Zur Arithmetik der transfiniten Zahlen.

Von

ERNST JACOBSTHAL in Berlin.

Einleitung.

Die vorliegende Note bildet eine Ergänzung meiner Arbeit „Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik"*), deren Kenntnis ich hier voraussetze. Entstanden ist sie aus der Untersuchung über die gemeinsame Wurzel und Grundlage zweier Sätze**) jener Arbeit; da beide Theoreme *zum Teil aus dem allgemeinen Satz XXIV folgen*, so handelt es sich wesentlich darum, die am Ende von § 3 unerledigt gelassene Frage zu entscheiden.

Um zu dieser Entscheidung zu gelangen, ist eine eingehende Betrachtung des assoziativen und distributiven Gesetzes, ihres Zusammenhanges und ihrer Abhängigkeit voneinander erforderlich.***) Es sei besonders betont, daß gerade die Resultate dieser Fragen auch bei alleiniger Betrachtung der endlichen Zahlen ihre Gültigkeit und Bedeutung nicht verlieren.

§ 1.

Das distributive und assoziative Gesetz.

Es sei $f(\alpha, \beta)$ eine mit Hilfe von $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$ induktiv definierte Funktion der transfiniten Variabeln α und β.†) Die Definitionsgleichungen sind:

(1) $$f(\alpha, 1) = w(\alpha),$$

(2) $$f(\alpha, \beta+1) = g(f(\alpha, \beta), \alpha),$$

(3) $$f(\alpha, \lim \beta) = \lim_{\beta} f(\alpha, \beta).$$

*) Math. Annalen Bd. 66, S. 145—194.

**) § 4, Nr. 16 (Satz) und § 5, Nr. 14.

***) Einige Ergebnisse dieser Untersuchungen sind ohne Beweis in den letzten Anmerkungen *von* § 3 *der oben zitierten Arbeit mitgeteilt*.

†) Man vergl. l. c. § 1, Satz II. *Wir setzen im folgenden stets* (c') *voraus.* (l. c. S. 152.)

Da zur Definition von f die Funktion g gegeben sein muß, also f aus g abgeleitet ist, so möge g die *Stammfunktion* von f heißen. Ferner werde der Kürze halber f und jede analog definierte Funktion eine *C-Funktion* genannt.

Es besitze nun f ein verallgemeinertes distributives Gesetz, d. h. es existiere eine Funktion $f_2(\xi, \eta)$, so daß für $\alpha \geqq \lambda$*), $\beta \geqq 1$, $\gamma \geqq 1$

(d) $$g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, \gamma)) = f(\alpha, f_2(\beta, \gamma))$$

ist.**) Es folgt hieraus, da $f(\alpha, \beta) \geqq w(\alpha) \geqq w(\lambda) \geqq \xi_0$ und $f(\alpha, \gamma) \geqq \lambda \geqq \eta_0$*) ist, daß $f(\alpha, f_2(\beta, \gamma)) > f(\alpha, \beta)$ ist, d. h. es ist

(4) $$f_2(\beta, \gamma) > \beta \quad \text{für} \quad \beta, \gamma \geqq 1.$$

Satz I. *Wenn* (d) *gilt, so ist entweder* $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ *oder es ist beständig* $f(\alpha, 1) > \alpha$; *der erste Fall tritt dann ein, wenn für jedes* β *immer* $f_2(\beta, 1) = \beta + 1$ *ist; im zweiten Falle aber ist stets* $f_2(\beta, 1) > \beta + 1$. *Der erste Fall* $f(\alpha, 1) = w(\alpha) \equiv \alpha$ *folgt somit aus dem Bestehen der Gleichung* $f_2(1, 1) = 2$.

Beweis. Sei für ein spezielles α die Gleichung $f(\alpha, 1) = \alpha$ erfüllt; für dieses α folgt: $f(\alpha, f_2(\beta, 1)) = g(f(\alpha, \beta), \alpha) = f(\alpha, \beta + 1)$, d. h. $f_2(\beta, 1) = \beta + 1$ für jedes β. Somit lautet (d) für beliebiges α: $f(\alpha, \beta + 1) = g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, 1))$, während nach (2) folgt: $f(\alpha, \beta + 1) = g(f(\alpha, \beta), \alpha)$. Somit ist:

$$g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, 1)) = g(f(\alpha, \beta), \alpha).$$

Da g nach Voraussetzung (c') bei konstantem erstem Argument eine wachsende Funktion der zweiten Variabeln ist, so folgt hieraus $f(\alpha, 1) = \alpha$ für jedes α. Also ergibt sich, daß entweder *stets* $f(\alpha, 1) = \alpha$ und damit $f_2(\beta, 1) = \beta + 1$ ist, oder daß beständig $f(\alpha, 1) > \alpha$ ist. In diesem letzteren Falle folgt: $g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, 1)) = f(\alpha, f_2(\beta, 1)) > g(f(\alpha, \beta), \alpha) = f(\alpha, \beta + 1)$, d. h. $f_2(\beta, 1) > \beta + 1$. Demnach folgt unter der Voraussetzung (d) bereits aus $f_2(1, 1) = 2$, daß $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ ist.

Es besitze nun ferner f ein verallgemeinertes assoziatives Gesetz, d. h. es existiere eine Funktion f_3, so daß für $\alpha \geqq \lambda$; $\beta, \gamma \geqq 1$

(e) $$f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, f_3(\beta, \gamma))$$

ist.***) Da für $\gamma = 1$ die linke Seite $f(f(\alpha, \beta), 1) = w(f(\alpha, \beta))$ bei konstantem α mit β zugleich wächst, so gilt von der rechten Seite gleiches, also ist $f_3(\beta, 1) = w'(\beta)$ eine wachsende Funktion von β und es ist $f_3(\beta, 1) \geqq \beta$. Also ist

(5) $$f_3(\beta, 1) = w'(\beta) > f_3(\beta', 1) = w'(\beta') \quad \text{für} \quad \beta > \beta'.$$

*) Man vergl. l. c. § 1, Satz II. *Wir setzen im folgenden stets* (c') *voraus.* (l. c. S. 152.)

**) Man vergl. l. c. § 3; dort war speziell g eine C-Funktion f_1.

***) Man vergl. l. c. § 3.

Ferner folgt aus (e), daß

$$f_3(\beta, \lim \gamma) = \lim_{\gamma} f_3(\beta, \gamma) \tag{6}$$

ist.

