure.

Pour ce qui concerne les droites de régression du graphique P(x,y), on se référera à l'observation du paragraphe 4.5.2. a.

c - Les variables x et y puis l et L, sont-elles indépendantes en P, en L et en R ? On compare la valeur des coefficients de corrélation empirique  $r_{xy}$  et  $r_{lL}$  à la valeur théorique  $\underline{r\hat{h}} = 0$  dans chacune des séries. La séquence des calculs est exposée dans le Tableau VII.

TABLEAU VI

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	S xy	S x	S y	S x <sup>2</sup>	S y <sup>2</sup>
P	28,879	36,637	131432	3581	4543	112109	176369
L	28,856	38,081	133362	3541	4722	111385	192430
R	27,371	36,944	123630	3394	4581	102264	181663
P	$b_{y/x} = (131432 - \frac{3581 \cdot 4543}{124}) / (112109 - \frac{3581^2}{124}) = +0,03$						
P	$a_{y/x} = 36,637 - (+0,03 \cdot 28,879) = +35,86 \quad \dots \quad y' = 35,86 + 0,03 x$						
P	$b_{x/y} = (131432 - \frac{3581 \cdot 4543}{124}) / (176369 - \frac{4543^2}{124}) = +0,02$						
P	$a_{x/y} = 28,879 - (+0,02 \cdot 36,637) = +28,01 \quad \dots \quad x' = 28,01 + 0,02 y$						
L	$b_{y/x} = (133362 - \frac{3541 \cdot 4722}{124}) / (111385 - \frac{3541^2}{124}) = -0,14$						
L	$a_{y/x} = 38,081 - (-0,14 \cdot 28,856) = +42,25 \quad \dots \quad y' = 42,25 - 0,14 x$						
L	$b_{x/y} = (133362 - \frac{3541 \cdot 4722}{124}) / (192430 - \frac{4722^2}{124}) = -0,12$						
L	$a_{x/y} = 28,856 - (-0,12 \cdot 38,081) = +33,33 \quad \dots \quad x' = 33,33 - 0,12 y$						
R	$b_{y/x} = (123630 - \frac{3394 \cdot 4581}{124}) / (102264 - \frac{3394^2}{124}) = -0,19$						
R	$a_{y/x} = 36,944 - (-0,19 \cdot 27,371) = +42,08 \quad \dots \quad y' = 42,08 - 0,19 x$						
R	$b_{x/y} = (123630 - \frac{3394 \cdot 4581}{124}) / (181663 - \frac{4581^2}{124}) = -0,14$						
R	$a_{x/y} = 27,371 - (-0,14 \cdot 36,944) = +32,59 \quad \dots \quad x' = 32,49 - 0,14 y$						
	$\bar{l}$	$\bar{1}$	S l1	S l	S 1	S l <sup>2</sup>	S 1 <sup>2</sup>
P	26,694	38,823	131432	3310	4814	93994	184484
L	25,508	41,129	133362	3163	5100	86177	217638
R	24,460	39,851	123630	3033	4942	79925	205002
P	$b_{L/1} = (131432 - \frac{3310 \cdot 4814}{124}) / (93994 - \frac{3310^2}{124}) = +0,52$						
P	$a_{L/1} = 38,823 - (+0,52 \cdot 26,694) = +24,95 \quad \dots \quad L' = 24,95 + 0,52 1$						
P	$b_{1/L} = (131432 - \frac{3310 \cdot 4814}{124}) / (184482 - \frac{4814^2}{124}) = +0,39$						
P	$a_{1/L} = 26,694 - (+0,39 \cdot 38,823) = +11,71 \quad \dots \quad 1' = 11,71 + 0,39 L$						
L	$b_{L/1} = (133362 - \frac{3163 \cdot 5100}{124}) / (86177 - \frac{3163^2}{124}) = +0,60$						
L	$a_{L/1} = 41,129 - (+0,60 \cdot 25,508) = +25,95 \quad \dots \quad L' = 25,95 + 0,60 1$						
L	$b_{1/L} = (133362 - \frac{3163 \cdot 5100}{124}) / (217638 - \frac{5100^2}{124}) = +0,42$						
L	$a_{1/L} = 25,508 - (+0,42 \cdot 41,129) = +8,44 \quad \dots \quad 1' = 8,44 + 0,42 L$						
R	$b_{L/1} = (123630 - \frac{3033 \cdot 4942}{124}) / (79925 - \frac{3033^2}{124}) = +0,48$						
R	$a_{L/1} = 39,851 - (+0,48 \cdot 24,460) = +28,13 \quad \dots \quad L' = 28,13 + 0,48 1$						
R	$b_{1/L} = (123630 - \frac{3033 \cdot 4942}{124}) / (205002 - \frac{4942^2}{124}) = +0,34$						
R	$a_{1/L} = 24,460 - (+0,34 \cdot 39,851) = +10,83 \quad \dots \quad 1' = 10,83 + 0,34 L$						

