Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen 4^{ter} Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die nachstehenden Entwickelungen schliessen sich nach Inhalt und Form an die im 46^{ten} Bande dieser Annalen veröffentlichte Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichungen der F-Reihen 3^{ter} Ordnung“ an. Nach derselben Methode wie dort und unter Anwendung der gleichen oder der entsprechenden Bezeichnungen werden die Differentialgleichungen der F-Reihen 4^{ter} Ordnung durch bestimmte Integrale gelöst, indem die Substitution eines bestimmten Integrals die Aufgabe auf die Differentialgleichung einer F-Reihe 3^{ter} Ordnung zurückführt. Da nun die particulären Integrale der Differentialgleichungen der F-Reihen 3^{ter} Ordnung in Gestalt bestimmter Doppelintegrale (mit complexem Integrationsweg) hergestellt wurden, so erhält man bei den Differentialgleichungen der F-Reihen 4^{ter} Ordnung dreifache bestimmte Integrale als particuläre Lösungen.

Als allgemeine F-Reihe n^{ter} Ordnung wird die unendliche Reihe

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1};\ x) \\
&= 1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m}{1 \cdot \varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{n-1}} x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\cdots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1\cdot 2\cdot \varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\cdots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} x^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

bezeichnet, deren Differentialgleichung im 38^{ten} Bande dieser Annalen (pag. 586) abgeleitet wurde, und in der $m \leqq n$ vorausgesetzt wird. Für $n = 4$ hat diese Differentialgleichung die Form

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& x^3 \frac{d^4 y}{dx^4} + L_1 x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + L_2 x \frac{d^2 y}{dx^2} + L_3 \frac{dy}{dx} \\
& = x^m \frac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + K_m y,
\end{aligned}
\right.
$$

woselbst die Grössen K_ν und L_ν Constante bedeuten. In die Gleichung (2) werden für m im Folgenden die Werthe 1, 2 und 3 nach einander eingesetzt. Von dem Falle $m = n = 4$ (hypergeometrische

Reihe 4ter Ordnung mit 2 endlichen singulären Punkten) wird hier abgesehen, da der Verfasser auf die bezügliche Differentialgleichung im 102ten Bande des Crelle'schen Journals (pag. 101—113) näher eingegangen ist. Ebenso bleibt der Fall $m = 0$ ($\mathfrak{F}$-Reihe 4ter Ordnung) ausgeschlossen, welcher bereits im 41ten Bande dieser Annalen (pag. 208 bis 218) behandelt wurde.

Statt L_1, L_2, L_3 führt man in (2) drei neue Constanten ϱ, σ, τ ein, die mit L_1, L_2, L_3 durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} L_1 = \varrho + \sigma + \tau + 3, \\ L_2 = \varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau + \varrho + \sigma + \tau + 1, \\ L_3 = \varrho\sigma\tau \end{cases}$$

verbunden sind, und hinsichtlich derer die Voraussetzung gemacht wird, dass keine der Grössen $\varrho, \sigma, \tau, \varrho - \sigma, \varrho - \tau, \sigma - \tau$ ganzzahlig sei.

Es sollen zunächst einige Hülfsformeln recapitulirt werden, welche in der erwähnten Arbeit im 46ten Bande dieser Annalen vorkommen. Wendet man für die Integrale mit geschlossenem Integrationsweg die abgekürzte Bezeichnung an, welche in dem Aufsatz „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf", Band 35 dieser Annalen (pag. 472), angegeben ist, und versteht man unter $E(a, b)$ das Euler'sche Integral erster Art, unter $\overline{E}(a, b)$, $\mathfrak{E}(a, b)$, $\overline{\Gamma}(a)$ die im 35ten Bande dieser Annalen pag. 510, 499 und 514 definirten geschlossenen Integrale, so gelten (pag. 586—587 des 46ten Bandes) die Gleichungen:

$$(4) \qquad \int_0^x (w - x)^{q-p-1} w^{p-1} (l_0 + l_1 w \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots) dw$$
$$= (-1)^{q-p-1} x^{q-1} E(p, q-p)\Big(l_0 + \tfrac{p}{q} l_1 x + \cdots + \tfrac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{q(q+1)\cdots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

$$(5) \qquad \overline{\int_0^{(x)}} (w - x)^{q-p-1} w^{p-1} (l_0 + l_1 w + \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots)\, dw$$
$$= x^{q-1}\, \overline{E}(p, q-p)\Big(l_0 + \tfrac{p}{q} l_1 x + \cdots + \tfrac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{q(q+1)\cdots(q+\nu-1)} l_\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

$$(6) \qquad \overline{\int_c^{(x, 0, x-, 0-)}} (w - x)^{q-p-1} w^{p-1} (l_0 + l_1 w + \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots)\, dw$$
$$= e^{\pi i(p-1)} x^{q-1}\, \mathfrak{E}(p, q-p)\Big(l_0 + \tfrac{p}{q} l_1 x + \cdots + \tfrac{p(p+1)\cdots(p+\nu-1)}{q(q+1)\cdots(q+\nu-1)} l^\nu x^\nu + \cdots\Big),$$

$$(7) \qquad \overline{\int_{-\infty x}^{(0)}} e^{\frac{x}{w}} w^{p-1} (l_0 + l_1 w + \cdots + l_\nu w^\nu + \cdots) dw$$
$$= x^p\, \overline{\Gamma}(-p)\Big(l_0 + \frac{l_1 x}{p+1} + \cdots + \frac{l_\nu x^\nu}{(p+1)(p+2)\cdots(p+\nu)} + \cdots\Big).$$

Die Grössen $p, q, c, l_0, l_1, \cdots$ sind constant; in (4) werden die reellen Theile von p und $q - p$, in (5) der reelle Theil von p als positiv vorausgesetzt. In (7) bedeutet ϵ eine unendlich kleine reelle positive Constante.

Wie in der Abhandlung über die F-Reihen dritter Ordnung werden in die Differentialgleichung nach einander zwei verschiedene bestimmte Integrale für y substituirt. Man setzt nämlich einerseits

$$(8) \qquad y = \int_g^h (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\tau} W dw,$$

andererseits

$$(9) \qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W dw,$$

woselbst W eine Function von w allein bezeichnet. Bei beiden Substitutionen entsteht aus (2) — nach Benutzung der Formel der theilweisen Integration — für W eine lineare Differentialgleichung 3ter Ordnung, die wiederum zu den F-Gleichungen gehört.

Wegen der Möglichkeit, sowohl die Substitution (8) als auch die Substitution (9) anzuwenden, liefert die genannte Methode für die einzelnen Hauptintegrale der hier behandelten Differentialgleichungen 4ter Ordnung eine Anzahl verschiedener Darstellungen als dreifache bestimmte Integrale. Diese Eigenthümlichkeit derMethode machte sich schon bei den Differentialgleichungen der F-Reihen 3ter Ordnung geltend; die Mannigfaltigkeit der Ausdrücke ist indessen bei den Differentialgleichungen 4ter Ordnung eine noch erheblich grössere, da die zwei verschiedenen Substitutionen auf's Neue in Betracht kommen.

