23.

Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heifsen?

(Vom Herrn Prof. *Möbius* zu Leipzig.)

Dafs, wenn ein Dreieck in ein anderes eingeschrieben ist, dasselbe Dreieck nicht auch um das andere umschrieben sein kann, ist offenbar. Und eben so scheint es auch durchaus unmöglich, zwei Pyramiden zu construiren, von denen die Spitzen der einen in den Seitenflächen der andern und umgekehrt die Spitzen der andern in den Seitenflächen der erstern liegen. Auch ist diese Forderung in der That unerfüllbar, wenn die Spitzen einer jeden in den Seitenflächen der anderen selbst, nicht in den Erweiterungen derselben begriffen sein sollen, indem dann die eingeschriebene Pyramide immer die kleinere, die umschriebene die gröfsere ist. Es schwindet aber das Paradoxe der Forderung (bei den Pyramiden, — nicht bei den Dreiecken), wenn diese Beschränkung aufgehoben wird, und die Spitzen der einen auch in den erweiterten Seitenflächen der andern liegen können. Heifsen nämlich A, B, C, D die vier Spitzen der einen, und F, G, H, I die vier Spitzen der andern Pyramide, so läfst sich darthun, dafs die acht hierzu erforderlichen Bedingungen:

I.	A in GHI,	V.	F in BCD,
II.	B in HIF,	VI.	G in CDA,
III.	C in IFG,	VII.	H in DAB,
IV.	D in FGH,	VIII.	I in ABC

sehr wohl neben einander bestehen können, und überdies noch, dafs jede dieser acht Bedingungen eine Folge der sieben übrigen ist.

Es sei mir erlaubt den Beweis hiervon mit Anwendung meines barycentrischen Calculs zu führen, wo sich die Sache folgendergestalt symmetrisch und einfach behandeln läfst. —

Weil der Schwerpunct dreier Puncte mit ihnen selbst immer in einer Ebene liegt, und weil jeder Punct einer Ebene als Schwerpunct irgend dreier anderer Puncte der Ebene, die nicht in einer Geraden liegen, genommen werden kann, so schreibe ich, um die Bedingung I. auszudrücken, wonach A ein Punct der Ebene GHI sein soll:

$$\alpha A = aG + a'H + a''I.$$

Hierbei sind nämlich a, a', a'' die Gewichte, womit die Puncte G, H, I belastet werden müssen, damit A der Schwerpunct derselben wird, und $\alpha = a + a' + a''$ das Gewicht, welches, in A angebracht, dieselbe Wirkung, als die drei einzelenen Gewichte in G, H, I, hervorbringt.

Auf gleiche Art werden die Bedingungen II., III., IV. durch die Gleichungen

$$\beta B = bH + b'I + b''F,$$
$$\gamma C = cI + c'F + c''G,$$
$$\delta D = dF + d'G + d''H,$$

ausgedrückt. Sind nun die Puncte F, G, H, I mit ihren Gewichten oder Coëfficienten a, a', a'', b, ... d'' gegeben, so sind damit auch die Puncte A, B, C, D bekannt, und es fragt sich jetzt, ob jene Coëfficienten sich so bestimmen lassen, dafs auch die Bedingungen V., ... VIII. erfüllt werden.

Man setze deshalb, weil nach V., F ein Punct der Ebene BCD sein soll:

$$\zeta F = f\beta B + f'\gamma C + f''\delta D,$$

wo f, f', f'' zu bestimmende Coëfficienten sind. Substituirt man in dieser Gleichung die Werthe von βB, γC, δD aus den vorhergehenden, so kommt, nachdem man gehörig geordnet hat:

$$(\zeta - fb'' - f'c' - f''d)F = (f'c'' + f''d')G + (f''d'' + fb)H + (fb' + f'c)I.$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen aus, dafs F in der Ebene GHI liegt, so lange wenigstens, als von den Coëfficienten der Puncte G, H, I nicht jeder einzeln $= 0$ ist, indem, diesen Fall ausgenommen, die Lage von F gegen G, H, I in der Ebene dieser Puncte durch die Verhältnisse zwischen den Coëfficienten derselben immer bestimmt ist. Da nun F, G, H, I nicht in einer Ebene liegen, sondern die vier Spitzen einer Pyramide sein sollen, schliefsen wir, dafs

$$f'c'' + f''d' = 0, \quad f''d'' + fb = 0, \quad fb' + f'c = 0,$$

und hieraus ergiebt sich nicht nur das gegenseitige Verhältnifs zwischen f, f', f'', sondern auch nach Elimination dieser Coëfficienten die Bedingungsgleichung

$$1) \quad bcd' = -b'c''d'',$$

wenn F in BCD liegen soll. — Auf eben die Weise führen die Bedingungen VI., VII., VIII. zu den Gleichungen:

$$2)\quad c\,d\,a' = -c'\,d''\,a'',$$
$$3)\quad d\,a\,b' = -d'\,a''\,b'',$$
$$4)\quad a\,b\,c' = -a'\,b''\,c''.$$

Es giebt aber das Product sowohl aus der Gleichung 1) in 3), als aus 2) in 4):

$$a\,b\,c\,d = a''\,b''\,c''\,d'',$$

woraus man ersieht, daſs von den vier Gleichungen 1) . . 4) eine jede eine Folge aus den drei übrigen ist. Sind mithin die Bedingungen I., . . . IV., und noch von den Bedingungen V., . . VIII. irgend drei erfüllt, so ist es damit auch die vierte der letztern; und da durch Vertauschung der beiden Pyramiden auch die Bedingungen I., . . IV. und V., . . VIII. gegenseitig in einander übergehen, so schlieſsen wir, daſs wenn von allen acht Bedingungen irgend sieben erfüllt sind, damit auch die achte besteht.

