Ueber das vollständige System einer binären Form achter Ordnung.

(Fortsetzung der gleichnamigen Abhandlung p. 31—51 dieses Bandes.)

Von

von Gall in Mainz.

Nachdem mir durch Entgegenkommen der Annalenredaction Sylvester's Publicationen über binäre Formen achter Ordnung zugänglich geworden sind, habe ich meine Grundformen nochmals einer eingehenden Sichtung unterzogen, deren Erfolg eine *fast* völlige Uebereinstimmung beider vollständigen Systeme gewesen ist. Es hat sich nicht nur gezeigt, dass auch $(pk)_2 = p_2$ und $(H\Delta)^3 = H'''$ auszulassende Formen sind, sondern dass auch H_Δ und $(p\Delta)^4 = p^{IV}$ reducirende Factoren sind. Hiermit fallen die meisten Formen H und P fort. Endlich folgt noch aus zwei allgemeinen Sätzen über biquadratische Formen, dass eine Reihe weiterer Formen überflüssig ist. Zum Schlusse wurde eine Relation zwischen D und $(i\,k^2)^8$ entwickelt und die noch vorhandene Differenz beider vollständigen Systeme besprochen. Ich habe drei der Sylvester'schen Formen ausscheiden zu müssen geglaubt, eine bei Sylvester ausgeschiedene Form vermochte ich nicht zu reduciren, auch konnte ich mich leider nicht überzeugen, dass bei mir Fehler vorliegen.

§ 9. $(pk)_2$.

Durch Vertauschung von i und f erhält man aus den Formeln pag. 42 der angeführten Abhandlung d. J. die beiden gleichartigen:

$$\begin{cases} 6p_2 + 2[(fi)^3k]_1 + \frac{7}{11}(fi)_4\cdot k - f\cdot i_4 = 4(f_3i)_1 - \frac{1}{3}f_4\cdot i \\ 6p_2 - 2[(fi)^3k]_1 + \frac{7}{11}(fi)_4\cdot k - f_4\cdot i = 4(i_3f)_1 - \frac{1}{3}i_4\cdot f, \end{cases}$$

welche die Relation ergeben:

$$\text{(I)} \qquad (f_3i)_1 - (i_3f)_1 = [(fi)^3, k]_1 - \frac{1}{3}(f\cdot i_4 - i\cdot f_4).$$

Benützen wir dieselbe und die Identität:

$$(f_1k)_1 = \frac{7}{10}f_2\cdot k - \frac{1}{2}f\cdot\Delta,$$

so erhalten wir aus den aus pag. 42 folgenden verwandten Formeln:

$$\left\{\begin{array}{l} 4[(fi)^3k]_1 + (fi)^4\cdot k + f\cdot i_4 = 6(f_2i)^2 - (f_3i)^1 + \frac{23}{21} f_4 \cdot i \\ -4[(fi)^3k]_1 + (fi)^4\cdot k + i\cdot f_4 = 6(i_2f)^2 - (i_3f)^1 + \frac{23}{11} i_4 \cdot f, \end{array}\right.$$

die zweite Relation:

(II) $$(f_2i)_2 - (i_2f)_2 = \frac{3}{20} f_2\cdot k - \frac{3}{28} f\cdot\Delta - \frac{37}{6\cdot 21}(fi_4 - if_4).$$

Eine weitere Relation zwischen $(f_2i)_2$ und $(i_2f)^2$ ergiebt sich aus $\begin{pmatrix} i & i & f \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ und Ersetzung der $(fi)^k$ durch f_{k-2} entsprechend den Formeln des § 1.:

(III) $$\frac{3}{2}[(ii')^4f]_2 + \frac{5}{28}(ii')^6\cdot f = -\frac{1}{7}(f_1i)_3 - \frac{6}{35}(f_2i)_2 + \frac{1}{20}A\cdot p$$
$$+\frac{5}{7}(f_3i)_1 + \frac{15}{8\cdot 49} f_4\cdot i,$$

wenn wir hierin die leicht zu bestimmenden Werthe von $(ii')^4$ und $(ii')^6$ einsetzen. $(ii')^6$ entnehmen wir dem § 6.; $(ii')^4$ findet man aus $\begin{pmatrix} f & f & i \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des § 1.:

$$7(ii')_4 + 12i_2 + \frac{7}{6}Ai - \frac{7}{5}Bf = -\frac{4}{5}(f_2f)_4 - 12(f_3f)_3 + \frac{18}{7}(f_4f)_2.$$

Mit Benützung der aus $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ folgenden Gleichungen:

$$(f_2f)_4 + (f_3f)_3 + \frac{2}{7}(f_4f)_2 = i_2 + \frac{2}{7}k^2,$$
$$(f_3f)_3 + \frac{1}{2}(f_4f)_2 = \frac{3}{2}i_2 + \frac{5}{28}k^2,$$
$$(f_4f)_2 = H_4 + \frac{18}{11}i_2 + \frac{5}{42}k^2$$

und der im § 3. entwickelten Darstellung von H_4, kann man die Glieder $(f_\varrho f)^{6-\varrho}$ successive eliminiren und erhält endlich:

(IV) $$(ii')^4 = -\frac{8}{35}i_2 - \frac{1}{30}Ai + \frac{1}{15}Bf + \frac{6}{5\cdot 49}k^2.$$

Dementsprechend geht (III) über in:

(V) $$-12(i_2f)_2 - \frac{7}{8}Ap + \frac{7}{2}BH + \frac{9}{7}f_2\cdot k + \frac{1}{7}f\cdot\Delta + \frac{75}{28}f\cdot i_4 - \frac{5}{24}Akf$$
$$= -5(f_1i)_3 - 6(f_2i)_2 + 25(f_3i)_1 + \frac{75}{56}f_4\cdot i,$$

wenn wir für $(f, k^2)^2 = f_2\cdot k - \frac{2}{7}f\cdot\Delta$, wie sich aus der Polarenentwickelung

$$k_x{}^4 k_y'^2 k_x{}^2 = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{2}{i}}{\binom{9-i}{i}}(kk')^i_{y^{2-i}}(xy)^i$$

ergiebt, setzen. Stellen wir nun die der Entwickelung von Θ_3 pag. 42 vorhergehenden Formeln mit Benützung der Relationen des § 1. um, so gehen diese über in:

$$\text{(VI)}\begin{cases} -\frac{4}{35}f_2\cdot k+\frac{1}{30}Afk-f\cdot i_4=4(f_1 i)_3-\frac{12}{5}(f_2 i)_2+2(f_3 i)_1-\frac{23}{42}f_4\cdot i \\ \frac{2}{7}f_2\cdot k+\frac{1}{30}Afk+f\cdot i_4-\frac{2}{7}f\cdot\Delta= \quad 6(f_2 i)_2-(f_3 i)_1+\frac{23}{21}f_4\cdot i \\ 6p_2+\frac{7}{55}f_2\cdot k+\frac{7}{330}Afk-f\cdot i_4-\frac{1}{7}f\cdot\Delta= \quad 4(f_3 i)_1-\frac{1}{3}f_4\cdot i, \end{cases}$$

Setzen wir endlich aus (II) den Werth von $(i_2 f)_2$ in (V) ein, so verwandelt sich letztere in:

$$\text{(VII)}\ -\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{9\cdot 12}{35}f_2\cdot k-\frac{8}{7}f\,\Delta-\frac{71}{28\cdot 3}f\cdot i_4+\frac{367}{7\cdot 24}f_4\cdot i-\frac{5}{24}Akf$$
$$=-5(f_1 i)_3-6(f_2 i)_2+25(f_3 i)_1.$$

Durch successive Elimination der Glieder auf der rechten Seite der Gleichungen (VI) und (VII) erhalten wir die Identitäten:

$$-\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{103}{35}f_2 k-\frac{8}{7}f\cdot\Delta-\frac{44}{21}f\cdot i_4+\frac{41}{14}f_4\cdot i-\frac{1}{6}Akf$$
$$=-9(f_2 i)_2+\frac{55}{2}(f_3 i)_1,$$

$$-\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{118}{35}f_2 k-\frac{11}{7}f\cdot\Delta-\frac{25}{42}f\cdot i_4+\frac{9}{7}f_4\cdot i-\frac{7}{60}Afk$$
$$=26(f_3 i)_1,$$

$$-\frac{7}{8}Ap+\frac{7}{2}BH+\frac{169}{70}f_2 k-\frac{5}{2}f\cdot\Delta+\frac{124}{21}f\cdot i_4-\frac{37}{42}f_4\cdot i$$
$$\text{(VIII)}\qquad -\frac{14}{55}Afk=39p_2.$$

Es ist also auch p_2 überflüssig.

§ 10.

Die übrigen Formen $(p, k^\alpha\cdot\Delta^\beta\cdot T^\gamma)^\varrho$.

Aus $\begin{pmatrix}\varphi & k & k\\ m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$ $m \gtreqless 5$ erhält man:

$$\sum\frac{\binom{1}{i}\binom{2}{i}}{\binom{m-1-i}{i}}[(\varphi k)^{3+i}k]^{2-i}=\sum\frac{\binom{2}{i}\binom{3}{i}}{\binom{m+1-i}{i}}[(\varphi k)^{2+i}k]^{3-i}$$

oder

$$\text{(I)}\qquad (\varphi_2 k)_3+\frac{6-m}{m}(\varphi_3 k)_2+\frac{8-2m}{(m-1)(m-2)}(\varphi_4 k)_1=0.$$

Verbinden wir hiermit die Formel des § 2.

$$(\varphi\Delta)^3=-(\varphi_3 k)_2+\frac{m-4}{m-2}(\varphi_4 k)_1,$$

so ergiebt sich

$$\text{(II)}\qquad (\varphi\Delta)^3 = \frac{m}{6-m}(\varphi_2 k)_3 - \frac{(m-3)(m-4)}{(m-1)(6-m)}(\varphi_4 k)_1.$$

