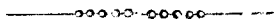


quale, com'è noto, lanciata che sia ritorna verso il luogo da cui parte, se non incontra che l'aria.

Actinometria; per MARIE DAVY. *Idem.* — È la descrizione del metodo usato dall'A. per le osservazioni actinometriche, nell'Osservatorio di Montsouris.

Nota storica sulla liquefazione dei gas ; per A. TERQUEM. *Idem.* — In questa nota si fa conoscere che Guyton di Morveau fece fin dal 1799, prima di Faraday, la esperienza della liquefazione di un gas.

(*Continua*)



SULLA VISIONE STEREOSCOPICA ; A. RIGHI.

§ I. INTRODUZIONE.

Nella visione binoculare, abbenchè il punto fissato produca in noi due immagini, e quindi due distinte sensazioni, pure esso ci apparisce semplice. Oltre al punto fissato, esistono altri punti dello spazio le cui immagini cadono in punti corrispondenti nel campo dei due occhi, e che perciò devono apparire semplici. Essi costituiscono in generale o una linea a doppia curvatura di terzo ordine (oroptro), che può degenerare in una conica ed una retta, oppure un piano. Osservando oggetti qualunque, siccome la maggior parte dei loro punti occupano nei campi visuali dei due occhi posizioni non corrispondenti, così devono dar luogo a doppie immagini. Queste doppie immagini sono effettivamente visibili. Ma se si osserva un oggetto poco esteso, fissando uno dei suoi punti, non ci accorgiamo più delle doppie immagini, che d'altronde sono assai prossime per punti vicini al punto fissato, ed invece acquistiamo la nozione esatta del rilievo, ossia della terza dimensione dell'oggetto. In questo

caso però basta chiudere alternativamente i due occhi, perchè si possano il più delle volte scoprire le differenze che esistono fra le immagini degli oggetti che si formano nei due occhi.

Invece di tener fisso lo sguardo sopra un punto determinato dell'oggetto, ordinariamente si cambia il punto di fissazione. In tal caso, oltre la differenza delle due immagini formate sulle retine anche le variazioni di convergenza delle linee visuali intervengono ad indicarci la forma solida dell'oggetto, poichè difatti noi giudichiamo appunto della distanza assoluta, dalla convergenza delle linee visuali.

Si percepisce la terza dimensione degli oggetti, e la loro distanza assoluta, anche nella visione monoculare, e precisamente colla coscienza dello sforzo d'accomodazione, benchè in modo assai imperfetto, e collo spostamento del punto di vista. Infine ci rappresentiamo la terza dimensione degli oggetti anche utilizzando l'esperienza da noi acquistata sulla loro forma, natura ec. Perciò sono spesso di valido aiuto, la conoscenza della dimensione degli oggetti, il loro ricoprirsi in parte, gli effetti di luce, le ombre portate ec. Anzi per oggetti assai lontani, sono questi i soli mezzi sui quali si fonda l'apprezzamento della terza dimensione.

Le immagini differenti che i due occhi ricevono d'un oggetto solido, possono essere sostituite da due prospettive piane dell'oggetto. In tal caso conviene con ciascun occhio osservare nel debito modo una delle prospettive. Vi si riesce in tre maniere. 1.º Disponendole in guisa che le due prospettive di un punto infinitamente lontano sieno ad una distanza eguale a quella degli occhi, e dirigendo questi in parallelismo. Bisogna però intanto accomodare gli occhi per la piccola distanza alla quale sono i disegni; si richiede una certa pratica per rendere indipendenti l'accomodazione degli occhi e la loro convergenza. 2.º Invertendo la posizione dei disegni, ed incrociando le visuali; maniera questa di più facile riescita. 3.º Collo stereoscopio, le cui lenti dovrebbero sostituire ai disegni delle immagini virtuali ad una distanza eguale a quella verso cui gli assi ottici convergono, almeno per rapporto ad un punto centrale dell'oggetto. In una qualunque di queste maniere si ottiene una esatta

nozione del rilievo dell' oggetto rappresentato. Sarebbe utilissimo ricorrere a questo mezzo per corredare i libri di figure ben intelligibili (1).

Nell' osservazione binoculare si raggiunge una grande esattezza, in quanto ad apprezzare il rilievo; ma non così è per la distanza assoluta. Spostando lateralmente le immagini stereoscopiche, esse presentano non più l' oggetto vero, ma un nuovo oggetto più o meno differente; però se l' oggetto rappresentato dapprima ci è ben noto, esso continua ad apparirci anche nella nuova posizione delle immagini. Di qui la teoria dei bassorilievi, i quali con una diversa convergenza degli assi ottici, danno però sulle retine le stesse immagini che darebbero gli oggetti solidi che rappresentano.

Il telestereoscopio d' Helmholtz e l' iconoscopia di Javal, sono strumenti composti di quattro specchi piani coi quali si producono nei nostri occhi le immagini degli oggetti esterni, quali gli occhi stessi riceverebbero se fossero fra loro ad una distanza diversa da quella alla quale effettivamente si trovano; invece degli oggetti veri appaiono oggetti più o meno differenti. Col pseudoscopia di Wheatstone alle immagini che gli occhi riceverebbero direttamente dagli oggetti, vengono sostituite altre ad esse simmetriche. In questo caso l' oggetto che apparisce, presenta un rilievo opposto al vero. In tutti questi casi però, la conoscenza della forma dell' oggetto, gli effetti di luce, le ombre ec., si impongono in maniera da far sparire spesso l' illusione.

Si noti che in due immagini stereoscopiche, le distanze verticali delle due prospettive di punti qualunque, sono necessariamente eguali, supponendo preso il loro piano, parallelo alla retta degli occhi. Ma quand' anche esistano piccole differenze, l' effetto stereoscopico non è impedito. È così per esempio che possono rappresentare un oggetto unico, due circonferenze di raggio ineguale presentate agli occhi.

Nel presente lavoro descriverò uno strumento semplicissimo

(1) Ciò ho fatto già in due miei lavori, e cioè *Sulla Composizione dei moti vibratorii* — *N. Cimento*, s. 2. t. IX, e *Sul Principio di Volta*.

col quale si riproducono gli effetti del telestereoscopio e dell'iconoscopia, e di più possono ottenersi gli effetti pseudoscopici. Dopo, partendo dalle formole delle immagini stereoscopiche che dà l'Helmholtz nella sua *Ottica Fisiologica* (alla quale rimando quei lettori che volessero a fondo studiare i fenomeni della visione), darò una teoria dei diversi strumenti enumerati, e dello stereoscopio di rifrazione, e descriverò varie esperienze relative a questo soggetto.

§ II. NUOVO APPARECCHIO.

1. L'apparecchio che serve ad ottenere gli effetti pseudoscopici, e quelli pure del telestereoscopio e dell'iconoscopia, potrebbe denominarsi *polistereoscopio*, e si compone semplicemente di due specchi piani S_1 ed S_2 (*Tav. I, fig. 1*), il primo dei quali ha in generale maggior dimensione. Questi specchi sono disposti verticalmente e possono assumere diverse posizioni. A tale scopo lo specchio S_1 è mobile a cerniera intorno ad un asse CD, può girare intorno ad A, e scorrere in una fessura GH praticata nella lastra MN che sostiene tutto l'apparecchio. Così pure lo specchio S_2 è mobile intorno ad un asse verticale ed uno orizzontale. Una lastra L è fissata ad un estremo di MN perpendicolarmente, e porta una apertura ed un tubo O. Una lastra P, portante altri due tubi, può applicarsi contro la L, introducendo O in R, ad attrito dolce; essa può prendere in tal modo diverse posizioni intorno ad O.

Applicando gli occhi ai tubi Q, R, uno di essi vedrà direttamente gli oggetti, l'altro invece riceverà i raggi riflessi successivamente dai due specchi. Se per esempio gli occhi sono disposti come nella figura 2, *s* vede direttamente, *d* riceve dagli oggetti le stesse immagini, come se fosse in d'' . Questo punto d'' si trova prendendo d' simmetrico a d rispetto allo specchio S_2 , poi d'' simmetrico a d' rispetto allo specchio S_1 .

Siccome d'' è po' più lontano dagli oggetti posti davanti all'osservatore che non è *s*, così le immagini sono un po' più piccole. Ma è nota la possibilità di fondere immagini stereoscopiche di diversa grandezza o diversamente lontane dagli oc-

chi; quindi guardando oggetti non tanto vicini, ciò non presenta alcun sensibile inconveniente. È a notarsi anzi a questo proposito che, se l'oggetto è a tal distanza che la immagine vista per riflessione non sia che i $\frac{2}{3}$ dell'altra, si ottiene tuttavia l'impressione d'unico oggetto in rilievo. Anche la minor intensità luminosa dell'immagine vista per riflessione, non ha influenza sulla fusione stereoscopica.

Se chiudendo uno degli occhi, si pone l'altro all'altezza del lato superiore dello specchio S_2 , si potranno facilmente vedere in pari tempo gli oggetti direttamente e per riflessione, specialmente oscillando leggermente il capo d'alto in basso. Spostando allora diversamente gli specchi sarà agevole cosa il sovrapporre le due immagini di un determinato punto m_0 . Ciò fatto, il raggio m_0ABd , che partito da m_0 è riflesso dai due specchi, giunge a d nella direzione m_0d . Osservando coi due occhi in s e d , in luogo degli oggetti veri, appariranno altri oggetti, e precisamente quali dovrebbero esistere onde produrre negli occhi senza istrumento le immagini che effettivamente ricevono. Se dunque immaginiamo tutte le rette che congiungono d'' ai diversi punti degli oggetti reali, trasportate in d parallelamente a se stesse, e quindi girate tutte intorno alla verticale di d finchè $d''m_0$ cada sopra dm_0 , le intersezioni di queste rette, colle rette corrispondenti che partono da s , determineranno i punti degli oggetti apparenti ⁽¹⁾. Evidentemente al punto m_0 degli oggetti reali, corrisponderà se stesso; ma ad un altro punto m si vedrà sostituito un punto M , trovato facendo $m_0d''m = m_0dM$.

Si vede assai bene la rispettiva posizione e la diversa forma degli oggetti veri e degli oggetti apparenti, ponendo gli occhi al disopra della lastra L , e movendo il capo d'alto in basso, in modo da vedere gli oggetti ora direttamente, ora col l'aiuto dello strumento.

D'ora in poi chiameremo sempre m_0 quel punto che apparisce nella stessa posizione, sia osservando gli oggetti col l'istrumento, sia senza. Secondo poi si sceglie il punto m_0 , e

(1) Vedi § III, n. 12.

secondo la posizione degli occhi, si ottengono effetti svariatissimi.

2. *Uso dello strumento come telestereoscopio.* Se si dispongono gli specchi come nella figura 2, il punto d'' da cui l'occhio destro vede effettivamente gli oggetti, dista da s nella direzione sd (cioè astrazione fatta dall'essere d'' al di quà del piano verticale passante per sd), di una quantità $2D$, maggiore della distanza sd degli occhi, che diremo $2d$. Vedremo nel num. 11, § III che tutti i punti del piano verticale passante per m_0 e parallelo ad sd , conservano la loro posizione, e che tutti gli altri punti appaiono approssimativamente allontanati da quel piano, nel rapporto $\frac{D}{d}$. Più esattamente, ogni punto

apparisce spostato lungo la retta che lo congiunge ad s .

Le variazioni di distanza degli oggetti da s , sono naturalmente accompagnate da variazioni proporzionali di grandezza.

Osservando dei paesaggi, l'esagerazione del rilievo, e i cambiamenti relativi di dimensione degli oggetti, sono molto notevoli. Così le foglie d'un albero che sia a 10 o 12 metri di distanza, cessano dal formare un insieme alquanto confuso, e si vede ciascuna distintamente staccata dalle altre. Guardando verso il cielo, quando a grande altezza volano degli uccelli, si riconoscono immediatamente le loro distanze nel senso dell'osservatore, e si veggono nettamente staccati dalle nubi, che senza strumento, sembravano quasi toccare. Sono poi curiosissimi gli effetti che si ottengono osservando delle persone, specialmente di fronte, o mentre compiono dei movimenti.

Girando uno degli specchi intorno ad un asse verticale, varia la posizione di m_0 . Se i due specchi si dispongono paralleli, m_0 è all'infinito, ed appaiono tutti gli oggetti ridotti in scala minore. Se si continua ancora a girare lo specchio S_2 da destra a sinistra, anche i punti infinitamente lontani sembrano occupare una posizione alquanto prossima. Così osservando di notte la luna o le stelle più splendenti, questi astri sembrano più vicini e di minori dimensioni ⁽¹⁾. In tal caso cou-

(1) Questa esperienza per ciò che riguarda la luna, ha relazione col l'apparirci questo astro assai più grande quand'è all'orizzonte. A questo

viene evitare le immagini multiple degli specchi ordinari, usando specchi metallizzati sulla prima faccia, o prismi a riflessione.

3. *Uso dello strumento come iconoscopio.* Se lo specchio S_1 (*fig. 3*) si accosta alquanto ad S_2 in modo che d possa vedere direttamente alla destra di S_1 , le immagini che i due occhi ricevono saranno presso che identiche, perchè prese da punti di vista poco distanti nella direzione ds . Il rilievo dei corpi apparirà assai diminuito. Se gli specchi si sono inclinati in modo che un certo punto m_0 conservi la sua posizione, tutti i punti del piano verticale parallelo ad sd e passante per m_0 , conserveranno la loro posizione; tutti gli altri punti appariranno accostati a quel piano. Inoltre gli oggetti al di quà di m_0 sembreranno più grandi del vero, quelli al di là più piccoli.

