Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2.ª specie.

(*Memoria postuma di* GIUSEPPE LAURICELLA, *a Catania.*)

1. Nella mia Nota: *Sopra i nuclei reiterati* (*) ho stabilita la condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una funzione (reale) simmetrica $K(x, y)$, la cui reiterata d'ordine n, $K^{(n)}(x, y)$, sia uguale ad una funzione (reale) simmetrica data $H(x, y)$; ossia la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia risolubile (mediante funzioni reali) l'equazione funzionale:

$$K^{(n)}(x, y) = H(x, y). \tag{1}$$

Nella medesima Nota ho pure data la regola per scrivere la funzione (reale) più generale che soddisfa a questa equazione. Tale regola può sostanzialmente esprimersi dicendo che le funzioni simmetriche $K(x, y)$, le quali soddisfano all'equazione (1), hanno per autovalori le radici n^{esime} reali degli autovalori della funzione $H(x, y)$ e per corrispondenti autofunzioni (normalizzate) combinazioni lineari omogenee (i cui coefficienti sono elementi di una sostituzione ortogonale) delle corrispondenti autofunzioni (normalizzate) di $H(x, y)$ appartenenti ai corrispondenti autovalori, che sono uguali fra di loro. In questo modo per n dispari si ha una soluzione solamente, mentre per n pari, se gli autovalori di $H(x, y)$ sono, come è necessario, tutti positivi, si hanno infinite soluzioni, dovute alle infinite combinazioni dei segni $+$ e $-$, che possono essere assegnati alle radici n^{esime} aritmetiche degli autovalori di $H(x, y)$. Importa osservare che queste infinite soluzioni possono aggrupparsi in coppie di funzioni due a due uguali e di segno contrario.

La questione così risoluta è analoga al problema della ricerca delle radici n^{esime} reali (positive e negative) dei numeri reali, ossia al problema della

(*) *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, vol. XX, serie 5.ª, 1.° sem. anno 1911, pp. 885-896.

ricerca delle soluzioni reàli dell'equazione binomia di grado n. In virtù di tale analogia ci si può domandare: esisteranno soluzioni non reali dell'equazione (1)?

Qui mi propongo appunto di dimostrare che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la (1) ammetta soluzioni non reali, aventi autofunzioni tutte reali (*) (quelle corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$ incluse), è quella stessa richiesta per l'esistenza di soluzioni reali, e che la regola per scrivere tutte le possibili soluzioni reali e immaginarie, ad autofunzioni tutte reali, dell'equazione (1) è la naturale estensione di quella trovata per il caso delle soluzioni reali. Questa regola generale può sostanzialmente esprimersi dicendo che tutte le soluzioni simmetriche (reali ed immaginarie) dell'equazione (1) hanno per autovalori le radici n^{esime} (reali ed immaginarie) degli autovalori della funzione $H(x, y)$, e per corrispondenti autofunzioni (normalizzate) tutte reali combinazioni lineari omogenee (i cui coefficienti sono elementi di una sostituzione ortogonale) delle autofunzioni (normalizzate) di $H(x, y)$ relative ai corrispondenti autovalori, che sono uguali fra di loro. In questo modo si hanno sempre infinite soluzioni dell'equazione (1), dovute alle combinazioni delle n differenti radici n^{esime} dei varii autovalori della fun-

---

(*) Effettivamente esistono pure soluzioni dell'equazione (1) aventi autofunzioni non reali, aventi cioè autofunzioni di cui la parte reale e la parte immaginaria, prese separatamente, non sono autofunzioni della soluzione stessa. La loro considerazione non presenta più il vantaggio di usufruire delle eleganti proprietà delle funzioni ortogonali reali e dei nuclei aventi autofunzioni tutte reali. Basterà pensare che esistono dei nuclei simmetrici non aventi autofunzioni tutte reali, i cui nuclei reiterati sono tutti identicamente nulli.

Per darne un esempio semplicissimo, si considerino due funzioni reali $\varphi(x)$, $\psi(x)$ del campo $\overline{ab}$ normalizzate, cioè tali che si abbia:

$$\int_a^b \left\{ \varphi(x) \right\}^2 dx = 1, \quad \int_a^b \left\{ \psi(x) \right\}^2 dx = 1, \quad \int_a^b \varphi(x)\, \psi(x)\, dx = 0;$$

e si costruisca il nucleo simmetrico:

$$K(x,\ y) = \left\{ \varphi(x) + i\psi(x) \right\} \left\{ \varphi(y) + i\psi(y) \right\}.$$

Si ha, ovviamente:

$$K_2(x,\ y) = \left\{ \varphi(x) + i\psi(x) \right\} \left\{ \varphi(y) + i\psi(y) \right\} \int_a^b \left\{ \varphi(\xi) + i\psi(\xi) \right\} \left\{ \varphi(\xi) + i\psi(\xi) \right\} d\xi = 0.$$

Nel presente lavoro le autofunzioni saranno supposte sempre reali, a meno che in qualche punto non risulti il contrario o non si supponga esplicitamente il contrario.

zione $H(x, y)$; e queste soluzioni possono sempre aggrupparsi in sistemi di n funzioni ciascuno, aventi la particolarità che le n funzioni di un sistema si possono ottenere da una qualunque di esse moltiplicandola successivamente per le n radici n^{esime} dell'unità. Un sistema cosiffatto di soluzioni dell'equazione (1) sarà detto *ciclico*.

Evidentemente il problema generale così risoluto equivale al problema della risoluzione generale dell'equazione binomia di grado n, e la proprietà di cui godono le n funzioni di un sistema ciclico di soluzioni dell'equazione (1) è identica alla proprietà di cui godono le n soluzioni dell'equazione binomia di grado n.

2. Più in generale, nell'indirizzo della teoria algebrica delle funzioni permutabili istituita dal prof. Volterra (*) e ulteriormente sviluppata dal D.r Evans (**), ci si può proporre la risoluzione, per mezzo di funzioni $K(x, y)$ (nuclei), aventi autofunzioni tutte reali, dell'equazione funzionale di 2.ª specie:

$$*a^*_0 \ddot{K}_n(x, y) + *a^*_1 \ddot{K}_{n-1}(x, y) + \cdots + *a^*_{n-1} \ddot{K}(x, y) + a_n(x, y) = 0, \qquad (2)$$

dove, conformemente alla notazione introdotta dal prof. Volterra (***), si è posto:

$$*a^*_i \ddot{K}_{n-i}(x, y) = \int_a^b a_i(x, \eta) K_{n-i}(\eta, y)\, d\eta. \qquad (3)$$

L'equazione (2) è stata risoluta in un caso assai interessante dal prof. Volterra (****). Volendo approfondire la quistione generale della risoluzione di questa equazione nella sola ipotesi che tutte le funzioni che entrano in considerazione siano simmetriche, è necessario, secondo il concetto del D.r Evans, formulare le operazioni che intendiamo sostituire alle ordinarie operazioni dell'algebra ($*_*$). A tal uopo faremo le seguenti convenzioni:

(*) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIX, serie 5.ª, 1.º sem. 1910, pp. 169-180).

(**) *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili* (Memorie della R. Acc. dei Lincei, serie 5.ª, vol. VIII, anno 1911, pp. 7-20).

(***) l. c., § 8.

(****) *Sopra le funzioni permutabili di 2.ª specie e le equazioni integrali* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5.ª, 1.º sem. 1911, pp. 521-527).

($*_*$) G. C. Evans, l. c., § 1.

1.° all'addizione e sottrazione si sostituiscano rispettivamente le ordinarie operazioni di addizione e sottrazione delle funzioni;

2.° alla moltiplicazione si sostituisca l'operazione di composizione di 2.ª specie di VOLTERRA, espressa analiticamente dalla (3), ed alla proprietà commutativa della moltiplicazione si sostituisca l'altra:

$$ {}^*a^* \ddot{b}\,(x,\ y) = \ddot{b}\,{}^*a^*\,(x,\ y), $$

ossia, secondo la nomenclatura del prof. VOLTERRA, la proprietà della permutabilità;

3.° alla divisione si sostituisca la risoluzione dell'equazione integrale di 1.ª specie a limiti costanti;

4.° alla risoluzione dell'equazione binomia si sostituisca la risoluzione dell'equazione (1).

Osserviamo anzitutto che, in virtù della 1.ª convenzione, alle espressioni che occorrerà considerare sono applicabili tutte le proprietà dell'addizione e della sottrazione; e si può osservare, in particolare, che la moltiplicazione di un numero intero per una quantità costante risulterà qui sostituita dalla moltiplicazione di un numero intero per una funzione.

In virtù poi della 2.ª convenzione, all'innalzamento a potenza verrà sostituita l'operazione di reiterazione delle funzioni; e, conformemente alla seconda parte di questa medesima convenzione, tutte le volte che per la risoluzione di un problema avremo determinata una certa funzione incognita, la quale si è supposta permutabile con altre funzioni, occorrerà verificare se essa soddisfa effettivamente alle presupposte condizioni di permutabilità.

In causa della 3.ª convenzione, l'operazione inversa della composizione non è sempre possibile; perchè devono ogni volta essere verificate le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle soluzioni delle equazioni integrali di 1.ª specie a limiti costanti (*). Quando queste condizioni sono verificate l'operazione si può sempre eseguire, ossia la funzione incognita può sempre scriversi, mediante la regola indicata al § 4 della mia Nota testè citata.

Similmente non è sempre possibile eseguire l'operazione da sostituire alla risoluzione delle equazioni binomie; perchè, infatti, ogni volta deve essere

(*) LAURICELLA, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1.ª specie* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5.ª, 1.° sem. 1911, pp. 528-536).

soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente, accennata al numero precedente, per l'esistenza di soluzioni dell'equazione (1).

Osserviamo ancora che, supposte verificate sempre le condizioni che hanno origine dalle *quattro* convenzioni testè fatte, e supposto inoltre di sostituire al sistema di soluzioni di un'equazione binomia, un qualunque sistema ciclico di soluzioni dell'equazione (1), potrà realizzarsi un'algebra perfettamente analoga all'algebra ordinaria. In particolare, per approfondire il problema della risoluzione dell'equazione funzionale (2), potrà applicarsi, senza modificazioni sostanziali, la teoria di GALOIS; e per effettuare la risoluzione della medesima equazione, nei casi in cui questa può eseguirsi operando sulle funzioni note $a_0(x, y)$, $a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y)$ mediante le quattro operazioni precedentemente formulate, potrà similmente applicarsi la teoria delle risolventi di LAGRANGE.

