

Sulle sestiche di contatto alla superficie di KUMMER.

(Memoria VII di ERNESTO PASCAL, a Pavia.)

Questa Memoria fa seguito a quella pubblicata in questo stesso Giornale *Sull'equazione razionale della superficie di KUMMER*.

Assumendo per coordinate spaziali le quattro funzioni iperellittiche Σ pari di 1.^a specie, non solo la superficie di KUMMER acquista un'equazione *razionale*, cioè tale che i coefficienti sono invarianti razionali della sestica binaria fondamentale, ma della stessa proprietà godono anche le sestiche di contatto alla superficie, cioè le superficie di 6.^o ordine che *toccano* quella di KUMMER lungo una curva di 12.^{mo} ordine.

Lo scopo di questo lavoro è la ricerca dei varii coefficienti invarianti dell'equazione delle sestiche, e propriamente è il mostrare con quali artifizii si può ricondurre il calcolo di tali invarianti alle formole fondamentali stabilite nella Memoria VI.

L'equazione della superficie di KUMMER, e quella di queste superficie sestiche, non interpretate geometricamente, ma considerate dal solo punto di vista analitico delle funzioni iperellittiche, corrispondono non ad altro che alle *due uniche relazioni razionali* esistenti fra le cinque funzioni Σ , e con ciò le Memorie VI e VII vengono ad essere un completamento della Memoria V, in cui si sono separatamente studiate le Σ di genere 2.

Pavia, febbraio 1891.

§ 1. Corrispondenza fra la superficie di Riemann
e la superficie di Kummer.

Abbiamo visto nelle Memorie precedenti (*) come mediante una coppia di punti $x' x''$ dati sulla superficie di RIEMANN, si possano costruire le quattro funzioni X, X_2, X_3, X_4 che si possono poi a lor volta prendere come le coordinate omogenee di un punto dello spazio, e allora saranno propriamente le coordinate di un punto di quella speciale superficie del 4.º ordine che si chiama la superficie di KUMMER (**).

Abbiamo dunque una corrispondenza fra le coppie di punti della superficie di RIEMANN e i punti della superficie di KUMMER (***).

Studiamo di che natura è questa corrispondenza. È chiaro in primo punto che ad ogni coppia $x' x''$ corrisponde una sola quaterna X . Viceversa data una quaterna X è facile vedere che le formole che definiscono le X si possono risolvere rispetto a

$$x', x''_1, \quad (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1), \quad x'_2 x''_2, \quad \sqrt{f(x') f(x'')},$$

e allora daranno valori determinati per queste quantità, salvochè resta però sempre l'indeterminazione del segno dei radicali $\sqrt{f(x')}, \sqrt{f(x'')}$ i quali potranno prendersi con due segni diversi in modo però che il loro prodotto abbia sempre quel segno che risulta dalla risoluzione. In altri termini ad ogni punto della superficie di KUMMER vengono così sempre a corrispondere due coppie di punti di quella di RIEMANN, cioè o la coppia:

$$(x', \sqrt{f(x')}; \quad x'', \sqrt{f(x'')}),$$

o l'altra conjugata:

$$(x', -\sqrt{f(x')}; \quad x'', -\sqrt{f(x'')}).$$

Supponiamo ora che i due punti $x' x''$ di una coppia coincidano; allora le X diventano tutte doppiamente zero (****); quindi i loro rapporti saranno

(*) Memoria V. § 8.

(**) Memoria VI.

(***) KLEIN, Lezioni, 1887. — BURKHARDT, Math. Annalen, Bd, 35, § 21.

(****) È indispensabile notare qui che noi intendiamo la coordinata X_4 espressa colla formola $X_4 = \sqrt{f(x')} \sqrt{f(x'')} - a_{x'}^3 a_{x''}^3$ e non col segno + come si trova espressa nel § 3

le coordinate di un punto determinato della superficie di KUMMER. Se invece i due punti $x' x''$ sono coniugati, allora la X_4 è diversa da zero, mentre le altre tre X continuano ad essere doppiamente zero.

Possiamo concludere dunque che a tutte le coppie di punti coniugati corrisponde sulla superficie di KUMMER un unico punto, cioè il punto $X_1 = X_2 = X_3 = 0$. Questo punto è evidentemente un punto *doppio* della superficie, perchè dall'equazione della superficie di KUMMER (vedi Mem. VI) risulta che in essa le coordinate X_1, X_2, X_3 non entrano linearmente, ma almeno a secondo grado.

§ 2. Corrispondenza fra il parallelepipedo degli integrali di 1.^a specie w e la superficie di Kummer.

Teniamo presenti le considerazioni esposte nel § 1 della Memoria V. Ivi si è supposto diviso tutto lo spazio a quattro dimensioni in una serie di parallelepipedi congruenti fra loro. Ogni punto dello spazio corrisponde ad un certo sistema di valori pei due integrali di 1.^a specie w_1, w_2 . *A meno di multipli dei periodi ω* , tutti i valori delle w possono essere rappresentati da un punto del *primo* parallelepipedo che si chiama il parallelepipedo iniziale.

Ad ogni coppia di punti $x' x''$ sulla superficie di RIEMANN corrisponde uno e un solo punto del parallelepipedo iniziale, e viceversa ad ogni punto di questo corrisponde sempre una coppia di punti $x' x''$; però a tutte le coppie di punti coniugati corrisponde il solo punto origine del parallelepipedo, e viceversa al punto origine ($w_1 = 0, w_2 = 0$) corrispondono solo tutte le coppie di punti coniugati.

Ora è facile studiare la corrispondenza fra il parallelepipedo delle w e la superficie di KUMMER.

