

Über die Stabilität rotierender Wellen.

Von R. v. Mises in Straßburg i. E.

Die auffallenden Erscheinungen an rotierenden Wellen, die sich unter dem Einflusse der „Fliehkraft“ ausbiegen, sind vielfach theoretisch und experimentell untersucht worden.¹⁾ Doch hat man in manchen gerade grundlegenden Fragen noch keinen befriedigenden Abschluß erzielt.

Im ersten Teile der vorliegenden Arbeit wird zunächst (§ 1) die Frage nach der Existenz der „kritischen Geschwindigkeiten“ mit den Hilfsmitteln, welche die Theorie der Integralgleichungen liefert, allgemein erledigt. Es liegt hier ein Fall vor, in dem die Formulierung des mechanischen Problems unmittelbar auf eine Integralgleichung führt — der Differentialgleichungs-Ansatz (§ 2) wird auf viel weniger anschaulichem Wege erreicht. Weiterhin ist das Interesse an der tatsächlichen numerischen Berechnung der Eigenwerte in den Vordergrund gestellt. Von diesem Gesichtspunkte aus will insbesondere § 2 beurteilt sein, der in der Anwendung der Methode der unendlich vielen Variablen über das durch Konvergenzbeweise unmittelbar gedeckte Gebiet hinausgeht. Schließlich bringt § 3 den Beweis für ein in der technischen Literatur eingebürgertes graphisches Ermittlungsverfahren, das sich als eine unmittelbare Folgerung aus der Picardschen Methode der sukzessiven Approximationen herausstellt.

Der zweite Teil untersucht die bisher noch wenig geklärte Frage nach der mechanischen Bedeutung der „kritischen Geschwindigkeiten“. Indem wir nach einer kurzen kritischen Betrachtung (§ 4) zwei einfache Fälle auf Grund der vollständigen, durch elliptische Integrale zu lösenden Differentialgleichung behandeln (§ 5), zeigt sich, daß keine der üblichen Auffassungen völlig im Recht ist. Weder ist die kritische Geschwindigkeit die Stelle der größten Ausbiegungen, noch bedeutet sie in allen Fällen einen Übergang vom labilen in den stabilen Zustand. In dem

¹⁾ Von größeren Arbeiten, die auch Literaturangaben enthalten, seien genannt: S. Dunkerley, On the Whirling and Vibration of Shafts, Philos. trans. of the Roy. Soc. London 1894, vol. 185. — Part. I., p. 279—360 und C. Chree, The Whirling and Transverse Vibrations of Rotating Shafts, Philos. magaz. (6) vol. 7, p. 504—542, Mai 1904. Die ersten Ergebnisse verdankt man A. G. Greenhill, Proc. Instit. of Me han. Engineers 1883, p. 182. Vgl. a. F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels, IV (1910), p. 884.

praktisch wichtigsten Falle der an den Enden unverschiebbar gelagerten Welle kommen wir zu dem Schlusse (§ 6), daß nahe unterhalb des kritischen Punktes ein Übergang aus einer Gleichgewichtslage in eine andere, von der ersten entfernte, stattfinden muß, der mit Schwingungen u. ä. verbunden sein kann; ein eigentliches Gebiet labilen Gleichgewichts tritt jedoch nicht auf.

Auf Nebenerscheinungen, wie die geradrichtende Wirkung aufgesetzter Scheiben u. dgl., ist nicht eingegangen worden. Die prinzipielle Seite des Problems wird dadurch nicht berührt.¹⁾

I. Die Ermittlung der kritischen Geschwindigkeiten.

§ 1. Methode der Integralgleichung.

1. Problemstellung. Ein dünner kreiszylindrischer Stab (die „Welle“) sei derart gelagert, daß er, starr gedacht, lediglich um seine Figurenachse rotieren kann. Seine elastischen Eigenschaften seien folgendermaßen definiert. Durch eine die Achse senkrecht schneidende Kraft P erfahre jeder Punkt der Achse eine Verschiebung y in der Richtung von P , deren Größe P proportional ist. Die von verschiedenen Kräften herrührenden Verschiebungen mögen sich superponieren. Schließlich gelte der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen:²⁾ Wenn

$$\eta(s, t) = \frac{y(s, t)}{P}$$

die Verschiebung des Punktes $x = s$ unter dem Einflusse der in $x = t$ wirkenden Kraft $P = 1$ bezeichnet, so sei

$$\eta(s, t) = \eta(t, s). \quad (1)$$

Die Welle denken wir uns masselos, dafür aber die Achse in irgend einer stetigen oder unstetigen Weise mit Masse belegt. Angenommen nun, die Stabachse sei zu einer ebenen Kurve deformiert, deren Ebene die ursprüngliche Lage der Achse enthält, und in diesem Zustande rotiere der Körper mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die alte Achse. Dann erfahren die Massen Beschleunigungen radial nach einwärts von der Größe $y\omega^2$, sie müssen also auf die Welle radial nach auswärts Kräfte von entsprechender Größe, die „Fliehkräfte“, ausüben. Wir setzen voraus, daß andere, eingeprägte Kräfte auf die Welle nicht wirken, und untersuchen die Frage, ob die angenommene Bewegungsform eine mögliche ist.

¹⁾ Vgl. meinen etwas allgemeineren Ansatz in *Enz. d. math. Wiss.* IV 10 (K. Heun u. R. v. Mises).

²⁾ Maxwell, *Papers I.*, p. 602 (*Philos. magaz.*, vol. 27). Der Satz ist in die Lehrbücher der technischen Mechanik übergegangen, vgl. z. B. A. Föppl, *Vorles. üb. techn. Mech.* III, 4. Aufl. Leipzig 1909, p. 173. Die Linie, die $\eta(s, t)$ als Funktion von s bei $t = \text{konst.}$ darstellt, heißt „Einflußlinie“ des Punktes t .

2. Fall einzelner Massenpunkte. Trägt die Welle in den Punkten mit den Abszissen $x_1, x_2 \dots x_n$ die konzentrierten Massen $m_1, m_2 \dots m_n$, so wirken die Fliehkräfte $m_1 \omega^2 y_1, \dots m_n \omega^2 y_n$, wenn $y_1 \dots y_n$ die Verschiebungen der Punkte $x_1 \dots x_n$ bezeichnen. Nach dem Vorangehenden bestehen die n Gleichungen für die y :

$$y_k = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \eta(x_k, x_i) y_i, \quad k=1, 2, \dots n. \quad (2)$$

Sie besitzen dann und nur dann eine von Null verschiedene Lösung, wenn die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Multipliziert man in der Matrix der Koeffizienten die i^{te} Kolonne mit $\sqrt{m_i}$, die i^{te} Zeile mit dem reziproken Wert, so wird sie wegen (1) zu einer symmetrischen:

$$\begin{vmatrix} m_1 \eta(x_1, x_1) \omega^2 - 1, & \sqrt{m_1 m_2} \eta(x_1, x_2) \omega^2, & \dots & \sqrt{m_1 m_n} \eta(x_1, x_n) \omega^2 \\ \sqrt{m_1 m_2} \eta(x_2, x_1) \omega^2, & m_2 \eta(x_2, x_2) \omega^2 - 1, & \dots & \sqrt{m_2 m_n} \eta(x_2, x_n) \omega^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sqrt{m_1 m_n} \eta(x_n, x_1) \omega^2 & \dots & \dots & m_n \eta(x_n, x_n) \omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Es gibt also n reelle, positive Werte von ω^2 , für welche der vorausgesetzte Bewegungszustand möglich ist: Eine Welle, die lediglich durch n Massenpunkte belastet ist, besitzt wenigstens eine und höchstens n kritische Geschwindigkeiten; die Zahl wird nur dann kleiner als n , wenn zwischen den Massen und ihren Abständen bestimmte Relationen bestehen.