TABLEAU VII

1. Variables x et y

Pour P :

$$s_z^2 = 1 / (124 - 3) = 0,083 \quad \dots \quad s_z = 0,091$$
$$r_{xy} = 0,025 \quad \dots \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,025}{1 - 0,025} = 0,025$$
$$U = 0,025 / 0,091 = 0,275 \quad \dots \quad P = .783$$

Pour L :

$$s_z^2 = 1 / (124 - 3) = 0,083 \quad \dots \quad s_z = 0,091$$
$$r_{xy} = -0,130 \quad \dots \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (-0,130)}{1 - (-0,130)} = -0,131$$
$$U = 0,131 / 0,091 = 1,438 \quad \dots \quad P = .150$$

Pour R :

$$s_z^2 = 1 / (124 - 3) = 0,083 \quad \dots \quad s_z = 0,091$$
$$r_{xy} = -0,163 \quad \dots \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (-0,163)}{1 - (-0,163)} = -0,164$$
$$U = 0,164 / 0,091 = 1,809 \quad \dots \quad P = .070$$

2. Variables l et L

Pour P :

$$s_z^2 = 1 / (124 - 3) = 0,083 \quad \dots \quad s_z = 0,091$$
$$r_{lL} = 0,448 \quad \dots \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,448}{1 - 0,448} = 0,482$$
$$U = 0,482 / 0,091 = 5,304 \quad \dots \quad P = .000000114 \quad \text{soit} \quad 1,14 \cdot 10^{-7}$$

Pour L :

$$s_z^2 = 1 / (124 - 3) = 0,083 \quad \dots \quad s_z = 0,091$$
$$r_{lL} = 0,497 \quad \dots \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,497}{1 - 0,497} = 0,545$$
$$U = 0,545 / 0,091 = 5,998 \quad \dots \quad P = .000000002 \quad \text{soit} \quad 2,00 \cdot 10^{-9}$$

Pour R :

$$s_z^2 = 1 / (124 - 3) = 0,083 \quad \dots \quad s_z = 0,091$$
$$r_{lL} = 0,446 \quad \dots \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0,446}{1 - 0,446} = 0,480$$
$$U = 0,480 / 0,091 = 5,227 \quad \dots \quad P = .000000173 \quad \text{soit} \quad 1,73 \cdot 10^{-7}$$

En conclusion, l'hypothèse nulle de l'indépendance des données x et y n'est pas rejetée. Par contre l'hypothèse nulle de l'indépendance des données l et L est rejetée et l'on admet l'hypothèse alternative d'une corrélation positive entre largeurs et longueurs absolues.