Ist demnach eine Pyramide $ABCD$ (Fig. 1. Taf. IV.) gegeben, so läſst sich eine zweite $FGHI$, welche der erstern zugleich ein- und umschrieben ist, etwa folgendergestalt construiren. — Man lege durch die Spitze D der Pyramide $ABCD$ eine Ebene, welche die Kanten BC, CA, AB in A', B', C' schneide. In dieser Ebene sei nach IV. die Seitenfläche FGH der Pyramide $FGHI$ enthalten. Weil nach V., F zugleich in der Ebene $BCDA'$ liegen soll, so wird F irgend ein Punct der Geraden DA' sein müssen; und eben so wird man wegen VI. und VII., G und H beliebig in DB' und DC' zu nehmen haben. Vermöge I., II., III. ist ferner I als der gemeinschaftliche Durchschnittspunct der drei Ebenen AGH, BHF, CFG zu bestimmen, und es ist somit den Bedingungen I., ... VII. Genüge geschehen. Zufolge des erwiesenen Satzes muſs alsdann, wie es VIII. erfordert, I in der Ebene ABC liegen.

Statt die drei Ebenen AGH, . . . zu legen, kann man zur Bestimmung des Punctes I auch so verfahren. — Man ziehe GH, welche die Gerade $A'B'C'$ in F' schneide, so ist F' ein Punct der Ebene ABC, und folglich AF' der Durchschnitt der Ebenen AGH und ABC, worin I liegen muſs. Eben so ziehe man HF, FG, welche $A'B'C'$ in G', H' schneiden, und es muſs I auch in BG', CH' enthalten sein. Die drei Geraden AF', BG', CH' müssen sich folglich in einem Puncte, nämlich in I, schneiden.

Hieraus flieſst zugleich folgender nicht uninteressante Satz: ABC, FGH sind zwei Dreiecke, MN eine gerade Linie, welche mit je-dem der beiden Dreiecke in einer Ebene liegt, also die Durchschnittslinie der beiden Dreiecksebenen, wenn die Dreiecke in verschiedenen Ebenen liegen. Wird nun MN von den Dreiecksseiten BC, CA, AB, GH, HF, FG resp. in A', B', C', F', G', H' geschnitten und begegnen sich $A'F$, $B'G$, $C'H$ in einem Puncte D, so treffen auf AF', BG', CH' in einem Puncte I zusammen.

So wie dieser Satz eine Folge des Vorigen ist, so kann man aus ihm auch umgekehrt jene Eigenschaft der Pyramiden selbst herleiten. Es läſst sich aber dieser Satz, unabhängig von dem Vorhergehenden, mit Hülfe eines andern Theorems (Baryc. Calcul, §. 291.) und seiner Inverse darthun, wonach, wenn die drei Spitzen eines Dreiecks FGH mit einem vierten in der Ebene desselben liegenden Puncte D durch Gerade verbunden werden, und wenn eine beliebige andere Gerade MN der Ebene von den Seiten des Dreiecks GH, HF, FG in F', G', H' und von jenen drei Geraden DF, DG, DH in A', B', C' geschnitten wird, — das Product aus den drei Verhältnissen

$$(G'A' : H'A')(H'B' : F'B')(F'C' : G'C') = 1 \text{ ist.}$$

Denn eben so muſs auch, mit Anwendung der Inverse, weil BC, CA, AB die Linie MN in A', B', C' schneiden, und weil AF', BG', CH' in einem Puncte I zusammen kommen sollen,

$$(B'F' : C'F')(C'G' : A'G')(A'H' : B'H') = 1 \text{ sein.}$$

Diese Gleichung ist aber mit der vorigen identisch.

Zusatz. Obschon es durchaus unmöglich ist, zwei Dreiecke zu construiren, von denen ein jedes in das andere eingeschrieben und folglich auch um das andere umschrieben ist, so läſst sich doch bei mehrseitigen Vielecken diese Unmöglichkeit nicht ohne vorangegangene näherer Prüfung behaupten.