Ad ogni punto del parallelepipedo iniziale (che non sia un vertice) corrisponde sempre una coppia di punti (x) , e quindi *un* punto della superficie di KUMMER. Al vertice del parallelepipedo iniziale corrispondono tutte le coppie

della Memoria VI. Per trovare l'equazione della superficie di KUMMER corrispondente a questo caso basta semplicemente mutare il segno di X_4 nella equazione (b) del § 3 (Mem. VI).

Ponendo $x' = x, y = x''$, dove con x'' si intende il coniugato di x' , si ha:

$$X_4 = -(\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + a_x^2 a_y^2),$$

cioè questa X_4 salvo nel segno corrisponde anche esattamente a quella adoperata e studiata nella Mem. V (§ 13).

di punti coniugati (x), e quindi il solo punto origine della superficie di KUMMER, cioè il nodo ($X_1 = 0 \ X_2 = 0 \ X_3 = 0$).

Viceversa ad ogni punto della superficie di KUMMER corrispondono *due* punti del parallelepipedo delle w .

Propriamente se w è uno dei punti corrispondenti, l'altro sarà quello che nel parallelepipedo iniziale è congruente al punto $-w$, il quale ultimo punto sta naturalmente fuori del parallelepipedo.

La corrispondenza dunque fra il parallelepipedo delle w e la superficie di KUMMER è una corrispondenza (1, 2); perciò possiamo asserire che le coordinate dei punti della superficie di KUMMER sono funzioni monodrome delle w (come si sa), e viceversa le w sono funzioni bidrome dei punti della superficie di KUMMER, cioè, in altri termini, le w sulla superficie di KUMMER sono funzioni a due valori.

Immaginiamo dunque una *doppia* superficie di KUMMER, cioè due superficie di KUMMER eguali sovrapposte l'una all'altra; allora sul complesso di queste due superficie le w saranno funzioni monodrome.

§ 3. Le funzioni w distese sulla superficie di Kummer.

Abbiamo detto che sopra una *doppia* superficie di KUMMER gli integrali w sono funzioni monodrome. Vediamo ora se le w sono funzioni diramate sulla superficie di KUMMER; cioè se vi sono punti della superficie di KUMMER attorno cui i due valori delle w si succedono fra loro in ciclo, o anche punti in cui le due falde della supposta doppia superficie di KUMMER si debbono immaginare connesse fra loro circolarmente.

Tali punti di diramazione dovranno corrispondere a quelli in cui i due valori di w vengono a coincidere; ora, poichè tali due valori non differiscono, come si è visto, che pel segno (a meno di multipli interi di periodi), così è chiaro che i punti di diramazione saranno quelli corrispondenti al punto $w = 0$, cioè ai vertici del parallelepipedo iniziale delle w . Come si sa, tali vertici corrispondono sulla superficie di KUMMER all'unico punto $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, cioè al vertice che nel tetraedro delle X è opposto al piano $X_4 = 0$. Dunque solo tal punto potrebbe essere sulla superficie di KUMMER un punto di diramazione.

Però noi già sappiamo che esso è un punto *doppio* per la superficie di KUMMER; dal che si deduce che corrisponde a due punti di diramazione riuniti

insieme; dunque girando sulla superficie di KUMMER intorno a tal punto doppio, le funzioni *bidrome* w non potranno che ritornare in loro stesse, onde effettivamente possiamo concludere il teorema importantissimo (*):

« Le w sono sulla superficie di KUMMER funzioni bidrome, ma non diramate. La stessa proprietà si verifica naturalmente per ogni funzione *monodroma* delle w . »

In particolare quindi possiamo asserire che le funzioni σ , essendo funzioni monodrome delle w , sono funzioni non diramate sulla superficie di KUMMER, e così anche la funzione Σ_5 che è l'unica funzione iperellittica dispari di 1.^a specie (**).

§ 4. Interpretazioni geometriche dei risultati precedenti.

Abbiamo già introdotta nei paragrafi precedenti, una *doppia* superficie di KUMMER per fare che su di essa le w si rappresentino monodromicamente. Per definire questa sovrapposizione della superficie con sè stessa noi possiamo, anzichè usare le w , prendere una qualunque funzione monodroma delle w ; prendiamo per es. una funzione σ .

È facile dimostrare che il quadrato di una σ dispari si esprime linearmente mediante $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$, mentre il quadrato di una σ pari si esprime linearmente mediante $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$.

Quindi eguagliato a zero un tal quadrato, rappresenterà nello spazio della superficie di KUMMER, un piano. Si può mostrare che tal piano ha però una notevole posizione rispetto alla superficie.

Infatti essendo σ una funzione *non diramata* sulla superficie, si ha che i punti della superficie in cui essa è zero non sono punti di diramazione, e propriamente sono tutti punti zero di 1.^o ordine; onde per σ^2 saranno punti zero di 2.^o ordine, cioè ciascuno di quei punti conterà come una *doppia* intersezione del piano colla superficie e quindi, il piano sarà tangente alla superficie lungo tutti i punti in cui la taglia, cioè si ha un *piano di contatto* della superficie.

Essendo la superficie di KUMMER una superficie di 4.^o ordine, l'intersezione del piano di contatto sarà una *conica doppia*, e tenendo presente che,

(*) KLEIN, Lezioni, 1887.

(**) Memoria V, § 14.

come si è detto avanti, il quadrato di una σ dispari non contiene la coordinata Σ_4 , mentre la contiene il quadrato di una σ pari, si ricava infine il noto teorema:

« I quadrati delle sei σ dispari rappresentano, eguagliati a zero, sei coniche sulla superficie di KUMMER passanti pel punto origine delle coordinate « (nodo); i quadrati delle dieci σ pari rappresentano, eguagliati a zero, dieci « coniche non passanti per il nodo (*). »

Una considerazione perfettamente analoga si può fare prendendo a fondamento la funzione Jacobiana Σ_5 di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente.

