Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie.

(*Von* Paul Koebe, *in Leipzig.*)

Das allgemeine Uniformisierungstheorem, welches 1907 gleichzeitig durch H. Poincaré (*) und P. Koebe (**) begründet worden ist, lässt sich folgendermassen formulieren.

Allgemeines zentrales Uniformisierungstheorem (***): 1. Es bezeichne $y(x)$ eine beliebige analytische Funktion, (x, y) das betreffende analytische Gebilde, enthaltend alle und nur diejenigen Stellen, an welchen die Funkion $y(x)$ und damit zugleich auch die inverse Funktion $x(y)$ den Charakter einer algebraischen Funktion besitzt; es sei ferner F die Riemannsche Fläche der Funktion $y(x)$, welche, entsprechend der erwähnten Auffassung des analytischen Gebildes (x, y), durch ihre Punkte eine eineindeutige Repräsentation aller Stellen algebraischen Charakters der Funktion $y(x)$ liefert und also nur

(*) H. Poincaré, *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta math., t. XXXI, 1907.

(**) P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, erste und zweite Mitteilung, Nachrichten der Kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, 1907; s. auch die seitdem erschienenen zahlreichen weiteren Abhandlungen des Verfassers in den *Gött. Nachr.*, *Math. Ann.*, Crelles Journal, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung.

(***) Die Bezeichnung als *zentrales Uniformisierungstheorem* ist gewählt im Hinblick darauf, dass es ausser der in diesem Theorem definierten wichtigsten Uniformisierungstranscendenten der Kurve (x, y) noch andere Uniformisierungstranscendenten für dieselbe Kurve gibt, welche in ihrer Gesammtheit durch ein von Koebe 1908 aufgestelltes *allgemeines Uniformisierungsprinzip* umfasst werden; vgl. dessen *Römischen Vortrag* (1908) « Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip », erschienen in den *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici* (Roma, Lincei, 1909). Das Uniformisierungsproblem bezw. die damit zusammenhängenden allgemeinen Abbildungsprobleme sind seit 1907 Gegenstand ausgedehnterer Entwicklungen geworden, welche von der Deutschen Mathematiker Vereinigung (D. M. V.) 1911 auf der Jahresversammlung in Karlsruhe zum Mittelpunkte einer besonderen Verhandlung gemacht wurden; vgl. hierüber den Bericht im Jahresbericht der D. M. V., 1912, pag. 153/166, insbes. das Referat von P. Koebe auf pag. 157/163.

von inneren Punkten gebildet zu denken ist. Alsdann lässt sich auf der Riemannschen Fläche F eine relativ zu F unverzweigte und im Innern von F überall den Charakter einer algebraischen Funktion von x besitzende Funktion $t(x, y)$ ermitteln, welche so beschaffen ist, dass $x(t)$ und $y(t)$ zwei simultan eindeutige Funktionen von t sind mit dem Charakter rationaler Funktionen von t, deren genauer simultaner Existenzbereich T, das ist der Bereich aller derjenigen durch die analytische Fortsetzung sich ergebenden Stellen, an welchen diese beiden Funktionen gleichzeitig den Charakter rationaler Funktionen von t behalten, entweder durch das Innere (exklusive Peripherie) des Einheitskreises oder durch die ganze Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes oder durch die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes gebildet wird. — 2. Welcher der genannten drei Fälle eintritt, ist in jedem einzelnen Falle durch die Problemstellung selbst mitentschieden und kann nicht vorgeschrieben werden. Der dritte Fall tritt dann und nur dann ein, wenn (x, y) eine algebraische Kurve vom Geschlecht 0 ist, also F eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche; der zweite Fall tritt nur dann ein, wenn (x, y) entweder eine algebraische Kurve vom Geschlecht 1 ist, also F eine geschlossene dreifach zusammenhängende Fläche oder, wenn (x, y) eine transcendente analytische Kurve ist von der Art, dass die zugehörende Riemannsche Fläche F entweder eine ungeschlossene einfach zusammenhängende Fläche ist, welche vermöge einer umkehrbar eindeutigen konformen Abbildung auf die ganze Ebene (excl. ∞) abgebildet werden kann, oder aber eine zweifach zusammenhängende Fläche, welche umkehrbar eindeutig konform auf die ganze Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes und des Nullpunktes abgebildet werden kann. — 3. Die Grösse $t(x, y)$ ist in jedem Falle durch ihre genannten Eigenschaften vollständig bestimmt bis auf eine lineare Transformation, welche je nach dem vorliegenden Falle entweder das Innere des Einheitskreises oder die ganze Ebene exklusive oder die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes in sich transformiert. — 4. Die Funktion $t(x, y)$ ist relativ zu F stets unendlich-vieldeutig, sofern nicht der Fall vorliegt, dass F eine geschlossene oder ungeschlossene einfach zusammenhängende Fläche ist, in welchem Falle die Funktion $t(x, y)$ relativ zu F eindeutig ist. Die verschiedenen relativen Zweige der Funktion $t(x, y)$ sind durch lineare Substitutionen mit einander verknüpft, deren einzelne eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des jeweiligen Gebietes T in sich vermittelt und innerhalb T keine Fixpunkte hat. Die Gesammtheit der auf diese Weise erklärten linearen Substitutionen bildet eine im Gebiete T eigentlich diskontinuierliche Gruppe (T-Gruppe) welche, jenachdem der Zusammenhang von F endlich oder unendlich gross ist, aus endlich oder unendlich vielen Erzeugenden entspringt.

