

# Zur Theorie der komplexen Zahlen.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

---

1. Es handelt sich in dieser Arbeit um die Erweiterung des Systems der reellen Zahlen zu einem System von Zahlenpaaren. Für diese sind alsdann die vier Grundrechnungsarten neu zu erklären mit der Maßgabe, daß man nach den bei den reellen Zahlen üblichen Regeln auch mit den komplexen Zahlen zu rechnen wünscht. Man begnügt sich nun gewöhnlich mit der Feststellung, daß man dieser Forderung auf bekannte Weise genügen kann. Erhebt man sich zu einem wissenschaftlich höheren Niveau, so wird man immer noch nicht dem Standpunkt gerecht, daß es sich um ein Rechnen mit Zahlenpaaren handeln soll. Man setzt vielmehr von vornherein voraus, daß ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten vorliegt, daß man also nach Auswahl zweier geeigneter Zahlenpaare  $e_1$  und  $e_2$  unter Zugrundelegung der noch zu erklärenden Rechnungsarten alle Zahlenpaare in der Form  $xe_1 + ye_2$  darstellen kann;  $x$  und  $y$  bedeuten dabei gewöhnliche reelle Zahlen, die man mit den Zahlenpaaren  $(x, 0)$  und  $(y, 0)$  zu identifizieren pflegt. Hat man einmal diese Annahme gemacht, so führen assoziatives, kommutatives und distributives Gesetz mit Notwendigkeit zu den auch in der Theorie der hyperkomplexen Zahlen üblichen Erklärungsweisen von Summe und Produkt. Man wird indessen zugeben, daß die Annahme eines Zahlensystems mit zwei Einheiten mehr der Macht der Gewohnheit, als dem Geist der eigentlichen Fragestellung gerecht wird. Denn da handelt es sich kurz gesprochen um diese Frage: *Wie muß man Summe und Produkt zweier Zahlenpaare als Funktionen ihrer Koordinaten erklären, wenn für diese Funktionen Funktionalgleichungen bestehen sollen, welche die Axiome der Arithmetik zum Ausdruck bringen?*<sup>1)</sup>

---

<sup>1)</sup> Mit diesem Problem befaßte sich meines Wissens als erster F. Schur. Vgl. F. Schur, Zur Theorie der aus  $n$  Haupteinheiten gebildeten reellen Zahlen, *Math. Ann.* 33 (1889), S. 49–60. Das Problem ist dort unter der Voraussetzung gelöst, daß Summe und Produkt *analytische* Funktionen sind. Herr F. Schur bedient sich da-

Es wird sich ergeben, daß *unter der Voraussetzung der Stetigkeit der beiden genannten Funktionen das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen im wesentlichen das einzige* ist, das allen zu stellenden Bedingungen genügt, daß es aber noch weitere solche Zahlensysteme gibt, wenn man die Voraussetzung der Stetigkeit fallen läßt. Mein Beweis wird hauptsächlich darauf abzielen, das zu erhärten, was man gewöhnlich voraussetzt, nämlich daß ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten vorliegt. Denn was dann weiter noch zu geschehen hat, um die aufgestellte Behauptung zu beweisen, ist hinreichend bekannt.

2. Ich will nun zunächst genauer, als das bisher geschehen ist, den zu beweisenden Satz formulieren.

*Es sei  $\mathfrak{K}$  ein abstrakter Körper<sup>2)</sup> mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Elemente von  $\mathfrak{K}$  stimmen mit der Gesamtheit der Zahlenpaare  $(\xi, \eta)$  überein;  $\xi$  und  $\eta$  sind dabei gewöhnliche reelle Zahlen. Überhaupt sollen stets griechische Buchstaben zur Bezeichnung solcher gewöhnlicher reeller Zahlen verwendet werden, während die Elemente des Körpers, die komplexen Zahlen mit lateinischen Buchstaben bezeichnet werden sollen. Diese Voraussetzung besagt also, daß für die Zahlenpaare  $(\xi, \eta)$  die gewöhnlichen Rechenregeln gelten sollen.*