3. Fall stetig verteilter Massen. Auf das Stück der Achse zwischen $x=s$ und $x=s+ds$ entfalle die Masse $\mu(s) ds$. Dann tritt an Stelle von (2) die lineare homogene Integralgleichung:

$$y(s) = \omega^2 \int_0^l \mu(t) \eta(s, t) y(t) dt, \quad (4)$$

wenn l die ganze Länge des Stabes bedeutet. Man gestaltet (4) zu einer Gleichung mit symmetrischem Kern, indem man setzt:

$$\varphi(s) = y(s) \sqrt{\mu(s)}, \quad K(s, t) = \sqrt{\mu(s) \mu(t)} \eta(s, t).$$

Es wird dann:

$$\varphi(s) = \omega^2 \int_0^l K(s, t) \varphi(t) dt. \quad (4')$$

Aus der Theorie der Integralgleichungen folgt, daß (4) oder (4') für unendlich viele Werte von ω^2 nicht verschwindende Lösungen besitzt: Trägt eine Welle auf irgend einem Stück stetig verteilte Belastung, so gibt es unendlich viele kritische

Geschwindigkeiten. Ferner benützen wir ein bekanntes Ergebnis der Theorie¹⁾ in folgender Form. Man ersetze die gegebene stetige Massenverteilung durch eine Reihe von unstetigen mit $n = 1, 2, 3 \dots$ Einzelmassen derart, daß die Ersatzverteilungen mit wachsendem n gleichmäßig gegen die gegebene konvergieren. Dann konvergieren die Werte der jeweils kleinsten der nach (2) berechneten n Wurzeln gegen den kleinsten Eigenwert von (4) u. s. w. Für die praktische Berechnung empfiehlt es sich zur Erzielung rascherer Konvergenz, die Intervallteilung unter Rücksichtnahme auf den Verlauf von $\mu(s)$ zu bestimmen und die auf ein Teilintervall entfallende Masse nach dem Schwerpunktsatz auf die beiden Enden zu verteilen.

Trägt die Welle sowohl konzentrierte als stetig verteilte Massen, so kann man in (4) allgemein $d\mu(t)$ statt $\mu(t) dt$ schreiben und das Integral im Stieltjesschen Sinne nehmen, ohne daß die ausgesprochenen Sätze eine Änderung erfahren.

4. Ein Beispiel. Die Funktion $\eta(s, t)$ hängt in erster Linie davon ab, in welcher Weise die Welle gelagert ist. Für die an beiden Enden aufliegende Welle von der Länge $2l$ gilt:

$$\eta(s, t) = \frac{1}{EJ} \frac{(2l-t)s}{12l} (4lt - t^2 - s^2), \quad s \leq t, \quad (5)$$

wobei E den Youngschen Elastizitätsmodul, J das achsiale Trägheitsmoment des Kreisquerschnittes bezeichnet. Man erhält (5) unter Berücksichtigung von (1) aus den Auflagerbedingungen:

$$\eta = 0 \text{ für } s = 0 \text{ und } s = 2l,$$

aus den Bedingungen, daß η und η' an der Stelle $s = t$ stetig bleiben, und aus der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \eta}{ds^2} = -\frac{1}{EJ} \frac{s(2l-t)}{2l}, \quad (s \leq t) \quad (6)$$

die besagt, daß die Krümmung dem biegenden Moment proportional ist. Um die Raschheit der Konvergenz zu beurteilen, wenden wir die Zerlegung der Massen in dem Falle $\mu = \text{konst.}$ an, für den sich die Lösung in geschlossener Form angeben läßt [am bequemsten auf Grund des Ansatzes (9) in § 2]. Teilt man die Balkenlänge in vier gleiche Teile und schreibt jedem Teilungspunkt die Massen $\mu \frac{2l}{4}$ zu, so erhält man mit

$$\lambda = \frac{EJ}{\omega^2} \frac{64}{\mu l^4}$$

¹⁾ D. Hilbert, Gött. Nachr. 1904 (Erste Mitt.), p. 63.

die Gleichung dritten Grades für λ :

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda, & \frac{11}{3}, & \frac{7}{3} \\ \frac{11}{3}, & \frac{16}{3} - \lambda, & \frac{11}{3} \\ \frac{7}{3}, & \frac{11}{3}, & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Der kleinste daraus folgende Wert für ω^2 ist:

$$\omega^2 = 6.086 \frac{EJ}{\mu l^4},$$

während die genaue Integration den Koeffizienten gleich $\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 6.088$ ergibt. Die Näherungswerte für $n=1$ und $n=2$ sind 6.00 und 6.075.

5. Aufhebung zweier Einschränkungen. Wir wollen jetzt statt des kreiszylindrischen einen prismatischen Stab von beliebigem Querschnitt betrachten und von vornherein auch zulassen, daß die Biegelinie doppelt gekrümmt sei. Die Rotationsachse enthalte im spannungsfreien Zustand die Schwerpunkte sämtlicher Stabquerschnitte. Es mögen bezeichnen: P_1, P_2 die Komponenten einer senkrecht zur Achse wirkenden Kraft, y, z die Komponenten der Verschiebung eines Punktes, beides bezogen auf die Richtungen der Haupt-Trägheitsachsen des Querschnittes, schließlich J_1, J_2 die Größe der beiden Haupt-Trägheitsmomente des Querschnittes. Dann bewirkt eine Kraft $P_1=1, P_2=0$ eine Verschiebung η in Richtung von P_1 und eine Kraft $P_1=0, P_2=1$ eine Verschiebung ζ in Richtung von P_2 , wobei

$$\eta : \zeta = J_2 : J_1.$$

Es treten also jetzt zwei Gleichungssysteme der Form (2), bzw. zwei Integralgleichungen (4) nebeneinander auf und ein System geht aus dem anderen hervor, wenn man die Koeffizienten von ω^2 im Verhältnisse $J_1 : J_2$ verändert. Im allgemeinen Falle gibt es zwei Reihen kritischer Geschwindigkeiten, deren Werte sich wie die Haupt-Trägheitsradien zueinander verhalten; die Biegelinie ist immer eine ebene Kurve, sie liegt in der Regel in einer Haupt-Biegeebene und nur, wenn ein ω -Wert in beiden Reihen zugleich auftritt, in einer beliebigen anderen Ebene.

§ 2. Methode der unendlich vielen Variablen angewendet auf die Differentialgleichung.