Zu der Funktion $t(x, y)$ gehört eine Riemannsche Fläche Φ, welche man sich über F ausgebreitet zu denken hat und welche daher als eine *Ueberlagerungsfläche* der Fäche F bezeichnet wird. Auf dieser Fläche Φ ist die Funktion $t(x, y)$ eindeutig, und es wird durch die Funktion $t(x, y)$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche Φ auf den Bereich T vermittelt. Der Beweis des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems zerfiel dementsprechend in zwei Aufgaben, nämlich eine Analysis-situs-Aufgabe, die Aufgabe der Konstruktion der einfach zusammenhängenden Fläche Φ über F, und eine Abbildungsaufgabe, die Aufgabe der konformen Abbildung der Fläche Φ auf den Bereich T. Insbesondere das letztere Problem stellte den Kardinalpunkt der Poincaréschen und der Koebeschen Beweisführung dar. Die Erledigung dieses Problems gelang den genannten Autoren durch die Aufstellung und Begründung eines allgemeinen Abbildungssatzes der einfachzusammenhängenden Bereiche, welcher als eine in gewissem Sinne abschliessende Erweiterung des von RIEMANN selbst in seiner Dissertation aufgestellten Abbildungssatzes der berandeten einfach zusammenhängenden Bereiche zu betrachten ist.

Allgemeiner Abbildungssatz der einfach zusammenhängenden Bereiche. Jeder als Riemannsche Fläche über der Ebene ausgebreitete einfach zusammenhängende Bereich, welcher endlich- oder unendlich- vielblättrig sein kann und von welchem nur die inneren Punkte (als solche kommen nur gewöhnliche Punkte und Windungspunkte endlicher Ordnung in Betracht, die jedoch auch im Unendlichen liegen können), als zum Bereiche gehörig betrachtet werden, lässt sich umkehrbar eindeutig und konform entweder auf das ganze Innere des Einheitskreises oder auf die ganze Ebene exklusive oder auf die ganze Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes abbilden. Die Funktion, welche die Abbildung leistet, ist bis auf eine lineare Substitution bestimmt (*).

(*) Der Riemannsche Abbildungssatz kennt seiner Beschränkung entsprechend nur den ersten Fall. Die durch den dritten Fall gelieferte Ergänzung zum Riemannschen Satze wurde schon 1870 von H. A. SCHWARZ gegeben, welcher auch den ersten exakten Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes erbrachte. (Berliner Monatsberichte, 1870.)

Nicht unerwähnt bleiben möge an dieser Stelle, dass LAGRANGE es ist, bei welchem die Keime des für die Entwicklung der modernen Mathematik so fruchtbaren Gedankens der konformen Abbildung zu finden sind. Vgl. die Schriften von LAGRANGE: *Sur la construction des cartes géographiques, premier et deuxième Mémoire;* 1779, Oeuvres, t. IV, pag. 637-699.

Allgemeiner kann an Stelle einer eigentlichen Riemannschen Fläche auch eine beliebige einfach zusammenhängende « Riemannsche Mannigfaltigkeit » als abzubildender Bereich gegeben sein.

Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems für die Uniformisierungstheorie als solche. Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems lässt sich nach verschiedenen Seiten charakterisieren, nämlich nach seiten der Uniformisierungstheorie als solcher, ferner nach seiten der Riemannschen Funktionentheorie überhaupt, sowie schliesslich nach seiten der BOLYAI-LOBATSCHEFSKI'schen Geometrie bezw. der RIEMANN-HELMHOLTZschen Raumtheorie.