d - Si l'on se réfère au procédé dit de la "longueur maximale", la variable largeur (l) peut être considérée dans une certaine mesure dépendante de la variable longueur (L). De même, dans le procédé dit du "rectangle minimal", la variable longueur (L) peut être considérée comme dépendante de la variable largeur (l). En conséquence, il est légitime de se poser les questions : peut-on admettre qu'en réalité dans la population L, l ne dépend pas de L et que, dans la population R, L ne dépend pas de l ? Pour y répondre, on comparera la valeur des coefficients de régression empirique  $b_{l/L}$  (pour l' = 8,44 + 0,42 l) et  $b_{L/l}$  (pour L' = 28,13 + 0,48 l) à la valeur théorique  $\hat{\beta} = 0$ . Le détail de ces calculs est exposé dans le Tableau VIII.

TABLEAU VIII

Peut-on admettre qu'en réalité dans la population L, l ne dépend pas de L ?

- On compare la valeur observée b à zéro pour l' = 8,44 + 0,415 L
- $s_d^2 = (86177 - \frac{3163^2}{124}) - ((133362 - \frac{3163 \cdot 5100}{124})^2 / (217638 - \frac{5100^2}{124}))$   
= 4137,291 ...
- $s^2 = 4137,291 / 122 = 33,912$  ...
- $s_b^2 = 33,912 / (217638 - \frac{5100^2}{124}) = 0,004$  ...
- $s_b = 0,066$  avec  $b = 0,415$  ...
- $t = 0,415 / 0,066 = 6,326$  ...
- $P = .000000004$  soit  $4,00 \cdot 10^{-9}$

Peut-on admettre qu'en réalité dans la population R, L ne dépend pas de l ?

- On compare la valeur observée b à zéro pour L' = 28,13 + 0,479 l
- $s_d^2 = (205002 - \frac{4942^2}{124}) - ((123630 - \frac{3033 \cdot 4942}{124})^2 / (78925 - \frac{3033^2}{124}))$   
= 6443,200 ...
- $s^2 = 6443,200 / 122 = 52,813$  ...
- $s_b^2 = 52,813 / (78925 - \frac{3033^2}{124}) = 0,011$  ...
- $s_b = 0,106$  avec  $b = 0,479$  ...
- $t = 0,479 / 0,106 = 4,537$  ...
- $P = .0000134$  soit  $1,34 \cdot 10^{-5}$

#### 4.7. Comparaison des moyennes de deux séries appariées

##### 4.7.1. Bases théoriques

a - On se propose de comparer deux à deux, d'une part les moyennes des largeurs et, d'autre part, les moyennes des longueurs, dans les séries P, L et R. Or, ces échantillons ne sont pas indépendants. En conséquence, les résultats de chacun des couples de séries considérées se correspondant deux à deux, chacun des nombres d'une colonne doit être comparée au nombre correspondant de l'autre colonne, et non pas aux autres.

b - On procédera comme suit : pour chaque couple de valeurs, on calculera leur différence ...  $d = x_1 - x_2$  ; on en déduira la somme des différences ...  $T_1 = \sum d_i$  et la somme des carrés de différences ...  $T_2 = \sum d_i^2$  ; on calculera ensuite la moyenne des différences ...

$\bar{d} = \frac{T_1}{N}$ , puis la variance des différences ...  $s_d^2 = \frac{T_2}{N-1} - \frac{T_1^2}{N}$  et enfin, la

variance de la moyenne ...  $s_{\bar{d}}^2 = \frac{s_d^2}{N}$ .

c - L'hypothèse nulle qui doit être testée est celle de la non différence significative des moyennes. Si cette hypothèse est vérifiée, la moyenne des différences  $\bar{d}$  ne doit pas être très différente de zéro. On est donc ramené à la comparaison d'une moyenne à une valeur théorique,

donc à calculer ...  $t = \frac{\bar{d} - 0}{s_{\bar{d}}}$  ... et on recherchera le degré de signification de l'indicateur de différence t dans la table de distribution du t de Student-Fisher à N-1 degrés de liberté.