1. Ansatz: Man erhält die Differentialgleichung des Problems, indem man den Ansatz (6), der oben zur Bestimmung von η diente, auf den Fall stetig verteilter Lasten überträgt. Es soll allgemein

die Krümmung der Biegelinie, d. i. annähernd y'' , gleich dem Quotienten aus dem biegenden Moment M durch die Biegesteifigkeit EJ sein:

$$y'' = \frac{M}{EJ}. \quad (7)$$

Rückt man um dx auf der Achse vor, so ändert sich M um den Betrag Pdx , wenn P die Resultierende der einerseits vom betrachteten Punkt angreifenden Kräfte bedeutet, P aber ändert sich um die Größe der auf dx entfallenden Belastung. Somit hat man für die Belastung durch „Fliehkräfte“:

$$M'' = \mu \omega^2 y, \quad \mu > 0. \quad (8)$$

Zu (7) und (8) treten, wenn die Welle an den Enden lose gestützt ist, die Bedingungen, daß y und M für $x=0$ und $x=l$ verschwinden müssen. So wird schließlich:

$$y^{IV} = \frac{\omega^2}{EJ} \mu(x) y \quad (9)$$

$$\text{mit } \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ y'' = 0 \end{array} \right\} \text{ für } \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l. \end{array} \right\}$$

Man überzeugt sich durch Differenzieren, daß der Ansatz (4), (5) mit (9) identisch ist. Aus dem Oszillationstheorem für (9) gewinnen wir den Satz: Ordnet man die kritischen Geschwindigkeiten ihrer Größe nach, so entsprechen ihnen Biegelinien mit 0, 1, 2... Nullstellen zwischen den beiden Auflagern.

2. Übergang zur Differenzengleichung. Die einfachste Methode zur Bestimmung der kritischen Werte von ω^2 geht davon aus, (9) durch eine Differenzengleichung zu ersetzen. Man teile zu diesem Zweck das ganze Intervall in $n+1$ gleich Teile

$$\xi = \frac{l}{n+1}$$

und füge zu den Funktionswerten:

$$y(0) = y_0, \quad y(\xi) = y_1, \quad y(2\xi) = y_2 \dots y(l) = y_{n+1}$$

die beiden weiteren:

$$y_{-1} = y(-\xi) \quad \text{und} \quad y_{n+2} = y(l+\xi)$$

hinzu. An Stelle von y_i^{IV} setzt man:

$$\frac{1}{\xi^4} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}]$$

und kann jetzt n lineare homogene Gleichungen:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 - \xi^4 \frac{\omega^2}{EJ} \mu_i) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = 0, \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

anschreiben. Vier der Variablen, u. zw. y_{-1} , y_0 , y_{n+1} und y_{n+2} eliminiert man durch die Randbedingungen:

$$y_0 = y_{n+1} = 0, \quad y_{-1} = y_1, \quad y_{n+2} = y_n. \quad (10')$$

Zur Bestimmung der ω^2 ergibt sich mithin eine Determinantengleichung n^{ten} Grades, die nach zeilen- und kolonnenweiser Division durch $\sqrt{\mu_i}$ lautet:

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{\mu_1} - \frac{\xi^4 \omega^2}{EJ}, & -\frac{4}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}, & \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \mu_3}}, & 0, & 0 \dots \\ -\frac{4}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}, & \frac{6}{\mu_2} - \frac{\xi^4 \omega^2}{EJ}, & -\frac{4}{\sqrt{\mu_2 \mu_3}}, & \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \mu_4}}, & 0 \dots \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \mu_3}}, & -\frac{4}{\sqrt{\mu_2 \mu_3}}, & \frac{6}{\mu_3} - \frac{\xi^4 \omega^2}{EJ}, & -\frac{4}{\sqrt{\mu_3 \mu_4}}, & \frac{1}{\sqrt{\mu_3 \mu_5}} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, \dots, & \frac{1}{\sqrt{\mu_{n-2} \mu_n}}, & -\frac{4}{\sqrt{\mu_{n-1} \mu_n}}, & \frac{5}{\mu_n} - \frac{\xi^4 \omega^2}{EJ} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

So erhält man für $n = 1, 2, 3, \dots$ eine unendliche Folge von quadratischen Formen, deren Eigenwerte durch (11) bestimmt werden. Darf man auf eine derartige Folge von Formen die Ergebnisse der Theorie von Formen mit unendlich vielen Variablen übertragen, so ergibt sich für unsere Zwecke der Satz: Die Auflösung von (11) für eine Reihe von Werten $n = 1, 2, \dots$ liefert eine Reihe von sukzessiven Annäherungen für die gesuchten kritischen Geschwindigkeiten.

3. Beispiel. Wir wenden das Verfahren auf das am Schlusse von § 1 erörterte Beispiel an. Man erhält mit $n = 3$ für

$$\lambda = \frac{\mu \omega^2 l^4}{16 EJ}$$

die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda, & -4 & 1 \\ -4, & 6 - \lambda & -4 \\ 1, & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

und daraus den kleinsten Wert für ω^2 :

$$\omega^2 = 5.50 \frac{EJ}{\mu l^4}.$$

Die Näherungen für $n = 1$ und $n = 2$ sind 500 und $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 5.06$, also wesentlich ungenauer als beim früheren Verfahren.

Im allgemeinen wird man sagen dürfen, daß bei gleichem n die jetzt besprochene Methode weniger gute Näherungen bietet, weil man sich hier mit der Intervallteilung dem Verlaufe von μ nicht anpassen kann. Dieser Nachteil wird aber aufgewogen durch den Umstand, daß man die Berechnung der n^2 Werte von η gänzlich erspart und daß die aufzulösende Determinante in jeder Zeile und Kolonne wenigstens $n - 5$ Nullen enthält.

§ 3. Methode der sukzessiven Approximationen.

1. Graphisches Lösungsverfahren. Zur Ermittlung der kritischen Geschwindigkeiten beliebig belasteter Wellen (und zur Lösung ähnlicher Aufgaben) wird vielfach ein graphisches Verfahren angewendet¹⁾, dessen Gedankengang folgender ist. Man wählt eine beliebige, den Randbedingungen genügende und innerhalb des Intervalls nirgends verschwindende Funktion y_0 und einen Wert ω_0 . Es sei

$$\lambda_0 = \frac{\omega_0^2}{EJ}.$$

Nun definiert man eine Funktion y_1 im Anschluß an (9) durch

$$y_1^{IV} = \lambda_0 \mu y_0 \quad \text{mit} \quad \left. \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_1'' = 0 \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right. \quad (12)$$

Die Integration dieser Gleichung läßt sich auf Quadraturen zurückführen, bezw. durch zweimaliges Zeichnen von sog. „Seilpolygonen“ annähernd ausführen. Die Werte von y_0 und y_1 an einer beliebigen Stelle X des Intervalls seien Y_0 und Y_1 .

Man setzt jetzt:

$$\lambda_1 = \lambda_0 \frac{Y_0}{Y_1}, \quad y_2^{IV} = \lambda_1 \mu y_1 \quad (12')$$

und fährt analog — jedesmal unter Beachtung aller Randbedingungen — fort:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 \frac{Y_1}{Y_2}, \quad y_3^{IV} = \lambda_2 \mu y_2 \\ \lambda_3 &= \lambda_2 \frac{Y_2}{Y_3}, \quad y_4^{IV} = \lambda_3 \mu y_3 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (12'')$$

¹⁾ Vgl. A. Stodola, Die Dampfturbinen, 4. Aufl. Berlin 1910, p. 301 u. 630. Das Verfahren wurde erstmals beschrieben von L. Vianello, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ingen. 1898 p. 1436, dann von Delaporte, Revue de mécan. 1903 XII), p. 517.