Se m_0 è infinitamente lontano, cioè gli specchi sono resi paralleli, in luogo degli oggetti reali, appariranno oggetti simili ma in maggiori dimensioni.

Se si potesse far coincidere s'' con d , tutti gli oggetti apparirebbero nel piano passante per m_0 , ed il rilievo sparirebbe affatto. Si può ottenere questo stesso risultato osservando aste cilindriche verticali, o corpi analoghi. Si dispongono perciò gli specchi come nella figura 4, e poi si fa girare l'istrumento in-

proposito l'Helmholtz accenna ad una esperienza che consiste nel proiettare verso l'orizzonte una immagine riflessa della luna; egli non trova che apparisca più grande che quando si guarda la luna in alto nel cielo. Per conto mio la differenza di grandezza mi apparisce chiaramente. L'esperienza seguente mi pare concludentissima. Volgendo quasi le spalle alla luna, se ne osserva l'immagine riflessa da uno specchio metallico o da una lastra di vetro posta davanti ad uno degli occhi, in modo che si proietti in alto nel cielo. Se inclinando la lastra si fa in modo che l'immagine discenda fino all'orizzonte, si vede il disco lunare aumentare di grandezza. Se si dispone la lastra in modo che la luna si proietti su oggetti poco lontani, o sul suolo, essa sembra ridursi piccolissima. Quest'ultima esperienza riesce con qualsiasi oggetto luminoso, e secondo me può spiegarsi considerando che ordinariamente si giudica che un oggetto a distanza incognita, sia alla stessa distanza degli oggetti sui quali si proietta, potendo questa distanza esserci nota o per la convergenza delle visuali, o in altro modo qualunque.

È ciò che accade anche per le immagini accidentali sviluppate in uno degli occhi.

torno al tubo O (*fig. 1*) a cui è applicato l'occhio s , finchè il piano verticale passante per s'' e d , contenga anche prossimamente le aste. Siccome lo spostare verticalmente il punto di vista non ha influenza sulle immagini di rette verticali, saranno identiche le immagini offerte ad s'' e d . Se le aste sono due, ed una è ad una distanza doppia dell'altra, e se l'inclinazione degli specchi è tale che la più vicina si veggia nella sua vera posizione, l'altra asta apparirà a fianco alla prima ed alla stessa distanza dall'osservatore, ma con una grossezza metà.

È necessario che le aste non presentino alcun punto rimarchevole, e che non se ne veggano le estremità.

4. *Uso dello strumento come pseudoscopio.* Se i due specchi S_1 ed S_2 sono disposti come nella figura 4, mentre l'occhio destro vede direttamente gli oggetti, l'occhio sinistro s vede per riflessione, e riceve le stesse immagini come se fosse in s'' . Anche qui sarà facile disporre gli specchi in modo che un certo punto m_o sembri conservare la propria posizione. Se facciamo astrazione dal non essere s'' sulla retta ds , ciò che è lecito quando si osservano oggetti non molto vicini, potremo dire che all'occhio sinistro è presentata una prospettiva presa da un punto che è al di là dell'occhio destro; diciamo $2D$ la distanza fra quel punto e l'occhio destro. Vedremo più oltre che secondo che D è maggiore minore od eguale a d si ottengono effetti diversi.

Se $D = d$ e si osserva un oggetto poco esteso del quale faccia parte il punto m_o , in luogo dell'oggetto stesso apparisce un nuovo oggetto simmetrico al primo rispetto al piano verticale passante per m_o e parallelo ad sd . Per i punti al di qua di questo piano, si ha dunque lo stesso effetto, come ad osservarne le immagini entro uno specchio che fosse situato in quel piano. Il rilievo resta adunque invertito, e ciò qualunque sia la forma dell'oggetto. In questo lo strumento attuale diversifica dal pseudoscopio di Wheatstone; difatti quest'ultimo all'oggetto reale ne sostituisce un altro ad esso simmetrico rispetto alla verticale di m_o , o in altri termini, oltre l'inversione del rilievo, fa apparire a sinistra le parti a destra dell'oggetto e viceversa.

Soltanto allorchando l'oggetto è di forma simmetrica rispetto al piano mediano dell'osservatore, apparisce la semplice inversione di rilievo. Per questa differenza sostanziale fra il pseudoscopio di Wheatstone, ed il nuovo pseudoscopio, non si producono col primo i fenomeni di apparenti rotazioni, e rotazioni invertite, che fra poco saranno descritti.

Se $D > d$, oltre l'inversione del rilievo, ogni punto si allontana dal piano verticale passante per m_0 e parallelo ad sd , precisamente come nel telestereoscopio. Se $D < d$, oltre all'inversione del rilievo, appariscono tutti i punti ad una minor distanza da quello stesso piano. Potremo in quel che segue supporre sempre $D = d$.

L'interpretazione di oggetti col rilievo invertito è spesso contrariata dall'illuminazione laterale, dalle ombre portate, dal ricoprirsi diverse parti dell'oggetto etc. ma più ancora dall'essere ben noto l'oggetto osservato. Avviene quindi molte volte che l'effetto pseudoscopico non si ottiene, e si continuano a vedere gli oggetti nella loro vera forma, posizione e dimensione. Qualche volta l'inversione del rilievo avviene in certe parti soltanto degli oggetti; così guardando edifici diversamente lontani e che non si ricoprono, apparisce più prossimo e rimpicciolito quello che è più lontano, e più lontano ed ingrandito l'oggetto più vicino. È specialmente verso sera, quando le parti più elevate degli oggetti terrestri staccano coi loro profili in nero sul fondo ancor rischiarato del cielo, che tali effetti si osservano facilmente. Osservando una stella ed un oggetto terrestre che sia all'incirca nella stessa direzione, per esempio la cima d'un albero, si vede distintamente la stella più vicina e l'albero più lontano.

Ecco delle esperienze che mostrano la grande influenza sull'interpretazione delle sensazioni attuali, della memoria di quegli oggetti già noti che produssero in noi sensazioni identiche od analoghe,

Se l'osservatore dispone a sè davanti un grande specchio piano inclinato, ed osserva entro il medesimo col nuovo strumento disposto a pseudoscopio, le immagini capovolte degli oggetti esterni, l'effetto pseudoscopico succede spesso in modo

completo. Ciò deve dipendere a mio avviso dall'insolita posizione apparente degli oggetti, che meno vivamente ci richiama la nozione della loro vera forma. La stessa esperienza può ripetersi con immagini stereoscopiche, specialmente adoperando delle vedute di case o di tetti. Se le due immagini sono disposte in modo da dare nello stereoscopio l'inversione di rilievo, l'effetto generalmente non ha luogo. Ma se si capovolge la carta su cui sono fissate, e di nuovo si osservano collo stereoscopio, l'inversione del rilievo apparisce immediatamente (1). Il girare la pagina non ha influenza sul rilievo dell'oggetto rappresentato, come resterà chiarito nel § III. D'altronde basta osservare collo stereoscopio le figure *bd*, (*Tav. II*) che non sono altro che le *fh* viste dopo aver girato il libro su se stesso, ed osservare in pari tempo le *fh* stesse. Si vedrà che non differiscono in quanto al rilievo gli oggetti che rappresentano.

Invece di osservare le immagini capovolte entro uno specchio, si ottiene lo stesso intento volgendo le spalle agli oggetti, ed incurvandosi in modo da vederli sotto il braccio o fra le gambe. Si noti però che in tutti i casi nei quali l'effetto pseudoscopico non riesce facilmente, conviene evitare i più piccoli movimenti durante l'osservazione.

È noto che certi oggetti si prestano meglio degli altri per l'inversione apparente del rilievo. Tali sono: una tenda da finestra che abbia delle pieghe, specialmente vista per trasparenza; dei dischi o dei poligoni di carta posti obliquamente; delle asticelle o fili verticali posti a diverse distanze; dei caratteri o dei disegni tracciati su lastre od oggetti qualunque di vetro; meglio ancora degli scheletri di filo metallico annerito, simili a modelli di cristallografia, posti davanti ad un telone bianco. Serve particolarmente bene un cubo formato da 12 fili di ferro grossi 2 millimetri e lunghi mezzo metro, che si so-

(1) Debbo alla cortesia del sig. Prof. Ratti, la tavola qui unita che serve ad effettuare questa esperienza; egli l'ha fatta con una mia negativa, adoperando un suo nuovo processo di eliotipia. Godo di potere qui testimoniargli la mia viva riconoscenza.

Se si vuol ottenere l'effetto di rilievo vero, converrà osservare le due immagini, non collo stereoscopio, ma a visuali incrociate.

spende con un filo per un vertice, e si osserva stando a 3 o 4 metri di distanza (*fig. 5*). Se al disotto dal cubo di filo di ferro, se ne attacca un secondo di legno o di cartone mediante un filo metallico, l'inversione del rilievo ha luogo solo nel cubo superiore. La stessa inversione parziale nel rilievo si verifica con un tronco di piramide pentagonale (*fig. 6 A*) formato di filo metallico, al quale sta connessa una piccola piramide di legno o di cartone disposta in senso contrario, e la cui base coincide colla base minore del tronco. Visto il tutto col nuovo pseudoscopia nella direzione dell'asse della piramide, si ha l'effetto della figura 6, B.

Se la piccola piramide si costruisce con cartone bianco, succede facilmente che essa pure appaia rovesciata, offrendo l'aspetto di una piramide di carta sottile, aperta alla base, ed illuminata per trasparenza. Se invece la piramide è di legno, è ben raro che avvenga tal effetto.

Si producono effetti curiosissimi se si osservano col nuovo pseudoscopia degli oggetti in movimento, oppure se l'osservatore si muove osservando oggetti fissi. Cominciamo da quest'ultimo caso, e precisamente supponiamo che l'osservatore si muova in una circonferenza, il cui centro sia sulla verticale di quel certo punto m_0 dell'oggetto, la cui posizione è la stessa, sia visto collo strumento che senza. Il piano di simmetria fra l'oggetto vero e l'apparente si sposterà insieme all'osservatore, girando intorno ad m_0 , e l'oggetto apparente sembrerà girare intorno alla verticale di m_0 con velocità angolare doppia di quella dell'osservatore, appunto come avviene dell'immagine di un oggetto qualunque, vista entro uno specchio girante. La figura 7 varrà d'altronde a rendere chiara la ragione di questo singolar effetto. Sia AB l'oggetto reale, $x_1 y_1$ il piano di simmetria quando l'osservatore è in O_1 . Apparirà col pseudoscopia l'oggetto $A_1 B_1$. Se l'osservatore passa in O_2 , descrivendo per esempio un arco di 45° sulla circonferenza di centro m_0 e raggio $m_0 O_1$, il nuovo piano di simmetria $x_2 y_2$ formerà con $x_1 y_1$ un angolo pure di 45° , e l'oggetto apparente $A_2 B_2$, simmetrico ad AB rispetto ad $x_2 y_2$, si troverà su $x_1 y_1$. Dunque mentre l'osservatore va da O_1 in O_2 , l'oggetto apparente passa da $A_1 B_1$ in

$A_2 B_2$, descrivendo un doppio angolo intorno ad m_2 . Così quando l'osservatore è in O_3 , siccome il piano di simmetria contiene $A B$, esso si vedrà nella vera posizione. Giunto l'osservatore in O_4 , il piano di simmetria sarà $x_4 y_4$ e l'oggetto apparirà in $A_4 B_4$. Finalmente se l'osservatore giunge in O_5 , dopo aver fatto un mezzo giro, l'oggetto apparirà di nuovo in $A_1 B_1$, ed avrà fatto un giro intero attorno ad m_0 .

L'esperienza riesce benissimo con un poliedro di fili metallici, per esempio col cubo (*fig. 5*). Se sotto si trova il cubo di legno o di cartone, siccome d'ordinario non si presta all'inversione di rilievo, così apparirà immobile. Quelli che non abituati ad esperienze di questo genere, riescono a vedere questi moti apparenti, sono portati da principio a credere che qualche nascosto macchinismo faccia girare lo scheletro di filo metallico.

Se osservando un paesaggio riesce in parte almeno l'inversione del rilievo, per esempio, se degli alberi lontani sembrano al di qua di altri alberi più vicini, non appena si sposta il capo a destra od a sinistra appaiono quei movimenti. L'esperienza si fa molto bene stando in un treno ferroviario in moto.

Passiamo all'osservazione pseudoscopica di oggetti mobili. Se entro uno specchio piano si guarda l'immagine di un corpo che ruoti intorno ad un asse parallelo allo specchio, la rotazione dell'immagine avviene in senso contrario. Così pure se si fa girare il solito cubo (*fig. 5*) intorno al filo al quale sta sospeso, e si osserva col nuovo pseudoscopo, sembra la rotazione effettuarsi in senso opposto al reale. E se al disotto sta sospeso il cubo di cartone, siccome non apparisce invertito il suo rilievo, così si vede distintamente girare nel vero senso, e cioè all'opposto del cubo superiore. Per la miglior riuscita dell'esperienza è bene non fissare lo sguardo in nessun punto speciale del sistema mobile, ma muovere gli occhi dall'uno all'altro dei due cubi. La velocità angolare più conveniente da darsi ai due cubi è di un giro in 2 o 3 secondi.

Se la rotazione avviene attorno ad un asse orizzontale, e perpendicolare alla retta $s d$, essa si compie nello stesso senso anche nell'oggetto apparente.