Naturalmente bisognerà ogni volta, a calcoli compiuti, e possibilmente anche *a priori*, verificare se le condizioni di permutabilità e le condizioni richieste per eseguire le operazioni inverse indicate nelle convenzioni 3.ª e 4.ª sono verificate; oppure bisognerà fissare ogni volta quali condizioni devono essere verificate in proposito dalle funzioni che nel problema considerato si suppongono note. Le condizioni che in tal modo vengono a trovarsi per le funzioni note, o supposte tali, sono condizioni necessarie e sufficienti da aggiungersi a quelle che la teoria di GALOIS suggerisce per la risolubilità delle equazioni della forma (2) mediante le quattro operazioni elementari anzidette; e l'analisi per eseguire tali operazioni è da aggiungersi all'analisi che la teoria delle risolventi di LAGRANGE suggerisce per eseguire, nei casi in cui è possibile, la risoluzione dell'equazione (2).

Tutte queste considerazioni di indole generale saranno qui illustrate risolvendo l'equazione (2) nei casi di $n = 2, 3$.

Noteremo in fine che i risultati qui contenuti, oltre che per le funzioni di due variabili indipendenti, valgono senz'altro per le funzioni di un numero pari qualsiasi di variabili indipendenti.

CAPITOLO I.

Equazioni integrali binomie.

§ 1.

TEOREMI SUGLI AUTOVALORI E SULLE AUTOFUNZIONI DEI NUCLEI REITERATI.

3. Sia $K(x, y)$ un nucleo simmetrico, reale o no, definito nel campo $\overline{ab} = \{a \leq x \leq b\}$, e sia $K^{(n)}(x, y)$ il suo reiterato di ordine n. *Esistano per ipotesi una funzione $\varphi(x)$ del campo $\overline{ab}$ e una costante λ tale che sia:*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy;$$

si avrà allora:

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_a^b K^{(n)}(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

4. *Supponiamo che esistano una funzione $\psi(x)$ nel campo $\overline{ab}$ ed una costante reale μ tale che sia:*

$$\psi(x) = \mu^n \int_a^b K^{(n)}(x, y)\, \psi(y)\, dy.$$

Indicata con ε_ν una generica radice n^{esima} dell'unità e posto con SCHMIDT (*):

$$\left.\begin{aligned} n\, \varphi_\nu(x) = \psi(x) + \varepsilon_\nu \mu \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy\, + \\ + \varepsilon_\nu^2 \mu^2 \int_a^b K^2(x, y)\, \psi(y)\, dy + \cdots + \varepsilon_\nu^{n-1} \mu^{n-1} \int_a^b K^{(n-1)}(x, y)\, \psi(y)\, dy, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

risulterà

$$\psi(x) = \sum_1^n {}_\nu\, \varphi_\nu(x), \qquad (5)$$

(*) *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen* (Math. Annalen, B. LXIII, pp. 433-476).

$$\varphi_\nu(x) = \varepsilon_\nu \mu \int_a^b K(x, y) \varphi_\nu(y)\, dy. \tag{6}$$

Osserviamo che non tutte le $\varphi_\nu(x)$ possono essere identicamente nulle, in virtù della (5); per cui se ne conclude che *esisteranno n funzioni* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, *non tutte identicamente nulle, che si possono esprimere mediante la formola* (4), *le quali sono soluzioni delle equazioni* (6), *e sono legate alla funzione* $\psi(x)$ *dalla relazione* (5).

5. Siano: μ una costante, $\varepsilon \neq 1$ una radice n^{esima} dell'unità, t_σ un numero intero positivo o nullo non superiore ad $n - 1$, e $\varphi_\sigma(x)$ una funzione tale che si abbia:

$$\varphi_\sigma(x) = \varepsilon^{t_\sigma} \mu \int_a^b K(x, y) \varphi_\sigma(y)\, dy. \tag{7}$$

Vogliamo dimostrare che *tra le diverse* $\varphi_\sigma(x)$, *corrispondenti ai possibili valori di* t_σ, *per cui le corrispondenti espressioni* ε^{t_σ} *siano tutte differenti ira di loro, non esiste alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.*

Infatti siano $t_1, t_2, \ldots, t_j$ valori di t_σ tali che $\varepsilon^{t_1}, \varepsilon^{t_2}, \ldots, \varepsilon^{t_j}$ siano numeri tutti disuguali e che, per le corrispondenti $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_j(x)$, si abbia in tutto il campo $\overline{ab}$:

$$a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \cdots + a_j \varphi_j(x) = 0, \tag{8}$$

con $a_1, a_2, \ldots, a_j$ coefficienti costanti diversi da zero. Moltiplichiamo ambo i membri della (7) per $a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma}$, facciamo successivamente $\sigma = 1, 2, \ldots, j$, e sommiamo membro a membro le equazioni che così si ottengono. Tenendo conto dell'equazione $\varepsilon^n = 1$, risulterà:

$$\sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma} \varphi_\sigma(x) = \mu \int_a^b K(x, y) \sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varphi_\sigma(y)\, dy = 0. \tag{8'}$$

Similmente si moltiplichino ambo i membri della (7) per $a_\sigma \varepsilon^{2(n-t_\sigma)}$, si faccia successivamente $\sigma = 1, 2, \ldots, j$ e poi si sommi membro a membro. Si otterrà:

$$\sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varepsilon^{2(n-t_\sigma)} \varphi_\sigma(x) = \mu \int_a^b K(x, y) \sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma} \varphi_\sigma(y)\, dy = 0. \tag{8''}$$

Seguitando sempre nella stessa guisa, si avrà in tutto il campo $\overline{ab}$:

$$\sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varphi_\sigma(x) = 0, \quad \sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varepsilon^{n-t_\sigma} \varphi_\sigma(x) = 0, \ldots, \quad \sum_1^j{}_\sigma\, a_\sigma \varepsilon^{(j-1)(n-t_\sigma)} \varphi_\sigma(x) = 0. \tag{8'''}$$

Il valore del determinante dei coefficienti di questo sistema di equazioni lineari omogenee nelle $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_j(x)$ è uguale a

$$a_1\, a_2 \dots a_j \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon^{n-t_1} & \varepsilon^{n-t_2} & \dots & \varepsilon^{n-t_j} \\ \varepsilon^{2(n-t_1)} & \varepsilon^{2(n-t_2)} & \dots & \varepsilon^{2(n-t_j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon^{(j-1)(n-t_1)} & \varepsilon^{(j-1)(n-t_2)} & \dots & \varepsilon^{(j-1)(n-t_j)} \end{vmatrix} =$$

$$= a_1\, a_2 \dots a_j \prod_{r,s} (\varepsilon^{n-t_r} - \varepsilon^{n-t_s}), \qquad (r \neq s)\,;$$

ed è diverso da zero; quindi dovrà aversi in tutto il campo $\overline{ab}$:

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \cdots = \varphi_j(x) = 0\,;$$

e questo dimostra appunto il teorema enunciato.

Da questo teorema risulta come corollario che, se il nucleo $K(x, y)$ ammette m_1 autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore μ, m_2 corrispondenti all'autovalore $\varepsilon\mu$, m_3 all'autovalore $\varepsilon^2\mu$,..., m_n all'autovalore $\varepsilon^{n-1}\mu$, queste $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ autofunzioni saranno linearmente indipendenti.

6. Indichiamo con m il numero delle autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$ corrispondenti all'autovalore μ^n. Poichè, come fu osservato al n.º 3, le $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo $K(x, y)$, di cui è parola nel corollario precedente, sono ancora autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$, dovrà aversi:

$$m \geqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n\,. \tag{8*}$$

D'altra parte, indicando con $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_m(x)$ le anzidette m autofunzioni di $K^{(n)}(x, y)$, in virtù del risultato al n.º 4, si potrà scrivere:

$$\psi_t(x) = \sum_1^n{}_\nu\, \varphi_{t\nu}(x), \qquad (t = 1, 2, \dots, m), \tag{9}$$

e le $\varphi_{t\nu}(x)$ saranno autofunzioni del nucleo $K(x, y)$, corrispondenti agli autovalori della forma $\varepsilon_\nu\mu$, alcune delle quali possono eventualmente essere identicamente nulle in tutto il campo $\overline{ab}$. Notiamo che, essendo le $m \times n$ funzioni $\varphi_{t\nu}(x)$ autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$ corrispondenti all'autovalore μ^n, non potranno essere tutte linearmente indipendenti, ma dovranno essere legate da $n(n-1)$ relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti e linearmente indipendenti. Notiamo ancora che, all'infuori di queste relazioni, non potrà sussisterne alcun'altra della medesima natura; perchè altrimenti, in virtù delle (9), le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_m(x)$ non sarebbero linearmente indipendenti, contrariamente all'ipotesi fatta. Quindi m ed m solamente delle $m \times n$ funzioni $\varphi_{t\nu}(x)$ saranno linearmente indipendenti; e perciò sarà:

$$m \leqq m_1 + m_2 + \cdots + m_n .$$

Questa e la (8*) ci dànno finalmente:

$$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n .$$

Dalle (9) si possono poi ricavare le m funzioni $\varphi_{t\nu}(x)$ che sono linearmente indipendenti, espresse linearmente ed omogeneamente per le m funzioni $\psi_t(x)$.