##### 4.7.2. Application

La démarche de la comparaison des moyennes des largeurs, puis des longueurs, dans les couples de séries appariées P et L, L et R, P et R, est présentée dans le Tableau IX.

Ainsi, le calcul met en évidence des différences hautement significatives entre les moyennes tant des largeurs que des longueurs pour les trois couples de séries appariées et, de ce fait, rend manifesté l'autonomie des trois procédés de mensuration étudiés.

TABLEAU IX

	P	L	R
Moyennes des largeurs .....	26,694	25,508	24,460
Moyennes des longueurs .....	38,823	41,129	39,855

	S d <sub>i</sub>	S d <sub>i</sub> <sup>2</sup>	$\bar{d}$	s <sub>d</sub>	s <sub>d</sub> <sup>2</sup>	s $\frac{2}{d}$	s $\bar{d}$	t	P
$\bar{I}(P) - \bar{I}(L)$	+147	1123	+1,185	2,777	7,713	0,062	0,249	+4,753	2,75.10 <sup>-6</sup>
$\bar{I}(P) - \bar{I}(R)$	+277	1375	+2,234	2,480	6,148	0,050	0,223	+10,032	< 1,00.10 <sup>-9</sup>
$\bar{I}(L) - \bar{I}(R)$	+130	362	+1,048	1,335	1,835	0,015	0,122	+8,618	< 1,00.10 <sup>-9</sup>
$\bar{L}(P) - \bar{L}(L)$	-286	1418	-2,306	2,483	6,185	0,050	0,223	-10,344	< 1,00.10 <sup>-9</sup>
$\bar{L}(P) - \bar{L}(R)$	-128	918	-1,032	2,258	6,389	0,052	0,227	-4,548	1,28.10 <sup>-5</sup>
$\bar{L}(L) - \bar{L}(R)$	+158	506	+1,274	1,574	2,447	0,020	0,141	+9,017	< 1,00.10 <sup>-9</sup>

BIBLIOGRAPHIE

=====

- BORDES F. 1961 - Typologie du Paléolithique ancien et moyen. Publications de l'Institut de Préhistoire de l'Université de Bordeaux, Delmas 85 p., 1 tabl., 108 pl. hors texte.
- GREMY F. et SALMON D. 1969 - Bases statistiques pour la recherche médicale et biologique, Dunod, 412 p., 11 tables.
- LAPLACE G. 1974 - La typologie analytique et structurale : base rationnelle d'étude des industries lithiques et osseuses. Banques de données archéologiques. Colloques Nationaux du C.N.R.S., n° 932, Marseille 12-14 juin 1972, C.N.R.S., p. 91-143, 30 fig.
- LAPLACE G. 1974 - Diagrammes des aires et des allongements : indices de grandeur absolue et quadratique de carénage. Dialektikê. Cahiers de typologie analytique 1974, Centre de Palethnologie stratigraphique, I.U.R.S. Pau, p. 5-9, 1 fig.
- LAPLACE G. 1976 - Notes de typologie analytique. Anatomie et orientation de l'éclat brut ou façonné. Dialektikê. Cahiers de typologie analytique 1976, Centre de Palethnologie stratigraphique, I.U.R.S., Pau, p. 30-34, 1 fig.
- MOBERG C.A. 1964 - Counting and measuring non-tool flint flakes. Göteborgs Arkeologiska Museum, 23 p., IX pl. hors texte.
- MOVIUS H.L., DAVID N.C., BRICKER H.M. et BERLE CLAY R 1968 - The analysis of Certain Major Classes of Upper Paleolithic Tools. American School of prehistoric Research, Peabody Museum, Harvard University, Bulletin 26, 58 p., 28 fig.
- MOVIUS H.L. et BROOKS A.S. 1971 - The analysis of Certain Major Classes of Upper Paleolithic Tools : Aurignacien Scrappers. Proceedings of the Prehistoric Society for 1971, XXXVII, p. 253-273, 12 fig.