Il quadrato di Σ_5 sarà una funzione pari e quindi si esprimerà razionalmente mediante le quattro funzioni pari Σ ; vedremo che si esprimerà con una funzione di 6.° grado nelle Σ , e quindi allora, ripetendo le stesse considerazioni di sopra, si ricava che essa, eguagliata a zero, rappresenterà una superficie di 6.° ordine di contatto a quella di KUMMER; e poichè poi nella sua rappresentazione analitica c'entra, come si sa (**), un parametro arbitrario t , così si ha tutto una serie di superficie sestiche di contatto (***).

§ 5. Costruzione dell'equazione della serie di sestiche di contatto.

La funzione dispari X_5 è (****):

$$X_5 = a_t \left\{ a_x^4 a_{x'} \sqrt{f(x'')} - a_{x'}^4 a_x \sqrt{f(x')} \right\} (x' x'')^5.$$

Elevando a quadrato, possiamo scrivere (aggiungendo e togliendo un certo termine):

$$\begin{aligned} X_5^2 = (x' x'')^{10} \bigg\{ & -2(a_t a_x^4 a_{x'}) (a_t a_{x'}^4 a_x) [\sqrt{f(x')} \sqrt{f(x'')} - a_x^3 a_{x'}^3] \\ & + [-2(a_t a_x^4 a_{x'}) (a_t a_{x'}^4 a_x) (a_x^3 a_{x'}^3) + f(x') (a_t a_{x'}^4 a_x)^2 \\ & + f(x'') (a_t a_x^4 a_{x'})^2] \bigg\}. \end{aligned}$$

(*) REICHARDT, *Darstellung der Kummerschen Fläche*, § 9. Halle, 1887.

(**) Memoria V, § 8.

(***) KLEIN, *Lezioni cit.* — BURKHARDT, *Opera cit.*, pag. 232, 233.

(****) Memoria V, § 8.

Ora ci serviamo ancora una volta delle osservazioni fatte nel § 3 della Memoria VI, e osserviamo che il coefficiente della prima parentesi quadrata, come anche il termine contenuto nella seconda parentesi quadrata, sono covarianti simmetrici nelle due serie di variabili x', x'' . Onde tali termini potranno esprimersi come funzioni razionali intere di

$$l_x l_{x''}; \quad m_x m_{x''}; \quad n_x n_{x''}, \quad (1)$$

e coi coefficienti che sono invarianti di f ; e propriamente è facile vedere, badando ai gradi nelle variabili $x' x''$, che il coefficiente della prima parentesi quadrata verrà di 5.º grado nelle (1), e il termine della seconda parentesi quadrata, quando vi si metta da parte il fattore $(x' x'')^2$ contenuto da quel termine, verrà di 6.º grado nelle (1). Onde infine combinando le (1) coi fattori $(x' x'')^2$ che compariscono esternamente nella formola, e tenendo presenti le formole di $X_1 X_2 X_3$ e X_4 si ha:

$$X_5^2 = X_4 G_5(X_1 X_2 X_3) + G_6(X_1 X_2 X_3), \quad (2)$$

dove le G sono funzioni intere razionali nelle X dei gradi indicati dagli indici.

Facciamo intanto le seguenti osservazioni: la espressione X_5^2 è un covariante nelle serie di variabili x', x'', t ; esso è inoltre di 2.º grado nelle t . Se consideriamo i coefficienti di $t_1^2, t_1 t_2, t_2^2$, tali coefficienti non saranno da sè covarianti; cioè supposto X_5^2 posto sotto la forma:

$$X_5^2 = A_{11} t_1^2 + A_{12} t_1 t_2 + A_{22} t_2^2,$$

i coefficienti A non sono covarianti; però se introduciamo i noti covarianti quadratici della sestica:

$$l_t^2, \quad m_t^2, \quad n_t^2;$$

allora una quadratica qualunque nelle t , come la X_5^2 , sarà al solito esprimibile linearmente mediante l, m, n con coefficienti che hanno la proprietà invariante; onde possiamo concludere che X_5^2 può sempre porsi sotto la forma:

$$X_5^2 = B_{11} l + B_{12} m + B_{22} n, \quad (3)$$

dove le B sono covarianti in $x' x''$.

Paragonando la (3) colla (2) si ha anche che le B sono funzioni razionali intere nelle X , e poichè queste ultime sono a lor volta anche covarianti, si ha che i coefficienti di tali funzioni debbono essere invarianti della sestica binaria, e quindi esprimibili razionalmente mediante i quattro invarianti fondamentali.

§ 6. Introduzione al calcolo della funzione G_5

Cominciamo col fissare alcune formole simboliche fondamentali. Se F è un coefficiente simbolico qualunque si ha:

$$\left. \begin{aligned} R \cdot F_t^2 &= l_t^2 (\lambda F)^2 + m_t^2 (\mu F)^2 + n_t^2 (\nu F)^2 \\ R \cdot F_t F'_t &= l_t^2 (\lambda F) (\lambda F') + m_t^2 (\mu F) (\mu F') + n_t^2 (\nu F) (\nu F') \\ R \cdot F_x F_{x''} &= l_x l_{x''} (\lambda F)^2 + m_x m_{x''} (\mu F)^2 + n_x n_{x''} (\nu F)^2 \\ R \cdot (F_x F'_{x''} + F'_{x''} F_x) &= 2 l_x l_{x''} (\lambda F) (\lambda F') + 2 m_x m_{x''} (\mu F) (\mu F') + \\ &\quad + 2 n_x n_{x''} (\nu F) (\nu F'). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