Es möge bemerkt sein, dass im Folgenden, wie in den früheren Arbeiten des Verfassers, für ein beliebiges z und für ein positives ganzzahliges ν die abgekürzte Bezeichnung

$$(10) \qquad \begin{cases} [z]_\nu = z(z-1)(z-2)\dots(z-\nu+1), & [z]_0 = 1, \\ [z]_\nu^+ = z(z+1)(z+2)\dots(z+\nu-1), & [z]_0^+ = 1, \end{cases}$$

angewendet wird. Die Reihe (1) lässt sich dann als die Summe

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{[\alpha_1]_\nu^+ [\alpha_2]_\nu^+ \cdots [\alpha_m]_\nu^+}{[1]_\nu^+ [\varrho_1]_\nu^+ [\varrho_2]_\nu^+ \cdots [\varrho_{n-1}]_\nu^+} x^\nu$$

schreiben.

Der Fall $m=1$ der Differentialgleichung (2) wird im nachstehenden § 2, der Fall $m=2$ in § 3 und der Fall $m=3$ in § 4 behandelt. Für den letztgenannten Fall der Differentialgleichung (2) hat der Verfasser in der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit einem endlichen singulären Punkte“ im 108ten Bande des Crelle'schen Journals bereits Lösungen in Gestalt dreifacher bestimmter Integrale angegeben, welche auf den Substitutionen von der Form (8) beruhen. Als Ergänzung dieser Rechnung werden im nachstehenden § 4 die aus der Substitution (9) folgenden Integrale abgeleitet.

§ 2.

Für $m = 1$ entsteht aus (2), wenn man gemäss (3) die Constanten ϱ, σ, τ einführt und $K_m = K_1 = \alpha$ setzt, die Differentialgleichung:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} & x^3 \frac{d^4y}{dx^4} + (\varrho + \sigma + \tau + 3)x^2 \frac{d^3y}{dx^3} \\ & + (\varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau + \varrho + \sigma + \tau + 1)\, x \frac{d^2y}{dx^2} \\ & + (\varrho\sigma\tau - x)\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0. \end{aligned}\right.$$

Die Hauptintegrale derselben werden als Potenzreihen durch die F-Reihen

$$(12)\left\{\begin{aligned} & y_1 = F(\alpha; \varrho, \sigma, \tau; x) = 1 + \frac{\alpha}{1\cdot\varrho\sigma\tau} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2\cdot \varrho(\varrho+1)\sigma(\sigma+1)\tau(\tau+1)} x^2 \dots, \\ & y_2 = x^{1-\varrho} F(\alpha - \varrho + 1;\, 2 - \varrho,\, \sigma - \varrho + 1,\, \tau - \varrho + 1;\, x), \\ & y_3 = x^{1-\sigma} F(\alpha - \sigma + 1;\, 2 - \sigma,\, \varrho - \sigma + 1,\, \tau - \sigma + 1;\, x), \\ & y_4 = x^{1-\tau} F(\alpha - \tau + 1;\, 2 - \tau,\, \varrho - \tau + 1,\, \sigma - \tau + 1;\, x) \end{aligned}\right.$$

dargestellt (Band 38 dieser Annalen, pag. 588 u. f.), die für jeden endlichen Werth von x convergiren.

Wenn in die Gleichung (11) der Ausdruck (8) für y eingeführt wird, so ergiebt sich nach §§ 3 und 4 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Reduction der Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe" im 112^{ten} Bande des Crelle'schen Journals für die von w abhängige Function W die Differentialgleichung

$$(13)\qquad w^2 \frac{d^3W}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \frac{d^2W}{dw^2} + \varrho'\sigma' \frac{dW}{dw} - W = 0,$$

in welcher zur Abkürzung

$$\varrho' = \varrho - \tau + 1, \quad \sigma' = \sigma - \tau + 1$$

gesetzt ist. Die Gleichung (13) ist der zu $n = 3$, $m = 0$ gehörige Fall der erwähnten allgemeineren Differentialgleichung. Die drei Hauptintegrale von (13) lauten in Reihenform (Band 38 dieser Annalen, pag. 596):

$$\mathfrak{F}(\varrho', \sigma'; w) = 1 + \frac{w}{1\cdot\varrho'\sigma'} + \frac{w^2}{1\cdot 2\cdot \varrho'(\varrho'+1)\sigma'(\sigma'+1)} + \cdots,$$

$$w^{1-\varrho'} \mathfrak{F}(2 - \varrho', \sigma' - \varrho' + 1; w) = w^{1-\varrho'}\left\{1 + \frac{w}{1\cdot(2-\varrho')(\sigma' - \varrho' + 1)} + \cdots\right\},$$

$$w^{1-\sigma'} \mathfrak{F}(2 - \sigma', \varrho' - \sigma' + 1; w) = w^{1-\sigma'}\left\{1 + \frac{w}{1\cdot(2-\sigma')(\varrho' - \sigma' + 1)} + \cdots\right\}.$$

Setzt man in das Integral (8) eine der letzteren Reihen für W ein, so kommen bei entsprechender Bestimmung des Integrationsweges die

Formeln (4), (5), (6) zur Anwendung, deren rechte Seiten dann F-Reihen von der in (12) bezeichneten Art enthalten. Von den obigen Reihen unterscheiden sich die Doppelintegrale, die nach Band 41 dieser Annalen, pag. 197—208, der Gleichung (13) genügen und daher für W gesetzt werden dürfen, nur durch constante Factoren.

Wird zweitens gemäss (9) die Substitution

$$(14)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_1\, dw$$

auf die Differentialgleichung (11) angewendet, so erhält man für W_1 (nach Band 112 des Crelle'schen Journals, pag. 79—83) die Differentialgleichung

$$(15)\quad w^2 \frac{d^3 W_1}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \frac{d^2 W_1}{dw^2} + (\varrho'\sigma' - w)\frac{dW_1}{dw} - \alpha' W_1 = 0,$$

deren Hauptlösungen die Reihen

$$F(\alpha'; \varrho', \sigma'; w) = 1 + \frac{\alpha'}{1\cdot\varrho'\sigma'} w + \frac{\alpha'(\alpha'+1)}{1\cdot 2\cdot \varrho'(\varrho'+1)\sigma'(\sigma'+1)} w^2 + \cdots,$$

$$w^{1-\varrho'} F(\alpha' - \varrho' + 1; 2 - \varrho', \sigma' - \varrho' + 1; w)$$
$$= w^{1-\varrho'}\left\{1 + \frac{\alpha' - \varrho' + 1}{1\cdot(2-\varrho')(\sigma'-\varrho'+1)} w + \cdots\right\},$$

$$w^{1-\sigma'} F(\alpha' - \sigma' + 1; 2 - \sigma', \varrho' - \sigma' + 1; w)$$
$$= w^{1-\sigma'}\left\{1 + \frac{\alpha' - \sigma' + 1}{1\cdot(2-\sigma')(\varrho'-\sigma'+1)} w + \cdots\right\}$$

sind, während α', ϱ', σ' die Constanten

$$\alpha' = \alpha - \tau + 1, \qquad \varrho' = \varrho - \tau + 1, \qquad \sigma' = \sigma - \tau + 1$$

bedeuten. Die Gleichung (15) entsteht aus der Differentialgleichung der allgemeinen F-Reihe für die Werthe $n = 3$, $m = 1$. Die Lösungen derselben in Gestalt bestimmter Doppelintegrale, die im Folgenden benutzt werden, finden sich im Band 46 dieser Annalen, pag. 590—598.

Es sollen zunächst diejenigen dreifachen Integrale angegeben werden, welche mehrdeutige Hauptlösungen der Differentialgleichung (11) sind, indem sie mit den in (12) genannten Reihen y_2, y_3, y_4 bis auf constante Factoren übereinstimmen. Man bemerke, dass die Reihen y_2, y_3, y_4 in einander übergehen, wenn man die Constanten ϱ, σ, τ, in Bezug auf welche die Differentialgleichung (11) symmetrisch ist, miteinander vertauscht. Werden also y_2, y_3, y_4 in wesentlich verschiedener Weise durch bestimmte Integrale ausgedrückt, so sind hierdurch für jede einzelne dieser Reihen verschiedene Darstellungen gegeben.