Es ist mithin $(p\Delta)_3$ durch $(p_2 k)_3$ und $(p_4 k)_1$ ersetzbar. Wegen der Darstellungen von p_2 und p_4 in den § 7. und § 9. ergiebt sich hieraus, dass, von zerfallenden Formen und Formen F abgesehen, $(p\Delta)^3$ als ein Aggregat von Formen

$$((f\cdot i_4)k)_3 \quad \text{und} \quad ((i\cdot f_4)k)_3$$

erscheint, und zwar sind die dabei auftretenden zerfallenden Formen, die nicht unter F zu rechnen sind, Producte von Invarianten mit anderen Formen, was wir mit Inv. Φ bezeichnen wollen. $((fi_4)k)_3$ stellt sich als ein Aggregat von Formen $f\cdot(i_4 k)_3$, $((fi_4)^1 k)_2$, $((fi_4)^2 k)_1$ und $(fi_4)^3\cdot k$ dar. Analog der 3. Gleichung pag. 44 des § 5. findet man aber, dass $((fi_4)^1 k)_2$ auf zerfallende Formen und $((fi_4)^2 k)_1$ zurückkommt. Nach einer Bemerkung des § 5. pag. 43 ist aber $(fi_4)^2$ wie $(if_4)^2$ durch p_k und Formen F ersetzbar und mithin auch $((fi_4)k)_3$ wie $((if_4)k)_3$ durch zerfallende Formen und $(p_k k)_1$ und hiermit $(p\Delta)_3$ auszulassen.

Aus $\begin{pmatrix} \varphi & k & k \\ m & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $m \gtrless 6$ erhält man weiter

$$\sum \frac{\binom{2}{i}\binom{4}{i}}{\binom{m+1-i}{i}} [(\varphi k)^{2+i} k]^{4-i} = ((\varphi k)^4 k)^2$$

oder

$$(\varphi_2 k)_4 + \frac{8}{m}(\varphi_3 k)_3 - \frac{(m+2)(m-5)}{(m-1)(m-2)}(\varphi_4 k)_2 = 0,$$

woraus sich in Verbindung mit dem Ausdruck für $(\varphi\Delta)_4$ des § 2. ergiebt, dass $(p\Delta)_4$ durch $(p_4 k)_2$ und $(p_2 k)_4$ darstellbar ist. Wir folgern hieraus analog dem Vorhergehenden:

$$(p\Delta)_4 \equiv \Sigma[F + \text{Inv.}\,\Phi + (f\cdot i_4, k)_4 + (f_4\cdot i, k)_1].$$

$(f_4\cdot i, k)_4$ ist aber gleich einem Aggregat von Formen:

$$f_{kk}\cdot i + ((f_4 i)^1 k)_3 + ((f_4 i)^2 k)_2 + ((f_4 i)^3 k)_1 + (f_4 i)^4\cdot k.$$

Wegen der Gleichung $\frac{23}{42}(f_4 i)_4\cdot k + \cdots$ pag. 44 § 5. ist nun $((f_4 i)^1 k)_3$ durch die anderen Formen und $i_k\cdot f_k$ ersetzbar. Da aber

$$(f_4 i)_2 \equiv p_k + \Sigma(F + \text{Inv.}\,\Phi),$$

so ist auch

$$((f_4 i)^2 k)_2 \equiv \Sigma(F + \text{Inv.}\,\Phi).$$

Die übrigen Formen sind in Folge des § 1. Formen F und Inv. Φ und mithin endlich:

$$\text{(III)}\qquad (p\Delta)_4 \equiv \Sigma(F + \text{Inv.}\,\Phi + i_k\cdot f_k),$$

da für $(f\,.\,i_4, k)_4$ das gleiche Resultat erhalten wird.

Zur weiteren Betrachtung aller Formen:

$$(p\,,\ \Delta^\alpha\,\mathrm{T}^\beta)^\gamma$$

berücksichtigen wir die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}(f_4 i)_1 \text{ und } (i_4 f)_1 = \Sigma F + \Theta_1 + p_3 \\ (f_1 i)_2 \text{ und } (i_4 f)_2 = p_1 + \Sigma F\end{array}\right\} \text{vergl. pag. 43, § 5.}$$

und die aus $\begin{pmatrix} p & k & k \\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$ folgende Relation: $(p_1, k)_1 = \frac{3}{5}(p_1 k)_3$; es ergiebt dann die zweite der Gleichungen $(i_k f_k)_1$ pag. 45, § 5.

$$(i_k f_k)_1 = \Theta_{kk} + p_{k,3} + \Sigma F = \Sigma F. \quad \text{(Vergl. § 14.)}$$

Ebenso erhält man aus $\begin{pmatrix} i & k & f_k \\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$$(i_k f_k)_2 = p_{kk} + \Sigma F = \Sigma F.$$

Ohne Weiteres folgt aus den Formen des § 2.

$$(f_k i_k)^{3+i} = \Sigma F.$$

Es sind mithin auch alle weiteren Ueberschiebungen

$$(p_\Delta,\ \Delta^\alpha)^\beta \quad \text{und} \quad (p_\Delta,\ k^\alpha)^\beta$$

auszulassen. Aus allgemeinen Gründen folgt die Ueberflüssigkeit aller Formen:

$$(p\,\mathrm{T})^\alpha.$$

Wir erhalten nämlich aus der Polarenentwickelung

$$k_x{}^3 k_y \Delta_y{}^4 = \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} (k\Delta)^i{}_{y^{5-i}}\,,(xy)^i:$$

$$k_x{}^3(k\varphi)(\Delta\varphi)^4 = (k\cdot\Delta,\ \varphi)^5 - \frac{3}{2}(\mathrm{T}\varphi)^4 + \frac{C}{7}(k\varphi)^3$$

und ebenso aus der Polarenbildung $\Delta_x{}^3\Delta_y k_y{}^4$:

$$\Delta_x{}^3(\Delta\varphi)(k\varphi)^4 = (k\cdot\Delta,\ \varphi)^5 + \frac{3}{2}(\mathrm{T}\varphi)^4 + \frac{C}{7}(k\varphi)^3,$$

woraus wir sofort die Relationen ableiten:

(IV) $$3(\varphi\mathrm{T})^4 = (\varphi_\Delta k)_1 - (\varphi_k\Delta)_1\,.$$

Verbinden wir diese und die Gleichungen (4) und (5) des § 2. mit dem Obigen, so folgt sofort die Zurückführbarkeit aller Formen $(p\mathrm{T})^\alpha$. $(p_\Delta\mathrm{T})^4$ wird sofort zu

$$\Sigma(\text{Inv. }\Phi + F + (i_k\mathrm{T})^4\cdot f_k).$$

In Folge der Relationen (4) und (5), des § 2. ist endlich auch

$$(p_\Delta\mathrm{T})^5 = \Sigma(\text{Inv. }\Phi + F + i_{k\Delta}\cdot(f_k k)^2 - i_{kk}\cdot(f_k\Delta)^2),$$

$$(p_\Delta\mathrm{T})^6 = \Sigma(\text{Inv. }\Phi + F + i_{k\Delta}\cdot(f_k k)^3 - i_{kk}\cdot(f_k\Delta)^2).$$

Alle Ueberschiebungen $(p_{\Delta\Delta}\mathrm{T})^\alpha$ fallen nach dem Obigen ohne Weiteres fort.

§ 11.

$(H\Delta)^4$ und die übrigen Formen H.

Man hat nach § 2.:

$H_\Delta = -2(H_3k)^3 + \frac{7}{5}(H_4k)^2$ und nach § 3.:

$H_k \equiv \Sigma(i_2 + k^2 + \text{Inv.}\ \Phi)$,

$H_3 = \frac{1}{2}(f_kf)_1 - \frac{7}{22}i_1$,

so dass H_Δ äquivalent mit einem Aggregat von Formen:

$$((f_4f)^1k)_3 + \Sigma J + \Sigma K + \Sigma \text{Inv.}\ \Phi$$

wird. Man erhält aber analog § 5. pag. 4:

$$\frac{23}{42}(f_kf)^4\cdot k + 2((f_kf)^3k)_1 + \frac{12}{5}((f_kf)^2k)_2 + 4((f_4f)^1k)_3 + f_k^2 = f_{kk}\cdot f$$

und nach Formel (1) § 3.:

$$H_k + \frac{18}{11}i_2 + \frac{5}{42}k^2 = (f_kf)^2,$$

so dass wir der Reihe nach die Beziehungen haben:

$$((f_kf)^2k)_2 \equiv \Sigma(J + F + K + \Sigma \text{Inv.}\ \Phi),$$

$$((f_kf)^3k)_1 = [(ak)^4(ab)^3a_xb_x^5, k]_1 = \Sigma(J+K+\text{Inv.}\ \Phi)$$

und endlich

(I) $$H_\Delta \equiv \Sigma(J+F+K+\Sigma\text{Inv.}\ \Phi + f_k\cdot f_k)\,.$$

Da aber, wie ohne Weiteres einleuchtet, die Relationen bestehen:

$$(f_k, f_k)^2 = (ab)^2(ak)^4(bk')^4a_x^2b_x^2 = H_{kk} + \Sigma J + \Sigma K + \Sigma\text{Inv.}\ \Phi$$
$$= \Sigma(J+K+\text{Inv.}\ \Phi)$$

$$(f_k, f_k)^4 = (ab)^4(ak)^4(bk')^4 = \Sigma(i_{kk}+J+K+\text{Inv.}\ \Phi),$$

so ist ferner auch

(II) $$(H_\Delta\Delta^\alpha)^\beta \text{ und } (H_\Delta k^\alpha)^\beta \equiv \Sigma(J+K+\text{Inv.}\ \Phi)\,.$$

Hiermit fallen auch analog dem vorigen Paragraphen alle Formen:

$$(H_\Delta \mathrm{T})^{4+i},\quad (H_{\Delta\Delta}\mathrm{T})^\alpha$$

fort.

Es ist ferner:

$$H^{III} = (H_3k)_2 - \frac{4}{5}(H_4k),$$

und wegen des obigen Ausdruckes für H_3

$$(H_3, k)_2 = \frac{1}{2}((f_kf)^1k)^2 - \frac{7}{22}(i_1k)_2,$$

d. i.

$$H^{III} \equiv \Sigma(J+K+\text{Inv.}\ \Phi) + ((f_kf)^1k)^2.$$

Der Entwickelung von $((f_ki)^1k)_2$ (§ 5., pag. 44) entsprechend, ist aber:

$$((f_k f)^1 k)_2 + \frac{6}{5}((f_k f)_2 k)_1 + \frac{1}{2}(f_k f)_3 \cdot k + f_k \cdot f_3 = (f_k k)_3 \cdot f$$

und da für

$$(f_k f)_2 = H_k - \frac{18}{11} i_2 - \frac{5}{42} K^2,$$
$$(f_k f)_3 = J + K + \text{Inv. } \Phi$$

gesetzt werden darf, so ist endlich

$$(H\Delta)^3 \equiv \Sigma(J + K + \text{Inf. } \Phi) + f_k \cdot f_3 + f_{k,3} \cdot f$$

und hiermit auszulassen.

§ 12.

