

# Ueber polyedrale Configurationen.

Von

JAN DE VRIES in Kampen (Holland).

Die Geraden und Ebenen eines vollständigen räumlichen  $n$ -Ecks werden von einer beliebigen Ebene in einer Configuration

$$\left( \binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_3 \right)$$

geschnitten, welche Herr Jung eine polyedrale Configuration der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung nennt.\*) Werden die Ecken des  $n$ -Ecks mit den Zahlen  $1, 2, 3, \dots, n$ , seine Seiten mit den Combinationen zweiter Classe, seine Ebenen mit den Combinationen dritter Classe jener Zahlen bezeichnet, dann liegt es nahe, die Bezeichnung der Geraden und Ebenen auf ihre Spuren zu übertragen. Obige nunmehr aus  $\binom{n}{2}$  Punkten  $ik$  und  $\binom{n}{3}$  Geraden  $ikl$  zusammengesetzte polyedrale Cf., welche ich der Kürze halber  $\pi_n$  nenne, ist offenbar gleichartig mit der Cf., die durch die äusseren Aehnlichkeitspunkte  $n$  beliebiger Kreise gebildet wird.\*\*)

## § 1.

### Allgemeine Sätze.

1. Die nach dem Cf.punkte  $12$  zielenden Cf.gerechten  $12i$  ( $i=3, 4, \dots, n$ ) enthalten je eine Ecke der beiden vollständigen  $(n-2)$ -Ecke

$$13, 14, 15, \dots, 1n,$$

$$23, 24, 25, \dots, 2n,$$

\*) „Sopra una classe di configurazioni d'indice 3.“ (Rendiconti d. Reale Istituto Lombardo, Ser. II, tomo XVIII). Nach Abschluss meiner Arbeit erhalte ich Kenntniss von einer weiteren hier anzuführenden Arbeit von Jung: „Sull' equilibrio dei poligoni articolati in connessione col problema delle configurazioni.“ (Annali di Matematica, Ser. II, tom. XII). Es finden sich dort neben verschiedenen Andeutungen über Zerlegungen allgemeiner Art die Sätze über Cyklen von Siebenecken resp. Neunecken, welche ich auf pag. 242/43 der vorliegenden Arbeit gegeben habe.

\*\*) Die nachstehenden Sätze habe ich zum Theil veröffentlicht in meiner Arbeit „Over vlakke polyedrale cf.“ (Sitz. Ber. der Holl. Akad. d. Wiss. Ser. III, Bd. VI, S. 9).

deren Seiten der  $\pi_n$  angehören; die übrigen Cf.punkte  $kl$  sind die Schnitte homologer Seiten  $1kl, 2kl$ , die übrigen Cf.gerade die Perspektivitätsachsen der  $\binom{n-2}{3}$  Paare von Dreiecken  $(1k, 1l, 1m), (2k, 2l, 2m)$ , für welche 12 das Perspektivitätscentrum ist. Die  $\pi_n$  gehören somit jener von Herrn Kantor\*) bemerkten Gattung von Cf. an, welche durch  $p$  einem  $q$ -strahligen Büschel eingeschriebene vollständige  $q$ -Ecke bestimmt werden.\*\*)

„Eine polyedrale Cf.  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ist durch zwei perspectivisch belegene  $(n-2)$ -Ecke vollständig bestimmt.“

Die Schnitte homologer Seiten und die Perspektivitätsachsen der oben erwähnten  $\binom{n-2}{3}$  Dreieckspaare bilden offenbar eine  $\pi_{n-2}$ , welche als die Restfigur des Punktes 12 erscheint.

2. In meiner Arbeit „Ueber gewisse ebene Configurationen“\*\*\*) habe ich die  $\pi_6$  gelegentlich erwähnt; dabei ergab sich, dass sie auf 10 verschiedene Arten betrachtet werden kann als die Zusammenstellung zweier Gruppen von je drei Dreiecken, deren Ecken 9 Cf.punkte liefern, indess von den übrigen 6 drei die Perspektivitätscentra der einen Gruppe, drei die Centra der anderen Gruppe sind; die Träger jener Tripel von Centra habe ich als *associirte Gerade* bezeichnet.

Indem jede Gerade der  $\pi_n$  als Seite  $(n-3)$  vollständiger Vierseite erscheint, daher  $\binom{n-3}{3}$  Cf.  $\pi_6$  gemeinschaftlich ist, sind ihr  $\binom{n-3}{3}$  Gerade associirt; für die Gerade 123 sind dies die Geraden  $ikl$  ( $i=4$  bis  $n, k=5$  bis  $n, l=6$  bis  $n$ ), welche offenbar mit den ihnen incidenten Punkten  $ik$  ( $i=4$  bis  $n, k=5$  bis  $n$ ) eine  $\pi_{n-3}$  bilden.

„Die associirten Geraden einer Geraden der  $\pi_n$  bilden eine  $\pi_{n-3}$ .“

„Eine  $\pi_n$  ist vollständig bestimmt durch  $(n-3)$  Vierseite, welche drei allineirte Ecken gemein haben.“

Die Punkte  $1i$  ( $i=2$  bis  $n$ ) bilden mit den Geraden  $1ik$  ( $i=2$  bis  $n, k=3$  bis  $n$ ) ein vollständiges  $(n-1)$ -Eck, dessen Seiten je einen Punkt der  $\pi_{n-1}$  tragen, welche durch Entfernung jenes  $(n-1)$ -Ecks aus der  $\pi_n$  erhalten wird.

\*) „Ueber eine Gattung von Conf.“ (Sitzber. der Wiener Akademie, Bd. 80).

\*\*) In einer Arbeit „Over eene groep van regelmatige vlakke cf.“ Sitzungsberichte der Holländischen Akademie der Wissenschaften Ser. III, Bd. VI, S. 45) habe ich gezeigt, dass die Elemente sämtlicher von Herrn Kantor gefundenen ebenen Cf. durch die Combinationen  $i^{\text{ter}}$  bez.  $(i+1)^{\text{ter}}$  Classe von  $n$  Zahlen bezeichnet werden können. Daraus ergibt sich, dass die Mehrzahl der Eigenschaften polyedraler Cf. auf jene allgemeinere Cf. übertragen werden kann.

\*\*\*) Acta Mathematica 12, Seite 70.

„Eine  $\pi_n$  lässt sich auf  $n$  verschiedene Arten in eine  $\pi_{n-1}$  und ein vollständiges  $(n-1)$ -Eck spalten.“

Für die  $\pi_3$  (die bekannte Cf. des Desargues) wurde diese Eigenschaft schon von Herrn Kantor\*) bemerkt.

## § 2.

### Gruppen gegenseitig getrennter Cf.punkte.

3. Die Cf.  $\pi_6$  enthält 15 Tripel getrennter Punkte  $ik, jl, mp$ . Aus den 12 einem solchen Tripel incidenten Cf.gerade lassen sich 3 Vierseite bilden, indess die übrigen Cf.gerade mit den übrigen Cf.punkten eine  $(12_2, 8_3)$  bilden. Nachstehende Tabelle veranschaulicht diese Spaltung in Bezug auf das Tripel 12, 34, 56;  $iklm$  bezeichne das von der Geraden  $ikl, ikm, ilm, klm$  begrenzte Vierseit.