Satz II. *Wenn* (e) *gilt, so ist entweder* $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ *oder es ist beständig* $f(\alpha, 1) > \alpha$; *der erste Fall tritt dann ein, wenn für jedes* β *immer* $f_3(\beta, 1) = f_3(1, \beta) = \beta$ *ist; er folgt bereits aus der einen Gleichung* $f_3(1, 1) = 1$. *Im zweiten Fall ist stets* $f_3(\beta, 1) > \beta$.

Beweis: Sei unter der Voraussetzung (e) für ein spezielles α die Gleichung $f(\alpha, 1) = \alpha$ erfüllt, so folgt für dieses α und $\beta = 1$: $f(\alpha, \gamma) = f(\alpha, f_3(1, \gamma))$, also $f_3(1, \gamma) = \gamma$ für $\gamma \geqq 1$. Speziell ist $f_3(1, 1) = 1$, also für beliebiges α: $f(f(\alpha, 1), 1) = f(\alpha, 1)$. Da nun $f(\xi, 1)$ mit ξ wächst, so folgt hieraus $f(\alpha, 1) = \alpha$ für jedes α.

Für $\gamma = 1$ folgt daher aus (e): $f(\alpha, \beta) = f(\alpha, f_3(\beta, 1))$, d. h. $f_3(\beta, 1) = \beta = f_3(1, \beta)$. Sei nun umgekehrt $f_3(1, 1) = 1$, dann folgt: $f(f(\alpha, 1), 1) = f(\alpha, 1)$, d. h. $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$. Ist für ein einziges β auch nur $f_3(\beta, 1) = \beta$, so folgt für dieses β und $\gamma = 1$ aus (e), daß $f(f(\alpha, \beta), 1) = f(\alpha, \beta)$ ist. Somit ist nach dem Bewiesenen stets $f(\alpha, 1) = \alpha$, also $f_3(\beta, 1) \equiv \beta$. Ist also $f(\alpha, 1)$ stets größer als α, dann ist auch beständig $f_3(\beta, 1) > \beta$. Damit ist der Satz bewiesen.

Weiter folgt aus (e), daß f_3 das gewöhnliche assoziative Gesetz erfüllt. Es besteht nämlich

Satz III. *Erfüllt* f *das allgemeine assoziative Gesetz* (e), *dann befriedigt* f_3 *ein spezielles assoziatives Gesetz, das die Form hat:*

$$f_3(f_3(\alpha', \beta'), \gamma') = f_3(\alpha', f_3(\beta', \gamma')). \tag{e'}$$

Beweis. In (e) setze man $\alpha = f(\xi, \alpha')$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Dann wird die linke Seite in (e):

$$f\big(f(f(\xi, \alpha'), \beta'), \gamma'\big) = f\big(f(\xi, f_3(\alpha', \beta')), \gamma'\big) = f\big(\xi, f_3(f_3(\alpha', \beta'), \gamma')\big).$$

Rechts erhalten wir aber

$$f(f(\xi, \alpha'), f_3(\beta', \gamma')) = f\big(\xi, f_3(\alpha', f_3(\beta', \gamma'))\big).$$

Also ist

$$f\big(\xi, f_3(f_3(\alpha', \beta'), \gamma')\big) = f\big(\xi, f_3(\alpha', f_3(\beta', \gamma'))\big)$$

und hieraus folgt (e′).

Es erscheint nun bemerkenswert, daß f_3 nicht nur ein spezielles assoziatives Gesetz erfüllt, sondern unter der Voraussetzung (d) auch ein spezielles distributives Gesetz. Zwischen den durch (d) und (e) bedingten Funktionen f_2 und f_3 bestehen nämlich Beziehungen, wie wir aus folgendem Satz erkennen:

Satz IV. *Wenn beide Gesetze, das distributive und assoziative, erfüllt* *sind, so ist* $f_3(\beta, \gamma)$ *eine C-Funktion, und zwar ist* f_2 *die Stammfunktion von* f_3*; außerdem erfüllt* f_3 *ein spezielles distributives Gesetz von folgender Form:*

$$\text{(d}'\text{)} \qquad f_2(f_3(\alpha, \beta), f_3(\alpha, \gamma)) = f_3(\alpha, f_2(\beta, \gamma)).$$

Beweis. Damit f_3 eine C-Funktion mit f_2 als Stammfunktion ist, muß erstens $f_3(\beta, 1)$ eine wachsende Funktion von β sein, eine uns nach (5) bekannte Tatsache. Ferner ist nach (6): $f_3(\beta, \lim \gamma) = \lim\limits_{\gamma} f_3(\beta, \gamma)$. Und schließlich ist nur noch zu zeigen, daß $f_3(\beta, \gamma + 1) = f_2(f_3(\beta, \gamma), \beta)$ ist. Um diese Gleichung nachzuweisen, ersetzen wir in (e) die Zahl γ durch $\gamma + 1$ und erhalten links:

$$\begin{aligned} f(f(\alpha, \beta), \gamma + 1) &= g\big(f(f(\alpha, \beta), \gamma), f(\alpha, \beta)\big) && [(2)] \\ &= g\big(f(\alpha, f_3(\beta, \gamma)), f(\alpha, \beta)\big) && [(e)] \\ &= f\big(\alpha, f_2(f_3(\beta, \gamma), \beta)\big) && [(d)]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (e) lautet aber $f(\alpha, f_3(\beta, \gamma + 1))$. Vergleicht man beide Ausdrücke, dann folgt die behauptete Gleichung. Damit ist gezeigt, daß f_3 eine C-Funktion mit f_2 als Stammfunktion ist.

Um (d′) zu beweisen, sei ξ eine nicht unterhalb λ gelegene feste Zahl; dann bilde man:

$$\begin{aligned} f\big(\xi, f_2(f_3(\alpha, \beta), f_3(\alpha, \gamma))\big) &= g\big(f(\xi, f_3(\alpha, \beta)), f(\xi, f_3(\alpha, \gamma))\big) && [(d)] \\ &= g\big(f(f(\xi, \alpha), \beta), f(f(\xi, \alpha), \gamma)\big) && [(e)] \\ &= f(f(\xi, \alpha), f_2(\beta, \gamma)) && [(d)] \\ &= f\big(\xi, f_3(\alpha, f_2(\beta, \gamma))\big) && [(e)]. \end{aligned}$$

Vergleicht man das erste und letzte Glied dieser Gleichung, so folgt daraus (d′), da ja aus $f(\xi, \eta) = f(\xi, \eta')$ stets $\eta = \eta'$ folgt. Damit ist Satz IV bewiesen.