Bei dem bestimmten Integral (8) wird hier, soweit es sich um die mehrdeutigen Lösungen von (11) handelt, als Integrationsweg von w stets der Doppelumlauf um die Punkte 0 und x genommen, was dem allgemeinen Fall entspricht; jedoch ist darauf hinzuweisen, dass für gewisse specielle Werthe der Constanten α, ϱ, σ, τ der Doppelumlauf (damit sich nicht das Resultat Null ergebe) durch einen einfachen Umlauf, resp. durch einen geradlinigen Integrationsweg ersetzt werden muss. Bei Substitution des Integrals (14) erhält man mehrdeutige Lösungen von (11), wenn man für w den in der Formel (7) vorkommenden Integrationsweg benutzt, der in einem dem Nullpunkte unendlich nahen Punkte beginnt und endigt und den Nullpunkt einmal umkreist.

Zur Abkürzung mögen durch Φ und Φ_1 die Functionen

$$\Phi = (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1},$$

$$\Phi_1 = (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}$$

bezeichnet werden. Dann ergeben sich mit Hülfe der Substitution (8) die folgenden Gleichungen

$$\int_{\mathfrak{c}}^{\overrightarrow{(x,0,x-,0-)}} dw \int_{-ew}^{\overrightarrow{(0)}} dv \int_{-ev}^{\overrightarrow{(0)}} \Phi\, du \tag{16}$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\overline{\Gamma}(\varrho-\tau)\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha)y_2,$$

$$\int_{(\mathfrak{c})}^{\overrightarrow{(x,0,x-,0-)}} dw \int_{-ew}^{\overrightarrow{(0)}} dv \int_{-\infty}^{\overrightarrow{(0)}} \Phi\, du \tag{17}$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\sigma)} \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\overline{\Gamma}(\sigma-\tau)\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, 1-\alpha)y_3,$$

$$\int_{\mathfrak{c}}^{\overrightarrow{(x,0,x-,0-)}} dw \int_{-ew}^{\overrightarrow{(0)}} dv \int_{v}^{\overrightarrow{(0)}} \Phi_1\, du \tag{18}$$
$$= 2e^{\pi i(\alpha-\varrho+1)} \overline{\Gamma}(\varrho-\tau) E\left(\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, 1-\alpha)y_2,$$

$$\int_{\mathfrak{c}}^{\overrightarrow{(x,0,x-,0-)}} dw \int_{-ew}^{\overrightarrow{(0)}} dv \int_{\infty}^{\overrightarrow{(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')}} \Phi_1\, du \tag{19}$$
$$= e^{\pi i\left(\alpha-\varrho+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho-2\sigma+1}\overline{\Gamma}(\sigma-\tau)\overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)\mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, 1-\alpha)y_3,$$

$$\int_{\mathfrak{c}}^{\overrightarrow{(x,0,x-,0-)}} dw \int_{\infty}^{\overrightarrow{(0,0)}} dv \int_{0}^{v} \Phi_1\, du \tag{20}$$
$$= e^{\pi i(\alpha+\tau-2\varrho)} 2^{2\varrho-2\tau+1}\overline{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right)\mathfrak{E}(\alpha-\tau+1, 1-\alpha)y_4,$$

in denen y_2, y_3, y_4 die Reihen (12) bedeuten.

Die Formeln (16), (17), (19) gelten für beliebige Werthe der Constanten α, ϱ, σ, τ. In (18) und (20) wird der reelle Theil von $\sigma-\varrho+\frac{1}{2}$, in (20) ausserdem der reelle Theil von $\varrho-\tau$ als positiv vorausgesetzt. In (19) wird durch $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v bezeichnet.

Man beweist die Gleichungen (16) bis (20) mit Hülfe der vorstehenden Formel (6), indem man in letztere nach einander für W

die der Gleichung (13) genügenden Doppelintegrale substituirt, welche in Band 41 dieser Annalen, pag. 202 und 205, unter Nr. (22), (23), (24), (25) und (39) bezeichnet sind. Wie dort entwickelt wird (statt ϱ, σ, x ist hier ϱ', σ', w zu nehmen), bestehen die Identitäten:

$$\int_{-ew}^{\curvearrowright(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{-ev}^{\curvearrowright(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du$$
$$= \bar{\Gamma}(\varrho-\sigma)\bar{\Gamma}(\varrho-\tau) w^{\tau-\varrho} \mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1,\ \tau-\varrho+1;\ w),$$

$$\int_{-ew}^{\curvearrowright(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{-\infty}^{\curvearrowright(0)} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1} du$$
$$= \bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\bar{\Gamma}(\sigma-\tau) w^{\tau-\sigma} \mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1, \tau-\sigma+1; w),$$

$$\int_{-ew}^{\curvearrowright(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{v}^{\curvearrowright(0)} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= -2\bar{\Gamma}(\varrho-\tau) E\left(\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) w^{\tau-\varrho} \mathfrak{F}(\sigma-\varrho+1, \tau-\varrho+1; w),$$

$$\int_{-ew}^{\curvearrowright(0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{\infty}^{\curvearrowright(\mathfrak{A}',\mathfrak{A}')} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= e^{\pi i\left(\sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho-2\sigma+1} \bar{\Gamma}(\sigma-\tau)\bar{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) w^{\tau-\sigma} \mathfrak{F}(\varrho-\sigma+1, \tau-\sigma+1; w),$$

und

$$\int_{\infty}^{\curvearrowright(0,0)} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} dv \int_{0}^{v} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}$$
$$= e^{2\pi i(\tau-\varrho)} 2^{2\varrho-2\tau+1} \bar{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \mathfrak{F}(\varrho-\tau+1, \sigma-\tau+1; w).$$

Indem man in (6) für die Coefficienten l_ν nach einander die (den rechten Seiten der letzteren 5 Gleichungen entprechenden) Ausdrücke

$$\frac{\bar{\Gamma}(\varrho-\sigma)\bar{\Gamma}(\varrho-\tau)}{[1]_\nu^+ [\sigma-\varrho+1]_\nu^+ [\tau-\varrho+1]_\nu^+}, \quad \frac{\bar{\Gamma}(\sigma-\varrho)\bar{\Gamma}(\sigma-\tau)}{[1]_\nu^+ [\varrho-\sigma+1]_\nu^+ [\tau-\sigma+1]_\nu^+},$$

$$\frac{-2\bar{\Gamma}(\varrho-\tau) E\left(\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{[1]_\nu^+ [\sigma-\varrho+1]_\nu^+ [\tau-\varrho+1]_\nu^+}, \quad \frac{e^{\pi i\left(\sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)} 2^{2\varrho-2\sigma+1} \bar{\Gamma}(\sigma-\tau)\bar{\Gamma}(2\sigma-2\varrho)}{[1]_\nu^+ [\varrho-\sigma+1]_\nu^+ [\tau-\sigma+1]_\nu^+},$$

$$\frac{e^{2\pi i(\tau-\varrho)} 2^{2\varrho-2\tau+1} \bar{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{[1]_\nu^+ [\varrho-\tau+1]_\nu^+ [\sigma-\tau+1]_\nu^+}$$

und für p, q die bezüglichen, nach Berücksichtigung von (8) sich ergebenden Werthe

$$\begin{cases} p = \alpha-\varrho+1, & \alpha-\sigma+1, & \alpha-\varrho+1, & \alpha-\sigma+1, & \alpha-\tau+1, \\ q = \quad 2-\varrho, & 2-\sigma, & 2-\varrho, & 2-\sigma, & 2-\tau \end{cases}$$

einsetzt, gelangt man unmittelbar zu den fünf Gleichungen (16) bis (20).