(A)

1234	1256	3456	$(12_2, 8_3)$	
123	125	345	135	235
124	126	346	136	236
134	156	356	145	245
234	256	456	146	246

Jede  $\pi_{2n}$  lässt sich auf diese Weise aus einer Gruppe von  $\pi_4$  und einer gewissen Cf. zusammensetzen. Die  $n$  getrennten Punkte 12, 34, 56, ...  $(2n-1)2n$ , welche ich unter dem Namen „Neben- $n$ -eck“ zusammenfasse\*\*), sind mit je  $(2n-2)$  Geraden incident, welche je ausserdem noch zwei Punkte tragen; sie zielen somit zu je zweien nach den übrigen  $2n(n-1)$  Cf.punkten. Jene  $2n(n-1)$  Geraden sind die Seiten von  $\frac{1}{2}n(n-1)$  Vierseiten  $iklm$  mit je einem dem Neben- $n$ -eck angehörenden Gegeneckenpaar; werden sie aus der  $\pi_{2n}$  fortgelassen, so ergibt sich eine Cf.

$$\left(4\binom{n}{2}_{2n-4}, 8\binom{n}{3}_3\right).$$

Für  $\pi_8$  zeigt Tabelle (B) die Trennung in 6 Cf.  $\pi_4$  und eine Cf.  $(24_1, 32_3)$ .

\*) „Die Conf.  $(3, 3)_{10}$ “ (Sitz. Wiener Akad. Bd. 84).

\*\*) Mit „Hauptviereck“ bezeichne ich eine Gruppe getrennter Cf.punkte, welche zusammen allen Cf.gerade incident sind. Diese Ausdrücke sind den von Herrn Martinetti benutzten Bezeichnungen *multilatero principale* und *m. non principale* nachgebildet. (Sopra alcune cf. piane, Ann. di Mat. Ser. IIa, tomo XIV).

1234	1256	1278	3456	3478	5678
123	125	127	345	347	567
124	126	128	346	348	568
134	156	178	356	378	578
234	256	278	456	478	678

(B)

(24 <sub>4</sub> , 32 <sub>3</sub> )			
135	136	137	138
147	148	146	145
168	157	158	167
238	237	235	236
246	245	248	247
257	268	267	258
367	358	368	357
458	467	457	468

Während in  $\pi_3$  der Punkt 13 den fünfzehn  $\pi_4$  angehörte, in welchen einer der von ihm getrennten Punkte seine Gegenecke war, findet er sich in jener (24<sub>4</sub>, 32<sub>3</sub>) nur noch in den Vierseiten 1357, 1358, 1367, 1368; es sind nämlich ausser dem Vierseite 1234 die 4 von der Geraden 132 und die 4 von 134 begrenzten  $\pi_4$  verschwunden, schliesslich aber auch die beiden Vierseite, welche 13 mit 56 und 78 bestimmte.

Aus der  $\pi_{2n}$  verschwindet für den Punkt 13 das Vierseit 1234, die  $2(2n-4)$  von den Geraden 132, 134 gebildeten  $\pi_4$  und die  $(n-2)$  Vierseite, in welchen 13 die Gegenecke ist von einem der Cf.punkte, die ausser 12, 34 in dem Neben- $n$ -ecke enthalten sind; in der neuen Cf. ist 13 somit Eckpunkt in  $\binom{2n-2}{2} - (5n-9)$  oder  $2(n-2)(n-3)$  Cf.vierseiten, also gemeinschaftliche Ecke von  $4(n-2)(n-3)$  Cf.dreiecken; der Kürze halber nenne ich 13 einen

$8\binom{n-2}{2}$ -trigonischen Punkt:

die Punkte der aus  $\pi_6$  abgeleiteten (12<sub>2</sub>, S<sub>3</sub>) bezeichne ich demnach als *atrigonisch*.

„Aus einer  $\pi_{2n}$  geht durch Entfernung eines der  $(2n)!: (2^n \cdot n!)$  Neben- $n$ -ecke und der seinen Punkten incidenten Cf.geraden allemal eine

$$\left(4\binom{n}{2}_{2n-4}, 8\binom{n}{3}_3\right)$$

hervor, deren Punkte  $8 \binom{n-2}{2}$ -trigonisch sind, indess sie in  $\pi_{2n-2} \binom{2n-2}{2}$ -trigonisch waren.“

4. In der Cf.  $(60_3, 160_3)$ , welche durch Ausscheidung der nach den Punkten 12, 34, 56, 78, 9(10), (11)(12) zielenden Geraden aus  $\pi_{12}$  entsteht, giebt es Nebenzwölfecke. Indem nämlich die Geraden 123, 124, 134, 234 verschwunden sind, bilden die Punkte 13, 14, 23, 24 ein getrenntes Quadrupel; demnach lässt sich z. B. aus den Punkten 13, 14, 23, 24; 57, 58, 67, 68; 9(11), 9(12), (10)(11), (10)(12) eine getrennte Gruppe zusammensetzen. Die übrigen 48 Punkte sind mit je 4 der durch jene 12 Punkte laufenden Geraden der  $(60_3, 160_3)$  incident: werden diese 96 Geraden fortgelassen, so entsteht eine Cf.  $(48_4, 64_3)$ , in der 15 mit vier Punktepaaren 19, 59; 1(10), 5(10); 1(11), 5(11); 1(12), 5(12) allineirt ist, zwischen denen die frühere Verbindung durch die Entfernung der Punkte 9(10), 9(11), 9(12), (10)(11), (10)(12), (11)(12) aufgehoben worden: die neue Cf. ist somit eine *atrigonische*. Sie entsteht offenbar aus  $\pi_{12}$  durch Abtrennung der Geraden, welche nach den Ecken der Vierseite 1234, 5678, 9(10)(11)(12) zielen; hieraus erhellt, dass eine analoge Betrachtung nur für polyedrale Cf. der Ordnung  $4m$  angestellt werden kann.

In einer  $\pi_{4m}$  sind die Ecken der Vierseite 1234, 5678, . . . ,  $(4m-3)(4m-2)(4m-1)4m$  ausser mit deren Seiten noch mit je  $(4m-4)$  Cf.geraden incident, welche in Sextupeln durch die übrigen  $8m(m-1)$  Cf.punkten laufen; diese bilden daher mit den übrigen  $\left[ \binom{4m}{3} - 4m - 6m(4m-4) \right] = \frac{32}{3} m(m-1)(m-2)$  Geraden der  $\pi_{4m}$  eine neue Cf., in welcher jeder Punkt  $(4m-8)$  Gerade, jede Gerade drei Punkte enthält.

In  $\pi_{4m}$  bildet der Punkt 15 mit jedem der von ihm getrennten Punkte ein Gegeneckenpaar einer  $\pi_4$ ; in der neuen Cf. erübrigen von diesen Gegenecken nur diejenigen Punkte, deren Bezeichnung aus einer Zahl der Gruppe  $(4i-3)$ ,  $(4i-2)$ ,  $(4i-1)$ ,  $4i$  und einer Zahl der Gruppe  $(4k-3)$ ,  $(4k-2)$ ,  $(4k-1)$ ,  $4k$  zusammengesetzt ist, wo  $i = 3, 4, 5 \dots m$ ,  $k = 4, 5, 6 \dots m$ . Jeder Punkt der neuen Cf. gehört demnach  $16 \binom{m-2}{2}$  Vierseiten und  $32 \binom{m-2}{2}$  Dreiecken an.