2. *Die Zahlenpaare  $(\xi, 0)$  bilden einen Teilkörper  $\mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{K}$ . Sie sollen reelle Zahlenpaare oder *reelle Elemente* heißen. Stets soll  $x$  die  $(\xi, 0)$ ,  $y$  die Zahl  $(\eta, 0)$ ,  $z$  die Zahl  $(\zeta, 0)$  bedeuten. Diese Voraussetzung besagt also, daß die gewöhnlichen reellen Zahlen im Körper enthalten sein sollen und daß eine mit ihnen ausgeführte Rechnung als Resultat wieder eine reelle Zahl liefert. Dies wäre noch deutlicher, wenn wir direkt  $(\xi, 0)$  mit  $\xi$  identifizierten, wie man gewöhnlich tut. Doch ist diese Voraussetzung nicht nötig.*

---

bei der Hilfsmittel der Lieschen Gruppentheorie. Schon aus der Aufzählung aller ebenen Gruppen kann, wie auch Herr F. Schur bemerkt, das Ergebnis erschlossen werden. Das Verdienst von Herrn Schur liegt darin, eine solche vollendete Aufzählung nicht erst anzunehmen. Will man dies tun und etwa noch die Brouwerschen Ergebnisse über Liesche Gruppen verwenden, so kann man aus dieser Aufzählung auch das Hauptergebnis meiner Arbeit entnehmen. Indessen wäre das, wie die nachfolgenden Betrachtungen zeigen, ein gewaltiger Umweg. Nach Herrn Schur hat Moritz Pasch auf unsere Frage hingewiesen. Vgl. M. Pasch, Über die Einführung des Imaginären, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 7 (1904), S. 102–108, und „Veränderliche und Funktion“, Leipzig 1914, S. 158–178.

<sup>2)</sup> Wegen der Definition dieses Begriffes vgl. man E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. Math. 137 (1910), S. 167–309 (S. 172 u. ff.); ferner A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Bd. I, Grundlagen der Arithmetik, Leipzig 1915, S. 33 u. ff.

3. Die Summe  $(\xi, \eta) + (\xi_1, \eta_1) = (\sigma, \tau)$  zweier Zahlenpaare  $(\xi, \eta)$  und  $(\xi_1, \eta_1)$  ist eine stetige Funktion der vier „Komponenten“  $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1$ , d. h.  $\sigma$  und  $\tau$  sollen im gewöhnlichen Sinne stetige Funktionen sein.

4. In einem Produkt der Form  $(\xi, 0) \cdot (\alpha, \beta) = (\varrho, \sigma)$  sind  $\varrho$  und  $\sigma$  für jedes  $(\alpha, \beta)$  stetige Funktionen von  $\xi$ . Über die Stetigkeit des Produktes sind also geringere Annahmen erforderlich als über die Stetigkeit der Summe.

Unter diesen vier Voraussetzungen gilt der Satz, daß je drei Elemente von  $\mathfrak{K}$  innerhalb  $\mathfrak{K}$  linear abhängig sind<sup>3)</sup>.

Zwischen je drei Elementen  $a, b, c$  besteht also eine Gleichung  $ax + by + cz = 0$ , deren Koeffizienten  $x, y, z$  reelle Elemente sind. Anders ausgedrückt besagt dies also, daß man zwei Elemente  $e_1$  und  $e_2$  ausfindig machen kann, derart, daß jedes weitere Element sich auf die Form  $xe_1 + ye_2$  mit reellen Elementen  $x, y$  als Koeffizienten bringen läßt, daß also ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten vorliegt.

In jedem Körper gibt es ein einziges ausgezeichnetes Element  $O$  von der Art, daß für jedes weitere Element  $p$  des Körpers  $p \cdot O = O$  ist. Da es also sowohl in  $\mathfrak{K}$  als in  $\mathfrak{R}$  ein solches Element geben muß, so müssen beide identisch sein, d. h. das Element  $O$  des Körpers  $\mathfrak{K}$  ist ein reelles Element. Es sei etwa  $O = (\varrho, 0)$ .