L'espressione di G_5 è data da:

$$- 2 a_t b_t a_{x'}^4 a_{x''} b_x b_{x''}^4 (x' x'')^{10},$$

che può scriversi:

$$\begin{aligned} & - (x' x'')^{10} a_t b_t \cdot a_{x'} a_{x''} \cdot b_x b_{x''} \cdot (a_x^3 b_{x''}^3 + a_{x''}^3 b_x^3) \\ & = (x' x'')^{10} a_t b_t \cdot a_{x'} a_{x''} \cdot b_x b_{x''} \left\{ - (a_x b_{x''} + a_{x''} b_x)^3 + \right. \\ & \quad \left. + 3 a_x a_{x''} b_x b_{x''} (a_x b_{x''} + a_{x''} b_x) \right\} \\ & = - \frac{8}{R^6} [X_1 (\lambda a)^2 + X_2 (\mu a)^2 + X_3 (\nu a)^2] [X_1 (\lambda' b)^2 + X_2 (\mu' b)^2 + X_3 (\nu' b)^2] \cdot \\ & \quad \cdot [l_t^2 (\lambda'' a) (\lambda'' b) + m_t^2 (\mu'' a) (\mu'' b) + n_t^2 (\nu'' a) (\nu'' b)] [X_1 (\lambda''' a) (\lambda''' b) + \\ & \quad + X_2 (\mu''' a) (\mu''' b) + X_3 (\nu''' a) (\nu''' b)]^3 + \\ & + \frac{6}{R^6} [l_t^2 (\lambda a) (\lambda b) + \dots] [X_1 (\lambda' a)^2 + \dots]^2 [X_1 (\lambda'' b)^2 + \dots]^2 [X_1 (\lambda''' a) (\lambda''' b) + \dots]. \end{aligned}$$

I vari coefficienti dei prodotti delle X colle $l_t^2 m_t^2 n_t^2$, sono invarianti che noi ora vogliamo trovare il mezzo di calcolare mediante gli invarianti fondamentali.

L'ultima espressione risulta di due termini; nel primo termine i coefficienti di l_t^2, m_t^2, n_t^2 sono del tipo:

$$\Sigma [S] \cdot (\omega a) (\omega b) (\omega' a) (\omega' b) (\omega'' a) (\omega'' b) (\omega''' a) (\omega''' b), \quad (I)$$

dove con $[S]$ s'intende il prodotto dei due primi fattori, costituente un'espressione simmetrica in a, b , e con $\omega \omega' \dots$ s'intendono i simboli di quattro fra

le tre quadratiche λ, μ, ν . Poichè almeno due dei quattro simboli ω debbono essere equivalenti, così potremo sempre supporre in (I) ω e ω' equivalenti.

Nel secondo termine poi i coefficienti delle combinazioni delle X con una delle quadratiche l_i^2, m_i^2, n_i^2 sono del tipo:

$$\Sigma [S'] (\omega a) (\omega b) (\omega' a) (\omega' b), \quad (\text{II})$$

dove $[S']$ rappresenta al solito un'altra espressione simmetrica in a, b .

Mostreremo ora con quali metodi, termini del tipo (I) e del tipo (II) possano calcolarsi mediante gli invarianti fondamentali.

Le espressioni simmetriche $[S]$ e $[S']$ rispettivamente in (I) e (II) sono polinomii interi nelle X di 2.º grado e di 4.º rispett., i cui coefficienti sono dei tipi:

$$(\omega a)^2 (\omega' b)^2$$

oppure:

$$(\omega a)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2 (\omega''' b)^2,$$

essendo al solito le ω simboli delle quadratiche λ, μ, ν . La ragione per la quale abbiamo separato la considerazione di questi fattori da quella degli altri, è che in questi, ciascun determinante è a seconda potenza, mentre negli altri fattori in (I) (II) ciascun determinante è a prima potenza, e noi su questi ultimi soli opereremo per ora delle trasformazioni speciali per ridurli ad altro tipo.

§ 7. Trasformazione dei termini del tipo (I)

Adoperando le formole simboliche:

$$\begin{aligned} (\omega a) (\omega' b) &= (\omega b) (\omega' a) - (\omega \omega') (a b) \\ (\omega'' a) (\omega''' b) &= (\omega'' b) (\omega''' a) - (\omega'' \omega''') (a b), \end{aligned}$$

un termine del tipo (I) diventa:

$$[S] \left\{ \begin{aligned} &(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 + (a b) [(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b) (\omega''' a) (\omega'' \omega''') \\ &\quad + (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 (\omega b) (\omega' a) (\omega \omega')] \\ &+ (a b)^2 (\omega \omega') (\omega'' \omega''') (\omega b) (\omega' a) (\omega'' b) (\omega''' a) \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

Il primo dei termini di questa espressione è immediatamente calcolabile se teniamo presenti le formole ottenute nella Memoria precedente. Infatti un termine qualunque di $[S]$ è (a meno dei fattori X) del tipo:

$$(\omega^v a)^2 (\omega^v b)^2,$$

essendo ω^v , ω^v i simboli di due delle tre quadratiche λ, μ, ν ; quindi in tutto si hanno prodotti di due seste spinte di f su prodotti del tipo $\omega \cdot \omega' \cdot \omega''$; tali seste spinte si calcolano come quelle del § 12 della Memoria precedente.