Se colle regole d'uso rappresentiamo con rette le rotazioni, e prendiamo tre assi ortogonali coll'origine in m_0 dei quali y sia perpendicolare al piano di simmetria fra l'oggetto vero e l'apparente, e gli altri due x e z esistano in questo piano, per conoscere l'asse della rotazione apparente in un caso qualunque, basterà scomporre l'asse della rotazione vera che supporremo passante per m_0 in tre componenti secondo gli assi, cangiare segno alle due componenti secondo x e z , e ricomporle colla y presa nella propria direzione. Ne risulta che l'asse della rotazione apparente è simmetrico all'asse della rotazione effettiva, rispetto ad y , cioè rispetto ad una retta orizzontale, perpendicolare ad sd , e passante per m_0 .

Si può modificare l'ultima esperienza, col sospendere il cubo di cartone lateralmente in a (*fig. 5*). Oltre delle rotazioni opposte dei cubi, si vedrà distintamente variare di dimensione il cubo di cartone ad ogni giro.

Le illusioni pseudoscopiche possono prodursi anche senza l'aiuto d'alcuno istrumento, osservando con un solo occhio, in quei casi in cui le due opposte interpretazioni sono egualmente verosimili. Così il solito cubo di filo metallico osservato con un sol occhio può apparire col rilievo invertito, segnatamente se si procura di immaginare l'aspetto che allora deve presentare. Ma succede che ad un tratto al rilievo invertito si sostituisce il reale, e l'illusione svanisce.

5. *Osservazione degli oggetti collo strumento in rotazione.* Si ottengono alcuni moti apparenti in oggetti appropriati, se mentre uno degli occhi li vede direttamente, giunge all'altro occhio una immagine presa da un punto che cambia posizione. Ecco una delle maniere in cui l'esperienza si può effettuare.

Si dispongano gli specchi come nella figura 4, e si osservino due aste cilindriche verticali, differentemente lontane, il cui piano passi assai vicino a d . Si diano inclinazioni tali agli specchi, che la più prossima delle due aste apparisca nella sua vera posizione. Potremo come al solito supporre che il punto s'' da cui è presa la prospettiva che apparisce ad s , sia sulla retta sd . Tenendo immobile la lastra P (*fig. 1*) si faccia ruotare lentamente tutto il resto dell'apparecchio intorno al tubo O .

Anche s'' girerà intorno ed O; ma siccome si osservano rette verticali, si potrà non tener conto dello spostamento di s'' nel senso verticale, ma solo di quello nella direzione di ds . Nella primitiva posizione dell'apparecchio si ha l'effetto pseudoscopico, e l'asta più lontana sembra al di qua dell'altra. Girando un poco l'apparecchio si vedrà l'asta che sembra più vicina, allontanarsi. Quando s'' sarà giunto nel piano verticale passante per d e prossimamente per le aste, queste sembreranno alla stessa distanza. Continuando la rotazione l'asta che appare mobile, continuerà ad allontanarsi, e raggiungerà la massima distanza dopo mezzo giro dell'apparecchio, producendosi allora il maggior effetto telestereoscopico. Continuando la rotazione, l'asta retrocederà sino a riprendere la posizione primitiva apparente, allorquando coll'apparecchio si sarà fatto un giro intero. Se si continua il moto, l'asta continua le sue oscillazioni apparenti.

Oltre a ciò, quando l'asta è nella posizione più prossima all'osservatore, essa sembra assai sottile, mano a mano che si allontana, aumenta di grossezza. Quando è nella posizione più lontana ha la maggior grossezza apparente, e nel riaccostarsi diminuisce nuovamente di dimensione trasversale.

È bene che le aste sieno abbastanza lunghe onde non se ne veggano le estremità, ed è necessario che non presentino nessun punto notevole che attragga l'attenzione.

§ III. TEORIA DELLA VISIONE STEREOSCOPICA.

1. *Formole delle proiezioni stereoscopiche.* Presi tre assi ortogonali ox, oy, oz (fig. 8), siano D, S gli occhi, xyz le coordinate di un punto M, PQ il piano dei disegni stereoscopici, abc ed $a'b'c'$ le coordinate delle due prospettive A, B di M prese da D ed S. Si ponga $OD = SO = d$. Dovendo essere i punti S, B, M in linea retta, e pure in linea retta DAM, si avrà

$$\frac{a-d}{a-x} = \frac{b}{b-y} = \frac{c}{c-z}, \quad \frac{a'+d}{a'+x} = \frac{b}{b-y} = \frac{c'}{c'-z}.$$

Se ne ricava facilmente

$$(1) \quad a = \frac{bx + dy - bd}{y}, \quad a' = \frac{bx - dy + bd}{y}, \quad c = c' = \frac{bz}{y},$$

l'ultima delle quali mostra essere le due prospettive di un punto, alla stessa altezza. Se si pone

$$(2) \quad e = 2d - (a - a') = \frac{2bd}{y}$$

si avrà ancora

$$(3) \quad x = \frac{d(a + a')}{e}, \quad y = \frac{2bd}{e}, \quad z = \frac{2cd}{e}$$

La quantità e dicesi parallasse. Queste formole trovansi nell'*Ottica Fisiologica* dell' Helmholtz. Esse servono a riconoscere quali cambiamenti subisce la posizione del punto m , variando a, a', b ec. Difatti dopo tali cambiamenti appariranno, non gli oggetti dapprima rappresentati, ma oggetti tali da dare appunto le nuove immagini nelle nuove posizioni.

2. *Variazione di b, c, a ed a' .* Variando b nel rapporto $b : B$, dicendo X, Y, Z , le coordinate della nuova posizione di M , si ha $X = x, Y = \frac{B}{b}y, Z = z$. Invece dell'oggetto rappresen-

tato, apparisce dunque un nuovo oggetto, diverso quanto alla distanza ed al rilievo. L'oggetto primitivo ed il nuovo costituiscono due sistemi omologici in affinità rispetto al piano xz . La verifica con immagini stereoscopiche è facilissima. Se oltre variare b , variano anche le dimensioni delle due prospettive, in modo che ogni punto non abbandoni la retta che lo congiunge al rispettivo occhio, l'oggetto rappresentato evidentemente non varia. Ciò è quanto accade osservando i disegni stereoscopici con lenti i cui centri distino quanto gli occhi, ed assai prossime a questi, come pure osservando gli oggetti con occhiali.

Se si osservano gli oggetti con sistemi ottici che diano a ciascun occhio, una immagine virtuale ingrandita, il rilievo re-

sta alterato. Chiamiamo n il rapporto fra le dimensioni lineari dell'immagine virtuale presentata ad uno degli occhi, e le corrispondenti della prospettiva degli stessi oggetti, presa dall'occhio stesso sul piano che contiene l'immagine virtuale. Per trovare la nuova posizione che assume un punto qualunque, basterà cambiare a in $d - n(d - a)$, a' in $-d + n(d + a')$, e c in nc . Si ottiene così senza difficoltà $X = x$, $Y = \frac{y}{n}$, $Z = z$.

Gli oggetti sembreranno dunque più prossimi, ma meno rilevati. Ciò si osserva infatti coi cannocchiali da teatro.

Variando c , z varia proporzionalmente. Spostando lateralmente le immagini, cioè variando a ed a' in modo che $a - a'$ resti costante, per esempio aumentando sia a che a' di α , si ha $X = x + \frac{\alpha y}{b}$, $Y = y$, $Z = z$. Se $Ax + By + Cz + D = 0$ è un piano, il suo corrispondente nel nuovo sistema sarà $AX + BY + CZ + D = 0$ ossia $Ax + A\frac{\alpha y}{b} + By + Cz + D = 0$.

Siccome per $y = 0$ le due equazioni danno egual risultato, se ne conclude che il piano primitivo ed il suo corrispondente si incontrano sul piano xy . Il nuovo sistema (XYZ) è omologico ad (xyz) , il piano d'omologia è xz , ed il centro è all'infinito su x .

3. *Variazione della rispettiva distanza delle immagini.* (Questo caso è in parte trattato nell'opera citata di Helmholtz). Cambiando nelle (2) e (3) a in $a - \alpha$ ed a' in $a' + \alpha$, ed indicando con X, Y, Z , le coordinate della nuova posizione del punto osservato, si ha

$$X = \frac{d(a + a')}{e + 2\alpha}, \quad Y = \frac{2bd}{e + 2\alpha}, \quad Z = \frac{2cd}{e + 2\alpha}$$

e quindi

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{e}{e + 2\alpha} = \frac{bd}{bd + \alpha y}.$$

Il punto (XYZ) è dunque sulla retta che va dall'origine delle coordinate al punto (xyz) . Ad un piano $Ax + By + Cz + D = 0$

dell'oggetto primitivo, corrisponde nel nuovo $AX + BY + CZ + D = 0$

ossia $Ax + By + Cz + D \frac{bd + \alpha y}{bd} = 0$. Per $y = 0$ si hanno

risultati coincidenti, e quindi i due piani tagliansi su xz . Il sistema di punti (xyz) ⁽¹⁾ è omologico a quello (XYZ) ; il piano d'omologia è xz , il centro è l'origine, cioè in questo caso il centro d'omologia esiste nel piano d'omologia. Ai punti infinitamente lontani del sistema (xyz) corrispondono quelli del piano $Y = \frac{bd}{\alpha}$ (che si ottiene col porre $y = \infty$). Questo è dun-

que uno dei piani limiti. L'altro piano limite è alla distanza $-\frac{bd}{\alpha}$ dall'origine.

La verifica che si ottiene muovendo due disegni stereoscopici è assai imperfetta. È preferibile la seguente. In uno stesso cartone si fissano due coppie d'immagini stereoscopiche uguali, ma a diversa distanza rispettiva. La differenza di forma e distanza dei due oggetti rappresentati è resa in tal modo evidente. Le figure *ac* ed *eg* servono a questo scopo (*Tav. II*). Sarà bene che il lettore copra con carta nera le figure *b, f, d, h*, prima di posare lo stereoscopio sulle figure da osservarsi. La stessa esperienza può ripetersi con fotografie di paesaggi o di persone.

4. *Teoria dei basso-rilievi*. Ciò che apparisce approssimando le due prospettive d'un oggetto qualunque, è un basso-rilievo dell'oggetto stesso. Difatti se si costruisce un solido che abbia quella stessa forma, le immagini che gli occhi ne riceveranno, saranno le stesse che avrebbero dall'oggetto reale (salvo alcune differenze trascurabili). Solo il basso-rilievo è veduto con una minor convergenza delle visuali; ma è noto quanto incerto sia il giudizio della distanza assoluta fondato sulla convergenza. Le regole della costruzione di un basso-rilievo consistono dunque nel modellare un oggetto omologico a quello che si vuol rappresentare, col centro d'omologia alla metà della retta che congiunge gli occhi, e con piano d'omologia passante

(1) Intendiamo il sistema di cui fa parte il punto (xyz) .

per la retta stessa. Invece di ciò, nei trattati di geometria s'insegna di fare l'oggetto omologico, scegliendo però il piano di omologia davanti all'osservatore, senza quindi contenere il centro d'omologia. È facile mostrare che in questo caso si otterrà una rappresentazione dell'oggetto, non in grandezza naturale. Difatti se si considera in luogo dell'oggetto (xyz) , un nuovo oggetto $(x_1 y_1 z_1)$ che non sia che il primo ridotto in minor scala ponendo $x_1 = \frac{1}{m} x$, $y_1 = \frac{1}{m} y$, $z_1 = \frac{1}{m} z$, avremo

$$\frac{X}{x_1} = \frac{Y}{y_1} = \frac{Z}{z_1} = \frac{m \, b d}{b d + m \alpha y_1}.$$

Confrontando fra loro i due sistemi (XYZ) e $(x_1 y_1 z_1)$ si riconosce che ad un piano $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, corrisponde il piano $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \frac{bd + m \alpha y_1}{m \, b d} = 0$. Siccome per $y_1 = \frac{bd}{\alpha} \cdot \frac{m-1}{m}$ si ha dalle due equazioni egual risultato, ne risulta che i due piani si incontrano su di un piano parallelo ad xz , ed alla distanza $\frac{bd}{\alpha} \cdot \frac{m-1}{m}$; esso sarà il piano d'omologia dei sistemi (XYZ) ed $(x_1 y_1 z_1)$. Per l'incertezza della convergenza, osservando (XYZ) potrà apparire (xyz) , ma non mai $(x_1 y_1 z_1)$. Invece dunque dell'oggetto $(x_1 y_1 z_1)$ che si voleva far vedere col basso-rilievo (XYZ) costruito colle ordinarie regole, si vedrà (xyz) che ha dimensioni maggiori. Tutto ciò si applica naturalmente anche alle decorazioni dei teatri, ai scenari ec. In questo caso il piano di omologia si suol prendere al proscenio. L'osservatore sarà portato a figurarsi gli oggetti in dimensioni maggiori del vero. Questa è forse una delle ragioni per le quali gli attori sembrano di statura maggiore visti sul palco scenico.

Se si vogliono mantenere le regole note per la costruzione dei basso-rilievi, basterà applicarle non all'oggetto (xyz) che si vuol rappresentare, ma ad uno $(x_1 y_1 z_1)$ ridotto m volte più piccolo e più vicino. La distanza l alla quale dovrà prendersi il

piano d' omologia dal centro sarà $l = \frac{bd}{\alpha} \cdot \frac{m-1}{m}$; ossia dicendo t la distanza fra il centro e quel piano in cui sono rappresentati gli oggetti infinitamente lontani (piano limite), $l = t \frac{m-1}{m}$.