3. Ein derartiges Zahlensystem kann nun nicht mit dem System der reellen Zahlen identisch sein. Denn es gibt stets außer den  $(\alpha, 0)$  noch weitere Zahlen. Es sei also  $e_1$  eine beliebige von  $O$  verschiedene reelle und  $e_2$  irgendeine nicht reelle Zahl. Ich betrachte alsdann die Gesamtheit der Zahlen  $s = xe_1 + ye_2$  mit reellen Koeffizienten  $x$  und  $y$ . Ich will zeigen, daß durch sie die Gesamtheit aller Zahlen erschöpft ist. Es kann nämlich keine Gleichung  $me_1 - ne_2 = O$  mit reellen von Null verschiedenen Koeffizienten  $m$  und  $n$  gelten. Dann wäre nämlich auch  $e_2$  reell, nämlich  $e_2 = \frac{m}{n}e_1$ . Die Zahl  $s = xe_1 + ye_2$  ist aber nach den Annahmen 3. und 4. eine stetige Funktion von  $\xi$  und  $\eta$ <sup>4)</sup>. Sie vermittelt eine umkehrbar eindeutige Abbildung der  $\xi$ - $\eta$ -Ebene auf ein Stück der  $s$ -Ebene. Denn sonst gäbe es zwei verschiedene Wertepaare  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  derart, daß  $x_1e_1 + y_1e_2 = x_2e_1 + y_2e_2$  wäre. Daraus aber würde sich  $(x_1 - x_2)e_1 + (y_1 - y_2)e_2 = O$  ergeben. Das geht aber für  $y_1 \neq y_2$  nicht, weil dann  $e_2$  reell wäre. Ist aber  $y_1 = y_2$ , so muß auch  $x_1 = x_2$  sein, weil sonst  $e_1 = O$  wäre. Nach dem Brouwerschen Satz von der Invarianz des Gebietes ist daher die Punktmenge der  $s$ -Ebene, auf welche die  $(\xi, \eta)$ -Ebene<sup>4)</sup> durch  $s = xe_1 + ye_2$  abgebildet wird, ein Gebiet.

<sup>3)</sup> Diese einfache Formulierung meines Satzes verdanke ich einer wertvollen Bemerkung des Herrn J. Schur.

<sup>4)</sup>  $x = (\xi, 0)$ ,  $y = (\eta, 0)$ ,  $z = (\zeta, 0)$ .

Wäre nun durch die Zahlen  $s = x e_1 + y e_2$  der Körper noch nicht erschöpft, so sei etwa  $e_3$  eine weitere Zahl. Ich betrachte alsdann die Zahlen  $S = x e_1 + y e_2 + z e_3$ . Der Ausdruck  $S$  ist dann wieder eine stetige Funktion von  $\xi, \eta, \zeta$ <sup>4)</sup>. Für genügend kleine  $z$ <sup>5)</sup> ist daher  $S = x e_1 + y e_2 + z e_3$  von  $s = x e_1 + y e_2$  beliebig wenig verschieden, d. h. der Punkt der Zahlenebene, welcher  $S$  repräsentiert, liegt beliebig nahe bei dem Punkt, welcher  $s$  entspricht. Die Menge der  $s$  ist aber ein Gebiet. Daher muß für genügend kleine  $z$ <sup>5)</sup> der Punkt  $S$  diesem Gebiet angehören. Daher gibt es für genügend kleine  $z$ <sup>5)</sup> eine Gleichung der Form

$$x_1 e_1 + y_1 e_2 = x e_1 + y e_2 + z e_3.$$

Daraus folgt aber

$$e_3 = \frac{x_1 - x}{z} e_1 + \frac{y_1 - y}{z} e_2.$$

Also muß  $e_3$  unter den Zahlen  $s = x e_1 + y e_2$  vorkommen. Es gibt also keine weiteren. Damit ist der in der vorigen Nummer angegebene Satz bewiesen. Wenn man, wie schon mehrmals geschehen, einen aus Zahlenpaaren bestehenden Körper ein Zahlssystem nennt, so haben wir den Satz, daß nur Zahlensysteme mit zwei Haupteinheiten den in der vorigen Nummer angegebenen Bedingungen genügen können. Wendet man nun noch die in der Theorie solcher Zahlensysteme üblichen Schlußweisen an, so erkennt man weiter, daß *das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen das einzige ist, welches den angegebenen Bedingungen genügt.*

Es wäre nun ein leichtes, das Ergebnis, wonach es sich um ein Zahlensystem mit zwei Haupteinheiten handelt, zu verallgemeinern, indem man etwa auf die im Körperbegriff liegenden Voraussetzungen des kommutativen und assoziativen Gesetzes in gewissem Umfang verzichtet. Doch möchte ich darauf nicht näher eingehen.