In quanto al secondo termine della formola precedente (1) esso può scri-
versi, operandovi alcune facili trasformazioni e tenendo conto dell'equivalenza dei simboli a, b :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [S] (ab)^2 (\omega'' \omega''') \left\{ - (\omega'' \omega''') (\omega b)^2 (\omega' a)^2 - \right. \\ & \quad \left. - (\omega \omega') (\omega'' a) (\omega''' b) [(\omega a) (\omega' b) + (\omega b) (\omega' a)] \right\} \\ & + \frac{1}{2} [S] (ab)^2 (\omega \omega') \left\{ - (\omega \omega') (\omega'' b)^2 (\omega'' a)^2 - \right. \\ & \quad \left. - (\omega'' \omega''') (\omega a) (\omega' b) [(\omega'' a) (\omega''' b) + (\omega'' b) (\omega'' a)] \right\}, \end{aligned}$$

che coll'ultimo termine di (1) danno:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} [S] (ab)^2 [(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' \omega''')^2 + (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 (\omega \omega')^2] \\ & - [S] (ab)^2 (\omega \omega') (\omega'' \omega''') (\omega a) (\omega' b) (\omega'' a) (\omega'' b) \\ & + \frac{1}{2} [S] (ab)^2 (\omega \omega') (\omega'' \omega''') \left\{ (\omega b) (\omega' a) [(\omega'' b) (\omega'' a) - (\omega''' b) (\omega'' a)] \right. \\ & \quad \left. + (\omega'' b) (\omega''' a) [(\omega b) (\omega' a) - (\omega a) (\omega' b)] \right\}. \end{aligned}$$

La terza linea facilmente si trasforma in

$$\frac{1}{2} [S] (ab)^4 (\omega \omega')^2 (\omega'' \omega''')^2,$$

e la seconda linea, per la supposta equivalenza dei simboli ω, ω' , si trasforma in

$$- \frac{1}{4} [S] (ab)^4 (\omega \omega')^2 (\omega'' \omega''')^2.$$

Onde infine un termine del tipo (I) diventa:

$$\begin{aligned} (I) &= [S] (\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} [S] (ab)^2 [(\omega b)^2 (\omega' a)^2 (\omega'' \omega''')^2 + (\omega'' b)^2 (\omega''' a)^2 (\omega \omega')^2] \\ &\quad + \frac{1}{4} [S] (ab)^4 (\omega \omega')^2 (\omega'' \omega''')^2. \end{aligned}$$

Ora ciascuno di tali termini è calcolabile colle formole fondamentali stabilite nella Memoria VI.

Infatti in quanto al secondo esso cogli stessi ragionamenti fatti al § 13 della Mem. VI diventa (a meno dei fattori X):

$$\Sigma \left(\left([(f, \omega' \omega^{IV})^4, f]^2 \omega \right)^2 (\omega'' \omega''')^2 + \Sigma \left(\left([(f, \omega'' \omega^{IV})^4, f]^2, \omega'' \right)^2 \omega^V \right)^2 (\omega \omega')^2, \right.$$

dove al solito abbiamo indicato con $(\omega^{IV} a)^2 (\omega^V b)^2$ uno dei termini di $[S]$, e il segno Σ si estende a tutti i termini di $[S]$ ricordando ancora che bisogna poi corrispondentemente moltiplicare per i fattori X .

Ora tutte le spinte indicate in questa formola sono calcolabili colle formole stabilite nella Mem. VI come abbiamo osservato nel § 13 della stessa.

In quanto poi al terzo termine di (I) osserviamo che avendosi per la formola di GORDAN:

$$(ab)^4 a_y^2 b_x^2 = \Delta_y^2 \cdot i_x^4 + \frac{1}{3} (ab)^6 (xy)^2,$$

si ha:

$$(ab)^4 (\omega^{IV} a)^2 (\omega^V b)^2 = \left((i, \omega^{IV})^2, \omega^V \right)^2 + \frac{1}{3} A (\omega^{IV} \omega^V)^2,$$

e le spinte indicate in questa formola si calcolano facilmente mediante le formole (1) del § 9 della Mem. VI.

Nella espressione di (I) ultimamente data, indicando con

$$(\omega^{IV} a)^2 (\omega^V b)^2,$$

uno dei termini di $[S]$, possiamo esprimere colla seguente formola il termine corrispondente di (I):

$$\begin{aligned} & (f, \omega' \omega''' \omega^{IV})^6 \cdot (f, \omega' \omega'' \omega^V)^6 - \\ & - \frac{1}{2} \left(\left((f, \omega' \omega^{IV})^4, f \right)^2, \omega^V \right)^2 \cdot A_{\omega'' \omega'''} - \frac{1}{2} \left(\left((f, \omega'' \omega^{IV})^4, f \right)^2 \omega'' \right)^2 \omega^V \right)^2 A_{\omega' \omega'} \\ & + \frac{1}{4} \left((i, \omega^{IV})^2 \omega^V \right)^2 A_{\omega' \omega'} A_{\omega'' \omega'''} + \frac{1}{12} A \cdot A_{\omega' \omega'} A_{\omega'' \omega'''} A_{\omega^{IV} \omega^V}, \end{aligned}$$

dove si è posto $\omega \equiv \omega'$, perchè appunto si è supposto avanti che questi due simboli equivalenti, e inoltre si sono rappresentati con A cogli indici ω , gli invarianti simultanei delle quadratiche ω .

§ 8. Trasformazione dei termini del tipo (II).