5. *Sostituzione alle immagini stereoscopiche, di altre simmetriche.* Si consideri oltre del punto (xyz) un altro punto m_0 di coordinate $x_0 y_0 z_0$, e si cangino le figure stereoscopiche in altre simmetriche rispetto alle verticali passanti pei punti $(a_0 b_0 c_0)$ ed $(a'_0 b'_0 c'_0)$, prospettive del punto m_0 . Supponiamo per semplicità che quest' ultimo punto sia sul piano yz , cioè si abbia $x_0 = 0$. Oltre le equazioni (1), (2) e (3), ne avremo delle analoghe in cui $a'cxyz$, saranno sostituite da $a_0 a'_0 c_0 x_0 y_0 z_0 e_0$.

Indichiamo con $XYZ E$ i nuovi valori di $xyz e$. Basterà cambiare a in $a_0 - (a - a_0)$ ossia in $2a_0 - a$, ed a' in $2a'_0 - a'$. Si avrà così $E = 2d + 2(a'_0 - a_0) + a - a'$, e per le (1) applicate ad m_0

$$E = \frac{4bd}{y_0} - \frac{2bd}{y}.$$

Così pure

$$X = \frac{-2bdx}{y} = \frac{-xy_0}{2y-y_0}, \quad Y = \frac{y_0 y}{2y-y_0}, \quad Z = \frac{\frac{c}{b} y_0 y}{2y-y_0} = \frac{y_0 z}{2y-y_0}.$$

Dunque

$$\frac{X}{-x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{y_0}{2y-y_0}.$$

Il sistema di punti (XYZ) è dunque omologico al sistema $(-xyz)$; il centro d' omologia è O , ed il piano d' omologia è parallelo ad xz alla distanza y_0 . Di più, siccome dalla equazione $\frac{Y}{y} = \frac{y_0}{2y-y_0}$ si ricava $2Yy_0 - y_0 Y - y_0 y = 0$, che

è simmetrica rispetto ad y ed Y , ne risulta che mentre ad un punto $(-x, y, z)$ corrisponde $(X Y Z)$, reciprocamente al punto $(X Y Z)$ considerato come punto del primo sistema, corrisponde $(-x, y, z)$. L' omologia è dunque armonica, od in involuzione.

Per passare dunque dal sistema $(x y z)$ all' altro $(X Y Z)$, basta prendere prima $(-x y z)$ simmetrico ad $(x y z)$ rispetto al piano yz , poi prendere il sistema omologico a $(-x y z)$ nel modo che si è detto. Così se m (fig. 9) è il punto $(x y z)$, si passa colla simmetria ad m' e colla omologia ad M . Od anche, siccome si può scrivere

$$\frac{-X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{y_0}{2y-y_0},$$

si potrà prima prendere $(-X Y Z)$ omologico ad $(x y z)$, poi $(X Y Z)$ simmetrico a $(-X Y Z)$ rispetto al piano yz . In tal modo si passa da m ad M' , e da M' ad M .

La relazione fra $(x y z)$ ed $(X Y Z)$ può trovarsi in altro modo, considerando che la retta mM incontra due rette fisse. Sieno $\alpha\beta$ le coordinate correnti della retta Nn ; la sua equazione sarà $\frac{\alpha-x}{\alpha-X} = \frac{\beta-y}{\beta-Y}$. Ma si ha successivamente

$$\frac{Y}{y} = \frac{y_0}{2y-y_0}, \quad \frac{Y}{y_0} = \frac{y}{2y-y_0}, \quad \frac{y_0-Y}{Y} = \frac{y-y_0}{y}, \quad \frac{y}{Y} = \frac{y-y_0}{y_0-Y},$$

$$\frac{x}{X} = \frac{y_0-y}{y_0-Y}.$$

Quest' ultima relazione fa vedere che l' equazione della retta precedente è soddisfatta con $\alpha = 0$ e $\beta = y_0$. Dunque la retta Nn passa per n_0 , e quindi Mm incontra la verticale di m_0 . D'altra parte l' equazione della proiezione di Mm sul piano yz è $\frac{\beta-y}{\beta-Y} = \frac{\gamma-z}{\gamma-Z}$. Essendo soddisfatta per $\beta = \gamma = 0$, la retta passerà per l' origine. Dunque Mm incontra l' asse x . Infine il rapporto anarmonico dei punti $(ABmM)$ è eguale a (An_0nN)

e quindi ad (On_0CD) . Ma quest'ultimo è $\frac{y}{y_0-y} : \frac{Y}{y_0-Y} = -1$, dunque $(ABmM)$ è un rapporto armonico.

Per trovare il punto (XYZ) basterà dunque condurre per (xyz) quella retta che può toccare Ox e la verticale del punto m_0 , e poi prendere il coniugato armonico di (xyz) rispetto ai punti d'incontro. I sistemi collineari (xyz) ed (XYZ) , sono in una particolare posizione relativa, di cui ho generalizzato le proprietà nell'appendice.

Le figure *eg* ed *im* (*Tav. II*) osservate simultaneamente mostrano l'effetto del cambiamento delle immagini stereoscopiche in altre simmetriche.

6. *Caso in cui si cangia una sola prospettiva.* Se si lascia immobile la prospettiva a sinistra, e si sostituisce all'altra una simmetrica rispetto alla verticale dell'immagine di m_0 , per trovare il punto (XYZ) corrispondente ad (xyz) , basterà cangiare a in $2a_0 - a$. Si ottiene con processo analogo al precedente.

$$\frac{X+d}{x+d} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{dy_0}{xy_0+dy}.$$

In questo caso il sistema (XYZ) è omologico ad (xyz) ; il centro d'omologia è l'occhio sinistro. Il piano d'omologia è $xy_0 + dy - dy_0 = 0$; esso passa per l'occhio destro, pel punto m_0 , ed è verticale. Le figure *fh* (*Tav. II*) non sono che le *ln*, una delle quali cangiata in altra simmetrica.

7. *Teoria del pseudoscopio di Wheatstone.* Questo istrumento si compone di due prismi rettangolari ad inversione, a spigoli verticali, posti davanti agli occhi. Fra i raggi che partono dagli oggetti e giungono in uno di questi prismi, vi ha il raggio AB (*fig. 10*), che penetrando nel prisma e riflettendosi sull'ipotenusa, emerge nella propria direzione; gli altri, come $CDEF$ giungono all'occhio B , come se partissero da C' , simmetrico a C rispetto ad AB . Se ad una distanza qualunque dall'osservatore si conduce un piano verticale parallelo alla linea degli occhi, esso intersecherà i raggi che giungono ad uno degli occhi armato di prisma, secondo una figura simmetrica al-

l'intersezione coi raggi che dagli oggetti andrebbero direttamente all'occhio. Le formole del n.º 5 sono dunque applicabili al caso attuale, con tutte le loro conseguenze.

Se, come d'ordinario, la distanza dell'oggetto che si osserva è assai grande in confronto delle sue dimensioni, le rette Mm' (fig. 9) ed mM' , potranno considerarsi come parallele fra loro ed al piano yz , e quindi sensibilmente $X = -x$, $Z = z$. Anche Y sarà pochissimo diverso da y , ma però le differenze $y_0 - y$ e $y_0 - Y$ sono di segno contrario. Difatti si ha $\frac{Y}{y} = \frac{y_0}{2y - y_0}$

da cui come altrove $\frac{Y}{y} = \frac{Y - y_0}{y_0 - y}$ e siccome Y è poco diverso da y , $Y - y_0 = y_0 - y$. Dunque il punto $(X Y Z)$ è simmetrico ad $(x y z)$ rispetto alla verticale del punto m_0 .

Se l'oggetto è simmetrico rispetto al piano yz , apparisce col rilievo invertito. Se si adopera uno solo dei prismi, le formole del n. 6 divengono applicabili.

8. *Rotazione delle immagini stereoscopiche.* Se dopo aver cambiato le prospettive in altre simmetriche rispetto alle verticali passanti per le immagini d'uno stesso punto m_0 , che supporremo sull'asse delle y , si prendono le simmetriche rispetto alle orizzontali passanti per le stesse immagini, si otterrà evidentemente lo stesso effetto, come girare di 180° i disegni primitivi nel proprio piano, e ciascuno intorno alla prospettiva del punto m_0 . Per vedere adunque qual relazione esista fra l'oggetto primitivo, e quello che apparisce dopo la rotazione delle immagini, basterà, oltre di cangiare a ed a' in $2a_0 - a$ e $2a'_0 - a'$, cangiare anche c in $-c$. Si ottiene così facilmente

$$\frac{X}{-x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{-z} = \frac{y_0}{2y - y_0}.$$

Se si prendono nuovi assi, paralleli ai primitivi, ma con origine in m_0 converrà cangiare y ed Y in $y + y_0$, $Y + y_0$. Si ha dunque

$$\frac{X}{-x} = \frac{Y + y_0}{y + y_0} = \frac{Z}{-z} = \frac{y_0}{2y + y_0}.$$

Ma dall' equazione $\frac{Y+y_0}{y+y_0} = \frac{y_0}{2y+y_0}$, si hanno le seguenti trasformazioni

$$2Yy+y_0y+Yy_0=0, \quad y_0y+Yy=-Yy_0-Yy, \quad y(Y+y_0)=-Y(y+y_0)$$

$$\frac{Y}{-y} = \frac{Y+y_0}{y+y_0}.$$

Dunque

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{-y_0}{2y+y_0}.$$

Da queste equazioni si ricava che i due sistemi (xyz) , (XYZ) sono in omologia armonica, il centro d'omologia è m_0 , attuale origine delle coordinate, ed hanno per piano d'omologia xz . Se y_0 è assai grande in confronto alle dimensioni dell'oggetto, (XYZ) può considerarsi simmetrico ad (xyz) rispetto al punto m_0 . Il nuovo oggetto che apparisce è dunque l'oggetto primitivo girato di 180° e col rilievo invertito.

Se due disegni stereoscopici si fanno girare intorno a due punti corrispondenti, ogni volta che passano per la loro posizione originaria, dovranno dunque presentare l'oggetto vero, ed ogni volta che passano per la posizione opposta di 180° , il rilievo dovrà apparire invertito.

Nelle posizioni intermedie, i punti corrispondenti delle due prospettive, presentano in generale delle piccole differenze d'altezza; ma esse non impediscono che mentre si vede l'oggetto girare intorno a se stesso, non si vegga gradatamente variarne il rilievo, ed invertirsi ad ogni mezzo giro.

Il piccolo apparecchio disegnato nella figura 11, serve ad osservare questi effetti. Due carrucole A e B sono messe in moto nello stesso senso dalla carrucola C, mediante il filo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Le carrucole A e B portano due cilindri m ed n ad egual distanza dall'asse, sui quali passa un tirante t ; al disopra trovansi due dischi D ed E, i cui centri sono sul prolungamento degli assi delle carrucole, e che servono a portare i due disegni. Il tirante t costringe le carrucole A e B, a spo-

starsi sempre di eguali quantità. Due immagini stereoscopiche tagliate circolarmente col far centro in due punti corrispondenti, e poste sui dischi D ed E, servono a far l'esperienza. Con disegni analoghi ad *s* e *t* (*Tav. II*) riesce particolarmente bene il fenomeno. Allorchè i due disegni trovansi situati come nella Tavola II, osservati collo stereoscopio fanno vedere come assai lontani l'anello bianco a sinistra ed il piccolo a destra, ed assai vicini il disco bianco ed il grosso anello a destra, mentre l'anello bianco che racchiude gli altri sembra ad una distanza intermedia. Facendo girare i disegni, le parti vicine si allontanano poco a poco, avvicinandosi le lontane, e dopo un mezzo giro il rilievo è invertito; ma continuando la rotazione si osservano movimenti in senso contrario per effetto dei quali dopo un giro intero si ha di nuovo l'aspetto primitivo. Se, come supponiamo, si sono tagliati i disegni secondo il contorno esterno dell'anello bianco più grande, durante la rotazione esso apparirà immobile.

È facile variare in mille maniere i disegni. È preferibile non far uso dello stereoscopio, ma osservare a visuali incrociate, ponendo gli occhi a molta altezza sopra i due disegni.

9. *Disegni trasparenti osservati dalla seconda faccia.* Se due figure stereoscopiche esistono sopra una stessa lastra trasparente, e si osservano guardandole dalla faccia opposta a quella su cui furono tracciate, in luogo dell'oggetto rappresentato, apparisce un nuovo oggetto, simmetrico al primo rispetto al piano yz . Infatti cangiando a in $-a'$ ed a' in $-a$, nelle formole del n.º 4, si ottiene con processo analogo a quello dei casi precedenti, $X = -x$, $Y = y$, $Z = z$.

10. *Cambiamento di posto delle due immagini.* Se dopo aver rovesciata la lastra trasparente su cui stanno le immagini, si cangia ciascuna nella sua simmetrica, si otterrà lo stesso effetto, come a cambiar posto semplicemente alle due immagini. Al punto (xyz) per la prima operazione resterà sostituito il punto $(-xyz)$, ed a questo per la seconda un punto (XYZ) dato dalle formole del n.º 5, in cui si cangi x in $-x$. Si avrà dunque

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{y_0}{2y - y_0}.$$

Il sistema (XYZ) è dunque in omologia armonica con (xyz) . Se y_0 è assai grande in confronto delle dimensioni dell'oggetto, si ha sensibilmente $X = x$, $Y - y_0 = y_0 - y$, $Z = z$; cioè il nuovo oggetto è simmetrico al primitivo rispetto ad un piano perpendicolare ad y alla distanza y_0 dall'origine. Qui si ha dunque il vero effetto pseudoscopico, cioè l'inversione di rilievo. Con fotografie non sempre riesce l'illusione; abbiamo visto come si ottiene osservando immagini capovolte.