4. Ich möchte vielmehr das erhaltene Resultat über gewöhnliche komplexe Zahlen noch etwas vertiefen<sup>6)</sup>. Mancher Leser wird sich daran stoßen, daß wir das erhaltene Zahlssystem ohne weiteres dem System der gewöhnlichen komplexen Zahlen gleich setzten, wo doch die reellen Koeffizienten  $x = (\xi, 0)$  und  $y = (\eta, 0)$  gar keine gewöhnlichen reellen Zahlen sind, sondern unsere reellen Elemente, für die ja Summe und Produkt gar nicht in der üblichen Weise definiert sind, sondern wo z. B. in  $x + y = (s(\xi, \eta), 0)$  das  $s(\xi, \eta)$  noch eine von  $\xi + \eta$  verschiedene Funktion sein kann. In der Tat erhält man ja sofort durch eine umkehrbar eindeutige Abbildung der gewöhnlichen Zahlengeraden derartige weitere

<sup>5)</sup> Da  $O = (\varrho, 0)$  und  $z = (\zeta, 0)$  ist, so bedeutet dies, daß für alle hinreichend wenig von  $\varrho$  verschiedenen Werte von  $\zeta$  diese Behauptung erfüllt ist.

<sup>6)</sup> Verwandte Untersuchungen bei A. Loewy a. a. O. <sup>2)</sup> S. 184 u. ff.

brauchbare Summenfunktionen. Achtet man hierauf, so wird man das Bedürfnis nach einer weiteren Klärung des bisher nur im Sinne der allgemeinen Körpertheorie ausgesprochenen Satzes empfinden<sup>7)</sup>. Es wird sich ergeben, daß man in der Tat alle weiteren Körper  $\mathfrak{R}$  in den der gewöhnlichen reellen Zahlen durch eine umkehrbar eindeutige auf  $\xi$  ausgeübte Abbildung überführen kann. Derartige Abbildungen waren es ja auch schon, die wir in dieser Nummer in der Zahlenebene benutzten. Und das, was wir jetzt noch zeigen wollen, ist gewissermaßen das lineare Analogon zu dem bisher Bewiesenen.

Wir wollen nun also zeigen, daß man die Zahlengerade der  $x = (\xi, 0)$  so umkehrbar eindeutig und stetig auf die Gerade der gewöhnlichen reellen Zahlen abbilden kann, daß dabei die beiden Zahlensysteme isomorph aufeinander bezogen sind, d. h. daß bei der Abbildung auch die Resultate einer Rechnung einander zugeordnet sind, wenn dies für die Ausgangszahlen der Fall ist.

Um das bequem machen zu können, will ich zwei Funktionen  $s(\xi, \eta)$  und  $p(\xi, \eta)$  einführen, die so erklärt sein sollen:

$$x + y = (s(\xi, \eta), 0)$$

und

$$x \cdot y = (p(\xi, \eta), 0).$$

Diese stetigen Funktionen besitzen dann<sup>8)</sup> die folgenden sieben Eigenschaften:

- A)  $s(\xi, \eta) = s(\eta, \xi)$ ,
- B)  $s(s(\xi, \eta), \zeta) = s(\xi, s(\eta, \zeta))$ ,
- C)  $p(\xi, \eta) = p(\eta, \xi)$ ,
- D)  $p(p(\xi, \eta), \zeta) = p(\xi, p(\eta, \zeta))$ ,
- E)  $p(\xi, s(\eta, \zeta)) = s(p(\xi, \eta), p(\xi, \zeta))$ .
- F) Die Gleichung  $s(\alpha, \xi) = \beta$  besitzt stets eine einzige Lösung.