Riassumendo, si ha il seguente teorema: *Sia $K(x, y)$ un nucleo (non necessariamente reale), il quale abbia per reiterato di ordine n la funzione $K^{(n)}(x, y)$. Se $K^{(n)}(x, y)$ ammette m autofunzioni linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore μ^n ed m solamente, il nucleo $K(x, y)$ avrà m autofunzioni linearmente indipendenti ed m solamente, corrispondenti complessivamente agli n autovalori $\varepsilon_1\mu, \varepsilon_2\mu, \ldots, \varepsilon_n\mu$, essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ le radici n^{esime} dell'unità; e viceversa. Le m autofunzioni del nucleo $K(x, y)$ si esprimono linearmente ed omogeneamente mediante le m autofunzioni del nucleo $K^{(n)}(x, y)$.*

È ovvio che *se le autofunzioni di $K^{(n)}(x, y)$ sono normalizzate e le autofunzioni di $K(x, y)$ sono pure normalizzate, i coefficienti delle espressioni lineari*, di cui è parola nel teorema precedente, *costituiscono gli elementi di una sostituzione lineare.*

7. Se $\psi(x)$ è soluzione dell'equazione:

$$\int_a^b K(x, y)\,\psi(y)\,dy = 0, \tag{10}$$

ovvero, come può dirsi, se $\psi(x)$ è autofunzione del nucleo $K(x, y)$ corrispondente all'autovalore $\lambda = \infty$, sarà:

$$\int_a^b K^{(n)}(x, y)\,\psi(y)\,dy = 0. \tag{10'}$$

Viceversa, indichiamo con $\theta(x)$ una soluzione dell'equazione (10'), e formiamo la serie:

$$\left.\begin{array}{l}\theta(x), \quad \int_a^b K(x, y)\,\theta(y)\,dy, \ldots, \quad \int_a^b K^{(n-2)}(x, y)\,\theta(y)\,dy, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \int_a^b K^{(n-1)}(x, y)\,\theta(y)\,dy.\end{array}\right\} \tag{11}$$

Indichiamo con $\psi(x)$ la prima di queste funzioni che non sia identicamente nulla in tutto il campo $\overline{ab}$. Questa funzione esisterà certamente, perchè per lo meno coinciderà con la $\theta(x)$; e, come è ovvio, soddisferà all'equazione (10).

8. Vogliamo ora dimostrare che *se il nucleo*

$$K(x, y) = K'(x, y) + i\,K''(x, y)$$

è simmetrico, se le soluzioni dell'equazione (10) *sono tutte reali*, nel senso cioè che la parte reale e la parte immaginaria di una qualsiasi soluzione $\psi(x)$ dell'equazione (10) sono separatamente soluzioni della medesima equazione, *e se* $\theta(x)$ *è una generica soluzione dell'equazione* (10'), *si avrà per* $t = n - 1$, $n - 2, \ldots, 1$:

$$\int_a^b K^{(t)}(x, y)\,\theta(y)\,dy = 0.$$

Infatti, supposto:

$$\int_a^b K^{(t+1)}(x, y)\,\theta(y)\,dy = 0,$$

e posto:

$$\int_a^b K^{(t)}(x, y)\,\theta(y)\,dy = \psi'(x) + i\,\psi''(x) = \psi(x), \tag{12}$$

si avrà, in virtù dell'ipotesi fatta,

$$\int_a^b K(x, y)\,\psi'(y)\,dy = 0, \quad \int_a^b K(x, y)\,\psi''(y)\,dy = 0;$$

ed *a fortiori*:

$$\int_a^b K^{(t)}(x, y)\,\psi'(y)\,dy = 0, \quad \int_a^b K^{(t)}(x, y)\,\psi''(y)\,dy = 0. \tag{13}$$

Da queste risulta, in virtù della supposta simmetria e della posizione (12),

$$\int_a^b \left|\psi(x)\right|^2 dx = \int_a^b \left|\psi'(x)\right|^2 dx - \int_a^b \left|\psi''(x)\right|^2 dx + 2\,i \int_a^b \psi'(x)\,\psi''(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K^{(t)}(x, y)\,\theta(y)\,\psi(x)\,dx\,dy = \int_a^b \theta(y)\,dy \int_a^b K^{(t)}(x, y)\,\psi(x)\,dx = 0;$$

e per conseguenza:

$$\int_a^b \left\{ \psi'(x) \right\}^2 d\,x = \int_a^b \left\{ \psi''(x) \right\}^2 d\,x, \quad \int_a^b \psi'(x)\, \psi''(x)\, d\,x = 0. \tag{14}$$

Per altro si ha, dalla (12) e dalla prima delle (13):

$$\int_a^b \psi'(x)\, \psi(x)\, d\,x = \int_a^b \int_a^b K^{(1)}(x, y)\, \theta(y)\, \psi'(x)\, d\,x\, d\,y = 0\,;$$

e quindi, tenuto conto delle (14), si avrà:

$$\int_a^b \left\{ \psi'(x) \right\}^2 d\,x = 0, \quad \int_a^b \left\{ \psi''(x) \right\}^2 d\,x = 0,$$

ossia:

$$\int_a^b K^{(1)}(x, y)\, \theta(y)\, d\,y = 0,$$

c. d. d.

Questo risultato e quello del numero precedente ci dànno: *se il nucleo* $K(x, y) = K'(x, y) + i\,K''(x, y)$ *è simmetrico e se le soluzioni dell'equazione* (10) *sono tutte reali*, nel senso dianzi spiegato, *queste soluzioni coincideranno con quelle dell'equazione* (10').

§ 2.

Teorema generale sugli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

9. Sia:

$$U_1(x, y), \quad U_2(x, y), \ldots, \tag{15}$$

una serie infinita di funzioni ortogonali reali in un campo piano finito σ di forma qualsiasi; siano cioè $U_1(x, y)$, $U_2(x, y)$,... funzioni sommabili insieme ai loro quadrati e ai loro prodotti due a due, tali che si abbia:

$$\int_\sigma U_\mu(x, y)\, U_\nu(x, y)\, d\,x\, d\,y = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ per } \mu = \nu, \\ 0 \text{ per } \mu \neq \nu. \end{array} \right\} \tag{16}$$

Sia ancora $K(x, y) = K_1(x, y) + i K_2(x, y)$ una funzione complessa del campo σ tale che le due funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ siano nel campo σ sommabili insieme ai loro quadrati e insieme ai prodotti di ciascuna di esse per una qualunque delle $U_t(x, y)$.

Posto:

$$\alpha_t = \int_\sigma K_1(x, y)\, U_t(x, y)\, d\,x\, d\,y,$$

$$\beta_t = \int_\sigma K_2(x, y)\, U_t(x, y)\, d\,x\, d\,y,$$

sarà:

$$a_t = \int_\sigma K(x, y)\, U_t(x, y)\, d\,x\, d\,y = \alpha_t + i\,\beta_t,$$

$$0 \leq \int_\sigma \left\{ K_1(x, y) - \sum_1^m {}_t\, \alpha_t\, U_t(x, y) \right\}^2 d\,x\, d\,y = \int_\sigma \left\{ K_1(x, y) \right\}^2 d\,x\, d\,y - \sum_1^m {}_t\, \alpha_t^2,$$

$$0 \leq \int_\sigma \left\{ K_2(x, y) - \sum_1^m {}_t\, \beta_t\, U_t(x, y) \right\}^2 d\,x\, d\,y = \int_\sigma \left\{ K_2(x, y) \right\}^2 d\,x\, d\,y - \sum_1^m {}_t\, \beta_t^2.$$

Dalle due ultime formole risulta intanto la convergenza delle due serie $\sum_1^\infty {}_t\, \alpha_t^2$, $\sum_1^\infty {}_t\, \beta_t^2$; sicchè, posto:

$$f_p(x, y) = \sum_1^p {}_t\, \alpha_t\, U_t(x, y),$$

si avrà che *la serie:*

$$f_1(x, y),\quad f_2(x, y), \ldots$$

è convergente in media nel campo σ. *Allora,* in virtù del teorema di WEYL, *sarà possibile determinare* (*ed in infiniti modi*) *una serie di numeri, interi e positivi e crescenti indefinitamente,* n_1, $n_2, \ldots,$ *in modo che la serie:*

$$F_1(x, y) = \sum_1^{n_1} {}_t\, \alpha_t\, U_t(x, y) + \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_t\, \alpha_t\, U_t(x, y) + \cdots \tag{17}$$

sia in tutto il campo σ *convergente uniformemente in generale.*

Ciò premesso, si ponga.

$$V_\tau(x, y) = \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_\tau} {}_t\, \beta_t\, U_t(x, y), \qquad \Phi_q(x, y) = \sum_1^q {}_\tau\, V_\tau(x, y).$$

Sarà, in virtù della (16),

$$\int_\sigma \left\{ V_\tau(x, y) \right\}^2 d\,x\,d\,y = \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_\tau}{}_t\, \beta_t^2, \qquad \int_\sigma V_\tau(x, y)\, V_0(x, y)\, d\,x\,d\,y = 0;$$

e quindi:

$$\int_\sigma \left\{ \Phi_{q+\omega}(x, y) - \Phi_q(x, y) \right\}^2 d\,x\,d\,y = \int_\sigma \left\{ \sum_{q+1}^{q+\omega}{}_\tau\, V_\tau(x, y) \right\}^2 d\,x\,d\,y =$$

$$= \sum_{q+1}^{q+\omega}{}_\tau \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_\tau}{}_t\, \beta_t^2 = \sum_{n_q+1}^{n_{q+\omega}}{}_t\, \beta_t^2 .$$

Da quest'ultima uguaglianza risulta, avuto riguardo alla convergenza della serie $\sum_1^\infty{}_t\, \beta_t^2$, che *la serie:*

$$\Phi_1(x, y), \quad \Phi_2(x, y), \ldots$$

è convergente in media nel campo σ; *quindi*, in virtù del teorema di Weyl, *potrà determinarsi (ed in infiniti modi) una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente*, $\nu_1, \nu_2, \ldots$, *in modo che la serie:*

$$\left.\begin{aligned} F_2(x, y) &= \sum_1^{\nu_1}{}_\tau\, V_\tau(x, y) + \sum_{\nu_1+1}^{\nu_2}{}_\tau\, V_\tau(x, y) + \cdots = \\ &= \sum_1^{\nu_1}{}_\tau \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_\tau}{}_t\, \beta_t\, U_t(x, y) + \sum_{\nu_1+1}^{\nu_2}{}_\tau \sum_{n_{\tau-1}+1}^{n_\tau}{}_t\, \beta_t\, U_t(x, y) + \cdots = \\ &= \sum_1^{n_{\nu_1}}{}_t\, \beta_t\, U_t(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}}{}_t\, \beta_t\, U_t(x, y) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

sia in tutto il campo σ *convergente uniformemente in generale.*

In virtù della dimostrata convergenza della serie (17) si avrà *a fortiori* che *la serie:*

$$F_1(x, y) = \sum_1^{n_{\nu_1}}{}_t\, \alpha_t\, U_t(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}}{}_t\, \alpha_t\, U_t(x, y) + \cdots \qquad (17')$$

è in tutto il campo σ *convergente uniformemente in generale;* è quindi, in fine, che anche *la serie:*

$$F(x, y) = \sum_1^{n_{\nu_1}}{}_t\, a_t\, U_t(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}}{}_t\, a_t\, U_t(x, y) + \cdots \qquad (19)$$

è convergente uniformemente in generale in tutto il campo σ.