11. Teoria dello stereoscopio. Se si osservano le due figure stereoscopiche con lenti convergenti, la cui distanza sia maggiore di $2d$, si ha lo stesso effetto come ad accostare le due immagini. Le quantità di cui vanno allontanate le figure onde non vari l'oggetto rappresentato, dipende dalla distanza focale delle lenti e dalla distanza dei loro centri. Oltre a ciò nello stereoscopio ordinario, i punti nodali esterni degli occhi, non possono situarsi sulla retta che congiunge i centri delle lenti, ma più in dietro. Occupiamoci di risolvere il problema generale dello stereoscopio, e cioè data

la distanza degli occhi $2d$,

quella dei centri delle lenti $2l$,

la distanza focale f delle lenti stesse ⁽¹⁾,

la quantità ω di cui gli occhi distano dalla retta che unisce i centri delle lenti,

ed infine la distanza b fra gli occhi ed il piano in cui furono tracciate le due immagini,

determinare la distanza b_1 a cui vanno posti i disegni dagli occhi, oppure $b_1 - \omega$ dalle lenti nello stereoscopio, e la distanza i alla quale vanno poste le due immagini di un punto infinitamente lontano. Se non vi sono punti infinitamente lontani, si determinerà la distanza $a_1 - a_1'$ a cui vanno posti due punti corrispondenti, che prima erano alla distanza $a - a'$.

Sia d (*fig. 12*) la posizione dell'occhio destro, d, o, o , le sue coordinate, ω il centro della lente destra, ed l, ω, o le re-

(1) Si misura facilmente come è noto, ricevendo normalmente i raggi solari sulle lenti, e raccogliendo l'immagine del sole sopra un diaframma. Se si misura la distanza fra le immagini date dalle due lenti, si otterrà ancora $2f$.

lative coordinate; $ba = a$, $Ob = b$, $ac = c$ le coordinate del punto c prospettiva di un certo punto m dell'oggetto; a_1, b_1, c_1 le coordinate incognite della stessa prospettiva di m , nella posizione che deve occupare rispetto alle lenti. Infine sia BAC l'immagine del piano bae data dalla lente ω . Onde l'oggetto che appare osservando attraverso alle lenti i disegni posti in a_1, b_1, c_1 , sia il vero oggetto primitivo, basterà che il punto C , immagine di c_1 dato dalla lente ω , sia sulla retta dc , e che analogamente l'immagine C' del punto c_1' corrispondente di c_1 sia sulla retta che unisce l'occhio sinistro al punto c' corrispondente di c . Scriveremo dunque le condizioni onde i punti ω, c_1, C , sieno in linea retta, e così pure i punti d, c_1, C , ed altrettante analoghe per l'occhio e la lente sinistra.

Si ottengono in tal modo le equazioni seguenti :

$$\frac{a_1 - A}{a_1 - l} = \frac{b_1 - B}{b_1 - \omega} = \frac{c_1 - C}{c_1}, \quad \frac{a - A}{a - d} = \frac{b - B}{b} = \frac{c - C}{c},$$

$$\frac{a_1' - A'}{a_1' + l} = \frac{b_1 - B}{b_1 - \omega} = \frac{c_1 - C}{c_1}, \quad \frac{a' - A'}{a' + d} = \frac{b - B}{b} = \frac{c - C}{c}.$$

Da queste equazioni si ricava

$$a_1 = \frac{(b_1 - \omega)A + l(B - b_1)}{B - \omega}, \quad a_1' = \frac{(b_1 - \omega)A - l(B - b_1)}{B - \omega}$$

$$A = \frac{B}{b} (a - d) + d, \quad A' = \frac{B}{b} (a' + d) - d, \quad c_1 = c.$$

Sostituendo i valori di A ed A' in quelli di a_1 ed a_1' ,

$$a_1 = \frac{b_1 - \omega}{B - \omega} \cdot \frac{B}{b} (a - d) + d \frac{b_1 - \omega}{B - \omega} + l \frac{B - b_1}{B - \omega}$$

$$a_1' = \frac{b_1 - \omega}{B - \omega} \cdot \frac{B}{b} (a' + d) - d \frac{b_1 - \omega}{B - \omega} - l \frac{B - b_1}{B - \omega}.$$

Dalle precedenti equazioni si deduce pure $\frac{b_1 - B}{b_1 - \omega} = \frac{c_1 - C}{c_1}$, da cui per essere $c = c_1$ e $\frac{C}{B} = \frac{c}{b}$, $\frac{B}{b} = \frac{B - \omega}{b_1 - \omega}$, $\frac{B - b}{B} = \frac{B - b_1}{B - \omega}$. Sostituendo nei valori di a_1 ed a_1' si ha

$$a_1 = a + (l - d) \frac{B - b}{B}, \quad a_1' = a' - (l - d) \frac{B - b}{B}$$

$$a_1 - a_1' = a - a' + 2(l - d) \frac{B - b}{B}.$$

Questa equazione mostra intanto che, come si era asserito, la distanza $a_1 - a_1'$ alla quale vanno posti due punti corrispondenti, diversifica dalla loro primitiva distanza $a - a'$ di una quantità costante; di qui la possibilità che poste le due immagini ad una certa distanza, apparisca l'oggetto che si volle rappresentato.

Se a ed a' appartengono ad un punto infinitamente lontano, si ha $a - a' = 2d$, e quindi

$$(1) \quad i = 2d - 2(l - d) \frac{B - b}{B}.$$

Da una delle formule precedenti si ricava

$$(2) \quad b_1 - \omega = b - \frac{b\omega}{B}.$$

Le equazioni (1) e (2) danno la soluzione del proposto problema. La quantità B resta determinata dalla formola delle immagini

virtuali nelle lenti convergenti, cioè $\frac{1}{b - \omega} - \frac{1}{B - \omega} = \frac{1}{f}$ ossia $\frac{B}{b(B - \omega)} - \frac{1}{B - \omega} = \frac{1}{f}$ da cui $B = \frac{b(f - \omega)}{f - b}$. Perciò

$$i = 2d - 2(l - d) \frac{b - \omega}{f - \omega}, \quad b_1 - \omega = f \frac{b - \omega}{f - \omega}$$

È bene che la distanza B alla quale si formano le immagini date dalle lenti dello stereoscopio, sia eguale alla distanza di un punto dell'oggetto, poichè solo in tal modo gli occhi dovranno adattarsi per la stessa distanza verso la quale convergono. Ammettiamo dunque che B rappresenti la distanza di un punto centrale dell'oggetto. La quantità b non è più arbitraria, e dipende da B ed f ; anzi dalla $\frac{B}{b(B-\omega)} - \frac{1}{B-\omega} = \frac{1}{f}$ si ricava

$$(3) \quad b = \frac{Bf}{B+f-\omega},$$

e quindi

$$(4) \quad i = 2d - 2(l-d) \frac{B-\omega}{B+f-\omega},$$

$$(5) \quad b_1 - \omega = \frac{f(B-\omega)}{B+f-\omega}.$$

Se si tratta di fotografie, b è la distanza fra il diaframma e le lenti della camera oscura, e chiamandone F la distanza focale, si ha

$$(6) \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{B} = \frac{1}{F}.$$

Qui converrà distinguere due casi. Se F ed f sono dati, questa formola servirà a calcolare la distanza B , alla quale deve porsi l'oggetto dalla camera oscura; eliminando b fra (5) e (6) si ha

$$(7) \quad B = \frac{F(\omega - 2f)}{F - f}$$

e quindi colle (3) e (7)

$$(8) \quad i = 2d - 2(l-d) \frac{2F-\omega}{F+f-\omega}$$

$$(9) \quad b_1 - \omega = f \frac{2F - \omega}{F + f - \omega}.$$

Se poi non è in nostro arbitrio stabilire B , converrà che fra le lenti dello stereoscopio e quelle della camera oscura, esista la relazione (7), nella quale però B è quantità data.

Riassumiamo i risultati precedenti. Se collo stereoscopio si osservano disegni fatti a mano, conviene supporre nella loro costruzione il piano delle prospettive ad una distanza b dai punti di vista, data dalla (3). La distanza dei due disegni fra loro e dalle lenti dello stereoscopio, si determinano colle (4) e (5). Se si tratta di fotografie, ed è in nostro arbitrio la distanza B fra l'oggetto e la camera oscura, si calcola questa distanza colla (7) prima di fare la negativa, e poi le positive si mettono nella posizione determinata dalle (8) e (9). Se invece B è data in precedenza, conviene adoperare una camera oscura ed uno stereoscopio tali, che fra le distanze focali delle loro lenti esista la relazione (7); questa formula servirà dunque a calcolare o F od f . La posizione delle fotografie nello stereoscopio si calcolerà colle (8) e (9), dopo però di avervi introdotto coll'aiuto della (7) B invece di F o di f . Pei paesaggi, si può ritenere B infinitamente grande; la (7) dà in tal caso $F = f$.

Nelle fotografie stereoscopiche nessuna di queste regole è in generale seguita. E quand' anche non si volesse soddisfatta la condizione che B eguagli la distanza dell'oggetto, la distanza delle due immagini non è in generale adattata allo stereoscopio con cui si osservano. Oltre a tutto ciò le fotografie stereoscopiche che sono in commercio sono spesso ottenute ponendo gli obbiettivi ad una distanza maggiore di quella degli occhi; vedremo fra poco che in tal modo non è possibile rappresentare l'oggetto nelle sue vere dimensioni. Per tutte queste ragioni le vedute stereoscopiche presentano spesso un effetto di basso rilievo, o di oggetti ridotti in piccole dimensioni. Al contrario seguendo rigorosamente le regole stabilite, si avrebbe una esatta rappresentazione degli oggetti, nelle loro vere dimensioni.

12. *Spostamento dei punti di vista.* Chiameremo *punti di vista* quei punti, presi come centri onde formare le due pro-

spettive di un oggetto. In tutti i casi finora studiati, li abbiamo supposto coincidere cogli occhi. Qual effetto si avrà presentando agli occhi delle immagini prese da punti di vista da essi distinti?

È evidente che dovranno apparire non gli oggetti reali, ma oggetti diversi, quali dovrebbero esistere onde produrre nei nostri occhi quelle stesse immagini. Indichiamo con d ed s gli occhi, e con D ed S i punti di vista. Se supponiamo le rette che uniscono D ed S ai diversi punti degli oggetti, trasportate rispettivamente in d ed s , le intersezioni delle rette corrispondenti determineranno i punti degli oggetti apparenti.

Così facendo però accadrà sovente, che due rette corrispondenti non vengano ad intersecarsi; ma le differenze sono sempre abbastanza piccole onde l'illusione non sia disturbata, almeno nei casi che dovremo considerare. Supporremo sempre i punti D, S, d, s in linea retta.

Invece di trasportare le rette visuali da D a d e da S ad s , come si è detto, potremo immaginare un piano parallelo alla retta SD , trovare le intersezioni di quelle rette con questo piano, ossia le prospettive degli oggetti prese da D e da S , e poi trasportarle nel loro piano, davanti a d ed s . Ciò non equivale esattamente al trasporto delle visuali; ma siccome supporremo sempre che le distanze fra D e d , S ed s siano piccole in confronto della distanza fra gli oggetti e l'osservatore, otterremo una approssimazione più che sufficiente.

13. *Trasporto dei punti di vista, nella direzione della retta che li congiunge.* Sieno (fig. 13) S e D i punti di vista, s, d gli occhi, m un punto dell'oggetto, B, A le sue prospettive prese da S e D .

Se con un artificio qualunque facciamo giungere ad s i raggi che andrebbero in S , ed a d quelli che andrebbero in D , invece del punto m si vedrà un punto M , ottenuto collo spostare B ed A in B_1 ed A_1 .

Poniamo $BB_1 = AA_1 = x$, $OS = S$, $Os = s$, $Od = s + 2d$, $OD = S + 2d$, ed indichiamo come di solito con $abc, a'bc', xyz$, le coordinate di A, B ed m .

Essendo i punti m, B, S , ed m, A, D , in linea retta avremo

$$\frac{a-x}{a-S-2d} = \frac{b-y}{b} = \frac{c-z}{c}, \quad \frac{a'-x}{a'-S} = \frac{b-y}{b} = \frac{c-z}{c'}$$

dalle quali, come nel n. 1,

$$c=c', e=2d-a+a', a=\frac{bx+y(S+2d)-b(S+2d)}{y}, a'=\frac{bx+Sy-bS}{y}$$

$$x=\frac{a'(S+2d)-aS}{e} \quad y=\frac{2bd}{e} \quad z=\frac{2cd}{e}.$$

Se consideriamo un secondo punto dell'oggetto m_0 , avremo analoghe equazioni che si otterrebbero cambiando $a a' c e x y z$, in $a_0 a_0' c_0 e_0 x_0 y_0 z_0$.

Se ora supponiamo trasportate le immagini davanti agli occhi s, d , per avere le nuove coordinate $XYZ, X_0Y_0Z_0$ dei due punti considerati basterà cambiare nei valori di $x y z$, ed $x_0 y_0 z_0$, rispettivamente $a a' a_0 a_0'$ in $a + \alpha, a' + \alpha, a_0 + \alpha, a_0' + \alpha$, come pure S in s . Si ottiene

$$Y=y, Z=z, Y_0=y_0, Z_0=z_0, X=\frac{(a'+\alpha)(s+2d)-(a+\alpha)s}{e},$$

$$X_0=\frac{(a_0'+\alpha)(s+2d)-(a_0+\alpha)s}{e_0}.$$

Determiniamo ora la quantità α in maniera che il punto $x_0 y_0 z_0$ conservi la sua posizione anche dopo il cambiamento dei punti di vista. Basterà perciò porre $X_0 = x_0$ ossia $(a_0' + \alpha)(s + 2d) - (a_0 + \alpha)s = a_0'(s + 2d) - a_0 S$, da cui

$$\alpha = \frac{s-S}{2d} (a_0 - a_0').$$

Sostituendo in X si ha facilmente

$$X = x + (s - S) \frac{y_0 - y}{y_0}.$$

Questa equazione fa vedere che tutti i punti del piano $y = y_0$ conservano la loro posizione; quelli che sono al di là sembrano trasportati verso sinistra, e quelli al di quà verso destra. E siccome $X - x$ è proporzionale ad $y_0 - y$, una retta dapprima parallela all'asse Oy , apparirà girata intorno al punto in cui incontra il piano $y = y_0$.