In der Wertfolge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ erblickt man eine Reihe von Annäherungen an den gesuchten kleinsten Eigenwert λ von (9).

2. Frage der Konvergenz. Aus den Picardschen Untersuchungen ¹⁾ über die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$y'' = -\lambda f(x) y, \quad f(x) > 0, \quad (13)$$

gewinnen wir folgenden Satz: Ist λ der kleinste zum Intervall $(0, l)$ gehörige Eigenwert von (13), so konvergiert die Reihe der in $x=0$ und $x=l$ verschwindenden Funktionen $y_0, y_1, y_2 \dots$, für die

$$y_0'' = -\lambda f, \quad y_1'' = -\lambda f y_0, \quad y_2'' = -\lambda f y_1 \dots \quad (14)$$

gilt, mit wachsendem Index gegen eine Lösung y von (13), die in den Enden des Intervalls und nur hier verschwindet. Wir übertragen dieses Ergebnis auf unsere Gleichung (9) und betrachten dabei auch die in (14) enthaltene Einschränkung bezüglich y_0 als unwesentlich, so daß sich nachstehende Formulierung ergibt. Es sei λ der gesuchte Eigenwert von (9), derart daß

$$y^{IV} = \lambda \mu y \quad (9')$$

unter den wiederholt genannten Nebenbedingungen tatsächlich lösbar ist. Ist dann y_0 eine beliebige, diesen Bedingungen genügende, zwischen 0 und l nicht verschwindende Funktion, so konvergiert die durch die Gleichungen

$$u_1^{IV} = \lambda \mu y_0, \quad u_2^{IV} = \lambda \mu u_1, \quad u_3^{IV} = \lambda \mu u_2, \dots \quad (15)$$

und die Randbedingungen definierte Reihe $u_1, u_2, u_3 \dots$ gegen eine Lösung u von (9'). Aus dem Vergleich von (15) mit (12), (12')... erhält man:

$$y_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda} u_1, \quad y_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} u_2 \dots y_n = \frac{\lambda_0}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} \dots \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda} u_n$$

und daraus:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{y_n}{y_{n+1}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_n}.$$

Diese Gleichung, angewendet auf die Stelle $x=X$, in Verbindung mit der aus (12'') folgenden:

$$\lambda_n Y_n = \lambda_0 Y_0 = \text{konst.}$$

gibt, da der Quotient links gegen eins konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_n^2}{\lambda_{n+1}} \right) = \lambda$$

und daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda,$$

was zu beweisen war.

¹⁾ E. Picard, Traité d'analyse, t. III. 2. édit. Paris 1908, p. 110.

II. Die mechanische Bedeutung der kritischen Geschwindigkeiten.

§ 4. Allgemeines.

1. Folgerungen aus der Ableitung. Wir sind von der Fragestellung ausgegangen (§ 1), unter welchen Bedingungen eine ursprünglich gerade, in ihrer Achse mit Masse belegte, elastische Welle in ausgebogenem Zustand rotieren kann. Die Antwort, die wir bisher erhalten haben, erscheint in zweifacher Hinsicht unbefriedigend. Erstens hat sich ergeben, daß eine derartige Bewegung nur bei diskreten Werten von ω möglich ist, während man erwarten darf, daß einer stetigen Änderung der ω , wenigstens innerhalb eines gewissen Gebietes, auch eine stetige Änderung des Deformationszustandes entspricht. Zweitens ist die Größe der Ausbiegung, da alle Gleichungen homogen waren, völlig unbestimmt geblieben.

Ohne zunächst auf den Grund dieser Mängel einzugehen, erkennen wir die Bedeutung der bisherigen Ergebnisse, sobald wir beachten, daß unsere Gleichungen nur für kleine Deformationen der Welle gelten. Wenn es eine Funktion y von ω gibt, die für alle Geschwindigkeitswerte die Größe der Ausbiegung (etwa in der Wellenmitte) angibt, so muß unsere bisherige Theorie über das Verhalten dieser Funktion in der Nähe von $y=0$ entscheiden. Daraus folgern wir: Die Linien, welche die Ausbiegung einer zentrisch (d. h. in der Achse) mit Masse belegten Welle als Funktion der Winkelgeschwindigkeit darstellen, schneiden die Abszissenachsen senkrecht, u. zw. in den Punkten, deren Abszissen die kritischen Geschwindigkeiten sind. Darüber hinaus sind Schlüsse (für die zentrisch belastete Welle) nicht möglich. Insbesondere sind die Behauptungen unbegründet, an den kritischen Punkten müsse ein Stabilitätswechsel eintreten oder nur hier könne er eintreten. Richtig ist bloß, daß Stabilität nicht aufhören kann innerhalb eines Gebietes von ω , in dem y keine reellen Werte besitzt, und daß nur die kritischen Stellen die Enden solcher Gebiete sein können.

2. Biegungsschwingungen. Die weitgehende Analogie unseres Problems mit dem der Biegungsschwingungen ist vielfach bemerkt worden.¹⁾ Nimmt man an, daß die Ausbiegung y eine Funktion der Zeit ist, so muß man die „Trägheitskraft“ — $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ entsprechend der radial nach außen wirkenden Beschleunigung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ neben der „Fliehkraft“ als Belastung in Rechnung stellen.

¹⁾ Namentlich von Dunkerley und Chree (s. Fußnote 1, p. 1). Die Analogie geht verloren, wenn man den Einfluß der Schiefstellung von auf die Welle aufgesetzten Scheiben berücksichtigt.

Macht man dann in

$$y^{IV} = \frac{\mu}{EJ} \left(\omega^2 y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$$

den Lösungsansatz:

$$y = Y(x) e^{\alpha t},$$

so wird:

$$Y^{IV} = \frac{\mu}{EJ} (\omega^2 - \alpha^2) Y.$$

Die Werte von α , für welche diese Gleichung bei $\omega = 0$ lösbar ist, also die Frequenzen der freien Schwingungen der nichtrotierenden Welle, sind identisch mit den kritischen Werten von ω . Allein über das Verhalten der Welle während der Rotation mit einer kritischen Winkelgeschwindigkeit lehrt der Ansatz nichts. Er gibt lediglich das selbstverständliche Resultat, daß dann $\alpha = 0$ eine Lösung ist, d. h. daß dann Ausbiegungen dauernd bestehen können.