10. Moltiplicando ambo i membri delle (17), (18) per $U_t(x, y)$ ed integrando per serie, si ha:

$$\int_\sigma F_1(x, y)\, U_t(x, y)\, dx\, dy = \alpha_t, \qquad \int_\sigma F_2(x, y)\, U_t(x, y)\, dx\, dy = \beta_t;$$

e quindi:

$$\int_\sigma \left\{ K_1(x, y) - F_1(x, y) \right\} U_t(x, y)\, dx\, dy = 0,$$

$$\int_\sigma \left\{ K_2(x, y) - F_2(x, y) \right\} U_t(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

Di qui risulta che, *se la serie* (15) *è chiusa, si dovrà avere:*

$$K_1(x, y) = F_1(x, y), \qquad K_2(x, y) = F_2(x, y);$$

e quindi ancora:

$$K(x, y) = F(x, y)$$

in tutto il campo σ, *eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla.*

Supponiamo invece che la serie (15) non sia chiusa, ossia che esista una serie finita o infinita (numerabile) (*) di funzioni ortogonali:

$$\theta_1(x, y), \qquad \theta_2(x, y), \ldots$$

sommabili insieme ai loro prodotti con le $U_t(x, y)$, tali che

$$\int_\sigma \theta_\tau(x, y)\, U_t(x, y)\, dx\, dy = 0, \qquad (t = 1, 2, \ldots).$$

Poichè le $U_t(x, y)$ sono funzioni reali, lo stesso avverrà, o potrà farsi in modo che avvenga, delle $\theta_1(x, y)$, $\theta_2(x, y), \ldots$

Intanto perchè sia:

$$K(x, y) = F(x, y), \tag{20}$$

è necessario, in virtù della (19), che si abbia:

$$\int_\sigma K(x, y)\, \theta_\tau(x, y)\, dx\, dy = 0, \qquad (\tau = 1, 2, \ldots); \tag{21}$$

(*) Cfr. la mia Nota: *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali, ecc.* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5.ª, t. XXI, 1.° sem. 1912).

e quindi:

$$\left.\begin{array}{c}\int_\sigma K_1(x, y)\,\theta_\tau(x, y)\,dx\,dy = 0, \qquad \int_\sigma K_2(x, y)\,\theta_\tau(x, y)\,dx\,dy = 0, \\ (\tau = 1, 2, \ldots).\end{array}\right\} \tag{22}$$

Viceversa, se la (21), e conseguentemente anche le (22), sono soddisfatte, sarà (*):

$$K_1(x, y) = F_1(x, y), \qquad K_2(x, y) = F_2(x, y);$$

e quindi sarà verificata la (20).

Adunque *nel caso che la serie* (15) *non sia chiusa, condizione necessaria e sufficiente affinchè sia verificata la* (20) *è che la funzione* $K(x, y)$ *soddisfaccia alle condizioni* (21). Riepilogando si ha il seguente teorema: *se la funzione* $K(x, y)$ *ha la parte reale e la parte immaginaria separatamente sommabili, insieme ai loro quadrati e insieme ai prodotti di ciascuna di esse per una qualsiasi delle* $U_t(x, y)$, *in tutto il campo* σ, *e se, nel caso in cui la serie* (15) *non è chiusa, soddisfa inoltre, come è necessario, alle condizioni* (21), *sarà sempre possibile, ed in infiniti modi, determinare una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente* $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots$, *in modo tale che si abbia:*

$$K(x, y) = \sum_1^{n_{\nu_1}}{}_t\, a_t\, U_t(x, y) + \sum_{n_{\nu_1}+1}^{n_{\nu_2}}{}_t\, a_t\, U_t(x, y) + \cdots,$$

e che la serie al secondo membro sia in tutto il campo σ *convergente uniformemente in generale.*

§ 3.

Sviluppo di un nucleo in serie delle corrispondenti autofunzioni.

11. Premettiamo il seguente teorema: *se le due serie ortogonali del campo* $\overline{ab}$:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots; \qquad \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots \tag{23}$$

(*) Cfr. la mia citata Nota: *Sopra i nuclei reiterati*, § 2.

sono reali e chiuse, la serie:

$$u_{rs}(x,\ y) = \varphi_r(x)\,\psi_s(y) \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ldots) \tag{24}$$

sarà nel campo $\sigma = \{a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b\}$ *pure ortogonale e chiusa.*

Infatti osserviamo anzitutto che si ha ovviamente:

$$\int_a^b \int_a^b u_{rs}(x,\ y)\, u_{r's'}(x,\ y)\, dx\, dy = \begin{cases} 1 \text{ per } r = r',\ s = s', \\ 0 \text{ in tutti gli altri casi.} \end{cases}$$

E con ciò è dimostrata l'ortogonalità della serie (24).

Per dimostrare poi che questa serie è chiusa, basterà dimostrare che qualunque funzione reale $f(x,\ y)$ sommabile insieme al suo quadrato nel campo σ, e sommabile nel campo $\overline{a\,b}$ rispetto ad y per ogni valore di x, e rispetto ad x per ogni valore di y, la quale soddisfa alle infinite equazioni:

$$\int_a^b \int_a^b f(x,\ y)\, u_{rs}(x,\ y)\, dx\, dy = 0, \qquad (r,\ s = 1,\ 2,\ldots), \tag{25}$$

è identicamente nulla nel campo σ, esclusi al più i punti di un insieme di misura piana nulla.

Intanto, scritta la (25) sotto la forma:

$$\int_a^b \varphi_r(x)\, dx \int_a^b f(x,\ y)\, \psi_s(y)\, dy = 0, \tag{25'}$$

risulta, in virtù della chiusura della prima delle due serie (23),

$$\int_a^b f(x,\ y)\, \psi_s(y)\, dy = 0, \qquad (s = 1,\ 2,\ldots),$$

per tutti i valori di x del campo $\overline{a\,b}$, eccezione fatta al più per i punti di un insieme di misura nulla; e quindi, in virtù della chiusura della seconda delle serie (23), sarà per ciascuno dei detti valori di x:

$$f(x,\ y) = 0,$$

per tutti i valori di y nel campo $\overline{a\,b}$, ogni volta escluso al più un insieme di valori di misura nulla. Allora potremo scrivere, per ciascuno dei medesimi valori di x:

$$\int_a^b \left| f(x,\ y) \right|^2 dy = 0\,;$$

e quindi ancora:

$$\int_a^b \int_a^b \left| f(x, y) \right|^2 d\,x\,d\,y = 0,$$

c. d. d.

12. *Sia $K(x, y) = K'(x, y) + i\,K''(x, y)$ una funzione tale che $K'(x, y)$, $K''(x, y)$ siano sommabili insieme ai loro quadrati nel campo*

$$\sigma = \left\{ a \leqq x \leqq b,\ a \leqq y \leqq b \right\},$$

ed ammetta essa come autofunzioni gli elementi di due serie di funzioni ortogonali reali e chiuse, i corrispondenti autovalori (dei quali intendiamo che eventualmente possa far parte il valore ∞) potendo essere in tutto od in parte non reali.

Siano:

$$\varphi_1(x),\ \psi_1(y);\qquad \varphi_2(x),\ \psi_2(y);\ldots$$

le coppie di autofunzioni corrispondenti rispettivamente agli autovalori finiti:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + i\,\lambda''_1,\qquad \lambda_2 = \lambda'_2 + i\,\lambda''_2,\ldots,$$

ossia si abbia:

$$\varphi_p(x) = \lambda_p \int_a^b K(x, y)\,\psi_p(y)\,d\,y,$$

$$\psi_p(y) = \lambda_p \int_a^b K(x, y)\,\varphi_p(x)\,d\,x;$$

e siano:

$$t_1(x),\ t_2(x),\ldots;\qquad \tau_1(y),\ \tau_2(y),\ldots$$

le eventuali autofunzioni corrispondenti all'autovalore ∞, ossia le eventuali funzioni per le quali si abbia:

$$\int_a^b K(x, y)\,t_q(x)\,d\,x = 0,$$

$$\int_a^b K(x, y)\,\tau_q(y)\,d\,y = 0;$$

ed inoltre siano le due serie:

$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\ldots,\quad t_1(x),\quad t_2(x),\ldots;$$
$$\psi_1(y),\quad \psi_2(y),\ldots,\quad \tau_1(y),\quad \tau_2(y),\ldots,$$

conformemente all'ipotesi fatta sopra, ortogonali e chiuse.

Posto:

$$u_p(x, y) = \varphi_p(x)\,\psi_p(y),$$

$$\theta_m(x, y) = \begin{cases} \varphi_i(x) & \tau_j(y), \\ t_i(x) & \psi_j(y), \\ t_i(x) & \tau_i(y), \end{cases}$$

in virtù del teorema precedente, le due serie:

$$u_1(x, y),\ u_2(x, y), \ldots; \qquad \theta_1(x, y),\ \theta_2(x, y), \ldots$$

insieme prese costituiranno nel campo σ una serie ortogonale e chiusa, e sarà:

$$a_p = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\, u_p(x, y)\, d\,x\, d\,y = \frac{1}{\lambda_p},$$

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \theta_m(x, y)\, d\,x\, d\,y = 0.$$

Di qui avremo, conformemente al risultato del n.° 10 (paragrafo precedente), che *è sempre possibile ed in infiniti modi, determinare una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente, m_1, m_2,..., in modo che si abbia:*

$$K(x, y) = \sum_1^{m_1}{}_p \frac{\varphi_p(x)\,\psi_p(y)}{\lambda_p} + \sum_{m_1+1}^{m_2}{}_p \frac{\varphi_p(x)\,\psi_p(y)}{\lambda_p} + \cdots,$$

e che la serie al secondo membro sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale.