Questi apparenti spostamenti degli oggetti possono osservarsi con due specchi piani, ricevendo cogli occhi in s e d (fig. 14) i raggi riflessi. Gli occhi ricevono così le stesse immagini, come se fossero in S e D . Sarà facile disporre gli specchi in modo che un determinato punto m_0 conservi la stessa posizione. La variazione di distanza fra gli occhi e l'oggetto sarà trascurabile quando esso sia lontano. Se mantenendo gli occhi in s e d , si sposta lo specchio a destra in modo che S e D camminino nella direzione $S'D'$, sembrerà di vedere muovere tutti i punti degli oggetti nella stessa direzione, per quelli che sono più lontani dal punto m_0 , ed in opposta direzione per i più prossimi.

Le stesse illusioni hanno luogo allorquando l'osservatore è in moto e crede di esser fermo; mentre i suoi occhi vanno da s e d in S e D , gli oggetti gli sembreranno spostarsi precisamente come se restando in s e d , i punti di vista, mediante due specchi, passassero in S e D . Così se stando in ferrovia si fissa cogli occhi un albero ad una certa distanza nella campagna circostante, tutti gli oggetti più lontani sembrano seguire il treno nel suo movimento, i più vicini invece sembrano correre in senso opposto, mentre ci accorgiamo nettamente che quell'albero stà immobile. Se dopo si fissa un punto più lontano, anche quel certo albero che compariva immobile sembra fuggire nella direzione opposta a quella in cui si muove l'osservatore. Quando lateralmente alla via ferrata esistono dei piantamenti d'alberi diretti perpendicolarmente alla strada, essi sembrano ruotare intorno a quello dei loro alberi su cui si tien fisso lo sguardo. Se $y_0 = 0$, $X = x + s - S$; tutti gli oggetti sembrano animati da un comune movimento traslatorio in senso contrario al moto dell'osservatore. Naturalmente questi fenomeni appaiono anche guardando con un sol occhio, poichè non è solo la visione binoculare che ci fornisce la nozione delle distanze dei vari oggetti osservati.

14. *Immagini prese da punti di vista a distanza diversa da quella degli occhi.* Prendiamo per origine delle coordinate (fig. 15) il punto di mezzo della retta che congiunge gli occhi s e d . Sieno S, D i punti di vista, cioè quei punti dai quali sono prese le prospettive che si presentano agli occhi. Poniamo $Od = -Os = d$, $OD = -OS = D$; siano $x y z$, $x_0 y_0 z_0$ le coordinate di due punti m ed m_0 , e manteniamo le altre notazioni a, a', b ec. Avremo

$$c = \frac{bz}{y}, \quad a = \frac{bx + Dy - bD}{y}, \quad a' = \frac{bx - Dy + bD}{y}, \quad E = 2D - a + a' = \frac{2bD}{y}$$

$$x = \frac{D(a - a')}{E}, \quad y = \frac{2bD}{E}, \quad z = \frac{2cD}{E},$$

ed analoghe equazioni pel punto m_0 . Supponiamo spostate le immagini nel proprio piano, da D verso d e da S verso s , e cerchiamo le coordinate XYZ , $X_0 Y_0 Z_0$, dei punti M, M_0 i quali appariscono agli occhi posti in d ed s , osservando le prospettive di m, m_0 nella nuova posizione. Basterà nelle formole precedenti cambiare D in d , ed a, a', a_0, a_0' in $a + \alpha, a' - \alpha, a_0 + \alpha, a_0' - \alpha$. Ecco le formole che si ottengono

$$e = 2d - a + a' - 2\alpha = 2d + \frac{2bD - 2Dy}{y} - 2\alpha, \quad X = \frac{d(a + a')}{e},$$

$$Y = \frac{2bd}{e}, \quad Z = \frac{2cd}{e}, \quad X_0 = \frac{d(a_0 + a_0')}{e_0} \text{ ec.}$$

Se ora poniamo $\frac{D}{d} = \frac{d}{e_0}$, si otterrà $X_0 = x_0, Y_0 = y_0, Z_0 = z_0$, vale a dire che avremo presentate le immagini agli occhi, in modo da conservare al punto m_0 la posizione primitiva. Determiniamo α con questa condizione. Si ha

$$\frac{D}{d} = \frac{E_0}{e_0} = \frac{2D - a_0 + a_0'}{2d - a_0 + a_0' - 2\alpha}$$

da cui

$$\alpha = \frac{d-D}{2D} (a_0 - a_0') = (d-D) \frac{y_0 - b}{y_0}$$

La parallasse c del punto M diviene allora

$$c = \frac{2b}{y_0 y} [Dy_0 + (d-D)y],$$

e quindi

$$(1) \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{dy_0}{Dy_0 + (d-D)y}.$$

Queste equazioni ci mostrano, che nel passare dal sistema primitivo $m m_0 \dots$ al nuovo sistema $M m_0 \dots$, ogni punto non esce dalla retta che lo congiunge all'origine delle coordinate. Per $y = y_0$ si ha $X = x$, $Y = y$, $Z = z$, cioè i punti del piano $y = y_0$ conservano la loro posizione. Il sistema $(X Y Z)$ è dunque omologico ad $(x y z)$; il piano passante per $(x_0 y_0 z_0)$ e perpendicolare ad Oy , è il piano di omologia, ed il centro d'omologia è O . Il primo piano limite, cioè quello ove appaiono i punti infinitamente lontani, sarà ad una distanza Y_∞ che si ottiene facendo $y = \infty$, cioè

$$(2) \quad Y_\infty = \frac{dy_0}{d-D}.$$

Il secondo piano limite, quello cioè che fa parte del sistema $(x y z)$ ed al quale corrisponde in $(X Y Z)$ il piano all'infinito, sarà ad una distanza y_∞ dall'origine data da

$$(3) \quad y_\infty = \frac{Dy_0}{D-d}.$$

Il rapporto anarmonico caratteristico dell'omologia sarà

$$(4) \quad \frac{y_\infty}{y_\infty - y_0} = \frac{D}{d}.$$

Se m_0 è infinitamente lontano, le (1) divengono :

$$(5) \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{D}{d} ,$$

ed invece d'omologia si ha omotetia.

Le formole (1) si semplificano, se si osserva un oggetto, tutti i punti del quale sieno assai prossimi al punto (o, y_0, o) . Prendiamo perciò questo punto come origine delle coordinate, basterà cambiare y in $y + y_0$, Y in $Y + y_0$. Si avrà dunque

$$\frac{X}{x} = \frac{Y + y_0}{y + y_0} = \frac{Z}{z} = \frac{dy_0}{Dy_0 + (d - D)(y + y_0)} .$$

Se ne ricava

$$\frac{Yy}{y_0} + \frac{dY - Dy}{d - D} = 0$$

ed approssimativamente, per l'ipotesi fatta,

$$(6) \quad Y = y \frac{D}{d} .$$

Così pure, colla stessa approssimazione $X = x$, $Z = z$. Dunque nel caso attuale i sistemi (XYZ) , (xyz) sono affini; il punto M è sulla perpendicolare abbassata da m sul piano d'omologia, ed il rapporto delle distanze di M ed m da questo piano è costante.

15. *Caso in cui uno dei punti di vista coincide con uno degli occhi.* Supponiamo che all'occhio s , preso come origine delle coordinate, si presenti la prospettiva presa pure da s , mentre all'occhio d si presenta la prospettiva presa da D . Ponendo $OD = 2D$, $Od = 2d$, si ottengono formole identiche a quelle del numero precedente. Dunque le proprietà che ne conseguono, si applicano anche al caso attuale. Nello strumento descritto nel § II, uno degli occhi vede direttamente; dunque

l'oggetto apparente ed il reale saranno in omologia, ed il centro d'omologia coinciderà coll'occhio stesso. Nei casi particolari che imprendiamo ad esaminare, continueremo a supporre l'origine a metà distanza dagli occhi e dai punti di vista; ma i risultati saranno applicabili anche allo strumento descritto nel § II, purchè in questo caso l'origine delle coordinate coincida coll'occhio che vede direttamente.

16. *Caso in cui $D > d$.* In questo caso si osservano immagini prese da punti di vista la cui distanza è maggiore di quella degli occhi. Le (1) del n. 14 potranno trasformarsi nelle seguenti

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{Dy_0 - (D-d)y_0}{Dy_0 - (D-d)y}.$$

Sotto questa forma rendono manifesto che se $y_0 > 0$, cioè si fa in modo che un punto m_0 esistente davanti all'osservatore conservi la propria posizione, si ha per $y \leq y_0$, X, Y, Z , rispettivamente $\leq x, y, z$, vale a dire, tutti i punti al di là di m_0 sembreranno più vicini di quel che sieno realmente, e quelli che sono al di là di m_0 sembreranno più lontani. I punti all'infinito danno linee visuali divergenti, e trovansi di dietro all'osservatore alla distanza Y_∞ .

Tutti i punti che sono alla distanza positiva y_∞ , sembreranno infinitamente lontani.

Se $y_0 = \infty$, l'oggetto apparente è omotetico al reale rispetto all'origine, ed è in minori dimensioni. Questo è il solo caso che tratti l'Helmholtz per la teoria del suo telestereoscopio. Se al telestereoscopio si aggiungono due sistemi di lenti i quali ingrandiscano gli oggetti nel rapporto $\frac{D}{d}$, pel n. 2 Y sarà diminuito nello stesso rapporto, e perciò si avrà

$$X = \frac{d}{D} x, \quad Y = \frac{d^2}{D^2} y, \quad Z = \frac{d}{D} z.$$

L'oggetto apparente sarà dunque più piccolo, più vicino, e con minor rilievo dell'oggetto reale.

Se $y_0 < 0$, le (1) trasformate nelle seguenti (col cangiar segno ad y_0):

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{Dy_0 - (D-d)y_0}{Dy_0 + (D-d)y_0}$$

mostrano che XYZ sono minori di x, y, z . Tutti i punti sembrano avvicinati, e quelli infinitamente lontani compariscono alla distanza $\frac{d y_0}{D-d}$.

Se si osservano oggetti piccoli in confronto della loro distanza dall'osservatore, mentre tutti i punti del piano passante pel punto m_0 dell'oggetto, e parallelo ad xz sembrano conservare la loro posizione, la (6) ci dice che tutti gli altri punti si allontanano da quel piano nel rapporto D a d . Il rilievo resta così esagerato.

Questi effetti si possono osservare sia con figure stereoscopiche prese da punti di vista a distanza maggiore di quella degli occhi, come le figure oq e pr della Tav. II, che vanno osservate simultaneamente collo stereoscopio, sia col telestereoscopio d'Helmholtz, sia infine collo strumento del § II, allorchando l'occhio che vede direttamente non si trova fra i due specchi (§ II, n. 2).

17. *Caso in cui $D < d$, ma positivo.* Cominciamo dal supporre y_0 positivo e finito. Le (1) n. 14, trasformate nelle seguenti

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{Dy_0 + (d-D)y_0}{Dy_0 + (d-D)y_0}.$$

mostrano che quando $y \leq y_0$ si ha $X \geq x$, $Y \geq y$, $Z \geq z$.

Tutti i punti si accostano dunque al piano $y = y_0$, ed i punti all'infinito appariscono in un piano che dista dall'origine della quantità positiva Y_∞ data dalla (2).

Se y_0 cresce e diviene infinito, le (5) divengono valide. Al sistema $(x y z)$ è sostituito (XYZ) omotetico rispetto all'o-

rigine, ed in proporzioni maggiori. Se poi y_0 è negativo, y_∞ diviene positivo, cioè vi è un piano i cui punti appaiono a distanza infinita. Tutti gli altri punti del sistema ($x y z$) che sono al di quà di y_∞ , appaiono allontanati dall'osservatore.

Le formole (6) che valgono allorchando si osservi un oggetto piccolo in confronto della sua distanza, pel caso attuale esprimono che tutti i punti appaiono accostati al piano $y = y_0$ nel rapporto D a d . Il rilievo dell'oggetto resta dunque diminuito alquanto.

Questa diminuzione del rilievo, oltre che con figure stereoscopiche, può ottenersi coll'iconoscopia, e collo strumento descritto nel § II, (n. 3).

18. *Caso in cui $D = 0$.* Qualunque sia y le (1) danno $Y = y_0$; dunque tutti i punti dello spazio appaiono nel piano $y = y_0$, ed il rilievo dei corpi sparisce affatto. Si è visto (§ II, n. 3) come si realizzi questo risultato.

19. *Caso in cui D è negativo, ma minore di d in valore assoluto.* Il punto D si trova ora fra O ed s , ed S fra O e d . Si cambi D in $-D$ nelle (1) n. 14. Si ha

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{dy_0}{-Dy_0 + (d+D)y}.$$

Se $y_0 > 0$, tanto Y_∞ che y_∞ sono positivi, ma $y_\infty < Y_\infty < y_0$. Dalle precedenti si deduce

$$\frac{Y}{y_0} = \frac{d}{d+D-D\frac{y_0}{y}}$$

e si riconosce che quando $y < y_0$, $Y > y_0$. Dunque tutti i punti al di là di y_0 appaiono fra Y_∞ ed y_0 , e tutti i punti compresi fra y_∞ ed y_0 appaiono al di là di y_0 . Il rilievo degli oggetti è dunque invertito.