„Eine  $\pi_{4m}$  enthält  $(4m)! : 24^m \times m!$  Gruppen von  $m$  Vierseiten, deren Bezeichnung sämtliche Zahlen von 1 bis  $4m$  erfordert. Durch Ausscheidung der Geraden, welche nach den  $6m$  Ecken einer solchen Gruppe zielen, entsteht eine Cf.

$$\left( 16 \binom{m}{2}_{4m-8}, 64 \binom{m}{3}_3 \right)$$

mit  $16(m-2)(m-3)$ -trigonischen Punkten.“

## § 3.

## Zahlenfremde Punktgruppen.

5. Für eine  $\pi_{3m}$  giebt die Aufstellung der aus  $m$  Geraden bestehenden Gruppe

$$|123|456|789|\dots|(3i-2)(3i-1)(3i)|\dots|(3m-2)(3m-1)3m|$$

ebenfalls Anlass zu einer Zerlegung der Cf. Die durch diese Geraden verbundenen  $3m$  Cf.punkte sind nämlich mit je  $(3m-3)$  Cf.geraden incident, welche in Quadrupeln durch die übrigen  $\frac{9}{2}m(m-1)$  Cf.punkte laufen; diese bilden daher mit den übrigen  $\frac{9}{2}m(m-1)(m-2)$  Cf.geraden eine in  $\pi_{3m}$  enthaltene Cf. mit den Indices  $(3m-6)$  und 3. In der neuen Cf. ist der Punkt 14 getrennt von denjenigen Punkten, deren Bezeichnung aus einer Zahl der Gruppe  $(3i-2)$ ,  $(3i-1)$ ,  $3i$  nebst einer Zahl der Gruppe  $(3k-2)$ ,  $(3k-1)$ ,  $3k$  besteht ( $i=3$  bis  $m$ ,  $k=4$  bis  $m$ ); er ist also Gegenecke von  $9\binom{m-2}{2}$  Punkten in ebensovielen Vierseiten, somit gemeinschaftliche Ecke von  $18\binom{m-2}{2}$  Cf.dreiecken.

„Jede  $\pi_{3m}$  liefert durch Ausscheidung der Geraden, welche verbunden sind mit den  $m$  Geraden einer Gruppe, deren Bezeichnung sämtliche Zahlen von 1 bis  $3m$  erfordert, eine  $9(m-2)(m-3)$ -trigonische Cf.

$$\left(9\binom{m}{2}_{3m-6}, 27\binom{m}{3}_3\right).“$$

6. Bezeichnet man mit  $abcde$  die  $\pi_5$ , deren Punkte und Gerade durch die Combinationen 2<sup>ter</sup> bez. 3<sup>ter</sup> Classe der Zahlen  $a, b, c, d, e$  dargestellt werden, und dehnt dieses Verfahren auf eine  $\pi_p$  aus, so ist die obige Betrachtung einer Verallgemeinerung fähig. Theilt man nämlich die zur Bezeichnung einer  $\pi_{pm}$  erforderlichen Zahlen 1 bis  $pm$  in Gruppen von je  $p$  Zahlen, dann sind die Geraden, welche nach den Punkten einer jeden durch eine dieser Gruppen vorgestellten  $\pi_p$  zielen, vollständig getrennt von den Punkten der übrigen  $(m-1)$  Cf.  $\pi_p$ . Werden die Geraden der  $m$  Cf.  $\pi_p$  ausser Acht gelassen, so liefern die  $m\binom{p}{2}$  Punkte jener Cf. zusammen  $m\binom{p}{2} \cdot p(m-1)$  Gerade der  $\pi_{pm}$ , welche mit den übrigen  $\binom{mp}{2} - m\binom{p}{2} = p^2\binom{m}{2}$  Cf.punkten incident sind. Durch jeden dieser  $p^2\binom{m}{2}$  Punkte laufen somit  $2(p-1)$  jener Geraden, daher  $(mp-2) - 2(p-1)$  oder  $p(m-2)$  von den übrigen  $\binom{mp}{3} - m\binom{p}{3} - m\binom{p}{2} \cdot p(m-1)$  Geraden der  $\pi_{pm}$ .

In der Cf., welche durch Abtrennung jener mit den Punkten der  $m$  Cf.  $\pi_p$  incidenten Geraden entsteht, ist jeder Punkt  $\alpha\beta$  Ecke von  $p^2\binom{m-2}{2}$  Vierseiten; jede Gegenecke dieses Punktes  $\alpha\beta$  wird nämlich bezeichnet durch eine Zahl aus einer  $p$ -zähligen Gruppe, welche weder  $\alpha$  noch  $\beta$  enthält, nebst einer Zahl aus einer zweiten Gruppe, für welche dasselbe zutrifft.

„Bildet man in einer  $\pi_{pm}$  eine Gruppe von  $m$  Cf.  $\pi_p$ , deren Bezeichnung sämtliche Zahlen von 1 bis  $pm$  erfordert, so lässt sich die Cf. spalten in jene  $m$  Cf.  $\pi_p$ , die Geraden, welche nach deren Punkten zielen und eine Cf.

$$\left(p^2\binom{m}{2}\right)_{p(m-2)}, p^3\binom{m}{3}_s$$

mit lauter  $p^2(m-2)(m-3)$ -trigonischen Punkten.“

Für  $m=3$  gilt daher der Satz:

„Aus jeder  $\pi_{3p}$  lassen sich durch Abspaltung gewisser Geraden atrigonische Cf.

$$(3p_p^2, p_p^3)$$

bilden.“

In obiger Cf.

$$\left(p^2\binom{m}{2}\right)_{p(m-2)}, p^3\binom{m}{3}_s$$

ist jeder Punkt  $p^2\binom{m-2}{2}$  Vierseiten gemeinschaftlich: sie enthält also im Ganzen  $\frac{1}{6}p^2\binom{m-2}{2} \cdot p^2\binom{m}{2}$  oder  $p^4\binom{m}{4}$  Cf.  $\pi_4$ ; jede ihrer Geraden begrenzt  $4p^4\binom{m}{4} : p^3\binom{m}{3}$  oder  $p(m-3)$  Vierseite.

#### § 4.

##### Hauptvielseite.

7. Die Geraden, welche in einer  $\pi_n$  von der Geraden 123 getrennt sind, werden durch Geradentripel bezeichnet, die entweder eine oder keine der Zahlen 1, 2, 3 enthalten. In  $\pi_7$  giebt es somit nur Paare getrennter Geraden, z. B. 123, 145;  $\pi_6$  besitzt *Quadrupel*, wie 123, 145, 256, 346, die zusammen zwölf Cf.punkte tragen, indess die übrigen drei, also 16, 24, 35, getrennt liegen. Für  $\pi_7$  lässt sich das folgende *Geradensextuplel* bilden.

$$(C) \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 \end{array}.$$

Ein solches Sextupel nenne ich ein „*Hauptsiebenseit*“ der  $\pi_7$ ; im Allgemeinen möge „*Hauptvielseit*“ der Name sein für eine Gruppe getrennter Geraden, welche zusammen alle Punkte einer Cf. tragen.

Wird aus  $\pi_7$  ein Hauptseptupel fortgelassen, so ergibt sich eine Cf.  $(21_1, 28_3)$  mit lauter oktotrigonischen Punkten; für den Punkt 12 werden die 8 Cf.dreiecke, welchen er angehört, von den Geraden 245, 247, 256, 267; 146, 147, 156, 157 herausgeschnitten.

Weil die Gerade 123 allen Hauptseptupeln gemein ist, welche durch Permutation der Zahlen 1, 2, 3 aus (C) hervorgehen, giebt es im Ganzen  $\binom{7}{3} \times 6 : 7 = 30$  solcher Gruppen.

Nachstehendes Hauptsiebenseit hat mit (C) keine Gerade gemein.

$$(D) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 6 \\ \hline 4 & 6 & 7 & 7 & 6 & 5 & 7 \\ \hline \end{array} .$$

Es bildet mit dem Septupel (C) eine Cf.  $(21_2, 14_3)$ , deren Entfernung aus  $\pi_7$  eine ditrigonische Cf.  $21_3$  liefert, in der z. B. der Punkt 12 nur mit den Geraden 156 und 267 verbunden ist; es kann leicht eingesehen werden, dass sie keine Hauptsiebenseite besitzt, also nicht wie  $\pi_7$  und obige  $(21_1, 28_3)$  zu einfacheren Cf. Anlass bietet. Jene  $21_3$  wird weiter unten aus einem anderen Gesichtspunkte betrachtet werden.

