Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen. Von A. Hurwitz. Berlin 1919.

Die Zahlentheorie der Quaternionen ist bereits von Lipschitz behandelt, der als ganzes Quaternion $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ ein Quaternion mit ganzen rationalen Koordinaten a_0, a_1, a_2, a_3 definiert. Hurwitz legt seiner Theorie eine weniger formale Definition des ganzen Quaternions zu Grunde und erreicht dadurch wesentliche Vereinfachungen. Er definiert zunächst einen Körper, der alle Quaternionen mit rationalen Koordinaten umfaßt. In diesem Körper wird der umfassendste Integritätsbereich aufgesucht, d. h. ein Bereich, der die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt: 1. Er ist ein endlicher Modul; 2. das Produkt zweier Zahlen des Bereichs gehört wieder dem Bereich an. Es zeigt sich, daß dieser Bereich durch den Modul $[\rho, i_1, i_2, i_3]$ gegeben ist, wo $\rho = \frac{1 + i_1 + i_2 + i_3}{2}$ ist. Alle Zahlen dieses Bereiches werden nun als ganze Quaternionen definiert. Es werden dann die Begriffe Teilbarkeit, größter gemeinsamer Teiler, vollständige und reduzierte Restsysteme, Primquaternion und Quaternionenideal betrachtet, wobei immer rechtseitige und linkseitige Teilbarkeit zu unterscheiden ist. Es zeigt sich, daß nur Hauptideale existieren, d. h. daß alle Ideale die Gestalt gd, resp. dg haben, wo d ein festes ganzes Quaternion ist, während g alle ganzen Quaternionen durchläuft. Für die Teilbarkeit ist die Aufsuchung der Einheiten, die selbst nebst ihren reziproken Werten ganz sind, von Wichtigkeit. Es wird festgestellt, daß 24 Einheiten existieren: $\pm 1, \pm i_1, \pm i_2, \pm i_3, \frac{\pm 1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3}{2}$.

Bei den Untersuchungen über Teilbarkeit leistet die Zuordnung der Quaternionen zu den linearen homogenen Substitutionen zweier Veränderlicher wesentliche Dienste.

In Vorlesung 10 wird die Zerlegung ganzer Quaternionen in Primquaternionen behandelt. Die Zahl 2 zerfällt in das Produkt $(1 + i_1)(1 - i_1)$. Die beiden Faktoren sind Primquaternionen, die sich übrigens nur durch eine Einheit unterscheiden, so daß 2 bis auf eine Einheit das Quadrat eines Primquaternions ist. Um nun ein Quaternion a zu zerlegen, wird zunächst eine möglichst hohe Potenz von $1 + i_1$ abgespalten: $a = (1 + i_1)^r b$, so daß b ein „ungerades“ Quaternion wird und die weitere Betrachtung auf ungerade Quaternionen beschränkt. Um den Zerlegungssatz für diese präziser aussprechen zu können, wird der Begriff „primäres Quaternion“ eingeführt. Dies ist entweder $\equiv 1$ oder $\equiv 1 + 2\rho$ nach dem Modul $2(1 + i_1)$, und es wird gezeigt, daß jedes ungerade Quaternion durch Multiplikation mit einer Einheit in ein primäres Quaternion übergeführt werden kann. Ein primäres Quaternion heißt primitiv, wenn seine Koordinaten den größten gemeinsamen Teiler 1 haben. Versteht man unter der Norm des Quaternions $a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$ die Zahl $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, so lautet der Zerlegungssatz:

Es sei c ein primitives Quaternion mit der Norm $pqr\ldots$, wo $p, q, r, \ldots$ die sämtlichen (gleichen oder ungleichen) Primfaktoren der Norm in eine beliebige, aber bestimmte Reihenfolge gebracht, bezeichnen. Dann ist c, und zwar nur auf eine Weise, in der Form darstellbar:

$$c = \pi \varkappa \rho \ldots,$$

wo $\pi, \varkappa, \rho \ldots$ primäre Primquaternionen bedeuten, deren Normen der Reihe nach gleich $p, q, r, \ldots$ sind.

In den letzten beiden Vorlesungen wird die Theorie auf die Bestimmung der Anzahl der Darstellungen einer positiven ganzen rationalen Zahl als Summe von 4 Quadraten und auf ein Problem von Euler angewandt.

Das Buch ist, wie alle Abhandlungen von Hurwitz, sehr klar und fesselnd geschrieben und regt zu manchen neuen Fragestellungen an.

Furtwängler.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung II. Von E. Czuber. 4. Aufl. Teubner, Leipzig und Berlin 1919. 18 M.

Auch die vierte Auflage des zweiten Bandes des bekannten Lehrbuches hat gegenüber der dritten eine Erweiterung erfahren. Neben gewissen textlichen Änderungen und der Aufnahme verschiedener neuer Beispiele wurden neu eingefügt Kapitel betreffend die Flächensätze über Fußpunkt- und Rollkurven, die Anwendung der mechanischen Quadratur auf Kubaturen, Schwerpunkt- und Momentbestimmungen, die graphische Integration und ihre Anwendung bei Momentbestimmungen, die Systeme von Differentialgleichungen höherer Ordnung, die graphische Integration von Differentialgleichungen. In dem Abschnitt über Differentialgleichungen sind hauptsächlich verschiedene, den Anwendungsgebieten entnommene Beispiele beigegeben, so daß Kettenlinie, Bewegung eines Fallschirmes, ballistische Kurve, Bewegung des Schiffes, Durchbiegung einer Welle, Lissajoussche Figuren, physisches Pendel, erzwungene Schwingungen zur Besprechung gelangen. Der Tendenz des gesamten Werkes getreu ist das Hauptgewicht darauf gelegt, dem Anfänger Gelegenheit zur gründlichen Einübung der formalen Methoden in der Behandlung der Differentialgleichungen zu bieten, ein Ziel, das auch voll und ganz erreicht wird.

J. L.

Die graphische Darstellung. Von F. Auerbach. 2. Aufl. „Aus Natur und Geisteswelt", Bd. 437. Teubner, Leipzig und Berlin 1918. M. 1.90.

Der Verfasser behandelt die Methoden der graphischen Darstellung nach allen Richtungen und erläutert sie durch Beispiele, die den verschiedensten Gebieten entnommen sind. Bedeutung und Anwendung der Methode in allen möglichen Fällen werden in eingehender Weise besprochen. Eine reichliche Sammlung von Figuren unterstützt in glücklichster Weise das geschriebene Wort.

J. L.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von O. Meißner. 2. Aufl. Math.-phys. Bibl. Bd. 4 u. 33. Teubner, Leipzig u. Berlin 1919. 2 M.

Die beiden Bändchen sind eine Erweiterung der früher in einem Bande in derselben Sammlung erschienenen „Wahrscheinlichkeitsrechnung nebst Anwendungen". In äußerst fesselnder Weise geschrieben führen uns beide Büchlein die wichtigsten Gesetze und Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vor Augen. Während sich der erste Band mit den theoretischen Grundlagen der Disziplin beschäftigt, werden im zweiten ihre Anwendungen auf Aus-