13. Da questo teorema segue, come corollario: (α) *due nuclei, che hanno le parti reali e le parti immaginarie sommabili insieme ai loro quadrati nel campo σ, e che hanno i medesimi autovalori reali o complessi (l'autovalore ∞ eventualmente incluso), ai quali corrispondono come autofunzioni gli elementi di due medesime serie ortogonali reali e chiuse, coincidono.*

Ciò premesso, sia:

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + i\,\lambda''_1, \qquad \lambda_2 = \lambda'_2 + i\,\lambda''_2, \ldots$$

una serie di costanti, alcune delle quali (in numero finito) possono anche coincidere tra di loro, tale che la serie $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}$ sia convergente. Alla serie λ_1,

$\lambda_2, \ldots$ si faccia corrispondere una qualsiasi coppia di funzioni ortogonali:

$$\varphi_1(x),\ \psi_1(y); \qquad \varphi_2(x), \psi_2(y); \ldots \tag{26}$$

Osserviamo che, in virtù della supposta convergenza della serie $\sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{|\lambda_\nu|^2}$, saranno pure convergenti le due serie:

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{\lambda'^2_\nu}{|\lambda_\nu|^4}, \qquad \sum_1^\infty {}_\nu \frac{\lambda_\nu''^{2}}{|\lambda_\nu|^4};$$

e quindi, in virtù del teorema dimostrato al n.º 9, abbiamo: (β) *si può determinare, ed in infiniti modi, indipendentemente dalle* (26), *una serie di numeri interi positivi e crescenti indefinitamente* $m_1, m_2, \ldots$, *in modo tale che la*

$$f(x,\, y) = \sum_1^{m_1} {}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \sum_{m_1+1}^{m_2} {}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \cdots$$

sia in tutto il campo σ convergente uniformemente in generale; la funzione $f(x, y)$, così determinata, ha per coppie di autofunzioni ortogonali quelle della serie (26) *e per corrispondenti autovalori le* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ In forza poi del precedente teorema di unicità (α), risulta che *la funzione $f(x, y)$, così determinata, è la sola funzione (di cui la parte reale e la parte immaginaria siano sommabili nel campo σ insieme ai loro quadrati), la quale abbia per coppie di autofunzioni ortogonali, corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, quelle della serie* (26), *e per autofunzioni, corrispondenti all'autovalore $\lambda = \infty$, quelle delle eventuali due serie rispettivamente complementari alle due serie:*

$$\varphi_1(x), \qquad \varphi_2(x), \ldots,$$
$$\psi_1(x), \qquad \psi_2(x), \ldots$$

§ 4.

Risoluzione dell'equazione integrale binomia.

14. Sia $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ autovalore del nucleo, in generale non simmetrico,

$$K(x,\, y) = K'(x,\, y) + i\, K''(x,\, y);$$

e siano $\varphi(x)$, $\psi(x)$ due funzioni reali e tali che si abbia:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,\, y)\, \psi(y)\, d\, y, \qquad \psi(x) = \lambda \int_a^b K(y,\, x)\, \varphi(y)\, d\, y.$$

Queste ultime ci dànno ovviamente:

$$\varphi(x) = \lambda' \int_a^b K'(x, y)\,\psi(y)\,dy - \lambda'' \int_a^b K''(x, y)\,\psi(y)\,dy,$$

$$0 = \lambda' \int_a^b K''(x, y)\,\psi(y)\,dy + \lambda'' \int_a^b K'(x, y)\,\psi(y)\,dy,$$

$$\psi(x) = \lambda' \int_a^b K'(y, x)\,\varphi(y)\,dy - \lambda'' \int_a^b K''(y, x)\,\varphi(y)\,dy,$$

$$0 = \lambda' \int_a^b K''(y, x)\,\varphi(y)\,dy + \lambda'' \int_a^b K'(y, x)\,\varphi(y)\,dy;$$

e quindi ancora per $\lambda' \neq 0$, $\lambda'' \neq 0$:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda'} \int_a^b K'(x, y)\,\psi(y)\,dy,$$

$$\varphi(x) = -\frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda''} \int_a^b K''(x, y)\,\psi(y)\,dy,$$

$$\psi(x) = \frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda'} \int_a^b K'(y, x)\,\varphi(y)\,dy,$$

$$\psi(x) = -\frac{\lambda'^2 + \lambda''^2}{\lambda''} \int_a^b K''(y, x)\,\varphi(y)\,dy;$$

per $\lambda' = 0$:

$$\int_a^b K'(x, y)\,\psi(y)\,dy = 0, \qquad \int_a^b K'(y, x)\,\varphi(y)\,dy = 0;$$

per $\lambda'' = 0$:

$$\int_a^b K''(x, y)\,\psi(y)\,dy = 0, \qquad \int_a^b K''(y, x)\,\varphi(y)\,dy = 0.$$

15. Sia $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,... la serie chiusa delle autofunzioni ortogonali, per ipotesi tutte reali, del nucleo simmetrico $H(x, y)$ (quelle corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$ incluse); e siano λ_1, λ_2,... i corrispondenti autovalori finiti, alcuni dei quali, in numero finito, possano anche essere uguali fra di loro. Sia:

$$K(x, y) = K'(x, y) + i\,K''(x, y)$$

una soluzione, reale o no, simmetrica e con le autofunzioni tutte reali (quelle corrispondenti all'eventuale autovalore $\lambda = \infty$ incluse), dell'equazione:

$$K_n(x, y) = H(x, y). \tag{27}$$

La funzione $K(x, y)$ ammetterà come autovalore μ_t una almeno delle n radici n^{esime} di λ_t (cfr. n.° 6, § 1); e per conseguenza, posto:

$$\sqrt[n]{\lambda_t} = \mu_t = \mu'_t + i\,\mu''_t, \qquad |\sqrt[n]{\lambda_t}| = \rho_t,$$

saranno (cfr. numero precedente) autovalori di $K'(x, y)$ le costanti della forma $\frac{\rho_t^2}{\mu'_t}$ ed autovalori di $K''(x, y)$ le costanti della forma $-\frac{\rho_t^2}{\mu''_t}$; sicchè le due serie:

$$\Sigma_t \frac{\mu'^2_t}{\rho_t^4}, \qquad \Sigma_t \frac{\mu''^2_t}{\rho_t^4}$$

dovranno essere convergenti, e quindi dovrà pure essere convergente la serie:

$$\Sigma_t \frac{1}{\rho_t^2}. \tag{28}$$

Viceversa, supponiamo che questa serie sia convergente. Si indichino con

$$\varphi_{j_\nu+1}(x), \quad \varphi_{j_\nu+2}(x), \ldots, \quad \varphi_{j_\nu+\eta}(x)$$

le η autofunzioni ortogonali del nucleo $H(x, y)$, corrispondenti agli η autovalori uguali a λ_ν: si indichino con

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\eta} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\eta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\eta 1} & a_{\eta 2} & \ldots & a_{\eta\eta} \end{matrix}$$

gli elementi della più generale sostituzione ortogonale di ordine η, ossia il più generale sistema di numeri a_{rs} tali che si abbia:

$$\sum_1^\eta{}_\nu\, a_{\nu r}\, a_{\nu s} = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s, \\ 0 & \text{per } r \neq s: \end{cases}$$

e si ponga:

$$\psi_{j_\nu+r}(x) = \sum_1^\eta{}_t\, a_{rt}\, \varphi_{j_\nu+t}(x).$$

Le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... costituiranno un sistema di funzioni ortogonali; e, in virtù del teorema (β), si deve poter determinare, ed in infiniti modi, indipendentemente dalle $\psi_r(x)$, una serie di numeri interi, positivi e crescenti $m_1, m_2, \ldots$, tali che la serie:

$$K(x, y) = \sum_{1}^{m_1}{}_{\nu} \frac{\psi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \sum_{m_1+1}^{m_2}{}_{\nu} \frac{\psi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \cdots \tag{29}$$

sia convergente uniformemente in generale nel solito campo σ; allora la funzione $K(x, y)$, così determinata, avrà per autofunzioni le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., corrispondenti rispettivamente agli autovalori reali o no: $\sqrt[n]{\lambda_1}$, $\sqrt[n]{\lambda_2}$, ...

Essendo n i valori di $\sqrt[n]{\lambda_\nu}$, se l (il valore $l = \infty$ incluso) è il numero delle diverse λ_ν, le possibili serie di autovalori delle differenti funzioni $K(x, y)$ saranno l^n. Per ogni serie di possibili autovalori si avranno poi generalmente varii nuclei $K(x, y)$, corrispondenti ai varii sistemi delle a_{rs} che si possono considerare. È da osservare però che non tutte le $K(x, y)$ corrispondenti a due diversi sistemi di a_{rs} saranno differenti tra di loro. Così, supposta scomposta la serie delle λ_ν in gruppi i cui elementi hanno tutti e soli il medesimo valore, nel caso, ad esempio, in cui gli autovalori di $K(x, y)$ si scelgono in modo che quelli corrispondenti agli elementi di uno dei detti gruppi abbiano lo stesso valore, si avrà sempre il medesimo nucleo $K(x, y)$, qualunque sia il sistema delle a_{rs}; infatti, in questo caso, le autofunzioni di $K(x, y)$, relative ad un medesimo autovalore, sono sempre una combinazione lineare delle autofunzioni di $H(x, y)$ relative agli autovalori di uno stesso gruppo. Lo stesso non si può ripetere negli altri casi; benchè anche qui, in generale, il numero delle funzioni $K(x, y)$ distinte è inferiore all'ordine di arbitrarietà dei coefficienti a_{rs}.

Comunque, poichè tutti i nuclei $K(x, y)$, dati dalla formula (29), hanno per autofunzioni le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., i loro nuclei reiterati di ordine n, mentre hanno per autovalori le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, avranno per autofunzioni corrispondenti le $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., ed ancora, poichè le $\psi_t(x)$, corrispondenti ad un certo gruppo g di valori delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ uguali tra di loro, sono espressioni lineari omogenee delle $\varphi_j(x)$ corrispondenti allo stesso gruppo g, i cui coefficienti coincidono con gli elementi di una sostituzione ortogonale, ne segue, in virtù del teorema di unicità (α), che tutti i nuclei reiterati di ordine n, dei nuclei dati dalla formola (29), coincideranno con $H(x, y)$.

Per altro è evidente, in forza dei teoremi dei n.[i] 6, 8 ed in forza ancora del teorema di unicità (α), che qualunque nucleo $K(x, y)$, avente le autofunzioni tutte reali ed avente per reiterato di ordine n la funzione $H(x, y)$, deve essere incluso nella formola (29).