8. Offenbar besteht ein *Hauptvielseit* der  $\pi_n$  aus  $\binom{n}{2} : 3$  Geraden, woraus erhellt, dass  $n \equiv 0$  oder  $\equiv 1 \pmod{3}$  sein muss. Nun kann die Zahl 1 entweder mit  $(n-1) : 2$  oder mit  $(n-2) : 2$  aus den Zahlen 2 bis  $n$  gebildeten Paaren zu getrennten Geraden zusammengesetzt werden, je nachdem  $n$  ungerade oder gerade ist. Im ersten Falle giebt es  $n(n-1) : 6$ , im zweiten  $n(n-2) : 6$  getrennte Gerade; die erforderliche Anzahl  $\binom{n}{2} : 3$  kann also nur für ungerades  $n$  erhalten werden, wonach  $n \equiv 1$  oder  $\equiv 3 \pmod{6}$  sein muss.

Weil die Tabelle für ein Hauptvielseit der Cf.  $\pi_n$  jede Zahl  $(n-1) : 2$  mal enthält und die Zahlen in Tripel geordnet werden, liefert sie zugleich die Bezeichnung für eine regelmässige Cf.

$$\left( n_{(n-1):2}, \frac{1}{6} n(n-1)_3 \right).$$

Diese Bemerkung kann zur Erleichterung der Bestimmung eines Hauptvielseits benutzt werden. In einer solchen Cf. ist nämlich jeder Punkt 1 mit allen übrigen verbunden durch die  $(n-1) : 2$  in ihm zusammenlaufenden Geraden; die Ausscheidung dieser Geraden sammt dem Punkte 1 giebt somit eine



$$\left( (n-1)_{(n-3):2}, \frac{1}{6} (n-1) (n-3)_3 \right)$$

mit getrennten Punktpaaren, indem z. B. der Punkt 2 mit allen übrigen Punkten bis auf einen verbunden ist. Nimmt man aus dieser neuen Cf. das von den Punkten 2 und  $x$  gebildete getrennte Paar nebst den mit ihnen incidenten Geraden fort, so entsteht eine

$$\left( (n-3)_{(n-7):2}, \frac{1}{6} (n-3) (n-7)_3 \right)$$

welche für  $n \equiv 3 \pmod{4}$  getrennte Quadrupel enthält; es tragen ja die nach einem ihrer Punkte zielenden Geraden je  $(n-7)$  Punkte, wonach der betreffende Punkt von drei weiteren Punkten getrennt ist, die wegen der Regelmässigkeit der Cf. auch unter sich nicht verbunden sein können. Man kann also ein solches Quadrupel sammt den nach seinen Punkten convergirenden Geraden ausscheiden und stösst dann auf eine

$$\left( (n-7)_{(n-15):2}, \frac{1}{6} (n-7) (n-15)_3 \right)$$

mit getrennten Octupeln falls  $n \equiv 7 \pmod{8}$ . Auf diese Weise wird für  $n \equiv 2^p - 1 \pmod{2^p}$  die Bestimmung der betreffenden Tabelle abhängig von der einer Tabelle für eine regelmässige

$$\left( (n+1-2^p)_{(n+1-2^{p+1}):2}, \frac{1}{6} (n+1-2^p) (n+1-2^{p+1})_3 \right)$$

mit getrennten aus je  $2^p$  Punkten bestehenden Gruppen. Offenbar kann die Cf.

$$\left( (n-1)_{(n-3):2}, \frac{1}{6} (n-1) (n-3)_3 \right)$$

umgangen werden, indem die Ausscheidung der Geraden 123 nebst den mit ihr verbundenen  $3(n-3):2$  Geraden sofort die Cf.

$$\left( (n-3)_{(n-7):2}, \frac{1}{6} (n-3) (n-7)_3 \right)$$

aus der ursprünglichen entstehen lässt.

9. Als Beispiel möge die Bestimmung der Tabelle eines Hauptfünfundreissigseits der  $\pi_{15}$  hier einen Platz finden. Indem jene Tabelle zugleich eine  $(15_7, 35_3)$  darstellt, wird man durch obige Bemerkung auf eine  $(12_4, 16_3)$  mit drei getrennten Punktquadrupeln geführt, deren Diagonalen sich in drei getrennte Sextupel anordnen lassen; dieser Bedingung genügt die von mir in einer anderen Arbeit betrachtete Cf.  $(12_4, 16_3) A^*)$ . Werden die dort benutzten Zeichen  $1', 2', 3', 4'; 1'', 2'', 3'', 4''$

\*) Acta Mathematica 12, S. 64.

bezüglich durch die Zahlen 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12 ersetzt, so entsteht die Tabelle:

(E)	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
	9	10	11	12	10	9	12	11	11	12	9	10	12	11	10	9

Von den 18 Seiten der vollständigen Vierecke 1234, 5678, 9(10)(11)(12) müssen nun in der Cf. (15<sub>7</sub>, 35<sub>3</sub>) deren 6 nach einem Punkte 13, 6 nach einem Punkte 14, 6 nach einem Punkte 15 convergiren; die 35<sup>te</sup> Gerade ist dann (13)(14)(15). Demnach wird (E) zur gewünschten Tabelle ergänzt durch nachstehende Tafel (F)

(F)	1	3	5	7	9	11	1	2	5	6	9	10	1	2	5	6	9	10	13
	2	4	6	8	10	12	3	4	7	8	11	12	4	3	8	7	12	11	14
	13	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	15	15

In der Cf.

$$\left( \binom{n}{2}_{n-3}, \frac{1}{6} n(n-1)(n-3)_3 \right),$$

welche aus  $\pi_n$  durch Abtrennung eines Hauptvielseits hervorgeht, ist jeder Punkt  $ik$  mit  $(n-3)$  Paaren  $il$ ,  $kl$  allineirt, welche in der  $\pi_n$  unter sich durch  $2 \binom{n-3}{2}$  Gerade verbunden werden; von diesen sind aber  $2 \times \frac{n-3}{2}$  als Gerade des Hauptvielseits verschwunden, nämlich für jeden Punkt eine; es ist daher in der neuen Cf. jeder Punkt Ecke von  $(n-3)(n-5)$  Cf.dreiecken.

„Wenn  $n \equiv 1$  oder  $\equiv 3 \pmod{6}$ , so besitzt die Cf.  $\pi_n$  Hauptvielseite; werden die Geraden einer solchen Gruppe aus der Cf. fortgelassen, so ergibt sich allemal eine  $(n-3)(n-5)$ -trigonische

$$\left( \binom{n}{2}_{n-3}, \frac{1}{6} n(n-1)(n-3)_3 \right).“$$

10. Für die  $\pi_9$  erhält man die Tabelle eines Hauptzwölfseits am leichtesten, wenn man aus den Zahlen 1 bis 9 drei zahlenfremde Tripel bildet, jede Zahl des ersten Tripels mit jeder des zweiten combinirt und die dadurch entstandenen Paare durch je eine Zahl des dritten Tripels zu Tripeln ergänzt. Auf diese Weise wurden die nachstehenden Hauptzwölfseite aufgestellt, welche keine Gerade gemein haben.

(G)	123	147	159	168
	456	258	267	249
	789	369	348	357

(H)	129	134	178	156
	367	268	235	247
	458	579	469	389

Die Entfernung eines dieser Hauptzwölfsseite liefert eine 24-trigonische ( $36_6, 72_3$ ), die Ausscheidung der beiden Gruppen eine ( $36_3, 60_3$ ) mit 12-trigonischen Punkten, indem z. B. der Punkt 12 in dieser Cf. den durch die Geraden 145, 146, 148, 157, 158, 167; 245, 246, 248, 256, 257, 278 herausgeschnittenen Dreiecken angehört.