Stellt nun dieser Satz bereits mannigfache Wechselbeziehungen zwischen dem distributiven und dem assoziativen Gesetz dar, so erfahren die Beziehungen noch eine Vertiefung, wenn wir uns den Inhalt von Satz I ins Gedächtnis zurückrufen.

Nach I ist, falls (d) gilt, *entweder* $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ *oder beständig* $f(\alpha, 1) > \alpha$. Fassen wir nur den ersten Fall, in dem $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ ist, ins Auge. Falls (e) gilt, ist nach II alsdann $f_3(\beta, 1) \equiv \beta$, also f_3 nach Satz IV *völlig* durch f_2 bestimmt. Es liegt die Vermutung nahe, daß in diesem Fall (e), also auch (d′) und (e′), aus (d) folgen. Das wird bestätigt durch

Satz V. *Es erfülle f das distributive Gesetz* (d) *und es sei* $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$. *Man definiere* f_3 *aus* f_2 *als Stammfunktion durch folgende drei Gleichungen:*

$$\begin{aligned}
&(1') \qquad & f_3(\beta, 1) &= \beta,\\
&(2') \qquad & f_3(\beta, \gamma+1) &= f_2(f_3(\beta, \gamma), \beta),\\
&(3') \qquad & f_3(\beta, \lim \gamma) &= \lim_{\gamma} f_3(\beta, \gamma),
\end{aligned}$$

dann gilt das assoziative Gesetz (e), *d. h. es ist* $f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, f_3(\beta, \gamma))$; *also gelten auch nach* IV *und* III *die Formeln* (d′) *und* (e′).

Beweis. Durch (1′)—(3′) ist $f_3(\beta, \gamma)$ für $\beta, \gamma \geqq 1$ definiert, und es folgt leicht, da wegen $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ auch $f_2(\beta, 1) = \beta + 1$ ist, durch transfinite Induktion, daß $f_3(\beta, 1) = f_3(1, \beta) = \beta$ ist. Die Behauptung

$$f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, f_3(\beta, \gamma))$$

ist nun für $\gamma = 1$ wegen (1′) und $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ erfüllt. Ist sie für alle der Bedingung $1 \leqq \gamma < \gamma'$ genügenden Zahlen γ richtig und ist γ' eine Limeszahl, dann ist wegen (3) und (3′) auch $f(f(\alpha, \beta), \gamma') = f(\alpha, f_3(\beta, \gamma'))$. Sei daher $\gamma' = \gamma'' + 1$, also $f(f(\alpha, \beta), \gamma'') = f(\alpha, f_3(\beta, \gamma''))$. Wir bilden:

$$\begin{aligned}
f(f(\alpha, \beta), \gamma') = f(f(\alpha, \beta), \gamma''+1) &= g\left(f(f(\alpha, \beta), \gamma''), f(\alpha, \beta)\right) && [(2)]\\
&= g\left(f(\alpha, f_3(\beta, \gamma'')), f(\alpha, \beta)\right) && [\text{Vorauss.}]\\
&= f\left(\alpha, f_2(f_3(\beta, \gamma''), \beta)\right) && [(\mathrm{d})]\\
&= f(\alpha, f_3(\beta, \gamma''+1)) && [(2')]\\
&= f(\alpha, f_3(\beta, \gamma')).
\end{aligned}$$

Damit ist V bewiesen. — In dem Fall, in dem $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ ist, ist also (e) auf (d) zurückgeführt. Man kann nun fragen: welche Eigenschaften von g bedingen (d)? In dieser Richtung liegt

Satz VI. *Es sei* $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ *und die Stammfunktion* g *von* f *erfülle das spezielle assoziative Gesetz* $g(g(\alpha, \beta), \gamma) = g(\alpha, g(\beta, \gamma))$; *außerdem sei* $g(\alpha, \lim \beta) = \lim\limits_{\beta} g(\alpha, \beta)$*), *dann erfüllt* f *das distributive Gesetz* (d) *und das assoziative* (e); *es ist speziell* $f_2(\xi, \eta) = \xi + \eta$, *also nach* V *weiter* $f_3(\xi, \eta) = \xi\eta$.

Beweis. Zu beweisen ist (d): $g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, \gamma)) = f(\alpha, \beta + \gamma)$. Die Formel (e): $f(f(\alpha, \beta), \gamma) = f(\alpha, \beta\gamma)$ folgt dann bereits nach V. Nun ist für $\gamma = 1$ die Behauptung $g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, 1)) = f(\alpha, \beta + 1)$ wegen $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ und wegen (2) erfüllt. Sei (d) richtig für alle der Bedingung $1 \leqq \gamma < \gamma'$ genügenden Zahlen γ. Ist γ' eine Limeszahl, dann ist wegen

$$g(\xi, \lim \eta) = \lim_{\eta} g(\xi, \eta)$$

auch $g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, \gamma')) = f(\alpha, \beta + \gamma')$. Sei daher $\gamma' = \gamma'' + 1$, also $g(f(\alpha, \beta), f(\alpha, \gamma'')) = f(\alpha, \beta + \gamma'')$. Dann wird

---

*) Ist g eine C-Funktion, dann ist sicher nach der Definition der C-Funktion

$$g(\alpha, \lim \beta) = \lim_{\beta} g(\alpha, \beta).$$

$$\begin{aligned} g(f(\alpha,\beta), f(\alpha,\gamma')) = g(f(\alpha,\beta), f(\alpha,\gamma''+1)) &= g\big(f(\alpha,\beta), g(f(\alpha,\gamma''),\alpha)\big) && [(2)] \\ &= g\big(g(f(\alpha,\beta), f(\alpha,\gamma'')),\alpha\big) && [\text{Vorauss.}] \\ &= g(f(\alpha,\beta+\gamma''),\alpha) && [\text{desgl.}] \\ &= f(\alpha,\beta+\gamma''+1) && [(2)] \\ &= f(\alpha,\beta+\gamma'). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

An dieses Resultat seien nun die *folgenden Bemerkungen* geknüpft. Die vorstehenden Untersuchungen sind ganz unabhängig von der Kenntnis der speziellen C-Funktionen $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$. Daß wir die auf α unmittelbar folgende Zahl $s(\alpha)$ mit $\alpha+1$ bezeichneten, geschah aus Gründen der Bequemlichkeit. Dagegen zeichnet sich der Satz VI dadurch aus, daß er direkt auf $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ führt.