3. Exzentrisch angebrachte Massen. Um das Verhalten der rotierenden Welle weiter aufzuklären, kann man die in §1 gestellte Frage durch die umfassendere ersetzen: Was geschieht, wenn die Welle auch außerhalb der Achse Massen trägt? Bezeichnen e_i und f_i die Koordinaten des Massenpunktes m_i , bezogen auf die Hauptachsen des Querschnittes, so tritt an Stelle von (2):

$$y_k = \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \eta(x_k, x_i) (y_i + e_i) \quad (16)$$

und dazu eine analoge Gleichung für z , ζ , f (vgl. §1, Absch. 5). Die Auflösung von (16) nach $y_i + e_i$ liefert:

$$y_i + e_i = \frac{D_i^{(n-1)}}{D^{(n)}}, \quad (17)$$

worin der Nenner die bereits ausführlich betrachtete ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von ω^2 bedeutet, deren Nullstellen die kritischen Geschwindigkeiten sind, der Zähler aber eine ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Der Quotient geht also mit unendlich werdendem ω gegen Null: Wird die Geschwindigkeit einer exzentrisch mit Einzelmassen belegten Welle über den größten kritischen Wert hinaus unbeschränkt gesteigert, so nähern sich die einzelnen Massenpunkte unbeschränkt der Rotationsachse, die Welle „zentriert“ sich selbsttätig.¹⁾ Der Satz gilt nur für Exzentrizitäten e_i , die so klein sind, daß für Ausbiegungen gleicher Größenordnung unser Ansatz noch zulässig ist. Daß Gl. (17) für

¹⁾ Für Spezialfälle ist dieser Satz abgeleitet worden von A. Föppl, Zivilingenieur 1895, p. 333.

die kritischen Werte von ω die Ausbiegungen y unendlich groß erscheinen läßt, berechtigt natürlich in keiner Weise zu dem Schlusse, es seien dies die Stellen der größten Deformation, oder gar es seien die Stellen, an denen ein Bruch der Welle erfolgen müsse. Dagegen kann man die kritischen Geschwindigkeiten wohl finden (u. zw. für stetige oder unstetige Belastung), indem man die Bedingungen dafür aufsucht, daß der für kleine y gültige Ansatz bei beliebigen Exzentrizitäten unendliche Werte für y liefert.

4. Genauerer Ansatz. Nachdem so ein Aufschluß über die Verhältnisse in der Nähe der kritischen Geschwindigkeiten nicht zu erzielen ist, erscheint es unumgänglich, den mechanischen Ansatz, der durch (6), bzw. (7) dargestellt wird, zu revidieren. In beiden Gleichungen sollte zum Ausdruck gebracht werden, daß das biegende Moment der Krümmung der derfomierten Stabachse proportional sei, es wurde aber statt der Krümmung der Kleinheit der Ausbiegungen wegen y'' geschrieben. Also gibt:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{M}{EJ} \quad (18)$$

(ρ = Krümmungsradius, ϑ = Tangentenwinkel, s = Bogenlänge) die genauere Differentialgleichung für größere y .¹⁾ Man erkennt leicht, daß zufolge (18) die Ausbiegungen stärker wachsen als die Momente, also bei konstanten Hebelarmen auch stärker als die Kräfte. Gleichen Werten von y müssen dann kleinere ω entsprechen als früher: die Kurven $y(\omega)$ liegen auf der dem Ursprung zugewendeten Seite ihrer vertikalen Tangenten. Werden aber wie beim einseitig eingespannten, am anderen Ende freien Stabe die Hebelarme bei wachsendem y kleiner, so lassen sich die Konsequenzen von (18) nicht ohne weiteres überblicken. Wir behandeln daher in den folgenden Paragraphen ausführlich als zwei typische Beispiele: die an beiden Enden gelagerte und in der Mitte belastete, sowie die an einem Ende eingespannte, am freien Ende belastete Welle.

Gegen die Einräumung des Vorranges an (18) vor (7) könnte man einwenden, daß die bekannte exakte Untersuchung eines speziellen Bieigungsproblems durch Saint-Venant²⁾ wohl (7), aber nicht (18) bestätigt hat und daß die Lösung eines anderen Falles durch H. Michell³⁾ sowohl (18) als (7) widerspricht. Allein beide Arbeiten gehen von den elastischen Differentialgleichungen aus, die die Kleinheit aller Deformationen als Voraussetzung enthalten, und betreffen Stäbe von endlichem Querschnitt. Als entscheidend für die hier vertretene Auffassung müßte man den Nachweis ansehen, daß (18) durch Grenzübergang für unendlich

¹⁾ Eulersche Differentialgleichung der Elastica. Vgl. z. B. A. E. H. Love, deutsch von Timpe, Lehrbuch der Elastizität, Leipzig 1907, p. 447.

²⁾ Journ. de math. (2) t. 1, 1856.

³⁾ Quart. Journ. of Math. vol. 32 (1910), p. 28. Vgl. a. Enz. IV. 25, Nr 13 d (Tedone-Timpe).

dünne Stäbe aus einem allgemeinen Ansatz der Elastizitätstheorie ohne jede Einschränkung über die Größe der Verschiebungen gewonnen werden kann. Einem solchen Nachweis kommen die Kirchhoffschen und verwandte Untersuchungen¹⁾ zumindest sehr nahe. An dem Ansatz (7) aber muß man noch aussetzen, daß er, wenn endliche Deformationen in Frage kommen, gegen Drehung des Koordinatensystems nicht invariant ist.

Schließlich mag ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Berechnung der kritischen Geschwindigkeiten von den hier besprochenen Schwierigkeiten nicht berührt wird. Denn bei dieser handelt es sich exakt nur um unendlich kleine Deformationen. Aus demselben Grunde ist dort auch die Annahme der linearen Beziehung zwischen Dehnung und Spannung exakt zulässig.

§ 5. Genaue Diskussion zweier Sonderfälle.

1. Integration von (18). Die Auflagerpunkte eines Stabes (Fig. 1 a), der in seiner Mitte die Masse $2m$ im Achsabstand e trägt, mögen die Entfernung $2a$ haben, die Länge der elastischen Linie zwischen den Fixpunkten sei $2l$. Dann lautet (18), weil hier $M = -m\omega^2(y_0 + e)x$ wird:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{m\omega^2(y_0 + e)}{EJ}x, \quad (18')$$

wenn y_0 für die größte Ausbiegung gesetzt wird. Genau dieselbe Gleichung besteht für die einseitig eingespannte Welle (Fig. 1 b), deren Länge l ist und die am freien Ende — im horizontal gemessenen Abstand a — die Masse m zu tragen hat. Ein Unterschied besteht lediglich darin, daß im ersten Falle a konstant und l variabel, im zweiten a veränderlich und l konstant ist.²⁾

Einmalige Integration von (18') mit Rücksicht auf die Bedingung $\delta = 0$ für $x = a$ gibt wegen

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} &= \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d}{dx} (\sin \vartheta); \\ \sin \vartheta &= \frac{m\omega^2(y_0 + e)}{2EJ}(a^2 - x^2). \end{aligned} \quad (19)$$

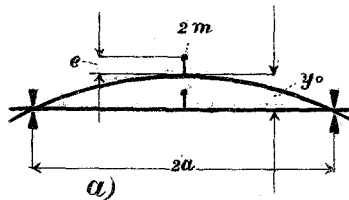
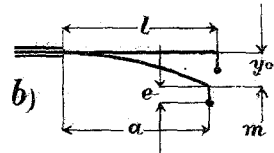


Fig. 1.



¹⁾ Vgl. Love-Timpe, a. a. O. p. 448 ff.