Per certi punti il rilievo è in pari tempo aumentato, per altri diminuito. Infatti si può scrivere

$$\frac{Y-y_0}{y_0-y} = \frac{1}{\frac{d+D}{D} \frac{y}{y_0} - 1}.$$

Se y ha un valore y' tale che $\frac{d+D}{D} \frac{y'}{y_0} = 2$, cioè $y' = \frac{2D}{d+D} y_0$ allora $Y - y_0 = y_0 - y$, cioè la distanza dal piano $y = y_0$ è conservata. Se poi $y > y'$, si ha $Y - y_0 < y_0 - y$. Siccome per essere $D < d$, si ha $y' < y_0$, per punti prossimi al piano d'omologia $y = y_0$, il rilievo è diminuito ed invertito. Se y_0 è infinito, i sistemi (XYZ) , (xyz) sono omotetici, ma (XYZ) è al di dietro dell'osservatore. Se y_0 è negativo, anche i piani limiti sono a distanze negative.

Infine, per un oggetto poco esteso in confronto della sua distanza le (6) ci dicono che tutti i punti passano dalla parte opposta dal piano $y = y_0$, accostandosi a questo piano nel rapporto D a d . Si ha dunque ad un tempo l'effetto dell'iconoscopia e quello del pseudoscopia. Pel modo di realizzare questo effetto vedi § II, n. 4.

20. *Caso in cui D è negativo e maggiore di d .* In questo caso il punto S è fuori dal segmento sd e dalla parte di d , mentre D è dalla parte di s . Come nel caso precedente supponendo y_0 positivo, i piani limiti sono fra l'origine ed il piano d'omologia $y = y_0$; ma qui $Y_\infty < y_\infty < y_0$. Per i punti al di là del piano $y = \frac{2Dy_0}{D+d}$ il rilievo oltre essere invertito è diminuito, mentre per quelli al di quà è aumentato. Siccome poi $\frac{2Dy_0}{D+d} > y_0$, così per i punti prossimi al piano $y = y_0$ il rilievo è invertito ed aumentato, e si hanno così insieme gli effetti del telestereoscopia e quelli del pseudoscopia.

Per un oggetto di dimensioni piccole in confronto della sua distanza dall'osservatore, la (6) mostra che le distanze dal

piano y_0 cangiano segno ed aumentano di valore nel rapporto D a d .

21. *Caso in cui* $D = -d$. Si presenta cioè ad ogni occhio la immagine che spetterebbe all'altro. Se nelle (1) dopo aver cambiato D in $-D$ si fa $D = d$, si ottiene

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z} = \frac{y_0}{2y - y_0},$$

Queste equazioni sono, come era prevedibile, identiche a quelle del n. 10 § III. I due sistemi (XYZ) ed (xyz) sono dunque in omologia armonica; i due piani limiti coincidono alla distanza $\frac{y_0}{2}$ dall'origine. Così pure y' (n. 19) coincide con y_0 e perciò tutti i punti al di là del piano $y = y_0$ vengono a situarsi fra il piano $y = y_0$ ed il piano limite, accostandosi in pari tempo al piano d'omologia, mentre i punti esistenti fra il piano d'omologia ed il piano limite, si distribuiscono al di là del piano $y = y_0$, allontanandosi in pari tempo da questo piano.

Se consideriamo un oggetto di piccole dimensioni in confronto alla sua distanza, la formola (6) ci fa conoscere che in tal caso ogni punto non fa che portarsi nella posizione simmetrica rispetto al piano $y = y_0$. Se quivi esistesse uno specchio piano, si avrebbe lo stesso effetto, almeno per i punti al di quà di esso.

I fenomeni interessanti che dipendono dal caso attuale, sono stati descritti nel n. 4 § II. Le figure *im, o q* (Tav. II) fanno vedere l'effetto del cambiar posto alle due immagini stereoscopiche.

§ IV. APPENDICE SU ALCUNI TEOREMI DI GEOMETRIA PROIETTIVA.

1. Per due spazi collineari esiste il noto teorema, che se in essi trovasi un piano, ogni punto del quale corrisponde a se stesso, vi si trova pure una stella, tutti i raggi della quale cor-

rispondono a se stessi, e viceversa ⁽¹⁾. Nel teorema seguente i due spazi collineari non hanno corrispondenti a se stessi gli elementi di una forma di seconda specie, ma quelli di due forme di prima specie.

Teorema. Se due spazi collineari (nei quali non esista un piano i cui elementi corrispondano a se stessi) hanno una punteggiata i punti della quale corrispondono a se stessi, ed il fascio di piani di cui essa è asse pure corrispondente a se stesso, esiste un'altra retta, non nello stesso piano colla prima, che gode delle stesse proprietà.

Sia X (*fig. I*) quella retta ad ogni punto della quale, e ad ogni piano per essa passante, corrisponde se stesso. Se per X immaginiamo un piano, esso sarà un piano unito, o in altri termini dovrà considerarsi come due piani corrispondenti sovrapposti; ogni punto della punteggiata X corrispondendo a se stesso, vi sarà anche un fascio di rette, ognuna delle quali corrisponderà a se stessa. Sia A il centro di questo fascio; A sarà un punto unito. Sia egualmente B il punto unito che esiste in un altro piano passante per X , e C quello di un terzo piano. Il piano $ABCD$, che incontra X in D conterrà quattro punti uniti A, B, C, D ; onde tutti gli altri suoi punti non sieno corrispondenti di se medesimi, converrà che tre di quei quattro punti sieno in linea retta. Ma D non può esserlo con due degli altri, dunque ABC sono in una stessa linea retta, che chiameremo Y . Tre punti di questa retta essendo punti uniti, saranno tali tutti gli altri suoi punti. D'altra parte ad un piano P passante per Y corrisponderà un piano P' passante pure per Y ed anche per quel punto ove P incontra X ; P e P' saranno dunque coincidenti. Quindi ogni punto della retta Y ed ogni piano passante per Y corrisponde a se stesso.

È facile riconoscere che i due spazi collineari non avranno nessun punto unito fuori di X ed Y , nè alcun piano unito all'infuori di quelli passanti per X ed Y . Difatti se m , fosse un punto unito, nel piano Xm passante per X ed m , e che incon-

(1) Vedi il *Corso di Statica Grafica*, dato a Milano nel 1868-69 dall'illustre Prof. Cremona - Edizione litografica - parte prima, pag. 268.

tra Y in un punto n , vi sarebbero oltre la retta X , due punti uniti m ed n , e tutti i suoi punti dovrebbero essere uniti. E se P fosse un piano unito non passante nè per X nè per Y , il punto m ove esso incontrasse l'intersezione di un piano condotto per X con uno per Y , dovrebbe essere un punto unito.

2. Se immaginiamo un punto qualunque a di uno degli spazi, il suo corrispondente a' dovrà trovarsi tanto nel piano Xa che nel piano Ya , perchè questi piani hanno se stessi per corrispondenti. Dunque il punto a' sarà sulla retta passante per a e che incontra tanto X che Y .

3. Si conduca per Y (*fig. II*) un piano qualunque, e sia N il punto in cui incontra X . Ad ogni punto a di questo piano, corrisponderà un punto a' sulla retta aN ; le sezioni fatte dal piano YN nei due spazi, saranno dunque figure piane omologiche, con N per centro d'omologia, ed Y come asse d'omologia, poichè ad ogni punto di Y corrisponde se stesso. Il rapporto anarmonico $(NMa a') = \Delta$ sarà quindi costante. Si conduca per X un piano qualunque, e sia NT la sua intersezione con YN . Anche in questo piano avremo due figure omologiche, con centro in T ed asse X ; sieno b e b' due punti corrispondenti qualunque. Prendiamo infine un punto c della retta NT ed il suo corrispondente c' . Le rette ac ed $a'c'$ dovranno incontrarsi su Y , e le rette bc , $b'c'$ su X . Si avrà evidentemente $(TVbb') = (TNcc')$, ma $(TNcc') = (MNa a')$, onde $(TVbb') = (MNa a')$ ossia $(VTbb') = (NMa a') = \Delta$. Il rapporto anarmonico dei quattro punti $NMa a'$ è dunque costante. Perciò dato un punto, per avere il suo corrispondente basterà condurre la retta che passa per esso ed incontra X ed Y , poi prendere su questa retta un punto che insieme al punto dato ed ai punti di incontro con X ed Y formi un rapporto anarmonico dato.

Questo caso speciale di collineazione fra due spazi, potrebbe chiamarsi *omologia a due assi od omologia gobba*, e così dire *assi dell'omologia* le rette X ed Y . L'ordinaria omologia potrebbe allora distinguersi col nome di *omologia centrale*.

4. Se il punto b si considera come appartenente al piano YV , le figure piane di cui fanno parte b e b' saranno omolo-

giche con centro V ed asse Y ; di più $(VT\ bb') = (NMaa') = \Delta$. Questa osservazione ci conduce ad un altro modo di concepire l'omologia a due assi.

Si costruiscano le figure omologiche nel piano YN con centro N asse Y e rapporto anarmonico $(NMaa') = \Delta$. Poi si conduca per N e fuori dal piano YN una retta qualunque X , e conducendo per Y tanti piani, si costruiscano in ciascuno le figure omologiche $b \dots, b' \dots$, con asse Y , centro nel punto d'incontro colla retta X , e rapporto anarmonico Δ . I due sistemi solidi $ab \dots$, ed $a' b' \dots$ formeranno una omologia a due assi.

5. In ciascuno dei piani passanti per Y abbiamo dunque due figure omologiche; ai punti all'infinito dell'una, corrisponde nell'altra una retta *limite* parallela ad Y . Tutte le rette limiti formeranno due *piani limiti* paralleli ad Y . E siccome possiamo invertire le parti delle due rette X ed Y , gli stessi piani saranno paralleli anche ad X . In altre parole, al piano all'infinito di uno degli spazi, corrisponderà nell'altro un piano, detto piano limite, parallelo ai due assi.

6. Quando due spazi formano una omologia a due assi, ad una retta del primo che incontri uno degli assi, corrisponde nel secondo una retta che passa per quel punto d'incontro; ad una retta che incontra i due assi corrisponde se stessa; ad una retta parallela ad uno degli assi, corrisponde una retta parallela allo stesso asse; ad un piano qualunque corrisponde un piano passante per gli stessi punti nei quali il primo incontra i due assi; ad un piano parallelo ad uno o ad ambidue gli assi, corrisponde un piano parallelo a quell'asse o ad entrambi. Le rette che congiungono i punti di una retta coi loro corrispondenti formano un iperboloide rigato; la retta, la sua corrispondente ed i due assi, appartengono all'altro sistema di generatrici dello stesso iperboloide. Ne consegue che ad un iperboloide passante per gli assi, corrisponde se stesso. Mentre dunque nell'omologia centrale una retta è proiettata da un piano, nel caso attuale la retta è proiettata da un iperboloide. Se una delle due rette corrispondenti è all'infinito, e quindi l'altra è in uno dei piani limiti, invece di iperboloide proiet-

tante si ha un paraboloide. Se una delle due rette, e quindi anche l'altra, incontra uno degli assi l'iperboloide si cangia in un piano.

Le figure collineari che trovansi in due piani corrispondenti qualunque, non sono prospettive; esse hanno una certa relazione colla proiezione *gobba* o *conica*. Infatti ad una retta A di un piano P , corrisponde nel piano corrispondente P' una retta A' tale che le rette congiungenti di A ed A' , toccano due rette fisse X ed Y . Siccome le due rette X ed Y passano per l'intersezione dei due piani P , P' , la proiezione gobba di ogni retta A di uno dei piani, P , non è una conica propriamente detta, ma una coppia di rette, cioè la A' e l'intersezione dei due piani. Però nel caso attuale la retta A' si considera, non come la proiezione gobba della A , ma come luogo dei punti che sulle rette uscenti da A e toccanti le due rette fisse, formano un rapporto anarmonico costante; la intersezione dei due piani non soddisfa a questa condizione, e perciò ad A corrisponde realmente l'unica retta A' .

7. Se il rapporto anarmonico Δ è $= -1$, l'omologia potrà dirsi *armonica*. I due piani limiti coincideranno in un unico piano che passerà fra i due assi, ad egual distanza da essi. Gli elementi dei due spazi si corrisponderanno in doppio modo, cioè mentre ad un punto a del primo, corrisponde nel secondo a' , ad a' considerato nel primo spazio, corrisponde nel secondo a . Sopra una retta qualunque incontrante i due assi, i punti corrispondenti formeranno una involuzione di secondo ordine, i cui punti doppi saranno quelli in cui la retta incontra i due assi. Se oltre ad essere $\Delta = -1$ gli assi sono ortogonali, si avrà il caso del pseudoscopio di Wheatstone.