So weisen also die allgemeinen Untersuchungen des distributiven und assoziativen Gesetzes unmittelbar auf diese beiden speziellen Operationen hin, die jene beiden Gesetze erfüllen; wir gewinnen also aus der allgemeinen Betrachtung konkrete Beispiele. Um im Rahmen dieser Betrachtungsweise zu bleiben und die vorstehenden Sätze zu illustrieren, stellen wir uns auf den Standpunkt, daß uns die Operationen $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ noch unbekannt seien. Wir würden also von ihnen nur die Definition kennen: aus VI

$$\alpha+1 = s(\alpha); \quad \alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1; \quad \alpha+\lim\beta = \lim_{\beta}\,(\alpha+\beta).$$

Aus V dagegen

$$\alpha 1 = \alpha; \quad \alpha(\beta+1) = \alpha\beta+\alpha; \quad \alpha\lim\beta = \lim_{\beta}\,\alpha\beta.$$

Es wäre dann zu zeigen:

$$(e_1) \qquad (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma);$$

$$(e_2) \qquad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma);$$

$$(d_1) \qquad \alpha\beta+\alpha\gamma = \alpha(\beta+\gamma).$$

Daß diese Relationen aus den obigen Definitionsgleichungen folgen, ist an anderer Stelle gezeigt worden.*) Es folgen indessen diese drei Relationen sofort aus unseren Sätzen.**) Da in VI nämlich $f_2(\beta,\gamma)=\beta+\gamma$ und $f_3(\beta,\gamma)=\beta\gamma$ ist, so ist (e_2) nichts weiter als (e') (Satz III), und (d_1) folgt aus (d') (Satz IV). Die Relation (e_1) folgt aus VI folgendermaßen. Es ist $g(f(\alpha,\beta), f(\alpha,\gamma)) = f(\alpha,\beta+\gamma)$, also ist ebenso

$$\begin{aligned} g\big(g(f(\alpha,\beta), f(\alpha,\gamma)), f(\alpha,\delta)\big) &= g(f(\alpha,\beta+\gamma), f(\alpha,\delta)) \\ &= f(\alpha,(\beta+\gamma)+\delta). \end{aligned}$$

*) l. c. § 2, Nr. 8 und § 4, Nr. 8.

**) Ganz streng lauten die folgenden Schlüsse so: gibt es Funktionen $g(\alpha,\beta)$ mit den in VI geforderten Eigenschaften, dann muß $\alpha+\beta$ eine solche Funktion sein, d. h. es gilt dann (e_1), also auch (e_2) und (d_1). Ist also (e_1) direkt bewiesen (l. c. S. 159), dann folgt (e_2) und (d_1) aus III und IV.

Andererseits erfüllt g das assoziative Gesetz nach Voraussetzung, also wird

$$\begin{aligned} g\big(g(f(\alpha,\beta),f(\alpha,\gamma)),f(\alpha,\delta)\big) &= g\big(f(\alpha,\beta),g(f(\alpha,\gamma),f(\alpha,\delta))\big) \\ &= g(f(\alpha,\beta),f(\alpha,\gamma+\delta)) \\ &= f(\alpha,\beta+(\gamma+\delta)). \end{aligned}$$

Somit ist

$$f(\alpha,(\beta+\gamma)+\delta) = f(\alpha,\beta+(\gamma+\delta))$$

und hieraus folgt (e_1).

Versteht man in VI nun unter g die Funktion $\alpha\beta$, dann wird $f(\alpha,\beta)=\alpha^\beta$ und (d) und (e) lauten:

$$\alpha^\beta\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}, \quad (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}.\text{*)}$$

Es lassen sich also für die bekannten Operationen $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ und α^β die Gesetze (d) *und* (e) *einheitlich aus allgemeinen Sätzen über C-Funktionen gewinnen, während an anderer Stelle jedesmal gesonderte Beweise erforderlich waren.*

Ich wende mich jetzt zu den Fragen, die, wie in der Einleitung bemerkt wurde, den Ausgangspunkt für die bisherigen Betrachtungen bilden. Wir setzen jetzt voraus: 1) $g=f_1$ ist eine C-Funktion; 2) f erfüllt das assoziative Gesetz (e). Dann gilt, wie an anderer Stelle**) gezeigt ist, der

Satz VII. *Es sei $\beta=f(\xi,\eta)$ und $f_3(2,\eta)=\eta$, dann hat bei festem η und β die Gleichung $\beta=f(\vartheta,\eta)$ unendlich viele Wurzeln ϑ, die einen Limes γ_1 besitzen, und γ_1 ist eine Hauptzahl von f_1.*

Ich verändere nun die Voraussetzungen: Es sei 1′) $f(\alpha,1)\equiv\alpha$; 2′) $g=f_1$ sei eine C-Funktion und erfülle das spezielle assoziative Gesetz

$$f_1(f_1(\alpha,\beta),\gamma) = f_1(\alpha,f_1(\beta,\gamma)).$$

Dann gilt folgender

Satz VIII. *Es sei η eine Limeszahl und $\beta=f(\xi,\eta)$, dann hat bei festem η und β die Gleichung $\beta=f(\vartheta,\eta)$ unendlich viele Wurzeln ϑ, die einen Limes γ_1 besitzen, und γ_1 ist eine Hauptzahl von f_1. Außerdem besitzt die Gleichung $\beta=f(\gamma_1,\eta_1)$ eine Wurzel η_1, die der zweitgrößte rechtsseitige Divisor von η ist.****)

Beweis. Wegen der Voraussetzungen (1′) und (2′) gilt Satz VI; also ist (d):

$$f_1(f(\alpha,\beta),f(\alpha,\gamma)) = f(\alpha,\beta+\gamma)$$

und (e):

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) = f(\alpha,\beta\gamma).$$

---

*) l. c. § 5, Nr. 8.