Fassen wir zunächst die erste Seite der Bedeutung unseres Theorems ins Auge. Wir bemerken die Tatsache, dass nicht nur die Grössen x und y eindeutige analytische Funktionen der in T veränderlich zu denkenden Grösse t sind, sondern jede relativ zum Gebilde (x, y) überall mit dem Charakter einer algebraischen Funktion erklärte Funktion $f(x, y)$, welche relativ zum Gebilde nicht verzweigt ist. Eine solche Grösse f wird in der Tat, aufgefasst als Funktion von t, eine im Gebiete T unverzweigte analytische Funktion $f(t)$ sein, welche in diesem Gebiete überall den Charakter rationaler Funktionen darbietet und folglich wegen des einfachen Zusammenhanges des Bereichs T in diesem Bereiche eindeutig ist. Die Funktion $f(x, y)$ kann insbesondere ihrerseits eine Uniformisierungstranscendente für das Gebilde (x, y) sein, d. h. eine Grösse von der Art, dass $x(f)$ und $y(f)$ zwei simultan eindeutige Funktionen werden, deren Existenzbereich dann allgemein zu reden unendlichvielfach zusammenhängend ist; es wird dann wiederum f in T eine eindeutige Funktion von t sein. Insofern nimmt die in dem zentralen Uniformisierungstheorem definierte Uniformisierungstranscendente in der Tat eine zentrale Stellung unter den überhaupt möglichen Uniformisierungstranscendenten ein.

Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems für die Riemannsche Funktionentheorie überhaupt. Um nunmehr die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems nach seiten der Riemannschen Funktionentheorie überhaupt zu schildern, gehen wir von dem Allgemeinbegriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit aus. Zur Definition einer solchen Mannigfaltigkeit stellen wir mit RIEMANN (*) die Forderung an die Spitze, dass es möglich sein soll, die Umgebung jeder einzelnen Stelle der

---

(*) RIEMANN, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen.* Habilitationsrede, abgedr. in Ges. Werke, pag. 272 ff.

Mannigfaltigkeit eineindeutig und stetig auf ein schlichtes Kreisflächenstück abzubilden und vermöge dieser Abbildung aufzufassen. Die ganze Mannigfaltigkeit kann dabei endlich- oder unendlich-vielfach zusammenhängend, einseitig oder zweiseitig sein. Von diesem allgemeinen rein topologischen Begriff der Mannigfaltigkeit gelangen wir zu dem spezielleren Begriff der *allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit*, wie wir solche Mannigfaltigkeiten in Erweiterung einer von KLEIN (Ann. 21, 1883) eingeführten Terminologie nennen wollen, indem wir für jeden einzelnen Punkt der Mannigfaltigkeit und dessen Umgebung die Möglichkeit einer Winkelbestimmung postulieren in der Gestalt, dass es möglich sein soll, eine Umgebung jedes einzelnen Punktes der Mannigfaltigkeit nun nicht mehr nur *stetig* eineindeutig, sondern *konform* eineindeutig auf ein schlichtes Kreisflächenstück abzubilden, wobei natürlich, sofern nun ein Stück der Mannigfaltigkeit als Teil von Umgebungen zweier verschiedener Stellen der Mannigfaltigkeit betrachtet wird, welche beide voraussetzungsgemäss eineindeutig konform auf je ein schlichtes Kreisflächenstück abgebildet sind, die dem erwähnten Stücke vermöge der genannten beiden Abbildungen zukommende Winkeldefinition dieselbe sein muss, was darauf hinauskommt zu verlangen, dass die genannten beiden Abbildungen des betrachteten Stückes der Mannigfaltigkeit auf einander im gewöhnlichen Sinne konform bezogen sein sollen. Ausser den genannten Voraussetzungen haben wir noch die Forderung der Zweiseitigkeit der Mannigfaltigkeit hinzuzufügen, um den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit in der zweckentsprechendsten Form zu haben.

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit kann auf diese Weise in verschiedener Form definiert sein, insbesondere 1. als *natürliche Fläche* im Raume eventuell mit Kanten und Ecken bezw. vermöge definiter quadratischer Differentialformen (ideale Fläche), 2. als *Riemannsche Fläche*, 3. als analytische Funktion bezw. *analytisches Gebilde*, 4. als *eigentlich diskontinuierliche Gruppe* linearer Substitutionen, insbesondere als eine eigentlich diskontinuierliche Gruppe der drei oben beim zentralen Uniformisierungstheorem betrachteten Kategorieen (*T-Gruppe*), welche auch vermöge einer von KLEIN und POINCARÉ eingeführten geometrischen Deutung als *Bewegungsgruppen der nichteuklidischen Geometrie* interpretiert werden können (vgl. weiter unten).