Riepilogando si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale binomia* (27), *nell'ipotesi che le autofunzioni di* $H(x, y)$ *siano tutte reali, sia risolubile mediante funzioni simmetriche aventi le autofunzioni ortogonali tutte reali, è che la serie* (28) *sia convergente; quando questa condizione è soddisfatta, si hanno infinite di tali soluzioni, tutte contenute nella formula* (29).

16. Osserviamo che se $K(x, y)$ è una soluzione dell'equazione (27), ed $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ sono le radici n^{esime} dell'unità diverse da 1, saranno pure soluzione dell'equazione (27) le funzioni:

$$\varepsilon_2 K(x, y), \quad \varepsilon_3 K(x, y), \ldots, \quad \varepsilon_n K(x, y).$$

Osserviamo ancora che, se questa operazione si ripete sopra una qualunque di queste funzioni, si ottiene sempre la medesima serie di soluzioni:

$$K(x, y), \quad \varepsilon_2 K(x, y), \quad \varepsilon_3 K(x, y), \ldots, \quad \varepsilon_n K(x, y)$$

ordinata diversamente.

Un sistema cosiffatto di soluzioni lo diremo *ciclico*.

In virtù delle osservazioni precedenti si ha che *due soluzioni dell'equazione* (27) *appartenenti a due diversi sistemi ciclici non possono mai essere uguali*; perchè altrimenti, operando su queste due soluzioni uguali nel modo anzidetto, si otterrebbe lo stesso sistema, col quale dovrebbero allora coincidere i due sistemi ciclici supposti diversi.

Osserviamo in fine che *le soluzioni dell'equazione* (27), *date dalla formola* (29), *possono scindersi in sistemi ciclici di n soluzioni ciascuno,* i quali costituiranno tutte le possibili soluzioni dell'equazione (27) aventi autofunzioni tutte reali.

CAPITOLO II.

Equazioni integrali di secondo e di terzo grado.

§ 5.

Teoremi sulla permutabilità.

17. Rammentiamo anzitutto (*) che *se le funzioni* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *sono permutabili, saranno permutabili le loro reiterate* $p^{(m)}(x, y)$, $q^{(n)}(x, y)$; ossia *se si ha:*

$$\ddot{p}\,\ddot{q}(x, y) = \ddot{q}\,\ddot{p}(x, y),$$

si avrà:

$$\ddot{p}^{(m)}\,\ddot{q}^{(n)}(x, y) = \ddot{q}^{(n)}\,\ddot{p}^{(m)}(x, y).$$

Osserviamo poi che *se le funzioni* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *sono permutabili, varrà la formola analoga a quella del binomio di Newton:*

$$\left.\begin{aligned} \left\{ p(x, y) + q(x, y) \right\}^{(m)} = p^{(m)}(x, y) + \binom{m}{1} \ddot{p}^{(m-1)}\,\ddot{q}(x, y) + \\ + \binom{m}{2} \ddot{p}^{(m-2)}\,\ddot{q}(x, y) + \cdots + q^{(m)}(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

e l'altra:

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b \left\{ p^{(n-1)}(x, \eta) + \ddot{p}^{(n-2)}\,\ddot{q}(x, \eta) + \ddot{p}^{(n-3)}\,\ddot{q}^{(2)}(x, \eta) + \cdots + q^{(n-1)}(x, y) \right\} \\ \left\{ p(\eta, y) - q(\eta, y) \right\} d\eta = p^{(n)}(x, y) - q^{(n)}(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Rammentiamo ancora (**) che *condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni simmetriche* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *siano permutabili è che la funzione:*

$$f(x, y) = \int_a^b p(x, \eta)\, q(\eta, y)\, d\eta$$

(*) Volterra, *Questioni generali* . . . (l. c.).

(**) Lauricella, *Sopra le funzioni permutabili di 2.ª specie* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, serie 5.ª, 1.° sem. anno 1913, pp. 331-346).

risulti simmetrica; ovvero: *condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni simmetriche $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili è che esistano quattro funzioni $p'(x, y)$, $p''(x, y)$, $q'(x, y)$, $q''(x, y)$ tali che $p'(x, y)$, $q'(x, y)$ abbiano le stesse autofunzioni, $p'(x, y)$ sia ortogonale a $p''(x, y)$, $q'(x, y)$ a $q''(x, y)$, $q'(x, y)$ a $q''(x, y)$, $q'(x, y)$ a $p''(x, y)$, $p''(x, y)$ a $q''(x, y)$, e tali ancora che sia:*

$$p(x, y) = p'(x, y) + p''(x, y),$$

$$q(x, y) = q'(x, y) + q''(x, y).$$

Le autofunzioni di $f(x, y)$ sono quelle comuni a $p'(x, y)$, $q'(x, y)$.

Questo teorema equivale ancora a quest'altro: *condizione necessaria e sufficiente affinchè due funzioni simmetriche $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano permutabili è che esista una serie Ω di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$. Le autofunzioni di $f(x, y)$ sono quelle comuni a $p(x, y)$, $q(x, y)$.*

18. Converrà rammentare pure il seguente procedimento atto a determinare una serie Ω e quindi anche le funzioni $p'(x, y)$, $p''(x, y)$, $q'(x, y)$, $q''(x, y)$.

Si indichi con $f(x, y)$ il risultato della composizione di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$, con P'' l'insieme delle autofunzioni $\varphi_\lambda(x)$ di $p(x, y)$ tali che

$$\int_a^b f(x, y)\, \varphi_\lambda(x)\, d\,x = 0,$$

con Π'' il corrispondente insieme di autovalori, con Q'' l'insieme delle autofunzioni $\psi_\mu(x)$ di $q(x, y)$ tali che

$$\int_a^b f(x, y)\, \psi_\mu(x)\, d\,x = 0,$$

con X'' il corrispondente insieme di autovalori. Si formino due funzioni simmetriche aventi rispettivamente una per autofunzioni le funzioni dell'insieme P'' e per corrispondenti autovalori quelli dell'insieme Π'', un'altra per autofunzioni le funzioni dell'insieme Q'' e per corrispondenti autovalori quelli dell'insieme X''. Le funzioni, così formate, sono appunto le richieste funzioni $p''(x, y)$, $q''(x, y)$.

Siano $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... le autofunzioni di $p(x, y)$ non comuni a $p''(x, y)$, e p_1, p_2, ... i corrispondenti autovalori; e siano $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... le autofunzioni di $q(x, y)$ non comuni a $q''(x, y)$, e q_1, q_2, ... i corrispondenti autovalori. Supponiamo, in generale, che sia:

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_{t_1} = p'_1, \qquad p_{t_1+1} = p_{t_1+2} = \cdots = p_{t_1+t_2} = p'_2, \ldots,$$

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_{\tau_1} = q'_1, \qquad q_{\tau_1+1} = q_{\tau_1+2} = \cdots = q_{\tau_1+\tau_2} = q'_2, \ldots;$$

e poniamo:

$$H_1(x, y) = \frac{1}{p'_1} \sum_1^{t_1}{}_\mu \varphi_\mu(x) \varphi_\mu(y), \qquad H_2(x, y) = \frac{1}{p'_2} \sum_{t_1+1}^{t_1+t_2}{}_\mu \varphi_\mu(x) \varphi_\mu(y), \ldots;$$

$$K_1(x, y) = \frac{1}{q'_1} \sum_1^{\tau_1}{}_\mu \psi_\mu(x) \psi_\mu(y), \qquad K_2(x, y) = \frac{1}{q'_2} \sum_{\tau_1+1}^{\tau_1+\tau_2}{}_\mu \psi_\mu(x) \psi_\mu(y), \ldots;$$

$$\ddot{H}_r \ddot{K}_s(x, y) = f_{rs}(x, y).$$

L'insieme F delle autofunzioni di tutte le diverse $f_{rs}(x, y)$ è appunto l'insieme delle autofunzioni comuni a $p(x, y)$ e a $q(x, y)$, ovvero l'insieme delle autofunzioni appartenenti ai tre nuclei $p'(x, y)$, $q'(x, y)$, $f(x, y)$; e si avrà:

$$\Omega = F + P'' + Q''.$$

§ 6.

Risoluzione dell'equazione integrale di 2.° grado.

19. Proponiamoci di risolvere l'equazione integrale di 2.° grado:

$$K^{(2)}(x, y) + \ddot{p}\, \ddot{K}(x, y) + q(x, y) = 0, \tag{32}$$

mediante nuclei simmetrici $K(x, y)$ aventi autofunzioni tutte reali, nell'ipotesi che $p(x, y)$ *e* $q(x, y)$ *siano funzioni simmetriche ad autofunzioni tutte reali.*

Supposta l'esistenza di una soluzione $K_1(x, y)$ simmetrica dell'equazione (32), ossia se si ha:

$$K_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p}\, \ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) = 0, \tag{32'}$$

si avrà:

$$\ddot{p}\, K_1(x, y) = -K_1^{(2)}(x, y) - q(x, y) = f(x, y),$$

con $f(x, y)$ funzione simmetrica come le funzioni $K_1^{(2)}(x, y)$ e $q(x, y)$ che la compongono, quindi si ha: *qualunque soluzione simmetrica dell'equazione* (32) *è permutabile con la funzione* $p(x, y)$.

In virtù della dimostrata permutabilità di $p(x, y)$ e di $K_1(x, y)$, segue che $p(x, y)$ è permutabile con la funzione

$$q(x, y) = -K_1^{(2)}(x, y) - \ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y),$$

ossia *se l'equazione* (32′) *ammette una soluzione simmetrica,* $p(x, y)$ *e* $q(x, y)$ *sono permutabili.*

Notiamo ancora che *se l'equazione* (32′) *ammette una soluzione* $K_1(x, y)$, *ammetterà pure l'altra soluzione:*

$$K_2(x, y) = -p(x, y) - K_1(x, y). \qquad (33)$$

Infatti si ha:

$$K_2^{(2)}(x, y) + \ddot{p}\,\ddot{K}_2(x, y) + q(x, y) = K_1^{(2)}(x, y) + 2\,\ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y) + p^{(2)}(x, y) -$$

$$- \ddot{p}\left\{ \ddot{p}(x, y) + K_1(x, y) \right\} + q(x, y) = K_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) = 0.$$

Due soluzioni cosiffatte $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ dell'equazione (32) saranno dette *cicliche.*

È evidente, in virtù della permutabilità di $K_1(x, y)$ e di $p(x, y)$, che *due soluzioni cicliche* $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ *dell'equazione* (32) *sono permutabili fra di loro.*

Osserviamo poi che *se* $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ *sono soluzioni cicliche dell'equazione* (32), *si ha:*

$$\ddot{K}_1\,\ddot{K}_2(x, y) = q(x, y). \qquad (34)$$

Infatti, valendosi della (32′), si ottiene:

$$\ddot{K}_1\,\ddot{K}_2(x, y) = -\int_a^b K_1(x, \eta)\left\{ p(\eta, y) + K_1(\eta, y) \right\} d\eta = -$$

$$- K_1^{(2)}(x, y) - \ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y) = q(x, y),$$

c. d. d.