$(\varphi \mathsf{T})^2$, $(\varphi \mathsf{T})^3$ und $(\varphi_\Delta \Delta)^1$.

Es bestehen die Polarenentwickelungen:

$$k_x{}^4 \Delta_y{}^4 = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} (k\Delta)^i_{y^{4-i}} (xy)^i,$$

$$\Delta_x{}^4 k_y{}^4 = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} (\Delta k)^i_{y^{4-i}} (xy)^i,$$

aus welchen die Gleichungen folgen:

$$k \cdot (\varphi\Delta)^4 = (k\cdot\Delta, \varphi)^4 - 2(\mathsf{T}\varphi)^3 + \frac{2}{7} C \cdot \varphi_2 + \frac{1}{5} D \cdot \varphi,$$

$$\Delta \cdot (\varphi k)^4 = (k\cdot\Delta, \varphi)^4 + 2(\mathsf{T}\varphi)^3 + \frac{2}{7} C \cdot \varphi_2 + \frac{1}{5} D \cdot \varphi$$

oder:

(1) $$k \cdot \varphi_\Delta - \Delta \cdot \varphi_k = 4(\varphi \mathsf{T})^3.$$

Ebenso folgen aus den Polarenentwickelungen:

$$k_x{}^4 \Delta_y{}^3 \Delta_x = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{3}{i}}{\binom{9-i}{i}} (k\Delta)^i_{y^{3-i}} (xy)^i,$$

$$\Delta_x{}^4 k_y{}^3 k_x = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{3}{i}}{\binom{9-i}{i}} (\Delta k)^i_{y^{3-i}} (xy)^i$$

die Relationen:

$$- k \cdot \varphi^{III} = (k\cdot\Delta, \varphi)^3 - \frac{3}{2}(\mathsf{T}\varphi)^2 + \frac{1}{7} C (k\varphi)_1,$$

$$- \Delta \cdot \varphi_3 = (k\cdot\Delta, \varphi)^3 + \frac{3}{2}(\mathsf{T}\varphi)^2 + \frac{1}{7} C (k\varphi)_1$$

das ist:

(2) $$3(\varphi \mathsf{T})_2 = k \cdot \varphi^{III} - \Delta \cdot \varphi_3.$$

Es zerfallen demnach alle zweiten und dritten Ueberschiebungen von T mit jeder beliebigen Form φ, deren Ordnung resp. höher als 4 oder 3 ist.

Aus den Formeln (2) und (5) des § 2. folgt

$$(\Delta\varphi_\Delta)^1 = (\varphi_{\Delta,2}k)_1 - \frac{m-6}{m-4}\varphi_{\Delta,3}\cdot k$$

und

$$\varphi_{\Delta,2} = 2(\varphi\mathrm{T})^5 + \varphi_k{}^{II},$$

oder

$$(\Delta\varphi_\Delta)^1 = 2[(\varphi\mathrm{T})^5 k]_1 + (\varphi_k'' \cdot k)_1 - \frac{m-6}{m-4}\varphi_{\Delta,3}\cdot k.$$

Ebenso findet man aber auch:

$$\varphi_k'' = -\frac{2}{3}(\varphi_{k,3}k)_1 + \frac{2}{3}\,\frac{m-7}{m-5}\varphi_{kk}\cdot k - \frac{1}{6}C\varphi_k,$$

und es wird mithin:

$$\text{(I)}\quad (\Delta\varphi_\Delta)' = 2[(\varphi\mathrm{T})^5 k]_1 - \frac{2}{3}[(\varphi_{k,3}k)^1 k]^1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{m-7}{m-5}[(\varphi_{kk}\cdot k), k]_1$$
$$- \frac{1}{6}C(\varphi_k k)^1 - \frac{m-6}{m-4}\varphi_{\Delta,3}\cdot k.$$

Nach einer bekannten Formel (Clebsch: binäre Formen pag. 117) ist aber

$$((\varphi_{k,3}k)^1 k)^1 = \frac{m-10}{2(m-4)}k\cdot(\varphi_{k,3}k)^2 - \frac{1}{2}(\varphi_{k,3}\Delta - k\cdot(\varphi_{k,3}k)^2)$$
$$= \frac{m-7}{m-4}k\cdot\varphi_{k,3,2} - \frac{1}{2}\Delta\cdot\varphi_{k,3}.$$

Das hier auftretende $\varphi_{k,3,2}$ ist leicht auf einfachere Formen zu reduciren; man erhält aus:

$$\begin{pmatrix} k & \varphi_k & k \\ 4 & m-4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \varphi_{k,3,2} = -\varphi_k''' + \frac{m-8}{m-6}\varphi_{kk1}$$

und hiermit

$$\text{(II)}\qquad ((\varphi_{k3}k)^1 k)^1 = \frac{m-7}{m-4}\cdot k\cdot\left(\frac{m-8}{m-6}\varphi_{kk1} - \varphi_k'''\right) - \frac{1}{2}\Delta\cdot\varphi_{k3}.$$