La trasformazione di uno di tali termini è facilissima. Con

$$(\omega a)(\omega' b) = (\omega b)(\omega' a) + (\omega \omega')(a b),$$

si ha, scambiando i simboli a con b e ricordando che $[S']$ è simmetrica in tali simboli,

$$\begin{aligned} \text{(II)} &= [S'](\omega b)^2(\omega' a)^2 + \frac{1}{2}[S'](a b)(\omega \omega')[(\omega b)(\omega' a) - (\omega a)(\omega' b)] \\ &= [S'](\omega b)^2(\omega' a)^2 - \frac{1}{2}[S'](a b)^2(\omega \omega')^2. \end{aligned}$$

Indicando ora con

$$(\omega'' b)^2(\omega''' a)^2(\omega^{\text{iv}} a)^2(\omega^{\text{v}} b)^2,$$

un termine di $[S']$ (a meno dei fattori X) si ha che il termine corrispondente di (II) si esprimerà col seguente sistema di spinte:

$$\begin{aligned} & (f, \omega' \omega''' \omega^{\text{iv}})^6 (f, \omega \omega'' \omega^{\text{v}})^6 \\ & - \frac{1}{2} \left(\left((f, \omega''' \omega^{\text{iv}})^4, f^2 \omega'' \right)^2, \omega^{\text{v}} \right)^2 \cdot A_{\omega \omega'}. \end{aligned}$$

Si hanno in fondo termini della stessa specie di quelli precedentemente ottenuti, ma qui gli $\omega \omega'$ sono simboli qualunque e potranno capitare fra loro diversi, mentre nel paragrafo precedente bisogna supporre $\omega \omega'$ simboli equivalenti, altrimenti non sarebbero più esatte le trasformazioni ivi effettuate.

§ 9. Calcolo di alcuni dei coefficienti di G_s .

La funzione G_s è un'espressione del tipo:

$$G'_s l_i^2 + G''_s m_i^2 + G'''_s n_i^2,$$

dove le G'_s , G''_s , G'''_s sono quintiche ternarie in X_1 , X_2 , X_3 che noi porremo simbolicamente sotto la forma:

$$\begin{aligned} G'_5 &= g'^5_X \\ G''_5 &= g''^5_X \\ G'''_5 &= g'''^5_X. \end{aligned}$$

Colle formole precedenti noi potremmo calcolare tutti i coefficienti g . Ci basterà di calcolare solo alcuni sotto forma definitiva.

Il coefficiente g'_1 è dato da:

$$\frac{1}{R^6} \left\{ 2 [(f\lambda^3)^6]^2 + 5 \left(\left((f\lambda^3)^4 f \right)^2 \lambda \right)^2 A_{\lambda\lambda} - 2 \left((i\lambda)^2 \lambda \right)^2 A_{\lambda\lambda}^2 - \frac{2}{3} A A_{\lambda\lambda}^3 \right\},$$

e ponendo qui μ, ν in luogo di λ si hanno i valori dei coefficienti g''^5_2, g'''^5_3 .

Colle formole dei §§ 5, 8, 9, 11 della Memoria VI si ricava infine:

$$\begin{aligned} g'_1 &= \frac{1}{R^6} \left\{ -2 R^2 L_{11}^2 - 5 \left(+ \frac{2}{3} L_{11} B + \frac{1}{6} M_{11} A_{11} + \frac{1}{9} A B M_{11} + \frac{1}{9} B^2 N_{11} \right) A_{\lambda\lambda} \right. \\ &\quad + 5 \left(\frac{2}{3} L_{11} C + \frac{1}{9} M_{11} A C + \frac{1}{3} N_{11} A_{mm} + \frac{1}{9} N_{11} B C \right) A_{\mu\mu} \\ &\quad + 5 \left(\frac{2}{9} L_{11} C + \frac{1}{9} M_{11} B C + \frac{1}{3} N_{11} A_{mn} - \frac{1}{9} N_{11} C^2 \right) A_{\nu\nu} \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R^2 M_{11} - \frac{2}{3} C A_{\nu\lambda} A_{\lambda\lambda}^2 - \frac{2}{3} A A_{\lambda\lambda}^3 \right\}. \end{aligned}$$

§ 10. Introduzione al calcolo della funzione G_6 .

È facile in primo punto riconoscere che G_6 a meno del fattore esterno $(x'x'')^{10}$ è ancora divisibile per $(x'x'')^2$; infatti per $x' = x''$ essa si annulla, e inoltre è simmetrica in x', x'' . Si ha:

$$\begin{aligned} G_6 &= (x'x'')^{10} [b_{x'}^3 a_t a_{x'} a_{x''}^4 c_t c_{x'} c_{x''} (b_{x'}^3 c_{x''}^3 - b_{x''}^3 c_{x'}^3) \\ &\quad - b_{x''}^3 a_t a_{x'} a_{x''}^4 c_t c_{x'} c_{x''} (b_{x'}^3 c_{x''}^3 - b_{x''}^3 c_{x'}^3)] \\ &= (ba)(bc)(x'x'')^{12} a_t c_t a_{x'} a_{x''} c_{x'} c_{x''} [b_{x'}^2 c_{x''}^2 + b_{x''} b_{x'} c_{x'} c_{x''} + b_{x''}^2 c_{x'}^2] \cdot \\ &\quad \cdot [b_{x'}^2 a_{x''}^2 + b_{x''} b_{x'} a_{x'} a_{x''} + b_{x''}^2 a_{x'}^2] \\ &= (ba)(bc)(x'x'')^2 a_t c_t a_{x'} a_{x''} c_{x'} c_{x''} \left\{ (b_{x'} c_{x''} + b_{x''} c_{x'})^2 - b_{x'} b_{x''} c_{x'} c_{x''} \right\} \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ (b_{x'} a_{x''} + b_{x''} a_{x'})^2 - b_{x'} b_{x''} a_{x'} a_{x''} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(ba)(bc)}{R^7} \left\{ l_i^2(\lambda a)(\lambda c) + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda' a)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda'' c)^2 + \text{ecc.} \right\} \times \\
&\quad \times \left[16 \left\{ X_1(\lambda''' b)(\lambda''' c) + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} a)(\lambda^{IV} b) + \text{ecc.} \right\}^2 \right. \\
&\quad - 4 \left\{ X_1(\lambda''' b)(\lambda''' c) + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} b)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda^V a)^2 + \text{ecc.} \right\} \\
&\quad - 4 \left\{ X_1(\lambda''' b)(\lambda''' a) + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} b)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda^V c)^2 + \text{ecc.} \right\} \\
&\quad \left. + \left\{ X_1(\lambda''' b)^2 + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda^{IV} a)^2 + \text{ecc.} \right\} \left\{ X_1(\lambda^V c)^2 + \text{ecc.} \right\} \right].
\end{aligned}$$

In questa formola vi sono termini di quattro tipi diversi; chiamiamoli rispettivamente con (I) (II) (III) (IV), e cominciamo col trasformare i termini del tipo IV.