Die Anwendung der Substitution (14) führt, wenn durch Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 die Functionen

$$\Phi_2 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau}(v-w)^{\tau-\alpha-1} v^{\alpha-\sigma} e^{\frac{v}{u}+u} u^{\sigma-\varrho-1},$$

$$\Phi_3 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau}(v-w)^{\tau-\alpha-1} v^{\alpha-\sigma} e^{-2\sqrt{u}} (v-u)^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}},$$

$$\Phi_4 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\sigma-1} e^{u} (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho},$$

$$\Phi_5 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} e^{\frac{w}{v}} v^{\tau-\varrho-1} e^{uv} (u-1)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}$$

bezeichnet werden, zu den nachstehenden 8 Gleichungen:

$$(21)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{c}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-ev}^{(0)} \Phi_2\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \overline{\Gamma}(\varrho-1) \overline{\Gamma}(\varrho-\sigma) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, \tau-\alpha) y_2,$$

$$(22)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{c}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\infty}^{(0)} \Phi_2\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\sigma)} \overline{\Gamma}(\sigma-1) \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho) \mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, \tau-\alpha) y_3,$$

$$(23)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{c}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{v}^{(0)} \Phi_3\, du$$
$$= 2 e^{\pi i(\alpha-\varrho+1)} \overline{\Gamma}(\varrho-1) E\left(\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, \tau-\alpha) y_2,$$

$$(24)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{c}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{\infty}^{(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}')} \Phi_3\, du$$
$$= (-1)^{\alpha-\varrho+\frac{1}{2}} 2^{2\varrho-2\sigma+1} \overline{\Gamma}(\sigma-1) \overline{\Gamma}(2\sigma-2\varrho) \mathfrak{E}(\alpha-\sigma+1, \tau-\alpha) y_3,$$

$$(25)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(\mathfrak{A}'')} dv \int_{v}^{(0)} \Phi_3\, du$$
$$= -2^{2\varrho-2\tau+1} \overline{\Gamma}(\tau-1) \overline{\Gamma}(2\tau-2\varrho) E\left(\varrho-\tau+\tfrac{1}{2}, \sigma-\varrho+\tfrac{1}{2}\right) y_4,$$

$$(26)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{-ew}^{(0)} dv \int_{c}^{(v,0,v-,0-)} \Phi_4\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha-\varrho)} \overline{\Gamma}(\varrho-1) \overline{\Gamma}(\varrho-\tau) \mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1, \sigma-\alpha) y_2,$$

$$(27)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{-ew}^{(0)} dv \int_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} \Phi_4\, du$$
$$= \overline{\Gamma}(\sigma-1) \overline{\Gamma}(\sigma-\varrho) \overline{\Gamma}(\sigma-\tau) y_3,$$

$$(28)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(0)} dv \int_{0}^{(1)} \Phi_5\, du$$
$$= \overline{\Gamma}(\tau-1) \overline{\Gamma}(\tau-\varrho) \overline{E}(\alpha-\tau+1, \sigma-\alpha) y_4.$$

In (21), (22), (24), (26), (27) sind die Constanten α, ϱ, σ, τ keinen Einschränkungen unterworfen, wenn man davon absieht, dass gewisse Werthe derselben die Integrale identisch Null machen, in welchen Fällen (wie bereits erwähnt wurde) ein einfacherer Integrationsweg anzuwenden ist. In (23) wird der reelle Theil von $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt, in (25) nimmt man $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ und $\varrho - \tau$, in (28) $\alpha - \varrho + 1$ und $\alpha - \tau + 1$ als positiv im reellen Theil an. Durch $\mathfrak{A}''$ wird in (25) die Verbindungslinie der Punkte 0 und w bezeichnet; $\mathfrak{A}'$ ist wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v.

Die Gleichungen (21) bis (28) folgen ohne Weiteres aus der Formel (7), wenn man in (14) für W_1 nach einander die acht Doppelintegrale nimmt, welche in der Abhandlung über die F-Reihen 3ter Ordnung im 46ten Bande dieser Annalen (pag. 592—598) in den Gleichungen

(37), (36), (35), (33), (38), (42), (41), (43)

genannt sind, wobei man jedoch die dort vorkommenden Werthe $\alpha, \varrho, \sigma, x$ durch $\alpha', \varrho', \sigma', w$ zu ersetzen hat. Die betreffenden Formeln sollen hier nicht wiederholt werden, da, wenn die bezeichneten Ausdrücke für W_1 substituirt werden, die ganze Rechnung völlig analog zu der vorstehenden Entwickelung der Gleichungen (16) bis (20) ist.

Es soll sodann ein dreifaches bestimmtes Integral angegeben werden, welches mit der eindeutigen particulären Lösung der Differentialgleichung (11)

$$y_1 = F(\alpha; \varrho, \sigma, \tau; x)$$

bis auf einen constanten Factor identisch ist. Man bildet zu diesem Behuf ein dreifaches Integral der obengenannten Function Φ_1, bei welchem die Variable w von dem unendlich entfernten Punkt der positiven reellen Achse ausgeht, die Verbindungslinie $\mathfrak{A}$ der Punkte 0 und x zweimal hinter einander im positiven Sinne umkreist und hierauf zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Um den Integrationsweg der Variable v zu bezeichnen, definirt man $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ als die Producte

$$(29) \qquad \mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}\, e^{i\varkappa}, \qquad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}^{\dagger} e^{i\varkappa},$$

in denen $\varkappa$ eine zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende reelle Constante, und $\mathfrak{e}$ (wie oben) einen unendlich kleinen positiven reellen Werth bedeutet. Man nimmt den Punkt, welcher das Product $\mathfrak{e}_1 w$ darstellt, zum Ausgangspunkt und den Punkt $\mathfrak{e}_2 w$ zum Endpunkt des Integrationsweges der Variable v und lässt letztere den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung umgehen. Das dreifache Integral

$$\int_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})} dw \int_{\mathfrak{e}_1 w}^{\mathfrak{e}_2 w} dv \int_0^v \Phi_1\, du,$$

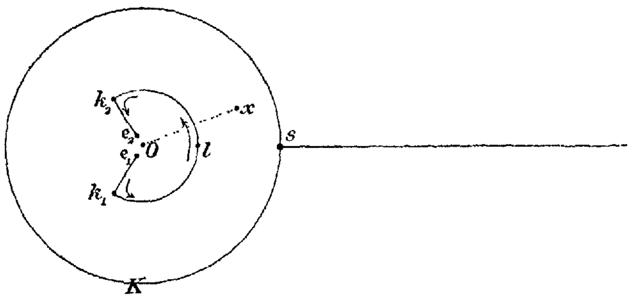
in welchem die reellen Theile von $\varrho - 1$ und $\sigma - \varrho + \frac{1}{2}$ als positiv vorausgesetzt werden, geht durch die Substitution

$$v = w\mathfrak{v}, \qquad u = v\mathfrak{u} = w\mathfrak{v}\mathfrak{u},$$
$$dv = w\,d\mathfrak{v}, \quad du = v\,d\mathfrak{u} = w\mathfrak{v}\,d\mathfrak{u},$$

in den Ausdruck

$$\int_\infty^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})} (w-x)^{-\alpha} w^{\alpha-\varrho}\,dw \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}} \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\,d\mathfrak{v} \int_0^1 e^{-2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}w}} (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