Die Lösung der Gleichung  $s(\alpha, \xi) = \alpha$  ist, wie man nachweisen kann, von  $\alpha$  unabhängig. Sie werde mit  $\varrho$  bezeichnet. Das ihr entsprechende reelle Element des Körpers ist die Null:  $O = (\varrho, 0)$ .

G) Wenn  $\alpha \neq \varrho$  ist, so besitzt die Gleichung  $p(\alpha, \xi) = \beta$  stets eine einzige Lösung.

Die Lösung von  $p(\alpha, \xi) = \alpha$  ist von  $\alpha$  unabhängig. Sie werde mit  $\sigma$  bezeichnet. Das entsprechende Element des Körpers ist die 1:  $1 = (\sigma, 0)$ .

<sup>7)</sup> Will man aber  $\sigma(\xi, \eta) = \xi \div \eta$  annehmen, so ist mit dem Voraufgegangenen die Frage restlos erledigt. Bei der gewöhnlichen Auffassung der komplexen Zahlen als Erweiterung des Körpers der reellen macht man ja diese Voraussetzung.

<sup>8)</sup> Steinitz, a. a. O. <sup>2)</sup>

Ich führe nun zunächst eine zweckmäßige Anordnung der reellen Elemente  $x = (\xi, 0)$  ein. Dazu denke ich mir auf der  $\xi$ -Achse die Punkte  $\varrho$  und  $\sigma$  markiert. Wenn dann eine Zahl  $x = (\xi, 0)$  durch einen Punkt  $\xi$  repräsentiert wird, welcher auf derselben Seite von  $\varrho$  liegt wie die Zahl  $\sigma$ , so soll die Zahl positiv ( $x > 0$ ) heißen, im anderen Falle aber negativ ( $x < 0$ ). Das Element  $a = (\alpha, 0)$  heißt größer als  $b = (\beta, 0)$  ( $a > b$ ), wenn die Richtung  $\beta \rightarrow \alpha$  mit der Richtung  $\varrho \rightarrow \sigma$  übereinstimmt.

Alsdann beweise ich der Reihe nach die folgenden Sätze:

1. Wenn  $\alpha \neq \varrho$ , so ist  $p(\alpha, \xi)$  eine monotone Funktion. Denn  $\eta = p(\alpha, \xi)$  vermittelt nach G) eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der  $\xi$ -Achse auf die  $\eta$ -Achse. Eine solche ist aber monoton.

2.  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} p(\alpha, \xi) = \infty$ . Dabei soll  $x$  durch Werte von einerlei Vorzeichen, etwa durch positive Werte nach  $\infty$  streben. Da nämlich  $p(\alpha, \xi)$  monoton ist, so existiert sicher ein Grenzwert. Wäre derselbe aber endlich, etwa gleich  $A$ , so sei etwa (G)  $p(\alpha, \xi_1) = A$ . Sei dann  $A'$  ein Nachbarwert von  $A$ , der bei  $\xi \rightarrow \infty$  von  $p(\alpha, \xi)$  überschritten wird, und  $p(\alpha, \xi') = A'$ , so ist  $\xi'$  ein Nachbarwert von  $\xi$  und daher von der sehr großen Lösung der Gleichung  $p(\alpha, \xi) = A'$  verschieden. Daher hätte diese gegen G) zwei verschiedene Lösungen.

3. Wenn  $a > 0$ , so wächst  $a \cdot x$  mit  $x$  zugleich. Sei  $x$  zwischen 1 und  $\infty$  gelegen, dann lasse ich  $x \rightarrow 1$  streben. Dabei strebt  $ax$  gegen  $a$ . Lasse ich weiter  $x \rightarrow \infty$  gehen, so strebt  $ax$  auch gegen Unendlich. Die Null wird dabei nicht passiert. Daher muß eben  $ax$  mit  $x$  zugleich wachsen. Ebenso schließt man in den anderen Fällen auf die bekannten Monotoniegesetze der Multiplikation. Auch die entsprechenden Eigenschaften von  $a + x$  werden ganz ebenso eingesehen.