Das in (I) auftretende $[(\varphi_{kk}\cdot k)k]_1$ verschwindet, sobald $m = 8$ ist; ist aber $m > 8$ [m ist hier selbstredend $\gtreqless 8$], so liefert die Polarenbildung:

$$\text{(III)}\quad \varphi_{kkx}{}^{m-8}\cdot k_y k_x{}^3 = \sum \frac{\binom{m-8}{i}\binom{1}{i}}{\binom{m-3-i}{i}}\cdot(\varphi_{kk}k)^i_{y1-i}\cdot(xy)^i,$$

$$(\varphi_{kk}\cdot k, k)_1 = \frac{m-8}{m-4}\varphi_{kk1}\cdot k.$$

Endlich ersetzen wir noch $\varphi_{\Delta,3}$ in (I) durch

$$\text{(IV)}\qquad (\varphi\mathrm{T})_6 + \varphi_k'''$$

und erhalten nunmehr:

$$(\mathrm{V})\quad (\Delta\varphi_{\varDelta})' = 2[(\varphi\mathrm{T})^5 k]_1 - \frac{2}{3}\,\frac{(m-7)(m-8)}{(m-4)(m-5)(m-6)}\,k\cdot\varphi_{kk1}$$
$$-\frac{1}{3}k\cdot\varphi_k''' + \frac{1}{3}\Delta\cdot\varphi_{k3} - \frac{1}{6}C\cdot\varphi_{k1} - \frac{m-6}{m-4}(\varphi\mathrm{T})^6\cdot k.$$

Aus $\begin{pmatrix}\mathrm{T} & \varphi & k\\ 6 & m & 4\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}$ erhält man ferner mit Berücksichtigung der Formeln (1) § 2.:*)

$$(\mathrm{VI})\quad -[(\varphi\mathrm{T})^5 k]_1 + \frac{m-5}{m-4}(\varphi\mathrm{T})^6\cdot k = \frac{1}{2}(\Delta^2\varphi)^5 - \frac{C}{12}(k^2\varphi)^5$$
$$-\frac{5}{14}C\cdot\varphi''' + \frac{5}{14}D\cdot\varphi_3.$$

Aus den Polarenentwickelungen $k_x{}^3 k_y k_y'^4$ und $\Delta_x{}^3\Delta_y\Delta_y'^4$ erhält man aber auch:

$$(\mathrm{VII})\quad \begin{cases}\varphi_{k1} = (\varphi k^2)^5 + \frac{6}{7}\varphi''',\\ \varphi_{\varDelta}^{I} = (\varphi\Delta^2)^5 + \frac{6}{7}\left(-\frac{C}{6}\varphi''' + \frac{D}{3}\varphi_3\right),\end{cases}$$

und endlich:

$$+[(\varphi\mathrm{T})^5 k]_1 - \frac{m-5}{m-4}(\varphi\mathrm{T})^6\cdot k = \frac{1}{2}\varphi_{\varDelta}' + \frac{1}{14}C\cdot\varphi''' - \frac{1}{7}D\cdot\varphi_3'$$
$$-\frac{1}{12}C\cdot\varphi_{k1} + \frac{1}{14}C\varphi''' + \frac{5}{14}C\varphi''' - \frac{5}{14}D\varphi_3,$$

oder

$$(\mathrm{VIII})\quad \varphi_{\varDelta}^{I} = 2[(\varphi\mathrm{T})^5 k]_1 - \frac{m-5}{m-4}(\varphi\mathrm{T})^6\cdot k - \frac{1}{2}C\varphi'''$$
$$+\frac{1}{2}D\varphi_3 + \frac{1}{12}C\cdot\varphi_{k1}.$$

Verbinden wir hiermit die umgestellte Gleichung (V), so erhalten wir

$$(\mathrm{IX})\quad 2\cdot\varphi_{\varDelta}^{I} = -\frac{1}{m-4}k\cdot(\varphi\mathrm{T})^6 + \frac{2}{3}\,\frac{(m-7)(m-8)}{(m-4)(m-5)(m-6)}\cdot k\cdot\varphi_{kk1}$$
$$+\frac{1}{3}k\cdot\varphi_k''' - \frac{1}{3}\Delta\cdot\varphi_{k3} + \frac{1}{4}C\cdot\varphi_{k1} - \frac{1}{2}C\cdot\varphi''' + \frac{1}{2}D\varphi_3.$$

Es zerfallen daher alle Formen $(\varphi\Delta)^4(\varphi\Delta')^1\varphi_x^{m-5}\Delta_x'^3$; $f_{\varDelta}^{I}$ liefert z. B. ein Aggregat von Gliedern:

$$k\cdot(f\mathrm{T})^6;\quad k\cdot f_k''';\quad \Delta\cdot f_{k3};\quad C\cdot f_{k1};\quad C\cdot f''';\quad D\cdot f_3.$$

---

*) Anmerkung: In dem Abdruck ist durch ein Versehen an angeführtem Ort der Ausdruck von $(\Delta\mathrm{T})_3$ mit dem von $(k\mathrm{T})_3$ vertauscht worden; es ist demgemäss zu corrigiren:

$$(k\mathrm{T})_3 = -\frac{1}{4}C\Delta + \frac{1}{4}Dk.$$

Ein Versuch auf demselben oder ähnlichem Wege ein Zerfallen von φ_Δ^{II} zu zeigen, scheitert, weil die analogen Endgleichungen für φ_Δ^{II} diese Form und das entsprechende $[(f\mathrm{T})^6 k]_1$ mit denselben Coefficienten besitzen.

§ 13.

Die Invariante D und das reducirte System.