Osserviamo infine che, se si suppone che le funzioni simmetriche $p(x, y)$ e $K_1(x, y)$ *siano nuclei ad autofunzioni tutte reali,* in virtù della loro permutabilità, esisterà una serie Ω di funzioni ortogonali tutte reali, contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $K_1(x, y)$; ed allora, in forza della (33), la serie Ω conterrà pure le autofunzioni di $K_2(x, y)$, ed in forza della (34) conterrà ancora quelle della funzione $q(x, y)$. Adunque si ha: *per ogni sistema ciclico $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ di soluzioni dell'equazione* (32) *esiste un sistema Ω (almeno) di funzioni ortogonali, contenente le autofunzioni di $p(x, y)$, $q(x, y)$, $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$.*

20. Volendo ora risolvere l'equazione (32) col metodo di LAGRANGE, dovremo cercare di esprimere la differenza $K_1(x, y) - K_2(x, y)$ di due soluzioni cicliche mediante gli elementi noti $p(x, y)$, $q(x, y)$.

A tale uopo notiamo anzitutto che si ha, in forza delle (33), (34),

$$\left\{ K_1(x, y) - K_2(x, y) \right\}^2 = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y); \tag{35}$$

e che le autofunzioni dell'espressione:

$$\Delta(x, y) = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y),$$

che potremo chiamare *discriminante* dell'equazione (32), sono contenute certamente nella serie Ω; e poichè l'espressione $K_1(x, y) - K_2(x, y)$ è una soluzione ad autofunzioni tutte reali dell'equazione binomia di 2.° grado (35), indicando con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ la serie degli autovalori del discriminante $\Delta(x, y)$, risulta dalla teoria delle equazioni integrali binomie che *la serie* $\Sigma_\nu \frac{1}{|\Delta_\nu|}$ *deve essere convergente.*

Da ciò che precede si può concludere: *se l'equazione* (32), *nella quale $p(x, y)$ e $q(x, y)$ sono funzioni simmetriche aventi le autofunzioni reali, ammette una soluzione simmetrica ad autofunzioni reali, le funzioni $p(x, y)$ e $q(x, y)$ devono essere permutabili e la serie $\Sigma_\nu \frac{1}{|\Delta_\nu|}$, formata con gli autovalori del discriminante $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$, deve essere convergente.*

21. Viceversa, *si supponga che $p(x, y)$ e $q(x, y)$ siano permutabili e che la serie $\Sigma_\nu \frac{1}{|\Delta_\nu|}$, formata con gli autovalori del discriminante $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$, sia convergente.*

Osserviamo anzitutto che, essendo $p(x, y)$ e $q(x, y)$ funzioni permutabili, esisterà una serie Ω di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $p(x, y)$ e di $q(x, y)$; sicchè le autofunzioni di $p^2(x, y) - 4q(x, y)$ saranno pure contenute in Ω; e poichè la serie $\sum_\nu \frac{1}{|\Delta_\nu|}$ è convergente, l'equazione binomia:

$$H^{(2)}(x, y) = p^{(2)}(x, y) - 4\, q(x, y) \tag{35'}$$

ammetterà infinite soluzioni aventi le stesse autofunzioni del discriminante $\Delta(x, y)$, ossia aventi le autofunzioni contenute in Ω. Indicando con $H(x, y)$ una qualsiasi di tali soluzioni, e ponendo:

$$K_1(x, y) + K_2(x, y) = -p(x\, y),$$
$$K_1(x, y) - K_2(x, y) = H(x\, y),$$

risulterà:

$$K_1(x, y) = \frac{-p(x, y) + H(x, y)}{2};$$

e *la funzione* $K_1(x, y)$, così determinata, *soddisferà effettivamente all'equazione* (32).

Infatti le funzioni $p(x, y)$, $H(x, y)$ sono permutabili, per il fatto che le loro autofunzioni sono contenute nella medesima serie Ω; e quindi, tenendo conto della (35'), si avrà:

$$K_1^{(2)}(x, y) + \ddot{p}\, \ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) = \frac{1}{4}\left\{ -p(x, y) + H(x, y) \right\}^{(2)} +$$
$$+ \frac{1}{2}\ddot{p}\left\{ -\ddot{p}(x, y) + \ddot{H}(x, y) \right\} + q(x, y) =$$
$$= \frac{1}{4}p^{(2)}(x, y) + \frac{1}{4}H^{(2)}(x, y) - \frac{1}{2}\ddot{p}\, \ddot{H}(x, y) - \frac{1}{2}p^{(2)}(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{2}\ddot{p}\, \ddot{H}(x, y) + q(x, y) =$$
$$= \frac{1}{4}\left\{ H^{(2)}(x, y) - p^{(2)}(x, y) + 4\, q(x\, y) \right\} = 0,$$

c. d. d.

Riepilogando si ha dunque: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione* (32) *ammetta soluzioni ad autofunzioni tutte reali è che le funzioni* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *siano permutabili e che la serie* $\sum_\nu \frac{1}{|\Delta_\nu|}$, *formata con gli autovalori* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ *del suo discriminante* $p^{(2)}(x, y) - 4\, q(x, y)$, *sia convergente. Le infinite soluzioni ad autofunzioni tutte reali dell'equazione* (32) *possono ag-*

grupparsi in coppie di soluzioni cicliche. Per ogni coppia di soluzioni cicliche dell'equazione (32) *esiste un sistema almeno di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di questa coppia di soluzioni, di* $p(x, y)$ *e di* $q(x, y)$.

Da ciò che precede si ha ancora: *date ad arbitrio due funzioni simmetriche ad autofunzioni tutte reali* $p(x, y)$, $q(x, y)$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano due funzioni simmetriche ad autofunzioni tutte reali, che abbiano per somma* $p(x, y)$ *e per risultato della loro composizione* $q(x, y)$, *è che le funzioni* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *siano permutabili e che la serie delle inverse dei moduli degli autovalori del discriminante* $p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$ *sia convergente. Quando queste condizioni sono soddisfatte, esistono infinite coppie di funzioni cosiffatte.*

22. Mostriamo ora come si può procedere alla formazione delle autofunzioni e dei corrispondenti autovalori delle soluzioni dell'equazione (32).

Si applichi alle funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ il metodo rammentato al n.° 18 (§ 5) per la ricerca di una serie Ω di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(y\ x)$ e di $q(x, y)$; e sia:

$$\omega_1(x, y), \qquad \omega_2(x, y), \ldots \tag{36}$$

una tale serie. Indichiamo con $p_1, p_2, \ldots$ la corrispondente serie di autovalori della funzione $p(x, y)$, e con $q_1, q_2, \ldots$ la corrispondente serie di autovalori della funzione $q(x, y)$, con l'avvertenza che alcune delle p_r e alcune delle q_s possono essere infinite, senza che ciò possa mai avvenire contemporaneamente per una p_r e una p_s aventi indici uguali. Allora il discriminante $\Delta(x, y) = p^{(2)}(x, y) - 4q(x, y)$ avrà per autofunzioni le funzioni della serie (36) e per autovalori rispettivamente:

$$\frac{1}{\frac{1}{p_1^2} - \frac{4}{q_1}}, \quad \frac{1}{\frac{1}{p_2^2} - \frac{4}{q_2}}, \ldots;$$

sicchè qualunque funzione avente per autofunzioni le funzioni della serie (36) e per autovalori rispettivamente:

$$\frac{2}{-\frac{1}{p_1} \pm \sqrt{\frac{1}{p_1^2} - \frac{4}{q_1}}}, \quad \frac{2}{-\frac{1}{p_2} \pm \sqrt{\frac{1}{p_2^2} - \frac{4}{q_2}}}, \ldots \tag{37}$$

sarà soluzione dell'equazione (32).

Le infinite soluzioni simmetriche ad autovalori tutti reali dell'equazione (32) si otterranno considerando i varii sistemi Ω di funzioni ortogonali, che il metodo rammentato ci darà, e combinando in tutti i modi possibili, per ognuno di tali sistemi, le coppie di autovalori della serie (37).

§ 7.

Risoluzione dell'equazione integrale di 3.° grado.

23. Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione integrale di 3.° grado e, per semplicità, si consideri l'equazione:

$$K^{(3)}(x, y) + \dot{p}\,\ddot{K}(x, y) + q(x, y) = 0, \tag{38}$$

nella quale le funzioni $p(x, y)$, $q(x, y)$ siano simmetriche e ad autofunzioni tutte reali.

Anzitutto si può osservare, anche qui, che *qualunque soluzione simmetrica* $K_1(x, y)$ *dell'equazione* (38) *è permutabile con la funzione* $p(x, y)$; e quindi ancora che *se l'equazione* (38) *ammette una soluzione simmetrica, le funzioni* $p(x, y)$ *e* $q(x, y)$ *devono essere permutabili.*

Ciò premesso, sia $K_1(x, y)$ una soluzione simmetrica dell'equazione (38), e sia $K_2(x, y)$ una soluzione simmetrica dell'equazione di 2.° grado:

$$K^{(2)}(x, y) + \ddot{K}_1\,\ddot{K}(x, y) + \left\{ p(x, y) + K_1^{(2)}(x, y) \right\} = 0. \tag{39}$$

La funzione $K_2(x, y)$ sarà certamente permutabile con $K_1(x, y)$; e per conseguenza, in virtù della (39) stessa, permutabile con $p(x, y)$; di modo che si può scrivere:

$$\begin{aligned} 0 = &\left\{ \ddot{K}_1 - \ddot{K}_2 \right\} \left[\ddot{K}_2^{(2)}(x, y) + \ddot{K}_1\,\ddot{K}_2(x, y) + \left\{ \ddot{p}(x, y) + \ddot{K}_1^{(2)}(x, y) \right\} \right] = \\ = &K_1^{(3)}(x, y) - K_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p}\left\{ \ddot{K}_1(x, y) - \ddot{K}_2(x, y) \right\} = \\ = &K_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y) + q(x, y) - \\ &\qquad - \left[K_2^{(3)}(x, y) + \ddot{p}\,\ddot{K}_2(x, y) + q(x, y) \right], \end{aligned}$$

dalla quale risulta che la funzione $K_2(x, y)$ verifica l'equazione (38).