²⁾ Die Voraussetzungen dieses zweiten Sonderfalles der einseitig eingespannten Welle lassen sich nicht in gleichem Maße genau realisieren wie die des ersten. Da man eine punktförmige Masse nicht anbringen kann, wird durch die Fliehkräfte jedenfalls ein Biegemoment erzielt, das die Welle gerade zu richten sucht. Demgegenüber ist die Ungenauigkeit der Annahme, daß l und e in (18') konstant seien, von geringerer Bedeutung.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$x = \xi a, \quad y_0 = \eta a, \quad e = \varepsilon a, \quad l = \lambda a; \quad \frac{m \omega^2 a^3}{2 E J} = \alpha \quad (20)$$

$$x(\eta + \varepsilon) = \alpha. \quad (20')$$

Aus (19) folgt daher:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} = \alpha \frac{1 - \xi^2}{\sqrt{1 - \alpha^2 (1 - \xi^2)^2}}$$

und nochmalige Integration mit Rücksicht darauf, daß y_0 die Differenz der y -Werte in $x=0$ und $x=l$ bedeutet, gibt:

$$\eta = \alpha \int_0^1 \frac{(1 - \xi^2) d\xi}{\sqrt{1 - \alpha^2 (1 - \xi^2)^2}} \equiv f(\alpha). \quad (21)$$

Führt man hier für α den Wert aus (20') ein, so erhält man eine Beziehung zwischen η , ε und x , womit das erste unserer beiden Probleme gelöst ist. Um auch das zweite zu erledigen, benützen wir noch:

$$\cos \vartheta = \frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \alpha^2 (1 - \xi^2)^2},$$

woraus folgt:

$$\lambda = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \alpha^2 (1 - \xi^2)^2}} \equiv g(\alpha). \quad (22)$$

Unter Zuhilfenahme dieser Gleichung kann man von den Größen η , ε und x übergehen zu η' , ε' und x' , die definiert seien durch:

$$\eta' = \frac{y_0}{l} = \frac{\eta}{\lambda}, \quad \varepsilon' = \frac{e}{l} = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad x' = \frac{m \omega^2 l^3}{2 E J} = \alpha \lambda^3. \quad (23)$$

2. Die Funktionen $f(\alpha)$ und $g(\alpha)$. Die in (21) und (22) definierten Funktionen f und g sind durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung darstellbar:

$$g = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left[F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - F(k, \varphi) \right]$$

$$f = g + \frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \left[E(k, \varphi) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (24)$$

mit $k = \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}}$, $\cos \varphi = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$.

Für kleine Werte von $|\alpha|$ ist bequemer als die Anwendung von Tafeln für E und F die direkte Berechnung aus der Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} f &= \frac{2}{3}\alpha + \frac{8}{35}\alpha^3 + \frac{32}{231}\alpha^5 + \frac{128}{1287}\alpha^7 + \dots + \\ &+ 2^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{(2n+3)(2n+5)\dots(4n+3)} \alpha^{2n+1} \dots, \\ g &= 1 + \frac{4}{15}\alpha^2 + \frac{16}{105}\alpha^4 + \frac{320}{3003}\alpha^6 + \dots + \\ &+ 2^n \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{(2n+1)(2n+3)\dots(4n+1)} \alpha^{2n} \dots \end{aligned} \quad (25)$$

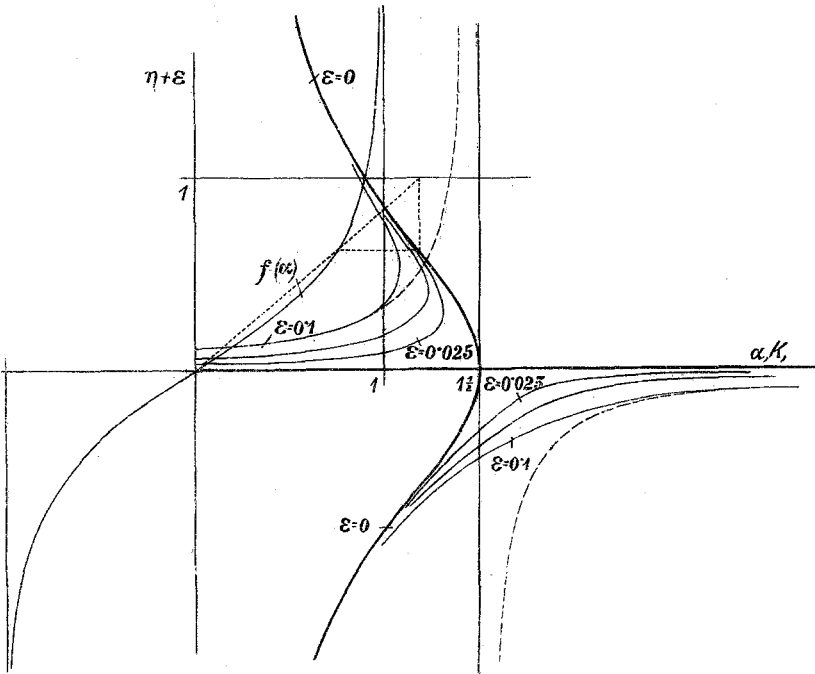


Fig. 2.

3. Numerische Diskussion des ersten Falles. In Fig. 2 ist zunächst die Linie $f(\alpha)$ eingetragen, die mit einer Neigung von $\frac{2}{3}$ durch den Ursprung geht und bei $\alpha = \pm 1$ vertikale Asymptoten besitzt. Zieht man von einem ihrer Punkte den Fahrstrahl nach dem Ursprung und bringt ihn mit der im Abstand 1 zur Abszissenachse gezogenen Parallelen zum Schnitt, so gibt die

Abszisse dieses Schnittpunktes den Wert von x zu dem betreffenden $f = \eta$. So ist die mit $\varepsilon = 0$ bezeichnete Linie (η als Funktion von x) gefunden, die im wesentlichen die Ausbiegungen der zentrisch belasteten Welle als Funktion der Winkelgeschwindigkeit darstellt. Sie geht, wie vorausgesehen wurde, vertikal durch den „kritischen“ Punkt $x = \frac{2}{3}$, $\eta = 0$ und verläuft ganz links von diesem Punkte. Einen Näherungsausdruck für η erhält man, indem man in dem Ausdruck (25) für f die höheren als die ersten drei Potenzen von α vernachlässigt:

$$\eta = \sqrt{\frac{25}{8x^3} \left(1 - \frac{2}{3}x\right)}. \quad (\varepsilon = 0). \quad (26)$$

Natürlich ist auch $\eta = 0$ eine Lösung von (20') und (21) für $\varepsilon = 0$.