Neben den Begriff der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeit stellen wir nun in Erweiterung des von RIEMANN für die algebraischen Funktionen aufgestellten Klassenbegriffs den *Klassenbegriff* der allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Wir rechnen zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu einer und derselben Klasse, wenn es möglich ist, beide Mannigfaltigkeiten durch eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung auf einander zu beziehen, wobei wir daran erinnern, dass gemäss unserm Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit nur die inneren Punkte der Mannigfaltigkeit, nicht auch etwa vorhandene Rand- oder Grenzpunkte in Berücksichtigung kommen. Wir formulieren nun das *Haupttheorem der Riemannschen Mannigfaltigkeiten* in folgender Weise: In jeder Klasse von Riemannschen Mannigfaltigkeiten finden sich Repräsentanten jeder der oben bezeichneten Kategorien, d. h.: Es kann jede in irgend einer Form definierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (ihrer ganzen Ausdehnung nach) in der Form 1. als natürliche oder ideale Fläche (sogar konstanten Krümmungsmasses), 2. als Riemannsche Fläche, 3. als analytisches Gebilde, 4. als eigentlich diskontinuierliche Gruppe linearer Substitutionen, insbesondere als eigentlich diskontinuierliche T-Gruppe dargestellt werden. Die letztgenannte Repräsentation durch eine T-Gruppe ist dabei für jede Klasse einzig in ihrer Art, wenn man Gruppen, die vermöge einer linearen Transformation des betreffenden Gebietes T in sich in einander übergeführt werden können, nicht als verschieden betrachtet.

Bemerkt man, dass das Problem der Aequivalenz Riemannscher Flächen vermöge konformer Abbildung, welches im Gebiete der algebraischen Funktionen als Problem der Klassenmoduln erscheint für das Verständnis der RIEMANNschen Ideengänge einen Hauptgesichtspunkt geben mag, so erkennt man nunmehr, dass mit der Lösung des Uniformisierungsproblems in dieser Richtung ein Gipfelpunkt der Riemannschen Funktionentheorie erreicht ist, indem dieses Theorem selbst wie eine tiefste Offenbarung RIEMANNschen Geistes erscheint. Umsomehr mag man dieser Bewertung Raum geben, wenn man bedenkt, dass unser Uniformisierungstheorem überhaupt das einzige wirklich allgemeine Theorem der Funktionentheorie ist, welches zugleich aufs engste mit dem Wesen der analytischen Fortsetzung und dem Begriff des vollständigen analytischen Gebildes verknüpft ist.

Die Bedeutung des allgemeinen zentralen Uniformisierungstheorems für die Bolyai-Lobatschefski'schen Geometrie bezw. Riemann-Helmholtzsche Raumtheorie. Die Berechtigung der soeben vorgetragenen Beurteilung mag in noch helleres Licht gesetzt werden, wenn man auch die Bedeutung unseres allgemeinen Uniformisierungstheorems für die nichteuklidische Geometrie betrachtet. Auf diese Seite des Theorems wird man geführt, wenn man in bekannter Weise das Innere des Einheitskreises nichteuklidisch misst vermöge der Formel für das Linienelement $d\sigma = \frac{ds}{1-r^2}$, wobei ds das in der Ebene des Einheitskreises euklidisch gemessene Linienelement ist, während r der Abstand des Elements ds vom Mittelpunkt bezeichnet. Im Falle der ganzen Ebene exklusive des unendlich fernen Punktes hat man $d\sigma = ds$, im Falle der ganzen Ebene inklusive des unendlich fernen Punktes $d\sigma = \frac{ds}{1+r^2}$ zu setzen. Vermöge dieses absoluten Messungsverfahrens können nun zunächst die genannten bei der Uniformisierung auftretenden diskontinuierlichen T-Gruppen als diskontinuierliche Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie gedeutet werden und wir erkennen, dass überhaupt die *diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der absoluten Geometrie* sozusagen als die *Urbilder* (« *Platonische Ideen* ») *der Riemannschen Mannigfaltigkeiten* aufgefasst werden können, indem jeder Klasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten eine und nur eine solche Bewegungsgruppe entspricht und umgekehrt aus jeder derartigen Bewegungsgruppe eine Klasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten entspringt. In diesem Zusammenhange sei auch der Satz erwähnt, dass es möglich ist, alle diese Bewegungsgruppen, sowohl die mit endlich vielen als auch die mit unendlich vielen Erzeugenden, aus independenten Bestimmungsstücken zu konstruieren und explicite in Evidenz zu setzen.