Indicando con $[S_{ac}]$ l'espressione:

$$\left\{ X_1(\lambda' a)^2 + \text{ecc.} \right\}^2 \left\{ X_1(\lambda'' c)^2 + \text{ecc.} \right\}^2,$$

che è simmetrica in a, c , si ha:

$$(IV) = \Sigma (ba)(bc) [S_{ac}] (\omega a)(\omega c) \left\{ X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.} \right\}^2.$$

Adoperando la formola:

$$(ba)(\omega c) = (bc)(\omega a) - (ac)(\omega b),$$

si ha:

$$\begin{aligned}
(IV) &= \Sigma [S_{ac}] (bc)^2 (\omega a)^2 [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2 \\
&\quad - \Sigma (ac)(\omega b)(bc)(\omega a) [S_{ac}] [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2,
\end{aligned}$$

e scambiando nel secondo termine a con c e sommando e poi dividendo per 2 si ha:

$$\begin{aligned}
(IV) &= \Sigma [S_{ac}] [bc]^2 (\omega a)^2 [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \Sigma (ac)^2 (\omega b)^2 [S_{ac}] [X_1(\lambda b)^2 + \text{ecc.}]^2.
\end{aligned}$$

Tale espressione può meglio scriversi (a meno dei fattori X):

$$(IV) = \Sigma \left[(bc)^2 (\omega a)^2 - \frac{1}{2} (ac)^2 (\omega b)^2 \right] (\omega' a)^2 (\omega'' a)^2 (\omega''' c)^2 (\omega^{IV} c)^2 (\omega^V b)^2 (\omega^VI b)^2,$$

dove il segno Σ si estende a tutti i possibili valori delle ω , e quindi in virtù delle formole già stabilite si ha:

$$(IV) = \Sigma \left\{ (f, \omega \omega' \omega'')^6 \cdot \left(\left((f, \omega''' \omega^{IV})^4 f \right)^2, \omega^V \omega^{VI} \right)^4 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (f, \omega \omega^V \omega^{VI})^6 \left(\left((f, \omega' \omega'')^4 f \right)^2, \omega''' \omega^{IV} \right)^4 \right\}.$$

§ 11. Trasformazione dei termini (II) e (III) del paragrafo precedente.

In primo punto osserviamo che i termini (II) (III) sono fra loro della stessa specie e propriamente sono del tipo:

$$\Sigma [S_{ac}] (b a) (b c) (\omega a) (\omega c) (\omega' b) (\omega' a) (\omega'' b) (\omega'' a) (\omega''' b)^2 (\omega^{IV} c)^2.$$

Poniamo:

$$(\omega' b) (\omega' a) (\omega'' b) (\omega'' a) = -\frac{1}{2} [\omega' \omega'']^2 (a b)^2 - (\omega' b)^2 (\omega'' a)^2 - (\omega' a)^2 (\omega'' b)^2.$$

Allora si hanno tre specie di termini di cui gli ultimi due sono simili a (IV) del paragrafo precedente, e quindi sappiamo come si possono calcolare, e il primo è:

$$-\frac{1}{2} [S_{ac}] (b a)^2 (b c) \cdot (\omega a) (\omega c) (\omega''' b)^2 (\omega^{IV} c)^2. \quad (\alpha)$$

Scambiando a con c e sommando e dividendo per 2, si ha:

$$-\frac{1}{4} [S_{ac}] [(b a)^2 (\omega^{IV} c)^2 + (b c)^2 (\omega^{IV} a)^2] (b a) (b c) (\omega a) (\omega c) (\omega''' b)^2,$$

che con

$$(b a) (\omega c) = (b c) (\omega a) - (a c) (\omega b),$$

diventa:

$$-\frac{1}{4} [S_{ac}] \left[(b a)^2 (\omega^{IV} c)^2 + (b c)^2 (\omega^{IV} a)^2 \right] \left[(b c)^2 (\omega a)^2 - \frac{1}{2} (a c)^2 (\omega b)^2 \right] (\omega''' b)^2$$

Onde infine o ci riduciamo a termini:

$$(b c)^4 (\omega''' b)^2 (\omega'' c)^2 \cdot (\omega' a)^2 (\omega a)^2 (\omega^{IV} a)^2$$

oppure:

$$(ab)^2 (bc)^2 (b\omega)^2 (a\omega')^2 (a\omega'')^2 (c\omega''')^2 (c\omega^{IV})^2,$$

di cui il primo si calcola come quello del § 7, e il secondo si può calcolare col seguente sistema di spinte:

$$\left(\left(\left((c, \omega''' \omega^{IV})^4, b \right)^2, \omega \right)^2 a \right)^2 \omega' \omega''^4.$$