8. Se uno degli assi dell'omologia, per esempio X , va a distanza infinita, siccome ad una retta all'infinito determina la posizione di piani paralleli, le rette sulle quali trovansi le coppie di piani corrispondenti, saranno tutte parallele ad uno stesso piano (la cui retta all'infinito è X), che potrebbe chiamarsi *piano direttore*; le rette saranno proiettate da parabolidi, i piani limiti coincideranno all'infinito. Siccome poi dall'eguaglianza $(NMa') = \Delta$ si ricava in tal caso $(\in Ma') = \Delta$,

ossia $\frac{a'M}{aM} = \Delta$, le distanze di due punti corrispondenti dall'asse Y saranno in rapporto costante. Vi è analogia fra il caso attuale, e l'omotetia e l'affinità, poichè ogni piano passante per Y sega i due spazi secondo sistemi piani affini posti omologicamente, ed ogni piano parallelo al piano direttore sega i due spazi secondo due figure piane omotetiche, col centro sull'asse Y . Se $\Delta = -1$, $a'M = Ma$, cioè i due sistemi sono simmetrici rispetto all'asse Y . Si noti che l'affinità omologica rispetto ad un piano, la simmetria rispetto ad un piano o ad un punto, si deducono dall'omologia ordinaria, ma non così la simmetria rispetto ad un asse. L'omologia a due assi viene dunque a colmare questa lacuna.

9. L'omologia a due assi può intendersi anche generata in un'altra maniera. Si prendano sulla retta Y (*fig. III*) due punti ad arbitrio L ed M e si fermi il sistema Σ_2 omologico ad un sistema dato Σ_1 , assumendo L come centro d'omologia, XM come piano d'omologia, e un rapporto anarmonico caratteristico Δ . Poi si formi il sistema Σ_3 omologico a Σ_2 , prendendo M come centro, XL come piano d'omologia, e lo stesso rapporto caratteristico Δ . Dico che Σ_3 e Σ_1 formano una omologia a due assi, il cui rapporto anarmonico caratteristico sarà Δ , e gli assi, X ed Y .

Sia a_1 un punto di Σ_1 , NY il piano passante per Y e per a_1 , NM , NL le intersezioni di NY con XM ed XL . Se a_2 è il corrispondente di a_1 in Σ_2 si avrà $(Lra_1a_2) = \Delta$, e se a_3 corrisponde ad a_2 in Σ_3 si avrà pure $(MSa_2a_3) = \Delta$. I due fasci $L(MSa_2a_3)$, $M(Lra_1a_2)$ saranno proiettivi, ed avendo un raggio unito LM , gli altri raggi corrispondenti dovranno tagliarsi in linea retta. Per ciò a_3 è sulla retta a_1N . Ma proiettando da L su NT la punteggiata MSa_2a_3 , si ottiene TNa_1a_2 ; dunque $(TNa_1a_2) = \Delta$.

Il punto a_3 è dunque veramente il corrispondente di a_1 nell'omologia di assi X ed Y e di rapporto caratteristico Δ . Se in particolare M va all'infinito, si ha $\frac{Sa_3}{Sa_2} = \Delta$, e in tal caso Σ_2 e Σ_3 sono sistemi affini. Se oltre a ciò $\Delta = -1$,

si passerà da Σ_1 a Σ_3 con una omologia ed una simmetria. Appunto si è visto nella teoria del pseudoscopio di Wheatstone, o del cambiamento delle immagini in altre simmetriche, che i punti (xyz) ed (XYZ) appartengono a sistemi formanti omologia a due assi, mentre (xyz) e $(-xyz)$ sono simmetrici rispetto al piano yz , e $(-xyz)$ ed (XYZ) appartengono a sistemi formanti una omologia centrale.

10. Dal teorema precedente si ricava facilmente il seguente. Si prendano quattro punti $M_1 M_2 M_3 M_4$, non nello stesso piano; sia a_1 un punto di un sistema Σ_1 , e si costruisca il sistema Σ_2 che col primo sia omologico, essendo M_1 il centro d'omologia, $M_2 M_3 M_4$ il piano d'omologia e Δ il rapporto anarmonico caratteristico. Sia a_2 quel punto di Σ_2 che corrisponde ad a_1 . Similmente si passi da Σ_2 a Σ_3 prendendo per centro M_2 , piano d'omologia $M_1 M_3 M_4$ e rapporto Δ ; sia a_3 il corrispondente di a_2 in Σ_3 . Pel teorema precedente a_3 ed a_1 devono essere sopra una retta NT che incontra $M_1 M_2$ ed $M_3 M_4$, e di più deve aversi $(TNa_3) = \Delta$.

Così si costruisca Σ_4 che sia omologico a Σ_3 , con centro in M_3 , piano $M_1 M_2 M_4$ e rapporto caratteristico Δ , e sia a_4 il corrispondente di a_3 . Infine si passi al sistema Σ_5 prendendo M_4 per centro, $M_1 M_2 M_3$ per piano di omologia ed ancora Δ per rapporto anarmonico, e sia a_5 il corrispondente di a_4 . Pel teorema precedente a_5 ed a_3 dovranno essere sopra una stessa retta che incontrerà $M_1 M_2$ ed $M_3 M_4$, e perciò a_5 sarà sopra NT; di più dovrà aversi $(NT a_5 a_3) = \Delta$. Ma $(TNa_3) = (NT a_3 a_1) = \Delta$; dunque a_5 coincide con a_1 , e Σ_5 è identico a Σ_1 . Se adunque si ha nello spazio un sistema solido, e se ne costruiscono successivamente i sistemi omologici, prendendo per centri i vertici di un tetraedro, per piani le faccie opposte, ed un rapporto anarmonico costante, si ricade nel sistema primitivo.

Se uno, due, oppure tre dei punti $M_1 M_2 M_3 M_4$, vanno all'infinito, si ottengono tre teoremi, facili ad enunciare. Se M_4 è nel piano $M_1 M_2 M_3$, a_4 coincide con a_1 ; si può quindi enunciare pel triangolo nel piano, un teorema analogo al precedente che riguarda un tetraedro nello spazio. Questo teorema pel triangolo può dimostrarsi direttamente.

11. Le proprietà precedenti possono essere confermate col metodo analitico. Non consentendo l'indole del lavoro una esposizione dettagliata, ne darò solo un breve cenno.

Si abbiano due rette nello spazio, e si riferiscano a tre assi ortogonali, assumendo una di esse come asse delle x , e come asse delle y la retta minima distanza delle due date. Una delle rette sarà dunque x e l'altra, che chiameremo v , sarà parallela al piano xz (1). Le equazioni della retta x saranno $y=0, z=0$ (1); quelle della v saranno $y-y_0=0, z-px=0$ (2), dicendo y_0 la minima distanza delle due rette, e p la tangente dell'angolo che fa v col piano xy .

Prendiamo un punto m di coordinate abc . Il piano mx passante per m e per la retta x , ossia per m , per l'origine e per un punto $(q, 0, 0)$, avrà per equazione

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad cy - bz = 0$$

Così il piano passante per m e per v , ossia per m , per $(0, y_0, 0)$ e per un altro punto (r, y_0, rp) di v , avrà per equazione

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ 0 & y_0 & 0 & 1 \\ r & y_0 & rp & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ossia} \quad p(y_0 - b)x + (ap - c)y - (y_0 - b)z - (ap - c)y_0 = 0.$$

Le due equazioni (3) e (4) rappresenteranno la retta che passa per m e si appoggia ad x ed a v . Chiamiamo R il punto ove essa incontra x , S quello ove incontra v , e sulla retta RS prendiamo un punto M di coordinate XYZ tale, che il rapporto anarmonico $(RSmM)$ sia eguale ad un numero dato Δ .

(1) Il lettore è pregato a costruire la figura.

Proiettiamo i punti $RSmM$ sull'asse delle y con piani paralleli a zx , e diciamo S_o, m_o, M_o le proiezioni di S, m, M , essendo l'origine O quella di R . Si avrà $(RSmM) = (OS_o m_o M_o) = \Delta$. Ma $OS_o = y_o$, $Om_o = b$, $OM_o = Y$, ne risulta facilmente $\Delta = \frac{b(y_o - Y)}{Y(y_o - b)}$. Questa equazione insieme alle (3) e (4) nelle quali invece di xyz si pongano XYZ , servirà a determinare X, Y e Z . A riduzioni fatte si trova

$$(5) \quad X = \frac{\frac{y_o}{p} [\Delta(ap - c) + c]}{\Delta y_o + b(1 - \Delta)}, \quad Y = \frac{by_o}{\Delta y_o + b(1 - \Delta)}, \quad Z = \frac{cy_o}{\Delta y_o + b(1 - \Delta)};$$

e risolvendo queste equazioni rispetto ad abc coordinate di m :

$$(6) \quad a = \frac{\frac{y_o}{p} [Z(\Delta - 1) + pX]}{y_o + Y(\Delta - 1)}, \quad b = \frac{\Delta y_o X}{y_o + Y(\Delta - 1)}, \quad c = \frac{\Delta y_o Z}{y_o + Y(\Delta - 1)}.$$

Colle (5) dato un punto (abc) si troverà il suo corrispondente (XYZ) ; colle (6) si risolve il problema inverso. Se nelle (5) si suppone $p = \infty$, $\Delta = -1$, e quindi invece di abc si scrive xyz , si ottengono le equazioni del n.º 5 § III.

Supponiamo che abc sieno le coordinate correnti di un piano $La + Mb + Nc + 1 = 0$ (7). Corrisponderà a questo piano la superficie seguente, che si ottiene col sostituire ad abc nella (7) i valori (6):

$$(8) \quad L \frac{y_o}{p} [Z(\Delta - 1) + pX] + M \Delta y_o Y + N \Delta y_o Z + y_o + Y(\Delta - 1) = 0.$$

Questa equazione rappresenta un piano. Il piano (7) incontra v in un punto la cui ascissa si ottiene col porre nella (7) $b = y_o$, $c = pa$; questa ascissa è $-\frac{My_o + 1}{Np + L}$. Il punto ove il piano (8) incontra la stessa retta v si ottiene col porre in (8) $Y = y_o$, $Z = pX$; si trova per ascissa $-\frac{My_o + 1}{Np + L}$. Dunque due piani

corrispondenti qualunque passano per uno stesso punto della v . Lo stesso dicasi per la x . Ne risulta che ad un piano che passi per una delle x, v , corrisponde se stesso.

Se nella (7) si suppone $L = N = 0$, si ottiene $Mb + 1 = 0$, che rappresenta un piano parallelo ad xz , ossia alle due rette x e v . Il piano corrispondente sarà $M \Delta y_0 Y + y_0 + Y(\Delta - 1) = 0$. È dunque esso pure parallelo ad xz . Se $M = 0$, il piano parallelo ad xz diviene infinitamente lontano. Il suo corrispondente diviene $Y = \frac{-y_0}{\Delta - 1}$. Questo piano parallelo alle rette x e v è il primo *piano limite*. Analogamente si trova per l'altro piano limite la distanza $\frac{\Delta y_0}{\Delta - 1}$.

Se nelle (5) e (6) si suppone $\Delta = -1$, esse divengono

$$X = \frac{\frac{y_0}{p} (2c - ap)}{2b - y_0}, \quad Y = \frac{b y_0}{2b - y_0}, \quad Z = \frac{c y_0}{2b - y_0}$$

$$a = \frac{\frac{y_0}{p} (2Z - Xp)}{2Y - y_0}, \quad b = \frac{Y y_0}{2Y - y_0}, \quad c = \frac{Z y_0}{2Y - y_0}.$$

Se nelle tre ultime si cambiano $a b c$ in $X Y Z$ ed $X Y Z$ in $a b c$, esse restano soddisfatte, perchè si trasformano nelle tre prime. I punti $(a b c)$, $(X Y Z)$ si corrispondono doppiamente, e si ha l'omologia a due assi involutoria. I due piani limiti coincidono alla distanza $\frac{y_0}{2}$ dall'origine.

Se nelle (5) e (6) si pone $y_0 = \infty$, esse divengono

$$X = \frac{\Delta(ap - c) + c}{\Delta p}, \quad Y = \frac{b}{\Delta}, \quad Z = \frac{c}{\Delta}$$

$$a = \frac{Z(\Delta - 1) + pX}{p}, \quad b = \Delta Y, \quad c = \Delta Z.$$

Prendiamo un piano parallelo ad yv , che tagli x ad una distanza q dall'origine. La sua equazione sarà $z - p(x - q) = 0$,

e se (abc) è su questo piano, si avrà $c - p(a - q) = 0$. Le prime tre equazioni precedenti divengono così

$$\frac{X - q}{a - q} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{c} = \frac{1}{\Delta}$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{(X - q)^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{(a - q)^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\Delta}.$$

Cioè ad ogni punto (abc) di quel piano corrisponde un punto (XYZ) tale che le distanze dal punto ove il piano è incontrato dalla retta x , sono in rapporto costante. Si hanno dunque in quel piano due figure omotetiche. Analogamente in ogni piano passante per x si hanno sistemi affini posti omologicamente. Infatti per $y_0 = \infty$ la (4) diviene $z - px + ap + c = 0$. Se (abc) è in piano passante per x , la retta mM che congiunge (abc) con (XYZ) incontrerà x in un punto R , la cui ascissa si otterrà dalla precedente col porvi $z = 0$; si ottiene $\frac{ap - c}{p}$.

La distanza dei punti m ed R è $\sqrt{\left(a - \frac{ap - c}{p}\right)^2 + b^2 + c^2}$, ossia $\sqrt{\left(\frac{c}{p}\right)^2 + b^2 + c^2}$; quella fra M ed R è $\sqrt{\left(X - \frac{ap - c}{p}\right)^2 + Y^2 + Z^2}$ ossia $\sqrt{\left(\frac{c}{\Delta p}\right)^2 + \left(\frac{b}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{c}{\Delta}\right)^2}$. Il loro rapporto è $\frac{1}{\Delta}$, cioè costante.

Se oltre ad essere $y_0 = \infty$ è $\Delta = -1$, si ha la simmetria obliqua rispetto alla retta x . Se poi $p = \infty$ si ha simmetria ortogonale. Infatti le (5) divengono $X = a$, $Y = -b$, $Z = -c$.