Als Ausgangspunkt für die Bestimmung der nachstehenden Tabelle eines Hauptsechszwanzigseits der  $\pi_{13}$  diene, den Betrachtungen des § 8 gemäss, die von Herrn Kantor als  $10_3A$  bezeichnete regelmässige Cf.; die als  $10_3B$  bezeichnete Desargues'sche Cf., (welche mit  $\pi_3$  identisch ist), konnte nicht benutzt werden, weil ihre getrennten Punktepaare sich nicht in drei von einander unabhängige Quintupel ordnen lassen.

$$(I) \quad \begin{array}{cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 7 & 10 & 9 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 7 & 11 & 12 & 13 & 6 & 11 & 13 & 9 & 12 & 8 & 12 & 13 & 11 & 10 & 12 & 11 & 13 & 10 & 9 & 13 & 12 & 11 & 10 & 13 \end{array}$$

11. Die Geraden der aus  $\pi_3$  abgeleiteten ( $24_4, 32_3$ ) wurden in Tabelle (B) in vier Octupel geordnet, welche offenbar vier Hauptachtseite darstellen, es können somit aus jener Cf. durch Ausscheidung von einem oder zwei dieser Octupel Cf.  $24_3$  und ( $24_2, 16_3$ ) gebildet werden.

Im Allgemeinen wird eine aus  $\pi_{2n}$  hervorgegangene

$$\left(4\binom{n}{2}_{2n-4}, 8\binom{n}{3}_3\right)$$

nur dann Hauptvielseite gestatten, falls  $\binom{n}{2}$  ein Vielfaches von 3, also  $2n \equiv 0$  oder  $\equiv 2 \pmod{3}$  ist. In der betreffenden Tabelle ist jede Zahl dann mit  $(n-1)$  aus den übrigen  $(2n-1)$  Zahlen gebildeten Paaren zu Tripeln vereinigt, und die Gesamtheit dieser Tripel stellt eine Cf.

$$\left(2n_{(n-1)}, \frac{2}{3}n(n-1)_3\right)$$

dar, deren Punkte  $n$  getrennte Paare bilden, wonach die Ausscheidung der mit einem solchen Paare incidenten Geraden eine Cf.

$$\left((2n-2)_{(n-3)}, \frac{2}{3}(n-1)(n-3)_3\right)$$

liefert; hierdurch wird die Bestimmung der Tabelle auf ähnliche Weise wie in N. 8 wesentlich erleichtert.

Beispielsweise wurde nachstehende ( $12_5, 20_3$ ) mit Hülfe der oben erwähnten  $10_3A$  abgeleitet. Werden die durch diese Tabelle dargestellten Geraden aus einer in  $\pi_{12}$  enthaltenen Cf. ( $60_5, 160_3$ ) fortgelassen, so ergibt sich eine Cf. ( $60_7, 140_3$ ).

(K)	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7
	2	4	6	8	9	4	5	8	10	4	5	7	9	7	10	6	7	8	9	8
	3	5	7	11	12	6	11	9	12	8	12	11	10	12	11	10	9	12	11	10

Aus Tabelle (K) ist leicht ersichtlich, dass die betreffende  $(60_8, 160_3)$  aus  $\pi_{12}$  entsteht durch Entfernung der mit den Punkten 1(10), 27, 36, 49, 58, (11)(12) incidenten Geraden. Die oben erwähnte  $(60_7, 140_3)$  ist keine regelmässige Cf., indem von den zwölf Vierseiten, welchen jeder ihrer Punkte angehört, je vier durch die Geraden 126, 12(12), je drei durch die übrigen in 12 zusammenlaufenden Geraden begrenzt werden.

Die durch die Tabelle (L) dargestellte, von (K) unabhängige, Gruppe von 20 getrennten Geraden erlaubt die Aufstellung einer in der  $(60_7, 140_3)$  enthaltenen  $(60_6, 120_3)$ , in welcher jeder Punkt in vier Vierseiten vorkommt; dabei gehören zwei der nach jenem Punkte zielenden Geraden je zwei dieser Vierseite, jede der übrigen je einem der Vierseite an.

(L)	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	7	9
	2	3	4	5	8	3	4	8	10	4	5	8	6	7	6	7	7	8	9	10
	6	7	11	12	9	9	5	12	11	12	11	10	10	8	9	10	12	11	11	12

„Wenn  $n \equiv 0$  oder  $\equiv 1 \pmod{3}$ , so sind in der aus  $\pi_{2n}$  abgeleiteten Cf.

$$\left(4\binom{n}{2}_{2n-4}, 8\binom{n}{3}_3\right)$$

Cf.

$$\left(4\binom{n}{2}_{2n-5}, \frac{2}{3}n(n-1)(2n-5)_3\right)$$

enthalten, die durch Abtrennung eines Hauptvielseits aus ihr hervorgehen.“

12. Werden aus der  $\pi_9$  die Geraden 147, 258, 369 sammt den mit ihnen verbundenen Geraden entfernt, so ergibt sich eine atri-gonische Cf. 27<sub>3</sub> (vgl. § 3, 5) mit den Geraden:

(M)	123	234	378
	126	237	456
	129	246	468
	135	249	459
	138	267	489
	156	279	567
	159	345	579
	168	348	678
	189	357	789

Aus dieser  $27_3$  kann eine  $(27_2, 18_3)$  hergeleitet werden mit Hülfe des nachstehenden Hauptneunseits

(N)

1	1	1	2	2	3	3	4	6
2	5	8	4	7	5	4	5	7
3	6	9	6	9	7	8	9	8

Die

$$\left(9\binom{m}{2}_{3m-6}, 27\binom{m}{3}_3\right)$$

welche aus  $\pi_{3m}$  entsteht durch Entfernung der mit  $m$  zahlenfremden Geraden verbundenen Geraden, kann nur für ungerades  $m$  Hauptvielseite besitzen; indem nämlich die Tabelle der  $3\binom{m}{2}$  getrennten Geraden jede der  $3m$  Zahlen gleich oft aufweisen muss, kann  $(m-1)$  nur gerade sein.

13. Für die  $(48_4, 64_3)$ , welche in § 2, 4 aus  $\pi_{12}$  hergeleitet wurde, enthält Tabelle (E) ein Hauptsechszehnseit, dessen Beseitigung eine  $48_3$  ergibt. Diese  $48_3$  erlaubt die Aufstellung des in (O) dargestellten Hauptsechszehnseits, durch dessen Ausscheidung eine  $(48_2, 32_3)$  entsteht.

(O)

1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
10	11	12	9	11	10	9	12	12	9	10	11	9	12	11	10

„Jede atrigonische

$$(3p_p^2, p_3^3),$$

welche durch Entfernung der mit  $p$  zahlenfremden Geraden verbundenen Cf.geraden aus  $\pi_{3p}$  gebildet werden kann, besitzt Haupt- $p^2$ -seite, deren jedes eine

$$(3p_{p-1}^2, p^2(p-1)_3)$$

entstehen lässt.“

Ähnliche Sätze, auf die ich hier nicht näher eingehe, können aufgestellt werden für die in § 3, 6 abgeleiteten Cf.

## § 5.

Gruppen gegenseitig getrennter Cf.  $\pi$ .

14. Im § 2, 4 gab die Betrachtung zahlenfremder Vierseite Anlass zur Bildung neuer Cf.; hiernach lässt sich vermuthen, dass es polyedrale Cf. gebe, für welche eine Gruppe getrennter Vierseite sämtliche Cf.punkte enthalte; eine solche dem Hauptvielseite analoge Gruppe müsste dann aus  $\binom{n}{2} : 6$  Vierseiten bestehen, woraus sich die Bedingung  $n \equiv 0, 1, 4$  oder  $9 \pmod{12}$  ergibt. Indem nun zwei  $\pi_4$ ,

welche keinen Punkt gemein haben, höchstens in einer Zahl übereinstimmen, muss in der Tabelle für eine „Haupt- $\pi_4$ -gruppe“ jede Zahl mit  $(n-1):3$  zahlenfremden Tripeln zu Quadrupeln vereinigt sein; diese zweite Bedingung beschränkt die Möglichkeit solcher Gruppen auf die Fälle, wo  $n \equiv 1$  oder  $\equiv 4 \pmod{12}$ .