**) l. c. § 3, Satz XXIV.

***) Man ziehe noch l. c. § 1, XV heran: es ist $\eta>\eta_1$ und es gibt keine Zahl η_2 zwischen η und η_1, für die $\beta=f(\zeta,\eta_2)$ eine Wurzel ζ hat.

Daher sind die Voraussetzungen für VII erfüllt; da nun η eine Limeszahl, also $f_3(2, \eta) = 2\eta = \eta$ *) ist, so gilt VII. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $\beta = f(\gamma_1, \eta_1)$ eine Wurzel η_1 besitzt. Bedeutet nun ϑ eine der Wurzeln der Gleichung $\beta = f(\vartheta, \eta)$, dann ist auch $f(\vartheta, \varrho)$ eine solche Wurzel für *jedes* ϱ, für das $\varrho\eta = \eta$ ist, denn es ist

$$f(f(\vartheta, \varrho), \eta) = f(\vartheta, \varrho\eta) = f(\vartheta, \eta) = \beta.$$

Es ist daher mit $\vartheta < \gamma_1$ auch $f(\vartheta, \varrho) < \gamma_1$. Alle diese Zahlen ϱ, für die $\varrho\eta = \eta$ ist, haben nun einen Limes δ, der eine δ-Zahl ist, und es ist $\eta = \delta\eta_1$, wo η_1 der zweitgrößte rechtsseitige Teiler von η ist. **) Aus $\gamma_1 > f(\vartheta, \varrho)$ folgt nun

$$\gamma_1 \geqq \lim_{\varrho} f(\vartheta, \varrho) = f(\vartheta, \lim \varrho) = f(\vartheta, \delta).$$

Wäre $\gamma_1 > f(\vartheta, \delta)$, so wäre $f(\vartheta, \delta)$ auch eine Wurzel der Gleichung $\beta = f(\vartheta', \eta)$, also

$$f(f(\vartheta, \delta), \eta) = \beta = f(\vartheta, \delta\eta) > f(\vartheta, \delta\eta_1) = f(\vartheta, \eta) = \beta,$$

d. h. $\beta > \beta$. Daher ist sicher nicht $\gamma_1 > f(\vartheta, \delta)$, sondern $\gamma_1 = f(\vartheta, \delta)$. Nun ist

$$\beta = f(\vartheta, \eta) = f(\vartheta, \delta\eta_1) = f(f(\vartheta, \delta), \eta_1) = f(\gamma_1, \eta_1).$$

Damit ist der Satz bewiesen. Bemerkenswert an diesem Beweise ist, daß der zu beweisende Satz bereits für den speziellen Fall abgeleitet sein muß, in dem f die Multiplikation bedeutet. (l. c. § 4, Nr. 16).

Versteht man unter f_1 die Funktion $\alpha\beta$, dann ist $f(\alpha, \beta) = \alpha^\beta$. Für diesen Fall ist VIII an anderer Stelle auf anderem Wege bewiesen worden. ***)

Es werde besonders bemerkt, daß die Voraussetzung (1'): $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit von VIII ist. Denn es seien die beiden Voraussetzungen (1) und (2) für VII erfüllt, dann gilt VII; ferner sei stets für die Gleichung $\beta = f(\gamma_1, \eta_1)$ eine Wurzel η_1 vorhanden. Daß dann $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ ist, zeigen wir auf folgendem Wege: Es sei $\beta = \eta$ eine eigentliche Hauptzahl von f. Dann ist $\beta = f(\vartheta, \beta)$ für jedes $\vartheta < \beta = \gamma_1$. Also

$$\beta = \gamma_1 = f(\gamma_1, \eta_1) \geqq f(\gamma_1, 1) \geqq \gamma_1, \quad \text{d. h.} \quad f(\gamma_1, 1) = \gamma_1, \quad \eta_1 = 1.$$

Da nach Voraussetzung (2) nun (e) gilt, so folgt nach II, daß $f(\alpha, 1) \equiv \alpha$ ist.

Zusatz. *Unter den Voraussetzungen* (1') *und* (2') *ist jede eigentliche Hauptzahl von f eine δ-Zahl.* Denn es sei $\beta = \eta$ eine eigentliche Haupt-

*) l. c. § 4, Nr. 15.
**) l. c. § 4, Nr. 16.
***) l. c. § 5, Nr. 14.

zahl von f; dann ist nach dem soeben bewiesenen $\eta_1 = 1$, also ist in der Tat $\beta = \eta = \delta\eta_1 = \delta$ eine δ-Zahl.

§ 2.

Drei der Addition, Multiplikation und Potenzierung verwandte Operationen.

Um nun zu zeigen, daß es außer den bekannten Operationen $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ und α^β auch noch andere Funktionen gibt, die das distributive und assoziative Gesetz erfüllen, will ich zur Bildung solcher neuen Funktionen an die vorstehenden Sätze I bis VI anknüpfen.*)

Im Hinblick auf Satz VI empfiehlt es sich, Umschau zu halten nach einer Funktion $g(\xi, \eta)$, die das spezielle assoziative Gesetz

$$g(g(\xi, \eta), \xi) = g(\xi, g(\eta, \xi))$$

erfüllt.

Es sei uns ξ und η gegeben; setzen wir ξ und η in die Cantorsche Normalform. Treten dabei in der Darstellung von η Potenzen von ω auf, die nicht in der Normalform von ξ vorkommen, so fügen wir sie mit dem Faktor 0 der Normalform von ξ ein und umgekehrt. Es sei also die *gemeinsame* Darstellung von ξ und η:

$$\xi = \omega^{\mu_0}x_0 + \omega^{\mu_1}x_1 + \cdots + \omega^{\mu_r}x_r,$$

$$\eta = \omega^{\mu_0}y_0 + \omega^{\mu_1}y_1 + \cdots + \omega^{\mu_r}y_r.$$

Wir definieren dann mit Hessenberg**) die *natürliche Summe* von ξ und η durch die Gleichung

$$\xi \# \eta = \omega^{\mu_0}(x_0 + y_0) + \cdots + \omega^{\mu_r}(x_r + y_r).$$

Hieraus folgt, daß $\xi \# \eta = \eta \# \xi$ ist; die natürliche Addition ist also eine kommutative Operation. Es ist aber ersichtlich auch

$$(\xi \# \eta) \# \zeta = \xi \# (\eta \# \zeta).$$

Die Operation $\xi \# \eta$ *besitzt also das gewöhnliche assoziative Gesetz.* Da für $\xi > 0$ stets $\xi \# \eta > \eta$ ist, so kann nicht allgemein

$$\xi \# \lim \eta = \lim (\xi \# \eta)$$

sein.***) Ist η endlich, so ist $\xi \# \eta = \xi + \eta$.