Wir erhalten aus $\begin{pmatrix} f & f & i \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$:

$$(Hi)^8 + \frac{18}{11}(ii')^6 + \frac{5}{42}(ki)^4 = ((fi)^6 f)^4,$$

oder mit Benützung der Relationen für $(ii')^6$ und $(fi)^6$:

$$(Hi)^8 + \frac{18}{11}\left(\frac{3}{7}i_k + \frac{4}{49}\Delta - \frac{1}{30}Ak\right) + \frac{5}{42}i_k = \frac{3}{14}(f_k f)^4.$$

$(f_k f)_4$ findet man aus $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ in der Form:

$$(f_k f)_4 = i_k + \frac{12}{7}\Delta + \frac{1}{5}Ak$$

und damit auch:

$$(Hi)^8 = -\frac{20}{33}i_k + \frac{18}{77}\Delta + \frac{15}{154}Ak.$$

Schieben wir nun die Identität (7) des § 2. achtmal über i, so geht diese über in:

$$\frac{3}{4}(Hk)^4(Hi)^8 = \frac{14}{11}(i_2 i')^8 + \frac{1}{8}(k^2 i)^8 + \frac{1}{12}A(ii')^8 - \frac{1}{12}B^2.$$

Es ist aber

$$(i_2 i')^8 = (ik)^2(ii')^6(i'k)^2 = [(ii')^6 k]^4 = \frac{3}{7}i_{kk} + \frac{4}{49}D - \frac{1}{30}AC$$

und

$$(Hk)^4(Hi)^8 = -\frac{20}{33}i_{kk} + \frac{18}{77}D + \frac{15}{154}AC.$$

Mit Hinzunahme der Relation für $(ii')^8$ des § 6. erhalten wir nunmehr:

$$D = \frac{63}{4}i_{kk} - \frac{7}{4}AC + \frac{7}{180}A^3 - \frac{7}{6}B^2.$$

Wir erhalten also mit Sylvester nur die 9 Invarianten:

$$C_2^0 = A = (ff)^8,\quad C_3^0 = B = (fi)^8,\quad C_4^0 = C = (kk)^4,\quad C_5^0 = f_{kk},$$
$$C_6^0 = i_{kk},\quad C_7^0 = f_{k\Delta},\quad C_8^0 = i_{k\Delta};\quad C_9^0 = f_{\Delta\Delta};\quad C_{10}^0 = i_{\Delta\Delta},$$

wenn wir mit C_i^k eine Covariante $i$ten Grades in den Coefficienten von f_x^8 und $k$ter Ordnung in x, also mit C_i^0 eine Invariante $i$ten Grades bezeichnen wollen. Das vollständige System ist nunmehr in folgender Tafel zusammenzufassen:

Ordnung.

Grad	0	2	4	6	8	10	12	14	18	Bemerkung
1	—	—	—	—	f	—	—	—	—	Sylvester hat
2	$(ff)^4$	—	k	—	i	—	H	—	—	respective:
3	$(fi)^4$	—	f_k	f_3	f_2	f_1	p	Θ	$T=(Hf)_1$	—
4	$(kk)^4$	—	Δ, i_k	i_3	i_2	H_3, i_1	H_2	H_1	$S=(Hi)_1$	—
5	f_{kk}	f_{k3}	f_{k2}, f_Δ	f_{k1}, f'''	f''	Θ_k, p_3, f'	—	p_1	—	—
6	i_{kk}	i_{k3}	i_{k2}, i_Δ	i_{k1}, i''', T	i''	i'	—	—	—	—
7	$f_{k\Delta}$	$f_k''', (f\mathrm{T})^6$	$f_k'', (f\mathrm{T})^5$	$f_k', (f\mathrm{T})^4$	—	—	—	—	—	3 Formen C_7^6
8	$i_{k\Delta}$	$i_k''', (i\mathrm{T})^6$	$i_k'', (i\mathrm{T})^5$	$i_k', (i\mathrm{T})^4$	—	—	—	—	—	—
9	$f_{\Delta\Delta}$	$(f_k\mathrm{T})^4, f_\Delta'''$	f_Δ''	—	—	—	—	—	—	3 Formen C_9^2
10	$i_{\Delta\Delta}$	$(i_k\mathrm{T})^4, i_\Delta'''$	i_Δ''	—	—	—	—	—	—	keine Form C_{10}^4
11	—	$(f_\Delta\mathrm{T})^4$	—	—	—	—	—	—	—	2 Formen C_{11}^2
12	—	$(i_\Delta\mathrm{T})^4$	—	—	—	—	—	—	—	—

§ 14.

Die streitigen Formen.

Aus vorstehender Zusammenstellung ergiebt sich, dass Sylvester's Abzählung bis auf 4 Fälle mit dem aufgestellten Formensystem übereinstimmt. Sylvester behauptet die Existenz von 3 Formen C_7^6 gegenüber den zwei angeführten f_k' und $(f\mathrm{T})^4$, von 3 Formen C_9^2 gegenüber den obigen f_Δ'' und $(f_k\mathrm{T})^1$; er besitzt keine Form C_{10}^4, er hält also i_Δ'' für zurückführbar und nimmt endlich neben $(f_\Delta\mathrm{T})^1$ noch eine weitere Form C_{11}^2 an. Eine einfache Abzählung ergiebt aber, dass die möglichen Formen C_7^6 die folgenden sind:

$$\Theta_{kk},\ p_{k3},\ f_k',\ f_{\Delta 1} \text{ und } (f\mathrm{T})^1.$$

In Folge der analog § 2. zu findenden Relation

$$f_{\Delta 1} - f_k' = 3(f\mathrm{T})^1$$

ist $f_{\Delta 1}$ auszulassen. Es bleiben also nur noch weiter möglich:

$$\Theta_{kk} \text{ und } p_{k3}.$$

Nach § 6. ist aber p_k durch ein Aggregat von Formen f''', $f_k \cdot k$, Cf, Bi, Af_2, $A^2 f$ ersetzbar oder von der Form:

$$\Sigma(F + \text{Inv. } \Phi).$$

Dies ist in Uebereinstimmung mit Sylvester, der nur eine Form C_5^8 zulässt, also ebenfalls eine lineare Relation von der Form

$$p_k = f''' + \Phi \cdot \Psi$$

behauptet. Eine Abzählung ergiebt aber, dass die Producte $\Phi \cdot \Psi$ nur die angeführten sein können und dass mithin die Gleichung

$$p_k = \Sigma(F + \text{Inv. } \Phi)$$

richtig ist. Es sind daher alle Formen mit dem symbolischen Factor $(pk)^4$ ebenfalls zweifellos von der Form

$$\Sigma(F + \text{Inv. } \Phi).$$

Es bleibt daher nur Θ_{kk} als weitere Form C_7^6 übrig. Wir wollen demgemäss noch einmal kurz den etwas zerstreut in mehreren Paragraphen enthaltenen Beweis von der Ersetzbarkeit von Θ_{kk} recapituliren. Es liefert $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & i & \Delta \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ die Relationen:

$$\Theta_k + 2p_3 + \frac{21}{13}[(fi)^3 k]_2 + \frac{7}{11}[(fi)^4 k]_1 + \frac{7}{66}(fi)^5 \cdot k = (f_k i)_1$$

$$\Theta_\Delta + 2p''' + \frac{21}{13}[(fi)^3 \Delta]_2 + \frac{7}{11}[(fi)^4 \Delta]_1 + \frac{7}{66}(fi)^5 \cdot \Delta = (f_\Delta i)_1,$$

oder symbolisch:

$$\Theta_k \equiv p_3 + (f_k i)_1 + \Sigma F,$$
$$\Theta_\Delta \equiv p''' + (f_\Delta i)_1 + \Sigma F.$$

Aus diesen erhält man sofort die weitere:

$$\Theta_{\lambda k} \equiv p_{3,4} + [(f_\lambda i)_1 k]_1 + \Sigma F.$$

Nun liefern die Entwickelungen

$$\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & f_\lambda & k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Relation:

$$\frac{169}{7}((if_k)^4 k)_1 + \frac{51}{4}((if_k)^3 k)_2 + ((if_\lambda)^2 k)_3 = -\frac{2}{21}(i_\lambda f_k)_1$$

und $\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ die ergänzende:

$$\frac{1}{14}((if_k)^4 k)_1 + \frac{1}{2}((if_k)^3 k)_2 + \frac{6}{5}((if_k)^2 k)_3 + ((if_k)^1 k)_4 = (i_k f_\lambda)_1,$$

aus welchen sofort die Identität sich ergiebt:

$$((if_k)^1 k)_4 + \frac{117}{10}((if_k)^2 k)_3 + \frac{1075}{8}((if_k)^3 k)_2$$
$$+ \frac{1775}{7}((if_k)^4 k)_1 = 0.$$

Bedenken wir nun, dass alle aus $(fi)^{3+\lambda}$ durch Ueberschiebung mit Formen K entstehende Ableitungen wegen der Relationen des § 1. Formen F + Inv. Φ geben, und benützen wir weiter die aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ fliessende Beziehung

$$(f_k i)^2 \equiv p_4 + \Sigma F,$$

so geht die vorstehende Identität über in:

$$((if_k)^1 k)_4 \equiv p_{k,3} + \Sigma F = \Sigma F$$

und erhalten endlich

$$\Theta_{\lambda k} \equiv p_{3,4} + \Sigma F \equiv \Sigma F,$$

da wie oben § 10. bewiesen $p_{3,4} = \frac{3}{5} p_{k,3}$ gesetzt werden darf. Es sind daher alle durch Ueberschiebung von Θ_{kk} mit Formen K resultirende Ableitungen ebenfalls durch Formen F ersetzbar. Es bleiben daher als Formen C_7^6 nur f_k' und $(f\mathrm{T})^4$ übrig. Da auch ganz analog

$$\Theta_{\Delta\Delta} = p_\Delta''' + \Sigma F$$

erhalten wird, so folgt im Anschluss an § 11. auch die Reducirbarkeit aller Formen $(\Theta_{\Delta\Delta} K)$.

Die möglichen Formen $C_9{}^2$ sind:

$$\Theta_{kkk},\quad p_{kk2},\quad f_{\Delta}''',\quad (f_k T)^4,$$

von denen aber nach dem Vorhergehenden die beiden ersten wegzulassen sind. Von Formen C_{11}^2 existiren:

$$\Theta_{kkk2},\quad p_{kk}''',\quad (p_k T)_6,\quad (f_{\Delta} T)^4,$$

die sich sofort auf die eine Form $(f_{\Delta} T)^4$ reduciren. Wie schon oben bemerkt, ist es mir nicht gelungen die Form $C_{10}^4 = i_{\Delta}''$ zurückzuführen.

Mainz im August 1880.