Offenbar stellt die Tabelle einer Haupt- $\pi_4$ -Gruppe zugleich eine

$$\left( n_{\frac{1}{3}(n-1)}, \frac{1}{12} n(n-1)_4 \right)$$

dar, in der jeder Cf.punkt mit allen übrigen Punkten verbunden ist, wonach die Ausscheidung der mit ihm incidenten Geraden eine

$$\left( (n-1)_{\frac{1}{3}(n-4)}, \frac{1}{12} (n-1)(n-4)_4 \right)$$

ergibt. Es lässt sich somit die Bestimmung der betreffenden Tabelle, ebenso wie für die Hauptvielseite, auf einfachere Aufgaben zurückführen.

Für den kleinsten Werth, den  $n$  den Bedingungen gemäss haben kann, also für  $n = 13$ , wurde Tabelle (P) aus der Tabelle eines Hauptzwölfeits der  $\pi_9$  abgeleitet.

(P)

1	1	1	2	2	3	3	6	1	2	3	4	10
2	4	5	4	5	5	4	7	8	7	6	5	11
3	7	6	6	8	7	8	8	9	9	9	9	12
10	11	12	13	11	13	12	10	13	12	11	10	13

Werden die dreizehn durch (P) versinnlichten  $\pi_4$  aus der  $\pi_{13}$  fortgelassen, so entsteht eine Cf.  $(78_9, 234_3)$ , in welcher die Gerade 124 sechs  $\pi_4$  begrenzt, indem die Vierseite 1234, 1246, 1247, 124(13) durch die Abtrennung der Geraden 123, 246, 147, 24(13) aufgehoben sind.

Für die  $\pi_{16}$  giebt die Tabelle (Q) eine aus zwanzig Vierseiten bestehende Gruppe, deren Ausscheidung eine  $(120_{12}, 480_3)$  liefert.

(Q)

1	5	9	13	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	6	10	14	5	8	6	7	6	7	5	8	7	6	8	5	8	5	7	6
3	7	11	15	9	11	12	10	10	12	11	9	11	9	10	12	12	10	9	11
4	8	12	16	13	14	16	15	14	13	15	16	16	15	13	14	15	16	14	13

„Für  $n \equiv 1$  oder  $\equiv 4 \pmod{12}$  besitzt eine  $\pi_n$  „Haupt- $\pi_4$ -gruppen“; durch Entfernung der Seiten dieser  $\pi_4$  ergibt sich dann eine

$$\left( \frac{1}{2} n(n-1)_{n-4}, \frac{1}{6} n(n-1)(n-4)_3 \right).$$

15. Aus Tabelle (Q) lässt sich eine  $21_3$  bilden, indem die ersten vier Quadrupel durch den Punkt (17), die anderen Quadrupel bezüglich durch (18), (19), (20), (21) zu Quintupeln ergänzt und ihnen das Quintupel (17), (18), (19), (20), (21) zugesellt wird. So entsteht Tabelle (R), welche eine „Haupt- $\pi_3$ -Gruppe“ der  $\pi_{21}$  darstellt, d. h. eine Gruppe von Cf.  $\pi_3$ , die zusammen alle Punkte der  $\pi_{21}$  enthalten; die Ausscheidung der jenen  $\pi_3$  angehörenden Geraden gibt daher eine  $(210_{18}, 1120_3)$ .

	1	5	9	13	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	17
	2	6	10	14	5	8	6	7	6	7	5	8	7	6	8	5	8	5	7	6	18
(R)	3	7	11	15	9	11	12	10	10	12	11	9	11	9	10	12	12	10	9	11	19
	4	8	12	16	13	14	16	15	14	13	15	16	16	15	13	14	15	16	14	13	20
	17	17	17	17	18	18	18	18	19	19	19	19	20	20	20	20	21	21	21	21	21

Offenbar kann eine aus getrennten Cf.  $\pi_p$  zusammengesetzte Gruppe nur dann sämtliche Punkte der  $\pi_n$  enthalten, wenn  $\binom{n}{2}$  ein Vielfaches von  $\binom{p}{2}$ , also  $n(n-1) \equiv 0 \pmod{p(p-1)}$  ist. Indem in der Tabelle einer solchen „Haupt- $\pi_p$ -Gruppe“ jede der Zahlen 1 bis  $n$  gleich oft vorkommt, also jede mit  $(n-1):(p-1)$  zahlenfremden Gruppen verbunden ist, muss  $(p-1)$  ein Theiler von  $(n-1)$  sein. Durch Entfernung der Geraden, welche den Cf.  $\pi_p$  der Hauptgruppe angehören, verliert jeder Punkt der  $\pi_n$   $(p-2)$  von den nach ihm zielenden Geraden, und es ergibt sich eine aus  $\binom{n}{2}$  Punkten und

$$\binom{n}{3} - \frac{n(n-1)}{p(p-1)} \binom{p}{3}$$

Geraden zusammengesetzte Cf.

„Wenn  $(n-1)$  ein Vielfaches von  $(p-1)$  und zugleich  $\binom{n}{2}$  ein Vielfaches von  $\binom{p}{2}$  ist, so erlaubt die Cf.  $\pi_n$  die Aufstellung von „Haupt- $\pi_p$ -Gruppen“, denen die Eigenschaft zukommt, dass die Ausscheidung sämtlicher einer Gruppe angehörenden Geraden eine in  $\pi_n$  enthaltene

ergibt.“

$$\left( \binom{n}{2} \right)_{n-p}, \quad \frac{1}{6} n(n-1)(n-p)_3$$

## § 6.

### Cyklen von Vielecken in der Cf. $\pi$ .

16. Bekanntlich lässt sich die Desargues'sche Cf.  $\pi_3$  auf sechs verschiedene Arten auffassen als bestehend aus zwei Fünfecken, deren

jedes dem andern gleichzeitig ein- und umbeschrieben ist.\*) Es sind beispielsweise 12, 23, 34, 45, 51 die Ecken eines Fünfecks, dessen Seiten 123, 234, 345, 451, 512 bezüglich die Ecken 13, 24, 35, 41, 52 des von den Geraden 135, 241, 352, 413, 524 begrenzten Fünfecks tragen, indess diese Seiten in der obigen Reihenfolge die Ecken 15, 12, 23, 34, 45 des ersten Fünfecks enthalten. Betrachtet man 12 als den ersten, 23 als den zweiten Eckpunkt, 123 als die erste Seite des ersten Fünfecks, 13 als den ersten, 35 als den zweiten Eckpunkt, 135 als die erste Seite des zweiten Fünfecks, so ist allemal der  $i^{\text{te}}$  Eckpunkt der zweiten mit der  $(2i - 1)^{\text{ten}}$  Seite der ersten Figur, aber die  $i^{\text{te}}$  Ecke der ersten mit der  $(1 - 2i)^{\text{ten}}$  Seite der zweiten Figur incident, vorausgesetzt, dass für die nach dieser Regel bestimmten Zahlen ihre kleinsten positiven Reste mod. 5 eintreten.

In der Cf.  $\pi_7$  begrenzen die nachstehenden drei Geradenseptupel drei Siebenecke mit den in Tabelle (T) aufgezählten Eckpunkten; sie bilden eine bereits von Herrn Cayley bemerkte Figur, in welcher in der cyklischen Reihenfolge  $a, b, c, a$  jedes Siebeneck dem vorangehenden einbeschrieben, daher dem folgenden umbeschrieben ist.