*) Es sei im voraus bemerkt, daß die neuen Operationen für *endliche* Variable mit den alten Operationen $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, α^β zusammenfallen.

**) G. Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre, Abhandl. der Friesschen Schule, I. Band, 4. Heft (als Sonderdruck erschienen), § 75.

***) l. c. § 3, letzte Anm. a. S. 171 und Hessenberg, l. c. § 81.

Definiert man nun mit $g_1(\xi, \eta) = \xi \# \eta$ als Stammfunktion eine C-Funktion, so wie es VI erfordert, so ist Satz VI nicht anwendbar, da die Voraussetzung $g_1(\xi, \lim \eta) = \lim g_1(\xi, \eta)$ nicht zutrifft. Trotzdem versuchen wir es mit dem durch VI gegebenen Ansatz. Wir definieren mit $g_1(\xi, \eta)$ als Stammfunktion und der Festsetzung

$$f_1(\alpha, 1) = w_1(\alpha) = \alpha$$

die Funktion $f_1(\alpha, \beta)$ und bezeichnen sie mit $\alpha \times \beta$.*) Diese Operation ist definiert durch folgende drei Gleichungen:

(1) $$\alpha \times 1 = \alpha,$$

(2) $$\alpha \times (\beta + 1) = g_1(\alpha \times \beta, \alpha) = (\alpha \times \beta) \# \alpha;$$

(3) $$\alpha \times \lim \beta = \lim_{\beta} (\alpha \times \beta).$$

Da $\beta + 1 = \beta \# 1$ ist, so erhält wegen (1) die Gleichung (2) die Form

(2′) $$\alpha \times (\beta \# 1) = (\alpha \times \beta) \# (\alpha \times 1).$$

Wie aus § 1 meiner oben zitierten Arbeit folgt, ist, da $g_1(\xi, \eta) > \xi$ für $\xi \geqq 0$, $\eta \geqq 1$ ist, $\alpha \times \beta$ definiert für $\alpha \geqq \lambda_1 = 1$, $\beta \geqq 1$. Wir setzen zweckmäßigerweise:

(4) $$0 \times \beta = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 0,$$

(5) $$\alpha \times 0 = 0 \quad \text{„} \quad \alpha \geqq 0.$$

Jetzt ist $\alpha \times \beta$ für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ definiert. Da für endliches $\eta = y$ stets $\xi \# y = \xi + y$ ist, so ist für $\alpha = a < \omega$ die Gleichung (2) von der Form:

$$a \times (\beta + 1) = (a \times \beta) + a.$$

In diesem Fall erhalten wir daher die gewöhnliche Multiplikation, d. h.

(6) $$a \times \beta = a\beta.$$

Setzt man $\beta = \bar{\beta} + b$, wo $\bar{\beta}$ eine Limeszahl oder 0 und $b < \omega$ ist, und ist

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_r} a_r + a,$$

wo für den Fall $\alpha < \omega$ die Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots, a_r$ alle gleich Null und $\alpha = a$ sein sollen, dann behaupten wir:

(7) $$\begin{aligned} \alpha \times \beta &= \alpha\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0} a_0 b + \cdots + \omega^{\alpha_r} a_r b + ab \\ &= \omega^{\alpha_0}\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0} a_0 b + \cdots + \omega^{\alpha_r} a_r b + ab. \end{aligned}$$

Beweis. Da $\alpha \times \beta$ durch (1) — (5) in eindeutiger Weise definiert wird, so ist (7) bewiesen, sobald gezeigt ist, daß die durch (7) definierte Funktion $\alpha \times \beta$ den Gleichungen (1) — (5) genügt. Es sei also $\alpha \times \beta$ durch (7) definiert. Dann sieht man sofort, daß (4) und (5) erfüllt sind

*) Hessenberg definiert l. c § 76 zu anderen Zwecken eine Operation $\alpha \times \beta$, die von der oben definierten verschieden ist und auch arithmetisch durchaus nicht der Operation $\alpha\beta$ entspricht.

ebenso folgt aus (7) sofort die Richtigkeit von (1); denn für $\beta = 1$ ist $\bar{\beta} = 0$ und $b = 1$, also

$$\alpha\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0}a_0 b + \cdots + ab = \omega^{\alpha_0}a_0 + \cdots + a = \alpha.$$

Um nun (2) zu beweisen, bilden wir nach (7):

$$\alpha \times (\beta + 1) = \alpha\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0}a_0(b+1) + \cdots + a(b+1)$$
$$= (\alpha\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0}a_0 b + \cdots + ab) \,\#\, (\omega^{\alpha_0}a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_r}a_r + a) = (\alpha \times \beta) \,\#\, \alpha.$$

Es bleibt also nur noch (3) zu beweisen. Dazu dienen folgende Bemerkungen: a) Aus (7) folgt für $b = 0$, $\beta = \bar{\beta}$, d. h. für den Fall, in dem β eine Limeszahl ist, daß $\alpha \times \beta = \alpha\beta$ ist; b) ist $b \geqq 1$, dann folgt aus (7), daß

$$\alpha \times \beta = \alpha\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0}a_0 b + \omega^{\alpha_1}a_1 b + \cdots + ab \geqq \alpha\bar{\beta} + \omega^{\alpha_0}a_0 b + \omega^{\alpha_1}a_1 + \cdots$$
$$+ \omega^{\alpha_r}a_r + a = \alpha\beta\,^{*)}$$

ist; somit ist $\alpha \times \beta \geqq \alpha\beta$. Das gilt wegen Bemerkung (a) auch für $b = 0$; allerdings ist dann $\alpha \times \beta = \alpha\beta$; c) sei $\alpha > 0$. Aus (7) folgt, daß bei konstantem α die Größe $\alpha \times \beta$ mit β zugleich wächst.