È facile far vedere che colle formole già stabilite si può calcolare un tal sistema di spinte. Infatti la spinta $(c, \omega''' \omega^{IV})^4$ dà luogo ad espressioni lineari in (§ 11, Mem. VI)

$$l, \quad m, \quad n.$$

Spingendo queste due volte su $f = b_x^6$ otteniamo espressioni lineari in [formole (5), § 5, Mem. VI]

$$l^2, \quad lm, \quad \Delta, \quad i.$$

Ciascuna di queste può spingersi due volte con formole note su λ, μ, ν , (§§ 8, 9 della Mem. VI), e si hanno espressioni lineari in $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$, di cui dobbiamo poi ancora fare le seconde spinte su f ; per l, m, n le formole che ci occorrono sono quelle già citate (§ 5, Mem. VI); pel caso di λ, μ, ν possiamo semplicemente procedere così:

Dovendo effettuare per es. $((\lambda, f)^2, \omega' \omega'')^4$, trasformiamo questo sistema di spinte in

$$(f, \lambda \omega' \omega'')^6,$$

e noi conosciamo già tutte le spinte di questo genere (§ 11 della Mem. VI).

Colle vie indicate dunque potranno calcolarsi tutti i termini del tipo (II), (III).

§ 12. Trasformazione dei termini (I) di G_6 .

Tali termini sono:

$$(I) = \Sigma [S_{ae}] (ba) (bc) (\omega a) (\omega c) (\omega' b) (\omega' c) (\omega'' b) (\omega'' c) (\omega''' a) (\omega''' b) (\omega^{IV} a) (\omega^{IV} b).$$

Facciamo consecutivamente la trasformazione colle due formole:

$$(\omega' b) (\omega' c) (\omega'' b) (\omega'' c) = + \frac{1}{2} [(\omega' b)^2 (\omega'' c)^2 + (\omega' c)^2 (\omega'' b)^2 - (\omega' \omega'')^2 (bc)^2]$$

$$(\omega''' a) (\omega''' b) (\omega^{IV} a) (\omega^{IV} b) = + \frac{1}{2} [\omega'' a^2 (\omega^{IV} b)^2 + (\omega''' b)^2 (\omega^{IV} a)^2 - (\omega''' \omega^{IV})^2 (ab)^2].$$

Allora o si hanno termini come (IV), oppure come i termini (α) del § 11, o finalmente come

$$[S_{ac}] (b a)^3 (b c)^3 (\omega a) (\omega c) \cdot (\omega' \omega'')^2 (\omega'' \omega''')^2.$$

Come si vede quindi si stacca un fattore, e considerando poi un solo dei termini compresi in $[S_{ac}]$ cioè per es. $(\omega' a)^2 \cdot (\omega'' c)^2$ si ha da dover calcolare

$$(b a)^3 (b c)^3 (\omega' a)^2 (\omega'' c)^2 (\omega a) (\omega c).$$

Scambiandovi a con b , e aggiungendovi e togliendo una stessa espressione, questo termine può scriversi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (ab)^4 \left\{ (a \omega')^2 (c b)^2 (\omega c)^2 (\omega'' c)^2 \right. \\ & \quad \left. - (c \omega'')^2 (\omega c) (\omega b) (c a) (\omega' c) [(b \omega') (c a) + (a \omega') (c b)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} (ab)^4 \left\{ (c b)^2 (a \omega')^2 (c \omega)^2 (c \omega'')^2 \right. \\ & \quad + 2 (c a)^2 (c \omega'')^2 (c \omega') (b \omega') (c \omega) (b \omega) \\ & \quad \left. + (a b) (c \omega'')^2 (\omega c) (\omega b) (c a) (c \omega')^2 \right\}. \end{aligned}$$

Ora colla formola:

$$(c \omega') (b \omega') (c \omega) (b \omega) = \frac{1}{2} [(c \omega')^2 (b \omega)^2 + (c \omega)^2 (b \omega')^2 - (\omega \omega')^2 (c b)^2],$$

e scambiando i simboli a con b nell'ultimo termine, e poi al solito sommando il risultato ottenuto e dividendo per 2 si ha:

$$\begin{aligned} &= (ab)^4 (c b)^2 (a \omega')^2 (c \omega'')^2 (c \omega)^2 + \frac{1}{2} (ab)^4 (c a)^2 (c \omega')^2 (c \omega'')^2 (b \omega)^2 \\ & \quad - \frac{1}{2} (\omega \omega')^2 (ab)^4 (c a)^2 (c b)^2 (c \omega'')^2 - \frac{1}{4} A \cdot (f, \omega \omega' \omega'')^2. \end{aligned}$$

Ora i due primi termini sono della stessa specie, e possono calcolarsi come segue:

Avendosi

$$(a b)^4 a_x^2 b_y^2 = \Delta_{xy}^2 k + \frac{1}{3} A \cdot (x y)^2,$$

si ha:

$$(a b)^4 (b \omega)^2 a_x^2 = (k \omega)^2 + \frac{1}{3} A \cdot \omega.$$

Ora $(k\omega)^2 \equiv (i\omega)^2$ si ricava dalle formole del § 9 della Mem. VI e si vede ancora che esso è sempre una funzione lineare di λ, μ, ν ; quindi il secondo membro della formola precedente si esprime linearmente mediante tali tre quadratiche; per completare ora il termine

$$(ab)^4 (b\omega)^2 (ac)^2 (c\omega')^2 (c\omega'')^2,$$

dobbiamo effettuare la sesta spinta di $f = c_x^6$ su esso termine moltiplicato per $\omega' \omega''$; e quindi ci riduciamo a espressioni come quelle che si ricavano immediatamente dal § 11 della Mem. VI.

In quanto poi a

$$(ab)^4 (ca)^2 (cb)^2 (c\omega'')^2,$$

esso è

$$\left((i, f)^4, \omega'' \right)^2 \quad \text{cioè} \quad (l, \omega'')^2.$$