- |     |      |                                    |
|-----|------|------------------------------------|
|     | I.   | 123, 234, 345, 456, 567, 671, 712. |
| (S) | II.  | 135, 357, 572, 724, 246, 461, 613. |
|     | III. | 152, 526, 263, 637, 374, 741, 415. |
|     | a.   | 12, 23, 34, 45, 56, 67, 71.        |
| (T) | b.   | 13, 35, 57, 72, 24, 46, 61.        |
|     | c.   | 15, 52, 26, 63, 37, 74, 41.        |

Diese Figur weicht darin von  $\pi_3$  ab, dass der  $i^{\text{te}}$  Eckpunkt von  $b, c, a$  jedesmal mit der  $(2i - 1)^{\text{ten}}$  Seite von  $a, b, c$  incident ist. Sie ist also nach der Bezeichnung des Herrn Schönflies eine Cf. *erster Art*, indess  $\pi_3$  als eine Cf. *zweiter Art* zu betrachten wäre.\*\*\*) Diese Cf.  $21_3$  entsteht aus  $\pi_7$  durch Abtrennung der beiden Hauptseptupel

$$\begin{cases} 124, 137, 156, 235, 267, 346, 457, \\ 126, 134, 157, 237, 245, 356, 467, \end{cases}$$

ist also gleichartig mit der im § 4, 7 abgeleiteten ditrigonischen  $21_3$ .

Jede Permutation der Zahlen 1 bis 7 erlaubt die Aufstellung einer  $21_3$ ; bildet man in der Reihenfolge jener Permutation die Tabellen für I und a, so ergibt sich die Reihenfolge für b, wenn man, cyklisch verfahren, die erste, dritte, ...  $(2k + 1)^{\text{ste}}$  Zahl herausgreift, für c,

\*) Wie Herr Schroeter „Ueber lineare Konstruktionen zur Herstellung der Konf.  $\pi_3$ “ (Gött. Nachr. Nr. 9, 1888) bemerkt hat, wurden diese Figur und die hiernach erwähnte  $21_3$  zuerst von Cayley in der Abhandlung „Sur quelques théorèmes de la géométrie de position“ (Crelle XXXI, S. 215 und 217) beschrieben.

\*\*) Ueber die regelmässigen Cf.  $\pi_3$  (Math. Ann. XXXI, S. 61).



wenn die erste, fünfte, ...  $(4k+1)^{\text{te}}$  Zahl genommen wird. Demnach enthält  $\pi_7$  ( $7! : 7 \times 3!$ ) oder 120 verschiedene  $21_3$ .

Eine den Figuren  $\pi_5$  und  $21_3$  analoge aus einem Cyklus von Vielecken gebildete Cf. ist offenbar nur für polyedrale Cf. ungerader Ordnung möglich. Für  $\pi_9$  ergibt obiges Verfahren eine  $27_3$ , welche aus nachstehenden drei Neunecken  $a, b, c$  besteht, und identisch ist mit der durch Tabelle (M) dargestellten atrigonischen  $27_3$ ; sie ist eine Cf. zweiter Art.

$$(U) \quad \begin{cases} a. & 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 91; \\ b. & 13, 35, 57, 79, 92, 24, 46, 68, 81; \\ c. & 15, 59, 94, 48, 83, 37, 72, 26, 61; \end{cases}$$

17. Bildet man aus den Zahlen 1 bis  $(2n+1)$  nachstehende Tabelle, wo die Zahlen  $> 2n+1$  ihre kleinsten positiven Reste mod.  $2n+1$  vertreten, so stellt sich heraus, dass es zwei Arten aus Cyklen von Vielecken bestehender Cf.  $p_3$  gibt, deren Elemente einer  $\pi_{2n+1}$  angehören.

$$(V) \quad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 \dots k & \dots & (2n+1), \\ 1 & 3 & 5 & 7 \dots (2k-1) & \dots & 2n, \\ 1 & 5 & 9 & 13 \dots (4k-3) & \dots & (2n-2), \\ 1 & 9 & 17 & 25 \dots (8k-7) & \dots & (2n-6), \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (1+2^x) & (1+2 \cdot 2^x) & (1+3 \cdot 2^x) & \dots & (1+2n \cdot 2^x). \end{cases}$$

Ist nämlich  $x$  die kleinste Zahl, welche der Congruenz  $2^x \equiv -1 \pmod{2n+1}$  genügt, so wird die letzte Zeile von (V) mit der in umgekehrter Reihenfolge genommenen ersten Zeile identisch; die ersten  $x$  Zeilen gestatten dann die Aufstellung von  $x$  Vielecken  $a_1, a_2, \dots a_x$ , deren Ecken durch je zwei benachbarte Zahlen der bezüglichen Zeile bezeichnet werden; es liegt jedesmal der  $i^{\text{te}}$  Eckpunkt eines  $(2n+1)$ -ecks auf der  $(2i-1)^{\text{ten}}$  Seite des vorangehenden Vielecks, mit Ausnahme des letzten Polygons, dessen  $(1-2i)^{\text{te}}$  Seite den  $i^{\text{ten}}$  Eckpunkt des ersten trägt; die Cf. ist zweiter Art.

Ist dagegen obige Congruenz keiner Lösung fähig und  $x$  der kleinste Werth, welcher die Congruenz  $2^x \equiv 1 \pmod{2n+1}$  befriedigt, so wird die  $(x+1)^{\text{te}}$  Zeile mit der ersten identisch, und die Tabelle giebt die Bezeichnung einer aus  $x$  Polygonen bestehenden Cf.  $(2n+1)_x$ , in der allemal die  $i^{\text{te}}$  Ecke jedes Vielecks mit der  $(2i-1)^{\text{ten}}$  Seite des vorhergehenden incident ist; die Cf. gehört der ersten Art an.

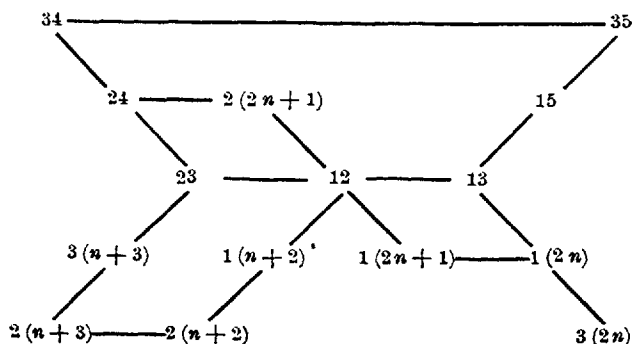
Bezeichnet  $\tau(2n+1)$  den Totient von  $(2n+1)$ , so ist bekanntlich  $2^{\tau(2n+1)} \equiv 1 \pmod{2n+1}$ , daher  $2^{\frac{1}{2}\tau(2n+1)} \equiv \pm 1 \pmod{2n+1}$  und  $x \geq \frac{1}{2}\tau(2n+1)$  oder  $x \geq n$ , weil der Totient höchstens  $2n$ .

Die zur Cf.  $(2n+1)x_3$  vereinigten Polygone haben zusammen eine Anzahl Ecken, welche also höchstens  $(2n+1)n$ , d. h. gleich der Anzahl aller der  $\pi_{2n+1}$  angehörenden Punkte ist.

Indem der auf der zweiten Seite 234 des ersten Vielecks belegene Punkt 24 die  $(n+2)^{\text{te}}$  Ecke des zweiten Vielecks ist, hat die von Herrn Schönflies mit  $l$  bezeichnete Zahl für beide Arten von  $(2n+1)x_3$  den Werth  $(n+1)$ ; für die der ersten Art angehörenden Cf. ergibt sich also  $r=0$ , für die Cf. der zweiten Art  $r \equiv -1 \pmod{2n+1}$ , was mit der obigen Betrachtung übereinstimmt.