4. Die Lösung von  $a : x = 1$  sei  $\frac{1}{a}$ . Das ist eine stetige monotone Funktion von  $a$ . Denn es handelt sich ja dabei um die Auflösung der Gleichung  $p(\alpha, \xi) = \sigma$ . Ich will sie weiter mit  $\xi = P(\alpha)$  bezeichnen.

5. Das arithmetische Mittel von  $a$  und  $b$  ( $b > a$ ) liegt zwischen  $a$  und  $b$ . Denn es sei

$$s(\sigma, \sigma) = \sigma_2.$$

Das arithmetische Mittel ist als Lösung der Gleichung

$$p(\xi, \sigma_2) = s(\alpha, \beta)$$

erklärt. Diese ist

$$\xi = p(s(\alpha, \beta), P(\sigma_2)) = s[p(P(\sigma_2), \alpha), p(P(\sigma_2), \beta)].$$

Nun ist

$$a < b \quad \text{und} \quad (P(\sigma_2), 0) > 0.$$

Daher ist

$$a \cdot (P(\sigma_2), 0) < b \cdot (P(\sigma_2), 0).$$

Daher wird

$$\begin{aligned} (\xi, 0) &< (s[p(P(\sigma_2), \beta), p(P(\sigma_2), \beta)], 0) = (p(\beta, s[P(\sigma_2), P(\sigma_2)]), 0) \\ &= (p[\beta, p(\sigma_2, P(\sigma_2))], 0) = (p(\beta, \sigma), 0) = (\beta, 0) = b. \end{aligned}$$

Ebenso beweist man, daß  $(\xi, 0) > a$  ist.

6. Nun betrachte man die folgende Zahlenmenge: Man addiere die 1 beliebig oft zu sich selbst und ziehe sie beliebig oft von sich selbst ab. So erhält man also alle positiven und negativen ganzen Zahlen. Dann bilde man alle möglichen Paare dieser Zahlen und deren arithmetische Mittel. Die erhaltenen Zahlen paare man wieder und bilde wieder die Mittel. So erhält man die Körperelemente, die den gewöhnlichen reellen Zahlen entsprechen, deren Nenner eine Potenz von zwei ist. Ich behaupte nun, daß die diesen Zahlen entsprechenden Punkte die  $\xi$ -Achse überall dicht erfüllen. Das folgt aus dem unter 4. bewiesenen. Denn gäbe es eine von der Menge freie Strecke, so kann ich sie so wählen, daß wenigstens ihre Endpunkte (ins Unendliche kann sie ja nicht reichen) Häufungspunkte der Menge sind. Sei  $A < x < B$  die Strecke. Dann gehört ihr das arithmetische Mittel an. Nehme ich aber statt  $A$  und  $B$  benachbarte Mengenpunkte, so gehört auch deren arithmetisches Mittel der Strecke an. Also liegt die Menge überall dicht.

7. Betrachtet man weiter noch die übrigen rationalen Elemente des Körpers  $\mathfrak{R}$ , also die Quotienten zweier ganzer Zahlen, so erkennt man, daß diese Brüche dieselben Monotonieeigenschaften haben wie die gewöhnlichen Brüche. Bezieht man nun die beiden Mengen: rationale Elemente und gewöhnliche reelle Zahlen dadurch aufeinander, daß man die aus der Eins auf gleiche Weise entstandenen Zahlen einander zuordnet, so erhält man eine monotone stetige Abbildung der entsprechenden Menge auf der  $\xi$ -Achse auf die gewöhnlichen rationalen Zahlen, und schließt man noch die in beiden Fällen bleibenden Lücken etwa durch das Intervallschachtelungsverfahren und ordnet die irrationalen Elemente einander zu, deren Schachtelungen zugeordnete Enden besitzen, so erhält man eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der  $\xi$ -Achse auf die gewöhnlichen reellen Zahlen, bei der die beiden Körper isomorph aufeinander bezogen sind.

Damit haben wir also gezeigt, daß im Gebiete der Zahlenpaare  $(\xi, 0)$ , von einer umkehrbar eindeutigen stetigen Abbildung abgesehen, der Körper der gewöhnlichen rationalen Zahlen der einzige ist, der stetige Multiplikation und Addition besitzt.