Seien z. B. A, B, C, D (Fig. 2.) die auf einander folgenden Spitzen eines ebenen Vierecks; a, b, c, d vier durch sie resp. gezogene Geraden, so bilden diese ein um $ABCD$ umschriebenes Viereck, dessen Spitzen die Durchschnitte von a mit b, von b mit c, etc., oder, wie ich der Kürze wegen schreiben will, ab, bc, cd, da sind. Soll nun dieses Viereck zugleich ein eingeschriebenes sein, so muſs ab in einer der Seiten von $ABCD$, und zwar in CD, liegen, wenn nicht die Seiten des einen Vierecks mit denen des andern zum Theil zusammenfallen sollen. Eben so muſs bc in DA, cd in AD, da in BC liegen. Man denke sich daher die Linien a, b, c, d resp. um A, B, C, D sich drehend; a willkührlich; b dergestalt, dafs der Punct ab in CD fortrückt; c so, dafs bc in AD, und d so, dafs cd in AB fortgeht. Der Punct ad wird alsdann eine Curve beschreiben, und wenn er dabei einmal durch die Gerade BC geht, so wird das in diesem Momente von den Linien a, b, c, d gebildete Viereck zugleich ein eingeschriebenes sein.

Um nun die gedachte Curve und ihre vielleicht möglichen Durchschnitte mit BC zu finden, so setze man zuerst, weil D mit A, B, C in einer Ebene liegt:

$$\delta D = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

oder kürzer, wenn man hier und in dem Verfolg der Rechnung für αA, βB, γC, δD schlechthin A, B, C, $-D$ schreibt:

$$A + B + C + D = 0.$$

Man bezeichne ferner die Puncte ab, bc, cd, da mit F, G, H, I, und setze, weil F in CD liegen soll:

$$F = C + xD;$$

(oder vielmehr $fF = \gamma C - x\delta D$, wo $f = \gamma - \delta x$ ist, und γ, $-\delta x$ die Gewichte sind, womit die Puncte C, D belastet, F zu ihrem Schwerpunct haben. Eben so aber, wie vorhin in C und D die Coëfficienten γ und $-\delta$, so wird hier in F der Coëfficient f mit eingeschlossen gedacht. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die in der Folge vorkommenden Buchstaben G, H, I. (Baryc. Calc. §. 235. etc.))

Substituirt man für C seinen Werth aus der vorhergehenden Gleichung, so kommt:

$$F = -A - B - D + xD$$

und

$$F + B = -A + (x-1)D = G,$$

weil G der gemeinschaftliche Punct von FB und AD ist. Dies giebt weiter:

$$G = -A - (x-1)(A + B + C),$$

$$G + (x-1)C = -xA - (x-1)B = H,$$

weil GC und AB sich in H schneiden;

$$H = -xA + (x-1)(A + C + D) = -A + (x-1)(C + D)$$

$$= -A + (x-1)D + (x-1)(F - xD),$$

$$H + (x-1)^2 D = -A + (x-1)F = I,$$

als dem Durchschnitte von HD mit AF;

$$I = B + C + D + (x-1)(C + xD) = B + xC + (1 - x + x^2)D.$$

I ist also der Schwerpunct der Puncte *B*, *C*, *D* mit Gewichten, die sich wie $1:x:1-x+x^2$ (oder vielmehr wie $\beta:\gamma x:-\delta(1-x+x^2)$) zu einander verhalten. Läſst man nun *F* (oder *ab*) in der Geraden *CD* sich fortbewegen, so erhält x nach und nach alle möglichen Werthe, und alle die damit sich ergebenden Schwerpuncte *I* (oder *ad*) liegen in einem Kegelschnitte (B. C. §. 130.). Dieser Kegelschnitt kann aber der *BC* nicht begegnen, oder, was dasselbe ist: *I* kann niemals mit *B* und *C* in eine Gerade zu liegen kommen, weil der Ausdruck von *I* durch *B*, *C*, *D* sich niemals auf *B* und *C* allein reduciren kann. Denn für keinen möglichen Werth von x kann der Coëfficient von *D*, $1-x+x^2=0$ werden.

Es ist folglich auch nicht möglich, daſs von zwei Vierecken ein jedes dem andern zugleich ein- und umschrieben sein sollte. — Auf Vielecke von mehreren Seiten habe ich die Untersuchung nicht ausgedehnt.

Anzeige einiger Fehler und Verbesserungen in meinem Aufsatze über Vielecke im Kreise, im ersten Hefte des dritten Bandes.

Seite 7 Zeile 18 v. o: statt d. h. lies und folglich die Summe aller m Bögen.
— 8 — 8 v. o. statt ungeraden lies geraden.
— 11 — 7 v. u. statt 16 lies 10.
— 14 — 12 v. o. statt $\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta\ldots)$ lies $\sin\frac{1}{2}(-\alpha+\beta\ldots.)$.
— 15 — 9 v. o. Multiplicirt man je zwei unter einander geschriebene Factoren etc. Dies paſst nicht mehr ganz, da die Formel in den vier ersten Zeilen dieser Seite im Manuscript nur zwei Zeilen einnahm.
— 16 — 6 v. u. statt nach lies für.
— 16 bei der lezten Formel lies IV* statt VI*.
— 18 Zeile 16 v. o. statt vor lies von.
— 22 — 15 v. u. setze vor $\frac{4bcde}{a}$ das Zeichen —.
— 29 — 9 v. u. statt aus dieser Gleichung für das Vieleck lies: aus dieser Gleichung, aus der Gleichung für das Vieleck.
— 34 — 2 v. u. statt — setze =.