18. Die vorletzte Zeile der Tabelle (V) enthält die Zahlen 1,  $(1+2^{x-1})$ ,  $(1+2 \cdot 2^{x-1})$ ,  $(1+3 \cdot 2^{x-1})$  u. s. w. Gibt es eine Zahl  $x$ , welche der Congruenz  $2^x \equiv -1 \pmod{2n+1}$  genügt, so wird  $2^{x-1} \equiv n$ ,  $3 \cdot 2^{x-1} \equiv n-1$  und jene Zeile geht über in 1,  $n+1$ ,  $2n+1$ ,  $n$ ,  $2n$ ,  $n-1$ , u. s. w. Hat jene Congruenz keine Wurzel, und befriedigt  $x$  die Congruenz  $2^x \equiv 1 \pmod{2n+1}$ , so enthält die betreffende Reihe die Zahlen 1,  $n+2$ ,  $2$ ,  $n+3$ ,  $3$ ,  $n+4$  u. s. w. In der aus  $\pi_{2n+1}$  abgeleiteten  $(2n+1)x_3$  ist der Punkt 12 somit in beiden Fällen mit den Geraden 123,  $12(n+2)$  und  $12(2n+1)$  incident. Beachtet man, dass zwei Punkte  $ab$  und  $ac$  nur dann durch eine Gerade der  $(2n+1)x_3$  verbunden werden, wenn die Zahlen  $a, b, c$  (wo nöthig durch ihnen mod.  $(2n+1)$  congruente Zahlen ersetzt) in irgend einer Reihenfolge eine arithmetische Progression bilden, so ergibt sich, dass die Punkte 13 und  $1(n+2)$  nur für  $2n+1=5$  oder 7, die Punkte 13 und  $1(2n+1)$  nur für  $2n+1=5$ , die Punkte  $1(n+2)$  und  $1(2n+1)$  ebenfalls nur für  $2n+1=5$  verbunden sind. Die Cf.  $(2n+1)x_3$  sind daher *atrigonisch*, wofern nicht  $2n+1=5$  oder 7.

Nachstehendes Schema zeigt, inwiefern die in der  $(2n+1)x_3$  mit 12, 23, 13 allineirten Punkte durch Cf. gerade verbunden werden.



Ausser den in diesem Schema angedeuteten Verbindungslinien sind in der oben erwähnten  $27_3$  noch die Punktepaare 34,  $3(2n)$ ; 35,  $3(n+3)$ ;

$3(n+3)$ ,  $3(2n)$ ;  $15$ ,  $1(2n+1)$ ;  $15$ ,  $1(n+2)$ ;  $24$ ,  $2(n+2)$ ;  $1(2n)$ ,  $1(n+2)$ ;  $2(n+3)$ ,  $2(2n+1)$  durch Cf. gerade verbunden; in der aus  $\pi_{15}$  abgeleiteten  $60_3$  ist diess für die Paare  $15$ ,  $1(n+2)$  und  $3(n+3)$ ,  $3(2n)$  der Fall.

„Bezeichnet  $x$  die kleinste Wurzel der Congruenz  $2x \equiv -1 \pmod{2n+1}$ , oder wenn diese unmöglich ist, die kleinste Wurzel der Congruenz  $2x \equiv 1 \pmod{2n+1}$ , so enthält die Cf.  $\pi_{2n+1}$   $[(2n+1)! : (2n+1)2x]$  Cf.  $(2n+1)x_3$ , welche aus einem Cyklus von  $x$  einfachen  $(2n+1)$ -Ecken derart zusammengesetzt sind, dass jedes Vieleck einem Vielecke eingeschrieben, einem anderen umbeschrieben ist. Diese Cf. sind, (die Fülle  $2n+1=5$  oder  $7$  ausgenommen), atrigonisch; jede Gerade begrenzt vier einfache Vierecke, mit Ausnahme der aus  $\pi_9$  und  $\pi_{15}$  gebildeten Cf.  $27_3$  und  $60_3$ , wo diese Anzahl zwölf bezüglich sechs beträgt.“

## § 7.

Halb-regelmässige Cf. in der  $\pi$ .

19. In der  $\pi_7$  ist die Gerade 123 ausser von den Geraden 456, 457, 467, 567 noch von den in (W) aufgezählten Geraden getrennt.

	145	146	147	156	157	167
(W)	245	246	247	256	257	267
	345	346	347	356	357	367

Diese Geraden bilden offenbar eine Cf.  $18_3$ , welche aus vier paarweise perspectivisch gelegenen Punkttupeln  $1i$ ,  $2i$ ,  $3i$  ( $i=4, 5, 6, 7$ ) sammt den sechs Centren und den Perspectivitätsstrahlen zusammengesetzt ist; sie enthält 3 vollständige Vierecke, also 12 Cf.dreiecke; jeder der 12 Punkte  $1i$ ,  $2i$ ,  $3i$  ist tritrigonisch, die übrigen sind atrigonisch.

Denkt man sich die 4 Punkttupel  $1i$ ,  $2i$ ,  $3i$  bezüglich mit 4 nach einem Punkte  $c$  zielenden Geraden incident, so haben jene 3 Vierecke in Bezug auf  $c$  eine solche perspectivische Lage, dass sie das von je zweien aus Perspectivitätsaxen gebildete Vierseit gemein haben. Diese Bemerkung gestattet die Herstellung einer mit jener  $18_3$  gleichartigen Cf.

Allgemein sind in der  $\pi_{2n+1}$  die  $n$ -punktigen Gruppen  $1i$ ,  $2i$ ,  $3i$ , ...  $ki$ , ...  $ni$  ( $i=n+1, n+2, \dots, 2n, 2n+1$ ) paarweise perspectivisch in Bezug auf die  $\binom{n+1}{2}$  Punkte  $ij$  ( $i=n+1$  bis  $2n+1$ ,  $j=n+2$  bis  $2n+1$ ), bilden also mit diesen  $\binom{n+1}{2}$  Punkten und den  $n\binom{n+1}{2}$  Perspectivitätsstrahlen eine

$$\left(\frac{3}{2}n(n+1)_n, \frac{1}{2}n^2(n+1)_3\right).$$

Die übrigen Geraden der  $\pi_{2n+1}$  gehören theilweise einer  $\pi_n$  mit der Bezeichnung  $1\ 2\ 3\ \dots\ (n-1)\ n$ , zum Theil einer von den Punkten  $ij$  bestimmten  $\pi_{n+1}$  mit der Bezeichnung  $(n+1)\ (n+2)\ \dots\ 2n\ (2n+1)$  an, indess der Rest jener Geraden nach den Punkten der  $\pi_n$  zielt.

„Entfernt man aus einer  $\pi_{2n+1}$  eine der  $\binom{2n+1}{n}$  in ihr enthaltenen  $\pi_n$ , die in den Punkten dieser  $\pi_n$  zusammenlaufenden Geraden und die Geraden der von den übrigen Punkten der  $\pi_{2n+1}$  bestimmten  $\pi_{n+1}$ , so ergibt sich eine Cf.

$$\left( 3\binom{n+1}{2}_n, \quad n\binom{n+1}{2}_3 \right)$$

mit  $n(n+1)$  Punkten, welche  $\binom{n}{2}$ -trigonisch, und  $\binom{n+1}{2}$  Punkten, die atrigonisch sind. Die Cf. lässt sich auffassen als die Zusammenstellung von  $(n+1)$  aus je  $n$  Punkten gebildeten Gruppen mit den  $\binom{n+1}{2}$  zu den Gruppenpaaren gehörigen Perspectivitätscentren und den betreffenden Perspectivitätsstrahlen.“

Kampen, im December 1888.

---