über. Der Weg von $\mathfrak{v}$ kann nach Fig. 1 aus zwei geradlinigen Strecken $\mathfrak{e}_1 k_1$, $k_2 \mathfrak{e}_2$ und einem Kreisbogen $k_1 l k_2$ zusammengesetzt werden, so dass er durch $\mathfrak{e}_1 k_1 l k_2 \mathfrak{e}_2$ bezeichnet wird. Indem man sodann um den Nullpunkt einen Kreis K beschreibt, der den Punkt x umschliesst, und der die positive reelle Achse im Punkte



s schneiden möge, wählt man als Weg von w einerseits den Abschnitt der reellen Achse von $+\infty$ bis s (der in beiden Richtungen durchlaufen wird), andererseits den Kreis K (der zweimal hinter einander durchlaufen wird). Für $(w - x)^{-\alpha}$ gilt dann, da mod w stets grösser als mod x ist, die convergente Entwickelung:

$$w^{-\alpha}\left(1 - \frac{x}{w}\right)^{-\alpha} = w^{-\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha}{1}\frac{x}{w} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{w^2} + \cdots\right\}.$$

Also ist das obige dreifache Integral gleich der Reihe

$$\Lambda_0 + \frac{\alpha}{1}\Lambda_1 x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\cdot 2}\Lambda_2 x^2 + \cdots + \frac{[\alpha]_\nu^+}{[1]_\nu^+}\Lambda_\nu x^\nu + \cdots,$$

wenn unter Λ_ν (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante Integral

$$\Lambda_\nu = \int_\infty^{(0,0)} w^{-\varrho-\nu}\,dw \int_{\mathfrak{e}_1}^{\mathfrak{e}_2} e^{\frac{1}{\mathfrak{v}}} \mathfrak{v}^{\tau-\varrho-1}\,d\mathfrak{v} \int_0^1 e^{-2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}w}} (1-\mathfrak{u})^{\sigma-\varrho-\frac{1}{2}} \frac{d\mathfrak{u}}{\sqrt{\mathfrak{u}}}$$

verstanden wird. Aber nach pag. 212—217 des 41ten Bandes dieser Annalen hat Λ_ν den Werth

$$\Lambda_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} e^{-2\pi i\varrho}\,\bar{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu)\,\bar{\Gamma}(1-\tau-\nu)\,E\left(\varrho+\nu-\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)$$

oder, wenn die Reductionsformeln für die Integrale E und $\bar{\Gamma}$ berücksichtigt werden,

$$\Lambda_\nu = \frac{e^{-2\pi i\varrho} 2^{2\varrho-1} \overline{\Gamma}(2-2\varrho)\overline{\Gamma}(1-\tau) E\left(\varrho-\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right)}{[\varrho]_\nu^+ [\sigma]_\nu^+ [\tau]_\nu^+}.$$

Man gelangt somit zu der Gleichung

$$(30) \qquad \int_\infty^{\gamma_*(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})} dw \int_{e_1 w}^{e_2 w} dv \int_0^v \Phi_1 \, du$$
$$= e^{-2\pi i\varrho} 2^{2\varrho-1} \overline{\Gamma}(2-2\varrho)\overline{\Gamma}(1-\tau) E\left(\varrho-\frac{1}{2}, \sigma-\varrho+\frac{1}{2}\right) y_1,$$

in der y_1 die in (12) angeführte F-Reihe bedeutet.

§ 3.

Der Fall $m = 2$ der Differentialgleichung (2) führt zu der Gleichung

$$(31) \quad \begin{cases} x^3 \dfrac{d^4 y}{dx^4} + (\varrho + \sigma + \tau + 3) x^2 \dfrac{d^3 y}{dx^3} \\ + (\varrho\sigma + \varrho\tau + \sigma\tau + \varrho + \sigma + \tau + 1) x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \varrho\sigma\tau \dfrac{dy}{dx} \\ = x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + \beta + 1) x \dfrac{dy}{dx} + \alpha\beta y, \end{cases}$$

deren Hauptlösungen durch die Reihen

$$(32) \quad \begin{cases} \eta_1 = F(\alpha, \beta; \varrho, \sigma, \tau; x) = 1 + \dfrac{\alpha\beta}{1 \cdot \varrho\sigma\tau} x + \cdots, \\ \eta_2 = x^{1-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1; 2-\varrho, \sigma-\varrho+1, \tau-\varrho+1; x), \\ \eta_3 = x^{1-\sigma} F(\alpha-\sigma+1, \beta-\sigma+1; 2-\sigma, \varrho-\sigma+1, \tau-\sigma+1; x), \\ \eta_4 = x^{1-\tau} F(\alpha-\tau+1, \beta-\tau+1; 2-\tau, \varrho-\tau+1, \sigma-\tau+1; x) \end{cases}$$

angegeben werden. Setzt man in (31) nach einander die Ausdrücke

$$(33) \qquad y = \int_g^h (w-x)^{-\beta} w^{\beta-\tau} W_1 \, dw,$$

$$(34) \qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_2 \, dw$$

ein, so erhält man für W_1 (Crelle's Journal, Band 112, pag. 65—71) wiederum die Differentialgleichung (15) und für W_2 (l. c. pag. 79—83) die Differentialgleichung

$$(35) \quad \begin{cases} w^2 \dfrac{d^3 W_2}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \dfrac{d^2 W_2}{dw^2} + \varrho'\sigma' \dfrac{dW_2}{dw} \\ = w^2 \dfrac{d^2 W_2}{dw^2} + (\alpha' + \beta' + 1) w \dfrac{dW_2}{dw} + \alpha'\beta' W_2, \end{cases}$$

in der α', β', ϱ', σ' die Constanten

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - \tau + 1, & \beta' = \beta - \tau + 1, \\ \varrho' = \varrho - \tau + 1, & \sigma' = \sigma - \tau + 1 \end{cases}$$

bedeuten. Die Gleichung (35) entspricht dem Falle $n=3$, $m=2$ der allgemeinen F-Reihe.

Um die mehrdeutigen Hauptlösungen von (31) als dreifache bestimmte Integrale herzustellen, lässt man (analog zu § 2) die Variable w in (33) einen Doppelumlauf um die Punkte x und 0, in (34) einen bei $-\mathfrak{e}x$ beginnenden einfachen Umlauf um den Nullpunkt machen. Man findet durch die Substitution (33) als Lösungen von (31) acht dreifache Integrale, welche den in (21) bis (28) angegebenen Integralen entsprechen, indem für W_1 der Reihe nach dieselben Doppelintegrale wie dort genommen werden. Die Rechnung unterscheidet sich von der auf die Formeln (21) bis (28) bezüglichen allein dadurch, dass statt der Gleichung (7) die Gleichung (6) angewendet wird. Es soll hier nur die erste dieser acht Gleichungen

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_x^{(x,0,x-,0-)} dw \int_c^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\mathfrak{e}v}^{(0)} \Psi\, du\\ &= e^{\pi i(\alpha+\beta-2\varrho)}\,\overline{\Gamma}(\varrho-\sigma)\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\tau-\alpha)\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,1-\beta)\,\eta_2,\end{aligned}\right.$$

in der Ψ die Function

$$\Psi=(w-x)^{-\beta}\,w^{\beta-\tau}(v-w)^{\tau-\alpha-1}\,v^{\alpha-\sigma}\,e^{\frac{v}{u}+u}\,u^{\sigma-\varrho-1}$$

und η_2 die in (32) genannte Reihe bedeutet, angeführt werden.