Aus diesen drei Bemerkungen folgern wir nun (3) so: Es ist nach (a), (b) und (c) für konstantes von 0 verschiedenes α, falls β' eine Limeszahl und β eine variable Zahl unterhalb β' bedeutet:

$$\alpha\beta' = \alpha \times \beta' > \alpha \times \beta \geqq \alpha\beta.$$

Man lasse β gegen β' konvergieren, so daß $\beta' = \lim \beta$ ist, dann erhalten wir:

$$\alpha\beta' \geqq \lim_{\beta}(\alpha \times \beta) \geqq \lim_{\beta} \alpha\beta = \alpha \lim \beta = \alpha\beta',$$

d. h.

$$\alpha \lim \beta = \alpha \times \lim \beta = \lim_{\beta}(\alpha \times \beta),$$

womit (3), also auch (7) bewiesen ist.

Setzt man $\beta = \omega^{\beta_0}b_0 + \cdots + \omega^{\beta_s}b_s + b$, so nimmt (7) die Form an:

(7′) $$\alpha \times \beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0}b_0 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_s}b_s + \omega^{\alpha_0}a_0 b + \cdots + \omega^{\alpha_r}a_r b + ab.$$

Es stellt also (7′) die Normalform von $\alpha \times \beta$ vor. Wir behaupten nun: es gilt das distributive Gesetz (d) in der speziellen Form:

(8) $$(\alpha \times \beta) \,\#\, (\alpha \times \gamma) = \alpha \times (\beta \,\#\, \gamma).$$

Beweis. Sei die gemeinsame Darstellung von β und γ:

$$\beta = \omega^{\delta_0}b_0 + \cdots + \omega^{\delta_s}b_s + b,$$
$$\gamma = \omega^{\delta_0}c_0 + \cdots + \omega^{\delta_s}c_s + c,$$

*) l. c. § 4, Nr. 10.

dann ist nach (7'):

$$(\alpha \times \beta) \# (\alpha \times \gamma) = (\omega^{\alpha_0+\delta_0} b_0 + \cdot \cdot + \omega^{\alpha_0+\delta_s} b_s + \omega^{\alpha_0} a_0 b + \cdots + ab)$$
$$\# (\omega^{\alpha_0+\delta_0} c_0 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\delta_s} c_s + \omega^{\alpha_0} a_0 c + \cdots + ac)$$
$$= \omega^{\alpha_0+\delta_0}(b_0 + c_0) + \cdots + \omega^{\alpha_0+\delta_s}(b_s + c_s) + \omega^{\alpha_0} a_0 (b + c) + \cdots + a(b + c)$$

und nach (7') ist, da

$$\beta \# \gamma = \omega^{\delta_0}(b_0 + c_0) + \cdots + \omega^{\delta_s}(b_s + c_s) + b + c$$

ist, der erhaltene Ausdruck gleich $\alpha \times (\beta \# \gamma)$. Damit ist also (8) bewiesen. Fassen wir unser Ergebnis zusammen: Die Operation

$$f_1(\alpha, \beta) = \alpha \times \beta,$$

für die

$$f_1(\alpha, 1) = \alpha \quad \text{und} \quad g_1(\xi, \eta) = \xi \# \eta$$

Stammfunktion ist, besitzt das spezielle distributive Gesetz (8). Es ist $f_2 \equiv g_1$. Leitet man nach Satz V aus f_2 die Operation f_3 ab, so wird daher $f_3 \equiv f_1$ und nach Satz V gilt daher:

$$(9) \qquad (\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma).$$

Es entspricht also $\alpha \times \beta$ hinsichtlich des distributiven und assoziativen Gesetzes völlig der Operation $\alpha\beta$.

Da für Limeszahlen β stets $\alpha \times \beta = \alpha\beta$ ist und $1 \times 2 = 1 \cdot 2 = 2$ ist, so besitzen $\alpha \times \beta$ und $\alpha\beta$ dieselben Hauptzahlen. Alle unsere Ergebnisse weisen somit auf eine Verwandtschaft zwischen $\alpha \times \beta$ und $\alpha\beta$ hin.

Ebenso wie man die Potenz α^β aus $\alpha\beta$ definiert, wollen wir jetzt eine Funktion $\overline{\alpha}^{\,\beta}$ aus $\alpha \times \beta$ ableiten; wir werden für $\overline{\alpha}^{\,\beta}$ ganz entprechende Gesetze finden, wie sie für α^β gelten.

Man setze $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) = \xi \times \eta$. Es ist $f_1(\xi, \eta) = \xi \times \eta > \xi$ für $\xi \geqq \xi_0 = 1$, $\eta \geqq \eta_0 = 2$.*) Man setze nun $f(\alpha, 1) = \alpha$ und definiere $f(\alpha, \beta)$ mit f_1 als Stammfunktion. Man bezeichne diese Operation mit $\overline{\alpha}^{\,\beta}$. Die Definitionsgleichungen lauten:

$$(10) \qquad \overline{\alpha}^{\,1} = \alpha,$$

$$(11) \qquad \overline{\alpha}^{\,\beta+1} = f_1(\overline{\alpha}^{\,\beta}, \alpha) = \overline{\alpha}^{\,\beta} \times \alpha,$$

$$(12) \qquad \overline{\alpha}^{\,\lim \beta} = \lim_{\beta} (\overline{\alpha}^{\,\beta}).$$

Dann ist $\overline{\alpha}^{\,\beta}$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$ definiert.**)

---

*) l. c. § 1, Satz V.