Noch eine andere Seite der Beziehung zwischen Uniformisierung und nichteuklidischer Geometrie sei hier genannt. Man kann sich das in der T-Ebene konstruierte Linienelement $d\sigma$ auf eine in irgend welcher Form vorgelegte Riemannsche Mannigfaltigkeit M überpflanzt denken vermöge der Abbildungsbeziehung, welche durch die Uniformisierung zwischen der Mannigfaltigkeit und der T-Ebene geschaffen ist. Auf diese Weise wird in der Mannigfaltigkeit *M die zu M gehörende absolute Massbestimmung* definiert, vermöge deren die Mannigfaltigkeit gemäss den Forderungen des Riemann-Helmholtz'schen Raumproblems die freie Beweglichkeit in sich erhält, wenn auch nicht als Ganzes so doch im Sinne der freien Beweglichkeit der hinreichend klein gewählten Stücke (« *nichteuklidische Raumformen* ») (*), wobei bei der Bewegung auch die Winkel erhalten bleiben. Es sind nun die axiomatischen Bedingungen aufzustellen, durch welche das in M erklärte absolute Linienelement $d\sigma$ vollständig und rein geometrisch definiert werden kann. Dadurch wird das *Uniformisierungsproblem* geradezu *als ein Problem der nichteuklidi-*

(*) Diese allgemeinen hier definierten nichteuklidischen Raumformen fallen, wenn die Mannigfaltigkeit M geschlossen und daher endlichvielfach zusammenhängend vorausgesetzt wird, mit den sogenannten Clifford-Kleinschen Raumformen zusammen.

schen Geometrie interpretiert, nämlich als das Problem, eine beliebig vorgelegte Riemannschen Mannigfaltigkeit M als nichteuklidische Raumform zu charakterisieren. Diese Bedingungen sind, wenn wir für die Umgebung jeder einzelnen Stelle der Mannigfaltigkeit die vorausgesetzte konforme Hülfsabbildung auf die schlichte Ebene in Berücksichtigung nehmen, die folgenden: 1. Es soll in der ganzen Mannigfaltigkeit ein durchweg reguläres unverzweigtes Linienelement $d\sigma$ ausgebreitet werden, so dass den Bedingungen der freien Beweglichkeit der kleinen Teile im Sinne der Festhaltung der Winkel und Massbestimmung genügt ist. 2. Es sollen für diese Massbestimmung die kürzesten Linien (nichteuklidische Geraden) nach beiden Seiten unendliche Länge besitzen, sofern sie nicht in sich zurücklaufen. Die Bedingung 2, welche gewissermassen als Grenzbedingung aufzufassen ist, ist wesentlich, um das Problem zu einem bestimmten zu machen. Sie kann dann und nur dann fortgelassen werden, wenn die Mannigfaltigkeit M geschlossen ist (Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion). Nicht erforderlich ist es zu verlangen, dass das Linienelement $d\sigma$ der Bedingung der Eindeutigkeit in M genüge. Die Eindeutigkeit des Elements $d\sigma$ ist vielmehr bereits eine Folge der übrigen gestellten Bedingungen.

Das Problem kann auch so formuliert werden: Es soll in der Mannigfaltigkeit M in ihrer ganzen Ausdehnung eine relativ unverzweigte, auf die Mannigfaltigkeit M durchweg konform bezogene Mannigfaltigkeit konstanten Krümmungsmasses erklärt werden, auf welcher jede geodätische Linie nach beiden Seiten unendliche Länge besitzt, sofern sie nicht in sich zurückläuft.

Der Beweis der hiermit aufgestellten Behauptung ergibt sich unter Benutzung des Uniformisierungstheorems durch Betrachtung des auf die T-Ebene überpflanzt zu denkenden Elementes $d\sigma$, wenn man beachtet, dass die für M vorausgesetzte freie Beweglichkeit der hinreichend kleinen Teile in dem einfach zusammenhängenden T-Gebiet sich zur freien Beweglichkeit im Ganzen ausgestaltet, eine Beweglichkeit, welche dann nur noch durch lineare Transformationen vermittelt sein kann (*).

(*) Ausführlicher beabsichtige ich auf den hier besprochenen Gegenstand im demnächst zu veröffentlichenden dritten Teile meiner Abhandlung: *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* zurückzukommen; Crelles, *Journal für Mathematik*, erster Teil erschienen in Bd. 138 (1910), zweiter Teil in Bd. 139 (1911).