Bei Anwendung der Substitution (34) mögen für W_2 nach einander diejenigen Doppelintegrale gesetzt werden, welche in den Gleichungen (49), (51) und (54) der genannten Abhandlung im 46ten Bande dieser Annalen angegeben sind (mit α', β', ϱ', σ', w statt der dort stehenden Werthe α, β, ϱ, σ, x). Dann gewinnt man durch Benutzung der Formel (7) aus (34) die Gleichungen

$$(37)\quad \int_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} dw \int_{-\mathfrak{e}w}^{(0)} dv \int_c^{(v,0,v-,0-)} \Psi_1\, du$$
$$= e^{\pi i(\sigma-\varrho+1)}\,\overline{\Gamma}(\varrho-1)\,\overline{\Gamma}(\varrho-\tau)\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\sigma-\beta)\,\eta_2,$$

$$(38)\quad \int_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} dw \int_{-\mathfrak{e}w}^{(0)} dv \int_a^{(1,\mathfrak{A}',1-,\mathfrak{A}'-)} \Psi_1\, du$$
$$= (-1)^{\beta-\alpha+1}\,\overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\overline{\Gamma}(\sigma-\tau)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\varrho-\alpha)\,\eta_3,$$

$$(39)\quad \int_{-\mathfrak{e}x}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(0)} dv \int_{\infty}^{(1)} \Psi_1\, du$$
$$= (-1)^{\beta-\sigma}\,\overline{\Gamma}(\tau-1)\,\overline{E}(\alpha-\tau+1,\varrho-\alpha)\,\overline{E}(\beta-\tau+1,\tau-\sigma)\,\eta_4,$$

woselbst Ψ_1 das Product

$$\Psi_1 = e^{\frac{x}{w}}\,w^{-\tau}\,e^{\frac{w}{v}}\,v^{\tau-\sigma-1}(v-u)^{\sigma-\beta-1}\,u^{\beta-\varrho}(1-u)^{\varrho-\alpha-}$$

bedeutet.

Ausserdem können für W_2 Doppelintegrale von der im 108ten Bande des Crelle'schen Journals, pag. 54—64, angegebenen Form gewählt werden. Hieraus folgen, wenn man Ψ_2 die Function

$$\Psi_2 = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau}(v-w)^{\tau-\beta-1} v^{\beta-\sigma} e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}$$

nennt, die Formeln:

$$(40)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{c}^{(v,0,v-,0-)} \Psi_2\, du$$
$$= e^{\pi i(\alpha+\beta-2\varrho)} \overline{\Gamma}(\varrho-1)\,\mathfrak{E}(\alpha-\varrho+1,\sigma-\alpha)\,\mathfrak{E}(\beta-\varrho+1,\tau-\beta)\,\eta_2,$$

$$(41)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{\mathfrak{c}}^{(w,0,w-,0-)} dv \int_{-\infty}^{(\mathfrak{A}')} \Psi_2\, du$$
$$= e^{\pi i(\beta-\sigma)} \overline{\Gamma}(\sigma-1)\,\overline{\Gamma}(\sigma-\varrho)\,\mathfrak{E}(\beta-\sigma+1,\tau-\beta)\,\eta_3,$$

$$(42)\qquad \int_{-ex}^{(0)} dw \int_{-\infty}^{(\mathfrak{A}'')} dv \int_0^v \Psi_2\, du$$
$$= (-1)^{\sigma-\alpha-1}\,\overline{\Gamma}(\tau-1)\,\overline{\Gamma}(\tau-\varrho)\,E(\alpha-\tau+1,\sigma-\alpha)\,\eta_4.$$

Die Gleichungen (37), (38), (40), (41) bleiben für beliebige Werthe der Constanten α, β, ϱ, σ, τ in Kraft. In (39) müssen die reellen Theile von $\alpha-\tau+1$ und $\beta-\tau+1$, in (42) die reellen Theile von $\alpha-\tau+1$ und $\sigma-\alpha$ positiv sein. Durch c und $\mathfrak{c}$ werden wiederum willkürliche (jedoch von 0 verschiedene) Constante, durch $\mathfrak{A}'$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und v, durch $\mathfrak{A}''$ die Verbindungslinie der Punkte 0 und w bezeichnet.

Es werde endlich ein dreifaches Integral der Function Ψ_2 betrachtet, in welchem die Variable w von $-\infty$ aus einen Umlauf um den Nullpunkt macht, während nach v zwischen den Grenzen 0 und w, nach u zwischen den Grenzen 0 und v integrirt wird. Setzt man

$$e^{\frac{x}{w}} = 1 + \frac{1}{w}\frac{x}{1} + \frac{1}{w^2}\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{w^\nu}\frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots\nu} + \cdots,$$

so verwandelt sich das Integral

$$\int_{-\infty}^{(0)} dw \int_0^w dv \int_0^v \Psi_2\, du$$

in die Reihe

$$\mathfrak{P}_0 + \mathfrak{P}_1\frac{x}{1} + \mathfrak{P}_2\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \mathfrak{P}_\nu\frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots\nu} + \cdots,$$

wo $\mathfrak{P}_\nu$ das constante Integral

$$\mathfrak{P}_\nu = \int_{-\infty}^{(0)} w^{-\tau-\nu}\, dw \int_0^w (v-w)^{\tau-\beta-1} v^{\beta-\sigma}\, dv \int_0^v e^u (u-v)^{\sigma-\alpha-1} u^{\alpha-\varrho}\, du$$

bedeutet. Durch die Substitution

$$v = w v_1, \qquad u = v u_1 = w v_1 u_1,$$
$$dv = w dv_1, \qquad du = v du_1 = w v_1 du_1,$$

geht $\mathfrak{P}_\nu$ in das Integral

$$(-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\int_{-\infty}^{(0)} w^{-\varrho-\nu} dw \int_0^1 v_1^{\beta-\varrho}(1-v_1)^{\tau-\beta-1} dv_1 \int_0^1 e^{u_1 v_1 w} u_1^{\alpha-\varrho}(1-u_1)^{\sigma-\alpha-1} du_1$$

über. Letzteres ist aber nach Band 107 des Crelle'schen Journals, pag. 253 (Gl. (23)), gleich dem Producte

$$(-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\bar{\Gamma}(1-\varrho-\nu)E(\alpha+\nu, \sigma-\alpha)E(\beta+\nu, \tau-\beta)$$
$$= (-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\frac{[\alpha]_\nu^+ [\beta]_\nu^+}{[\varrho]_\nu^+ [\sigma]_\nu^+ [\tau]_\nu^+}\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha, \sigma-\alpha)E(\beta, \tau-\beta),$$

wobei die reellen Theile der Constanten $\alpha, \beta, \sigma-\alpha, \tau-\beta$ als positiv vorausgesetzt werden. Man findet auf diese Weise die Gleichung

$$(43) \qquad \int_{-\infty}^{(0)} dw \int_0^w dv \int_0^v \Psi_2 du$$
$$= (-1)^{\sigma+\tau-\alpha-\beta}\bar{\Gamma}(1-\varrho)E(\alpha, \sigma-\alpha)E(\beta, \tau-\beta)\eta_1,$$

in welcher η_1 die in (32) angeführte eindeutige Reihe ist.

§ 4.