Siano $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ soluzioni cicliche dell'equazione di 2.° grado (39); allora saranno soluzioni dell'equazione (38) le funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$, le quali saranno ancora due a due permutabili; e, in virtù della (39), si avrà:

$$\left.\begin{aligned} &K_1(x, y) + K_2(x, y) + K_3(x, y) = 0, \\ &\ddot{K}_2\,\ddot{K}_3(x, y) = p(x, y) + K_1^{(2)}(x, y); \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

e quindi:

$$\ddot{K}_1\,\ddot{K}_2\,\ddot{K}_3(x, y) = K_1^{(3)}(x, y) + \ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y) = -q(x, y). \tag{41}$$

Tre soluzioni cosiffatte $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ dell'equazione (38) si diranno soluzioni *cicliche.*

Osserviamo che, in virtù della teoria dell'equazione integrale di 2.° grado, esisterà un sistema Ω di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ e di $p(x, y) + K_1^{(2)}(x, y)$; sicchè il sistema Ω conterrà certamente le autofunzioni di

$$p(x, y) = -K_2^{(2)}(x, y) - \ddot{K}_1\,\ddot{K}_2(x, y) - K_1^{(2)}(x, y),$$

e conseguentemente conterrà pure le autofunzioni di

$$q(x, y) = -K_1^{(3)}(x, y) - \ddot{p}\,\ddot{K}_1(x, y).$$

Adunque *se l'equazione* (38) *ammette un sistema di soluzioni cicliche* $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$, *esisterà un sistema* Ω *(almeno) di funzioni ortogonali contenente le autofunzioni di* $p(x, y)$, $q(x, y)$, $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$.

24. Volendo risolvere l'equazione integrale (38) valendosi del metodo di Lagrange, indichiamo con ε una radice cubica primitiva dell'unità, e cerchiamo di esprimere le funzioni:

$$\left.\begin{aligned} &H_1(x, y) = K_1(x, y) + \varepsilon\, K_2(x, y) + \varepsilon^2 K_3(x, y), \\ &H_2(x, y) = K_1(x, y) + \varepsilon^2 K_2(x, y) + \varepsilon\, K_3(x, y) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

mediante gli elementi analitici relativi alle funzioni note $p(x, y)$, $q(x, y)$.

A tal uopo si osservi che le funzioni $H_1(x, y)$, $H_2(x, y)$ sono permutabili e che, facendo uso delle (40), (41) ed eseguendo calcoli perfettamente analoghi a quelli noti dell'algebra, si ottiene:

$$H_1^{(3)}(x, y) + H_2^{(3)}(x, y) = -27\, q(x, y), \tag{43}$$

$$\ddot{H}_1\,\ddot{H}_2(x, y) = -3\, p(x, y); \tag{44}$$

e per conseguenza:

$$\ddot{H}_1^{(3)}\,\ddot{H}_2^{(3)}(x,\ y) = -27\,p^{(3)}(x,\ y). \tag{44'}$$

Si osservi ancora che la serie Ω contiene, in virtù delle (42), le autofunzioni di $H_1(x,\ y)$ e di $H_2(x,\ y)$; sicchè le funzioni $H_1^{(3)}(x,\ y)$, $H_2^{(3)}(x,\ y)$ costituiscono, in forza delle (43), (44)', un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione di 2.° grado (*risolvente di Lagrange*):

$$Z^{(2)}(x,\ y) + 27\,\ddot{q}\,\ddot{Z}(x,\ y) - 27\,p^{(3)}(x,\ y) = 0. \tag{45}$$

25. Ciò posto, indichiamo con

$$\Omega \equiv \omega_1(x), \qquad \omega_2(x), \ldots$$

una serie di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di $p(x,\ y)$, $q(x,\ y)$, $K_1(x,\ y)$, $K_2(x,\ y)$, $K_3(x\ y)$, e con

$$\begin{array}{ll} p_1, & p_2, \ldots, \\ q_1, & q_2, \ldots, \\ k'_1, & k'_2, \ldots, \\ k''_1, & k''_2, \ldots, \\ k'''_1, & k'''_2, \ldots \end{array}$$

le corrispondenti serie di autofunzioni, potendo alcune di queste autofunzioni essere infinite.

In virtù delle (42), le funzioni $H_1(x,\ y)$, $H_2(x,\ y)$ avranno per autofunzioni le funzioni della serie Ω; sicchè, indicando con

$$\begin{array}{ll} h'_1, & h'_2, \ldots, \\ h''_1, & h''_2, \ldots \end{array}$$

le corrispondenti serie di autovalori e tenendo conto delle (45), (44) e delle (40), (42), risulterà:

$$\frac{1}{3\,h'_t} = \begin{matrix}1\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2\end{matrix}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2} + \frac{1}{27\,p_t^3}}}, \quad \frac{1}{3\,h''_t} = \begin{matrix}1\\ \varepsilon^2\\ \varepsilon\end{matrix}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2} + \frac{1}{27\,p_t^3}}},$$

$$\frac{1}{k'_t} + \frac{1}{k''_t} + \frac{1}{k'''_t} = 0, \quad \frac{1}{k'_t} + \frac{\varepsilon}{k''_t} + \frac{\varepsilon^2}{k'''_t} = \frac{1}{h'_t}, \quad \frac{1}{k'_t} + \frac{\varepsilon^2}{k''_t} + \frac{\varepsilon}{k'''_t} = \frac{1}{h''_t};$$

e quindi:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{k'_t} &= \substack{1\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2}+\frac{1}{27\,p_t^3}}} + \substack{1\\ \varepsilon^2\\ \varepsilon}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2}+\frac{1}{27\,p_t^3}}}\,,\\
\frac{1}{k''_t} &= \substack{\varepsilon\\ \varepsilon^2\\ 1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2}+\frac{1}{27\,p_t^3}}} + \substack{\varepsilon^2\\ \varepsilon\\ 1}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2}+\frac{1}{27\,p_t^3}}}\,,\\
\frac{1}{k'''_t} &= \substack{\varepsilon^2\\ 1\\ \varepsilon}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \pm \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2}+\frac{1}{27\,p_t^3}}} + \substack{\varepsilon\\ 1\\ \varepsilon^2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2\,q_t} \mp \sqrt{\frac{1}{4\,q_t^2}+\frac{1}{27\,p_t^3}}}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{46}
$$

In queste formole i segni $\pm$, $\mp$ stanno ad indicare che se il primo termine si fa precedere dal segno $+$, il secondo dovrà farsi precedere dal segno $-$, e viceversa; i segni $\substack{1\\ \varepsilon\\ \varepsilon^2}$, $\substack{1\\ \varepsilon^2\\ \varepsilon}$ stanno poi ad indicare che, se nell'espressione di $\frac{1}{k'_t}$ il primo termine si fa precedere da uno dei segni 1, ε, ε^2, il secondo termine dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni 1, ε^2, ε, il primo termine dell'espressione di $\frac{1}{k''_t}$ dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni ε, ε^2, 1, il secondo rispettivamente da uno dei segni ε^2, ε, 1, il primo termine dell'espressione di $\frac{1}{k'''_t}$ dovrà farsi precedere rispettivamente da uno dei segni ε^2, 1, ε, il secondo rispettivamente da uno dei segni ε, 1, ε^2.

Finalmente, dal fatto che le funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ sono sommabili insieme ai loro quadrati in tutto il campo

$$\sigma = \left\{ a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b \right\},$$

segue che *la serie:*

$$\Sigma_t \left(\frac{1}{|k'_t|^2} + \frac{1}{|k''_t|^2} + \frac{1}{|k'''_t|^2} \right), \tag{47}$$

formata con le espressioni (46), *deve essere convergente.*

Conviene osservare che la serie (47) è indipendente dalle diverse combinazioni dei segni $+$ e $-$, 1, ε ed ε^2, che si possono fare nelle espressioni (46).

26. Reciprocamente, *si supponga che le funzioni* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *siano permutabili e che, costruita una serie* Ω *di funzioni ortogonali contenente tutte e sole le autofunzioni di* $p(x, y)$, $q(x, y)$, *la serie* (47), *costruita con i corrispondenti autovalori di* $p(x, y)$ *e di* $q(x, y)$, *sia convergente.* Si può costruire, ed in infiniti modi, una terna di funzioni $K_1(x, y,)$, $K_2(x, y)$, $K_3(x, y)$ avente per autofunzioni le funzioni $\omega_t(x)$ della serie Ω e per corrispondenti autovalori rispettivamente i valori k'_t, k''_t, k'''_t, dati dalle formole (46), accoppiate nel modo anzidetto; e si verifica facilmente che questa terna di funzioni, così ottenuta, costituisce appunto un sistema di soluzioni cicliche dell'equazione (38).

Adunque, riassumendo, si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale di 3.º grado* (38) *abbia soluzioni cicliche, ad autofunzioni tutte reali e sommabili nel campo* σ *insieme ai loro quadrati, è che le funzioni* $p(x, y)$, $q(x, y)$ *siano permutabili e che, per una serie* Ω *di funzioni ortogonali, contenente tutte e sole le autofunzioni di* $p(x, y)$ *e di* $q(x, y)$, *la corrispondente serie* (47) *sia convergente. Per ciascuna delle eventuali serie* Ω, *per le quali queste condizioni sono soddisfatte, si hanno infiniti sistemi di soluzioni cicliche dell'equazione* (38), *dovuti a tutte le possibili combinazioni delle terne di valori di* k'_t, k''_t, k'''_t.

(Dopo che questa Memoria era stata presentata, la Scienza ebbe a sopportare la grave perdita dell'Autore, Prof. Lauricella, morto dopo brevissima malattia nel gennajo scorso. — La revisione delle bozze di stampa fu gentilmente assunta dal sig. Prof. Lucio Silla, a Roma).