Trägt man auf der Ordinatenachse die Größe ε nach abwärts auf, verbindet den Endpunkt mit irgend einem Punkt der $f(x)$ -Linie und zieht die Parallele durch den Ursprung, so erhält man in deren Schnitt mit der früher verwendeten Horizontalen den Wert von x , der jenem Punkt von $f(x)$ bei dem gewählten ε entspricht. Derart kann man $\eta + \varepsilon$ als Funktion von x zeichnen. Die Figur zeigt die Resultate dieser Konstruktion für $\varepsilon = 0.1, 0.05$ und 0.025 . Man erkennt, daß jede der Linien in einen positiven und einen negativen Ast zerfällt, die sich beide im Unendlichen an $\varepsilon = 0$ anschmiegen. Die positiven Werte von $\eta + \varepsilon$ hören bei einem bestimmten Wert von $x < \frac{2}{3}$ auf, dem die von $(-\varepsilon, 0)$ an die $f(x)$ -Linie gezogene Tangente entspricht. Die elementare Theorie liefert nach (17):

$$\eta + \varepsilon = \frac{\varepsilon}{1 - \frac{2x}{3}}. \quad (17')$$

Dieser Gleichung entsprechend ist für $\varepsilon = 0.1$ die gestrichelte Linie in die Figur eingetragen worden. Man erkennt deutlich, wie die für kleine η sehr gute Annäherung in der Nähe der kritischen Stelle völlig versagt.

4. Numerische Diskussion des zweiten Falles.

Fig. 3 enthält neben der $f(x)$ -Linie noch die Linie $\frac{f}{g}(x)$, die die erstere im Ursprung tangiert und für $\alpha = \pm 1$ die Ordinate ± 1 erreicht, und $g^2(x)$, die bei $\alpha = \pm 1$ ins Unendliche geht. Um zunächst für $\varepsilon' = 0$ den Wert von x' für jedes $\eta' = \frac{f}{g}$ zu erhalten, kann man genau wie früher verfahren, sobald man nur statt der festen Horizontalen im Abstand 1 von der Achse eine durch den

jeweiligen Punkt von $g^2(\alpha)$ gezogene verwendet. Es zeigt sich, daß die Linie $\eta'(x')$ (die in der Fig. mit $\varepsilon' = 0$ bezeichnet ist) ganz rechts von der kritischen Stelle verläuft. Ein analog wie früher gefundener Näherungsausdruck gibt:

$$\eta' = \sqrt{\frac{105}{32 x'^3} \left(\frac{2}{3} x' - 1 \right)}. \quad (26')$$

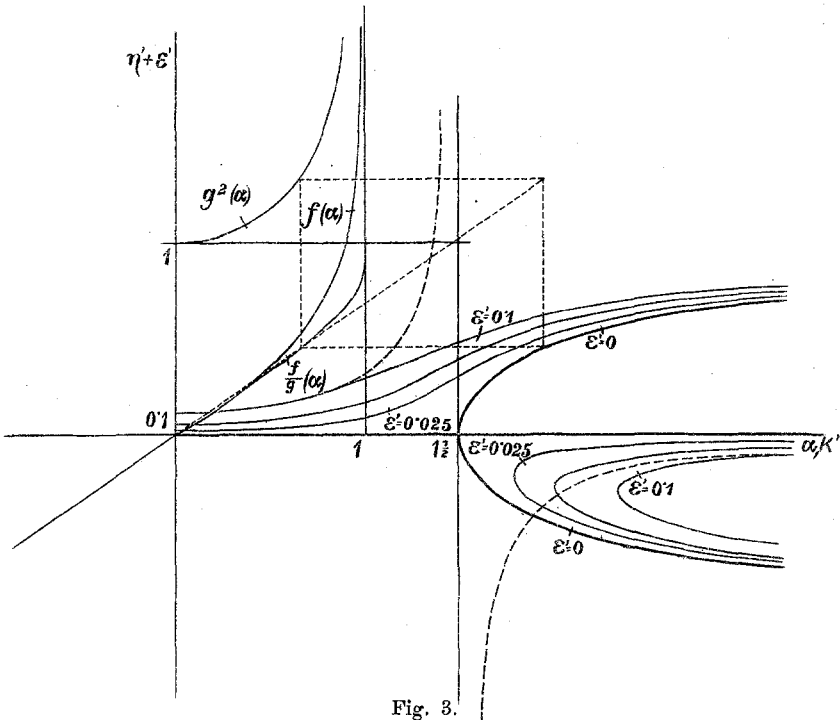


Fig. 3.

Indem man die Ordinate jedes Punktes von $\eta'(x')$ mit $\frac{f + \varepsilon}{f}$, die Abszisse mit dem reziproken Wert multipliziert, ergeben sich die weiteren, $\eta' + \varepsilon'$ als Funktionen von x' zeigenden Linien, die für $\varepsilon' = 0.1, 0.05, 0.025$ in der Figur ersichtlich sind. Bezüglich des Zerfalles in zwei Äste, des Verhaltens im Unendlichen und des Verhältnisses zur Näherung (17') gilt Analoges wie oben.

§ 6. Entscheidung der Stabilitätsfrage auf Grund des Bryan-Loveschen Kriteriums.

1. Stabilitätskriterium. Die Frage, ob eine bestimmte Gleichgewichts- oder Bewegungsform sich praktisch stabil verhält, kann nicht allgemein durch Aufstellung schematischer „Stabilitätskriterien“ entschieden werden. Vielmehr muß man für jede Klasse von

Erscheinungen erst feststellen, welche Summe von Eigenschaften das ausmacht, was man vernünftigerweise als Stabilität zu bezeichnen hat, und darauf die Stabilitätstheorie gründen. Für die Fälle des Gleichgewichts dünner elastischer Stäbe und Platten ist eine völlig befriedigende Lösung dieser Aufgabe nicht gegeben worden. Doch bewährt sich, soweit die bisherigen Erfahrungen reichen, eine Theorie, die von G. Bryan und A. E. H. Love¹⁾ ausgeführt wurde und der wir folgende Sätze entnehmen. 1. Eine Gleichgewichtslage ist immer dann stabil, wenn sie die einzige bei der betreffenden Belastung mögliche ist. 2. Unter mehreren bei gleicher Belastung möglichen Gleichgewichtslagen ist immer diejenige stabil, für welche die potentielle Energie der eingepprägten plus der der elastischen Kräfte am kleinsten wird, die anderen sind instabil. Aus dem ersten Satze folgt mit Rücksicht auf § 5: Die in den Enden gelagerte Welle ist oberhalb der kritischen Geschwindigkeit, bei $\varepsilon = 0$ in gestreckter Lage, bei $\varepsilon \neq 0$ im Zustande der angenäherten Selbstzentrierung (§ 4, Abschn. 2) stabil. Die einseitig eingespannte Welle ist unterhalb der kritischen Geschwindigkeit, bei $\varepsilon = 0$ in gestreckter Stellung, bei $\varepsilon \neq 0$ unter kleinen Ausbiegungen, stabil.