Für $m = 3$ wird aus (2), wenn man statt K_1, K_2, K_3 drei andere Constante α, β, γ mittelst der zu (3) analogen Gleichungen

$$\begin{cases} K_1 = \alpha+\beta+\gamma+3, \\ K_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma+1, \\ K_3 = \alpha\beta\gamma \end{cases}$$

einführt, die Differentialgleichung

$$(44) \begin{cases} x^3\dfrac{d^4y}{dx^4} + (\varrho+\sigma+\tau+3)x^2\dfrac{d^3y}{dx^3} \\ + \big(\varrho\sigma+\varrho\tau+\sigma\tau+\varrho+\sigma+\tau+1\big)x\dfrac{d^2y}{dx^2} + \varrho\sigma\tau\dfrac{dy}{dx} \\ = x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + (\alpha+\beta+\gamma+3)x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} \\ + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha+\beta+\gamma+1)x\dfrac{dy}{dx} + \alpha\beta\gamma y \end{cases}$$

erhalten, die durch die Reihen

$$(45) \begin{cases} \zeta_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; \varrho, \sigma, \tau; x) = 1 + \frac{\alpha\beta\gamma}{1\cdot\varrho\sigma\tau}x + \cdots, \\ \zeta_2 = x^{1-\varrho}F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1, \gamma-\varrho+1; 2-\varrho, \sigma-\varrho+1, \tau-\varrho+1; x), \\ \zeta_3 = x^{1-\sigma}F(\alpha-\sigma+1, \beta-\sigma+1, \gamma-\sigma+1; 2-\sigma, \varrho-\sigma+1, \tau-\sigma+1; x), \\ \zeta_4 = x^{1-\tau}F(\alpha-\tau+1, \beta-\tau+1, \gamma-\tau+1; 2-\tau, \varrho-\tau+1, \sigma-\tau+1; x) \end{cases}$$

befriedigt wird. Auf (44) wendet man hier (s. den Schluss des § 1) die Substitution

$$(46)\qquad y = \int_g^h e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} W_3\, dw$$

an. Dann ergiebt sich für W_3 (Band 112 des Crelle'schen Journals, pag. 79—83) die Differentialgleichung

$$(47)\qquad \begin{cases} w^2 \frac{d^3 W_3}{dw^3} + (\varrho' + \sigma' + 1) w \frac{d^2 W_3}{dw^2} + \varrho' \sigma' \frac{d W_3}{dw} \\ \quad = w^3 \frac{d^3 W_3}{dw^3} + (\alpha' + \beta' + \gamma' + 3) w^2 \frac{d^2 W_3}{dw^2} \\ + (\alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' + \alpha' + \beta' + \gamma' + 1) w \frac{d W_3}{dw} + \alpha'\beta'\gamma' W_3, \end{cases}$$

in der α', β', γ', ϱ', σ' die Constanten

$$\begin{cases} \alpha' = \alpha - \tau + 1, \quad \beta' = \beta - \tau + 1, \quad \gamma' = \gamma - \tau + 1, \\ \qquad \varrho' = \varrho - \tau + 1, \quad \sigma' = \sigma - \tau + 1 \end{cases}$$

bezeichnen. Die Gleichung (47) ist eine hypergeometrische Differentialgleichung 3ter Ordnung mit den zwei endlichen singulären Punkten 0 und 1. Die Lösung derselben durch bestimmte Doppelintegrale findet sich in der bereits erwähnten Abhandlung im 102ten Bande des Crelleschen Journals, pag. 84—100; jedoch ist zu bemerken, dass man, um Ausdrücke, die für beliebige Werthe der Constanten gelten, zu erhalten, die dort benutzten geradlinigen Integrationswege durch Doppelumläufe zu ersetzen hat.

In (46) nehme man für W_3 zunächst das particuläre Integral der Gleichung (47)

$$\int_c^{\overline{(w,0,w-,0-)}} (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_c^{\overline{(v,0,v-,0-)}} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$
$$= \mathfrak{K} w^{\tau-\varrho} F(\alpha-\varrho+1, \beta-\varrho+1, \gamma-\varrho+1; \sigma-\varrho+1; \tau-\varrho+1; w),$$

wo zur Abkürzung

$$\mathfrak{K} = e^{\pi i(\gamma+2\sigma-\alpha-\beta-\varrho+1)} \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta) \mathfrak{E}(\gamma-\varrho+1, \tau-\gamma)$$

gesetzt ist. Dann entsteht durch Anwendung der Formel (7) die Gleichung

$$(48)\qquad \int_{-\varepsilon x}^{\overline{(0)}} dw \int_c^{\overline{(w,0,w-,0-)}} dv \int_c^{\overline{(v,0,v-,0-)}} \Omega\, du$$
$$= e^{\pi i(\gamma+2\sigma-\alpha-\beta-\varrho+1)} \overline{\Gamma}(\varrho-1) \mathfrak{E}(\beta-\varrho+1, \sigma-\beta) \mathfrak{E}(\gamma-\varrho+1, \tau-\gamma) \zeta_2,$$

in der Ω die Function

$$\Omega = e^{\frac{x}{w}} w^{-\tau} (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1}$$

und ζ_2 die in (45) bezeichnete Reihe bedeutet. Durch eine ähnliche Rechnung ergiebt sich, wenn man unter $\mathfrak{A}'$ wiederum die Verbindungslinie der Punkte 0 und v versteht, die Identität

$$(50)\qquad \int_{-\varepsilon x}^{\curvearrowright(0)} dw \int_{c}^{\curvearrowright(w,0,w-,0-)} dv \int_{c}^{\curvearrowright(\mathfrak{A}',1,\mathfrak{A}'-,1-)} \Omega\, du$$
$$= e^{\pi i(\gamma-\varrho)} \bar{\Gamma}(\sigma-1)\,\mathfrak{E}(\gamma-\sigma+1,\tau-\gamma)\,\mathfrak{E}(\sigma-\varrho,\varrho-\alpha)\,\zeta_3.$$

Für W_3 werde ferner das Doppelintegral

$$(51)\quad \int_1^\infty (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_1^{\curvearrowright(v)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$

gewählt, das durch die Substitution

$$v = \frac{1}{1-v_1},\ u = 1 + (v-1)(1-u_1) = \frac{1-u_1 v_1}{1-v_1}$$

die Gestalt

$$-1^{(\sigma-\beta)} \int_0^1 v_1^{\varrho-\alpha+\sigma-\beta-1} (1-v_1)^{\alpha-\tau} [1-(1-v_1)w]^{\tau-\gamma-1} dv_1$$
$$\cdot \int_1^{\curvearrowright(0)} u_1^{\sigma-\beta-1} (1-u_1)^{\varrho-\alpha-1} (1-u_1 v_1)^{\beta-\varrho} du_1$$

annimmt. Entwickelt man die Potenz $[1-(1-v_1)w]^{\tau-\gamma-1}$ nach dem binomischen Satze, so wird nach Anwendung der Formel*)

$$(52)\quad \int_0^1 v^{k+q-1}(1-v)^{l-1} dv \int_1^{\curvearrowright(0)} u^{q-1}(1-u)^{k-1}(1-uv)^p du$$
$$= e^{\pi i q} E(k,l)\,\bar{E}(k+l+p,q)$$

das Integral (51) gleich dem Ausdruck

$$E(\alpha-\tau+1,\varrho-\alpha)\,\bar{E}(\beta-\tau+1,\sigma-\beta)$$
$$\cdot F(\alpha-\tau+1,\beta-\tau+1,\gamma-\tau+1;\varrho-\tau+1,\sigma-\tau+1;w).$$