Vereinigt man dies mit dem Ergebnis der vorigen Nummer, so haben wir den Satz:

*Abgesehen von einer stetigen Koordinatentransformation ist der Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen der einzige Körper von Zahlenpaaren, der den in der vorigen Nummer zu Beginn angegebenen Bedingungen genügt.*

5. Man kann die eingeführten Annahmen noch ein klein wenig verallgemeinern. Es ist nicht nötig, daß der Körper  $\mathfrak{K}$  gerade durch die Zahlenpaare  $(\xi, 0)$  gegeben sei. Man kann unter ihm irgendeine Jordankurve von Zahlenpaaren verstehen. Die Voraussetzung 4. ist dann so zu formulieren: Bedeutet  $(\xi, \eta)$  ein reelles Element und sind  $\xi = \xi(\tau)$  und  $\eta = \eta(\tau)$  stetige Funktionen der gewöhnlichen reellen Zahl  $\tau$ , welche die genannte Jordankurve ausmachen, so ist für jedes  $(\alpha, \beta)$  das Produkt  $(\xi, \eta) \cdot (\alpha, \beta)$  stetig von  $\tau$  abhängig.

Zieht man endlich noch die Brouwerschen Ergebnisse über Liesche Gruppen heran, so kann man sich überzeugen, daß man das Axiom 2. ganz entbehren kann. Es ist mir bisher kein direkter Beweis gelungen, daß die Existenz eines solchen eine Jordankurve erfüllenden Teilkörpers  $\mathfrak{K}$  eine Folge der übrigen Axiome ist.

6. Ich will nun auch noch die übrigen Axiome auf ihre Unabhängigkeit untersuchen.

Ich will also fragen, was passiert, wenn man die vorausgesetzte Stetigkeit der Operationen fallen läßt. Dann gibt es noch weitere Zahlensysteme, die den übrigen Forderungen genügen. Ein solches wird z. B. durch die Gesamtheit aller rationalen oder durch die Gesamtheit aller algebraischen Funktionen einer komplexen Variablen geliefert. Die Mächtigkeit dieser Gebilde ist ja die des Kontinuums. Man kann sie also auf je eine Ebene abbilden. Die Abbildung soll so gewählt sein, daß die konstanten und zugleich reellen unter diesen Funktionen die reellen Elemente repräsentieren. Da alle vorkommenden Mengen die Mächtigkeit des Kontinuums haben, ist dies stets möglich. Man hat nur die reellen Konstanten auf die reellen Elemente  $(\xi, 0)$  zu beziehen, die übrigen auf den Rest der Ebene der komplexen Zahlen  $(\xi, \eta)$ . Zu rechnen ist mit diesen Gebilden in der üblichen Weise. Aber Zahlensysteme mit zwei oder weniger Haupteinheiten erhalten wir so nicht. Denn sonst müßte es z. B. zwei rationale Funktionen  $e_1$  und  $e_2$  geben, mit deren Hilfe man alle anderen rationalen Funktionen in der Form  $x e_1 + y e_2$  mit reellen Koeffizienten  $x$  und  $y$  darstellen könnte. Das ist aber ersichtlich nicht der Fall, schon deshalb nicht, weil es ja doch rationale Funktionen von beliebig hohem Grad gibt. Also nicht einmal mit endlich vielen Einheiten kann man auskommen. Nach unseren Darlegungen können daher Summe und Produkt nicht stetige Funktionen sein. Das zweite Zahlensystem hat sogar



noch die Eigenschaft, daß in ihm der Fundamentalsatz der Algebra richtig bleibt. Immerhin bleibt die Frage noch offen, ob man statt der Stetigkeit der Summe als Funktion von vier Variablen etwa nur die folgende Annahme zu machen braucht: Die Summe ist eine stetige Funktion sowohl des einen wie des anderen Summanden.

7. Man kann durch ganz ähnliche Betrachtungen die bei hyperkomplexen Zahlen üblichen Definitionen vertiefen. Denn der Brouwersche Satz gilt auch für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten.

(Eingegangen am 11. März 1918.)