In der folgenden numerischen Untersuchung des übrigen Gebietes von ω beschränken wir uns auf die Annahme $\varepsilon = 0$, da damit schon hinreichende Schlüsse auf das Verhalten bei kleinem ε ermöglicht werden.²⁾

2. Berechnung der Energie. Für die an den Enden gelagerte Welle, bei $\varepsilon = 0$, beträgt die Arbeit der „Fliehkraft“:

$$A_f = \int_0^{y_0} 2m\omega^2 y dy = m\omega^2 y_0^2 = \frac{2EJ}{a} \alpha f. \quad (27)$$

Die zur Krümmung des Stabes verbrauchte Arbeit der elastischen Kräfte ist definiert durch:

$$A_k = \frac{1}{2} \int_0^{2l} M \frac{d\vartheta}{ds} ds = \int_0^l M \frac{d\vartheta}{ds} ds. \quad (28)$$

Unter Berücksichtigung von (18), (18') und (19) sowie der in § 5 eingeführten Abkürzungen wird:

$$A_k = EJ \int \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dx} d\vartheta = \frac{4\alpha^2 EJ}{a} \int_0^1 \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\xi^2)^2}} = \frac{4\alpha EJ}{a} (\alpha g - f). \quad (29)$$

¹⁾ A. E. H. Love, Treatise on the math. theory of elasticity, II. B. Cambridge 1893, p. 289. Vgl. dazu G. H. Bryan, Cambridge Philos. Soc. Proc. 6 (1889), p. 199.

²⁾ A. Föppl, Techn. Mechan. IV, Leipzig 1909, p. 283, und A. Stodola a. a. O., p. 628, untersuchen die Stabilität nach der Methode der kleinen Schwingungen und kommen zu untereinander verschiedenen Resultaten. Ich kann mich keinem von den Ansätzen anschließen, wenn mir auch die Mängel der vorliegenden Darstellung nicht unbewußt sind.

Für den einseitig eingespannten Stab gilt für A_f und A_k jedesmal die Hälfte dieser Werte. Aus (28) und (29) folgt:

$$A_f - A_k = \frac{2 EJ}{a} (3 \alpha f - 2 \alpha^2 g) \quad (30)$$

und aus dem Reihenansatz (25) findet man:

$$3 \alpha f - 2 \alpha^2 g = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+2} \frac{n(n+1) \dots 2n}{(2n+1)(2n+3) \dots (4n+3)} \alpha^{2n+2} > 0. \quad (31)$$

Es gilt also stets

$$A_f - A_k > 0 \quad (32)$$

und daraus darf man schließen: Ist die Welle derart gelagert, daß sie sich ausbiegen kann, ohne gleichzeitig eine Dehnung zu erfahren, so ist die gestreckte Lage unstabil, sobald es eine andere Gleichgewichtslage gibt; die Welle sucht stets die Stellung mit der größten Krümmung zu erreichen. Eine an den Enden gelagerte Welle, die in achsialer Richtung völlig frei ist, wird also erst oberhalb der kritischen Geschwindigkeit stabil. Bei der einseitig eingespannten Welle darf man annehmen, daß die Deformation stets annähernd dehnungsfrei erfolgt, so daß hier Stabilität der gestreckten Lage nur unterhalb der kritischen Geschwindigkeit besteht.

Die Welle, die in zwei Lagern läuft, wird in der Regel so befestigt sein, daß ihr Material bei der Ausbiegung eine Dehnung im Betrage $\lambda - 1$ erfährt. Die Zugkraft P , die dieser Dehnung entspricht, ist

$$P = E(\lambda - 1) Q,$$

wenn Q die Querschnittgröße der Welle bezeichnet. Nimmt man einen Kreis vom Radius $r = \rho a$ als Querschnitt an, so wird

$$J = \frac{r^4 \pi}{4}, \quad Q = r^2 \pi = \frac{4J}{\rho^2 a^2}$$

und die Dehnungsarbeit

$$A_d = \frac{1}{2} P(2l - 2a) = \frac{4 EJ(\lambda - 1)^2}{a \rho^2}. \quad (33)$$

Die gekrümmte Lage der Welle ist nur dann stabil, wenn

$$A_f - A_k - A_d > 0,$$

also zufolge (30) und (33), wenn

$$\rho^2 > 2 \frac{(g - 1)^2}{\alpha (3f - 2\alpha g)}. \quad (34)$$

Der Ausdruck rechts hat für $\alpha = 0$ ein Minimum gleich $\frac{14}{15}$ und wächst monoton mit $|\alpha|$. In allen Fällen aber, für die unsere Betrachtung gilt, ist ρ ein sehr kleiner Bruch, also die Ungleichung (34) nie erfüllt: Der Dehnungswiderstand bewirkt, daß die zentrisch belastete, an den Enden gelagerte Welle bei allen Geschwindigkeiten sich stabil verhält. Im Falle exzentrischer Last wird aus dem gleichen Grunde die am wenigsten gekrümmte Lage die stabile sein.¹⁾

3. Zusammenfassung. Indem wir die hauptsächlichsten Ergebnisse dieses und des vorangehenden Paragraphen zusammenfassen und in naheliegender Weise erweitern, gelangen wir zu folgenden, soweit Versuche vorliegen, wohl bestätigten Sätzen.²⁾

I. Die an ihren Enden unverschiebbar gelagerte Welle, die sich nur unter entsprechender Dehnung ausbiegen kann, läuft, zentrisch belastet, in gestreckter Lage stabil bei allen Geschwindigkeiten. Bei kleinen Exzentrizitäten gibt es stets eine stabile Gleichgewichtslage mit geringer Ausbiegung, aber nahe unterhalb der kritischen Geschwindigkeit tritt eine Unstetigkeit in der Aufeinanderfolge der Gleichgewichtslagen ein. Wird daher die Geschwindigkeit von Null an allmählich gesteigert, so entfernt sich zunächst die Belastung stetig von der Rotationsachse, bis nahe unter dem kritischen Punkt eine Störung, in Form kurzer Schwingungen o. dgl. erfolgt, worauf die Masse auf der entgegengesetzten Seite der Achse zur Ruhe kommt, um sich bei weiterer Steigerung der Geschwindigkeit der Achse unaufhörlich zu nähern. Im Falle mehrfach belasteter Wellen werden bei den höheren kritischen Geschwindigkeiten ähnliche Störungen, aber von geringerer Stärke zu erwarten sein.

II. Ist die Welle derart gelagert, daß sie Ausbiegungen ohne gleichzeitige Dehnung erfahren kann, so strebt sie unterhalb der kritischen Geschwindigkeit stets stark gekrümmten Gleichgewichtsslagen zu. Erst oberhalb der kritischen Geschwindigkeit wird sie, wenn zentrisch belastet, in gestreckter Lage stabil.

III. Die einseitig eingespannte Welle, soweit sie nicht den hier unberücksichtigten Nebeneinflüssen unterliegt, verhält sich nur unterhalb der kritischen Grenze stabil.

¹⁾ Vgl. dazu den Beweis von Bryan a. a. O., wonach für dünne Stäbe A_d stets von höherer Größenordnung sein muß als A_k . — In praktischen Fällen wird schon die Reibung und Klemmung in den Lagern allein die Stabilisierung bewirken können.

²⁾ Aus den sehr sorgfältigen Versuchen von Dunkerley (Fußnote, p. 1) kann nicht mehr geschlossen werden, als daß die Welle in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit unruhig läuft („schlägt“). Nach A. Stodola (a. a. O. p. 307) liegen die beobachteten kritischen Werte, d. s. die Stellen der Störung, durchaus unterhalb der berechneten kritischen Geschwindigkeiten, was mit unseren Sätzen unter I übereinstimmt. — Hinsichtlich der Sätze II u. III vgl. die Fußnote p. 13 u. die voranstehende.