Hieraus folgt dann mit Hülfe von (7) die Gleichung

$$(53)\qquad \int_{-\varepsilon x}^{\curvearrowright(0)} dw \int_1^\infty dv \int_1^{\curvearrowright(v)} \Omega\, du$$
$$= \bar{\Gamma}(\tau-1)\,E(\alpha-\tau+1,\varrho-\alpha)\,\bar{E}(\beta-\tau+1,\sigma-\beta)\,\zeta_4.$$

Die Variable w möge endlich, während für W_3 das Integral (51) gesetzt wird, einen bei $-\infty$ beginnenden Umlauf um den Nullpunkt ausführen. Dann entsteht aus (46) das dreifache Integral

$$(54)\qquad \int_{-\infty}^{\curvearrowright(0)} dw \int_1^\infty dv \int_1^{\curvearrowright(v)} \Omega\, du,$$

*) Um die Gleichung (52) zu beweisen, entwickelt man $(1-uv)^p$ nach dem binomischen Satze und berücksichtigt die für das Integral $\bar{E}$ geltenden Formeln (Band 35 dieser Annalen, pag. 510—513). Das Verfahren ist dasselbe wie in § 3 der erwähnten Abhandlung im 102ten Bande des Crelle'schen Journals (pag. 90—91).

das, wie gezeigt werden soll, sich von der in (45) genannten Reihe ζ_1 nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Für die Entwickelung dieses Integrals kommt eine Hülfsformel in Betracht, die für das dreifache Integral

$$\int_1^{\bar{\ast}(0)} w^{b-1}(1-w)^{a-1}dw\int_0^{\ast 1} v^{l+q-1}(1-v)^{k-1}(1-vw)^{-a-b}dv$$
$$\cdot\int_1^{\bar{\ast}(0)} u^{q-1}(1-u)^{l-1}(1-uv)^{p-k-l}du$$

gilt. Das letztere geht, wenn man

$$(1-uv)^{p-k-l}=1+\frac{k+l-p}{1}uv+\frac{(k+l-p)(k+l-p+1)}{1\cdot 2}u^2v^2\cdots$$

substituirt und eine zu pag. 603—604 des 46^{ten} Bandes dieser Annalen analoge Transformation anwendet, in die Reihe

$$e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{[k+l-p]_\mu^+}{[1]_\mu^+}E(k-b,\,l+q+\mu)e^{\pi i\mu}\bar{E}(l,q+\mu)$$
$$=e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)E(k-b,l+q)\bar{E}(l,q)\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{[k+l-p]_\mu^+}{[1]_\mu^+}\frac{[q]_\mu^+}{[k+l+q-b]_\mu^+}$$

über. Da aber

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\frac{[k+l-p]_\mu^+[q]_\mu^+}{[1]_\mu^+[k+l+q-b]_\mu^+}=F(k+l-p,\,q;\,k+l+q-b;\,1)$$
$$=\frac{\Gamma(k+l+q-b)\,\Gamma(p-b)}{\Gamma(p+q-b)\,\Gamma(k+l-b)}$$

und

$$E(k-b,\,l+q)=\frac{\Gamma(k-b)\Gamma(l+q)}{\Gamma(k+l+q-b)},\quad \bar{E}(l,q)=\frac{\Gamma(l)\bar{\Gamma}(q)}{\Gamma(l+q)}$$

ist, so hat die Reihe den Werth

$$e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)\frac{\Gamma(k-b)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l-b)}\frac{\Gamma(p-b)\bar{\Gamma}(q)}{\Gamma(p+q-b)}.$$

Daher besteht die Gleichung

$$(55)\quad \int_1^{\bar{\ast}(0)} w^{b-1}(1-w)^{a-1}dw\int_0^{\ast 1} v^{l+q-1}(1-v)^{k-1}(1-vw)^{-a-b}dv$$
$$\cdot\int_1^{\bar{\ast}(0)} u^{q-1}(1-u)^{l-1}(1-uv)^{p-k-l}du$$
$$=e^{\pi i(b+q)}\bar{E}(a,b)E(k-b,\,l)\bar{E}(p-b,\,q).$$

Das Integral (54) liefert, wenn

$$e^{\frac{x}{w}}=1+\frac{1}{w}\frac{x}{1}+\frac{1}{w^2}\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{w^\nu}\frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots\nu}+\cdots$$

gesetzt wird, die Reihenentwickelung

$$\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{Q}_1 \frac{x}{1} + \mathfrak{Q}_2 \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \mathfrak{Q}_\nu \frac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots \nu} + \cdots,$$

woselbst $\mathfrak{Q}_\nu$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) das constante Integral

$$\mathfrak{Q}_\nu = \int_{-\infty}^{(0)} w^{-\tau-\nu} dw \int_1^\infty (v-w)^{\tau-\gamma-1} v^{\gamma-\sigma} dv \int_1^{(v)} (u-v)^{\sigma-\beta-1} u^{\beta-\varrho} (u-1)^{\varrho-\alpha-1} du$$

bedeutet. Indem man

$$w = \frac{w_1}{w_1 - 1}, \quad v = \frac{1}{1 - v_1}, \quad u = 1 + (v-1)(1-u_1) = \frac{1 - u_1 v_1}{1 - v_1}$$

substituirt und $(-1)^{\tau+\nu+\beta-\sigma-1}$ durch $e^{\pi i(\tau+\nu+\beta-\sigma-1)}$ ersetzt, findet man für $\mathfrak{Q}_\nu$ den Ausdruck

$$e^{\pi i(\tau+\nu+\beta-\sigma-1)} \int_1^{(0)} w_1{}^{-\tau-\nu} (1 - w_1)^{\gamma+\nu-1} dw_1$$
$$\cdot \int_0^1 v_1{}^{\varrho-\alpha+\sigma-\beta-1} (1 - v_1)^{\alpha-\tau} (1 - v_1 w_1)^{\tau-\gamma-1} dv_1$$
$$\cdot \int_1^{(0)} u_1{}^{\sigma-\beta-1} (1 - u_1)^{\varrho-\alpha-1} (1 - u_1 v_1)^{\beta-\varrho} du_1,$$

der nach (55) gleich dem Producte

$$E(\alpha + \nu, \varrho - \alpha) \bar{E}(\beta + \nu, \sigma - \beta) \bar{\bar{E}}(\gamma + \nu, 1 - \tau - \nu)$$
$$= \frac{[\alpha]_\nu^+ [\beta]_\nu^+ [\gamma]_\nu^+}{[\varrho]_\nu^+ [\sigma]_\nu^+ [\tau]_\nu^+} E(\alpha, \varrho - \alpha) \bar{E}(\beta, \sigma - \beta) \bar{\bar{E}}(\gamma, 1 - \tau)$$

ist. Somit ergiebt sich die Gleichung:

$$(56) \quad \int_{-\infty}^{(0)} dw \int_1^\infty dv \int_1^{(v)} \Omega\, du = E(\alpha, \varrho - \alpha) \bar{E}(\beta, \sigma - \beta) \bar{\bar{E}}(\gamma, 1 - \tau) \xi_1 .$$

In (53) werden die reellen Theile von $\alpha - \tau + 1$, $\beta - \tau + 1$ und $\varrho - \alpha$, in (56) die reellen Theile von α, β, γ und $\varrho - \alpha$ als positiv vorausgesetzt, während die Gleichungen (48) und (50) für beliebige Werthe der Constanten α, β, γ, ϱ, σ, τ gelten.