**) l. c. § 1, Vorbemerkungen zu Satz II.

Wir ergänzen diese Definition durch:

$$\overline{\alpha}^{0} = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 1, \tag{13}$$

$$\overline{1}^{\beta} = 1 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 0, \tag{14}$$

$$\overline{0}^{\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 1. \tag{15}$$

Damit ist $\overline{\alpha}^{\beta}$ für jedes Wertepaar $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ erklärt, das Paar $(0, 0)$ ausgenommen. Da nun $\overline{\alpha}^{1} = \alpha$ ist und die Stammfunktion von $\overline{\alpha}^{\beta}$ eine C-Funktion mit dem speziellen assoziativen Gesetz (9) ist, so ist Satz VI anwendbar, also gilt das distributive und assoziative Gesetz:

$$\overline{\alpha}^{\beta} \times \overline{\alpha}^{\gamma} = \overline{\alpha}^{\beta+\gamma}, \tag{16}$$

$$\overline{\left[\overline{\alpha}^{\beta}\right]}^{\gamma} = \overline{\alpha}^{\beta\gamma}. \tag{17}$$

Diese Gleichungen würden noch mehr mit den Gleichungen

$$\alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}, \quad (\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$$

übereinstimmen, falls rechts in (16) statt $\beta + \gamma$ stehen würde: $\beta \# \gamma$. Dann würde in (17) statt $\beta\gamma$ rechts $\beta \times \gamma$ stehen.

Da $\alpha \times \beta \geqq \alpha\beta$ ist, so folgt aus (10) — (15) leicht durch Induktion, daß

$$\overline{\alpha}^{\beta} \geqq \alpha^{\beta} \tag{18}$$

ist. Ist weiter α eine Limeszahl, so lautet (11) so:

$$\overline{\alpha}^{\beta+1} = \overline{\alpha}^{\beta} \times \alpha = \overline{\alpha}^{\beta}\,\alpha.\text{*)}$$

In diesem Fall ist also $\overline{\alpha}^{\beta}$ die gewöhnliche Potenz:

$$\overline{\alpha}^{\beta} = \alpha^{\beta}, \tag{19}$$

falls α eine Limeszahl ist.

Ist $\alpha = a$ endlich, so folgt aus (10) und (11) leicht:

$$\overline{a}^{b} = a^{b}. \tag{20}$$

---

*) Denn es ist ja $\xi \times \eta = \xi\eta$, falls η eine Limeszahl ist.

Hieraus folgt

$$\overline{a}^{\,\omega} = a^{\omega} = \omega. \tag{21}$$

Ist aber $\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \cdots \geqq \omega$, d. h. $\alpha_0 \geqq 1$, dann folgt aus (11) und (7′), daß das erste Glied in der Normaldarstellung von $\overline{\alpha}^{\,b}$ die Gestalt $\omega^{\alpha_0 b} a_0$ hat. Daher folgt aus (12), daß

$$\overline{\alpha}^{\,\omega} = \omega^{\alpha_0 \omega} = \alpha^{\omega} \text{ *)} \tag{22}$$

ist. Es ist also $\overline{\alpha}^{\,\omega} = \alpha^{\omega}$ nach (21), (22), (14), (15) für jedes $\alpha \geqq 0$. Bedeutet nun β irgend eine Limeszahl, dann ist für $\alpha \geqq 0$ stets

$$\overline{\alpha}^{\,\beta} = \alpha^{\beta}. \tag{23}$$

Beweis. Für $\alpha = 0, 1$ ist (23) trivial, sei daher $\alpha \geqq 2$. Es sei die Gleichung (23) erwiesen für alle Limeszahlen $\beta < \beta'$, wo β' auch eine Limeszahl ist, dann ist nur $\overline{\alpha}^{\,\beta'} = \alpha^{\beta'}$ zu zeigen. Gibt es nun unter den Limeszahlen $\beta < \beta'$ keine größte, so ist $\lim \beta = \beta'$. Da nun Gleichung (12) für jede Limesreihe gilt **), so folgt aus $\overline{\alpha}^{\,\beta} = \alpha^{\beta}$, wenn β gegen β' wächst, auch $\overline{\alpha}^{\,\beta'} = \alpha^{\beta'}$.

Es gebe nun zweitens ein größtes β unterhalb β'; es heiße β''; dann ist $\beta' = \beta'' + \omega$. Nach (16) wird daher:

$$\overline{\alpha}^{\,\beta'} = \overline{\alpha}^{\,\beta''+\omega} = \overline{\alpha}^{\,\beta''} \times \overline{\alpha}^{\,\omega} = \alpha^{\beta''} \times \alpha^{\omega} = \alpha^{\beta''} \alpha^{\omega}$$

(da α^{ω} eine Limeszahl ist). Also:

$$\overline{\alpha}^{\,\beta'} = \alpha^{\beta''} \alpha^{\omega} = \alpha^{\beta''+\omega} = \alpha^{\beta'}.$$

Daher ist (23) bewiesen. Sei nun β eine beliebige Zahl, $\beta = \bar{\beta} + b$, wo $\bar{\beta}$ eine Limeszahl oder 0 und $b < \omega$ ist, dann wird nach (16) und (23):

$$\overline{\alpha}^{\,\beta} = \overline{\alpha}^{\,\bar{\beta}+b} = \overline{\alpha}^{\,\bar{\beta}} \times \overline{\alpha}^{\,b} = \alpha^{\bar{\beta}} \times \overline{\alpha}^{\,b}. \tag{24}$$

Da man nach (7′) leicht aus der Normalform von α die von

$$\overline{\alpha}^{\,b} = \alpha \times \alpha \times \alpha \cdots (b \text{ mal})$$

berechnen kann und nach (7′) $\xi \times \eta = \xi\eta$ ist, falls ξ eine Potenz von ω

*) l. c. § 5, Nr. 12.

**) l. c. § 1, Satz IV.

bedeutet, so läßt sich, da $\alpha^{\bar{\beta}}$ eine Potenz von ω ist*), die Gleichung (24) auch schreiben:

$$\overset{\underline{\ \ \beta}}{\alpha} = \overset{\underline{\ \ \bar{\beta}}}{\alpha} \times \overset{\underline{\ \ b}}{\alpha} = \alpha^{\bar{\beta}}\, \overset{\underline{\ \ b}}{\alpha}\,. \tag{24'}$$

Somit läßt sich $\overset{\underline{\ \ \beta}}{\alpha}$ leicht in die Normalform setzen.

Es sei nur noch bemerkt: aus (23) folgt, daß die Hauptzahlen von $\overset{\underline{\ \ \beta}}{\alpha}$ die ε-Zahlen sind.

---

*) l. c. § 5, Nr. 12.

Berichtigung

zu dem Aufsatz von Ernst Jacobsthal, „Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik."
Math. Ann. Bd. 66, S. 145—194.

S. 193, Zeile 8 von oben zu streichen: 16;
„ „ 14 von oben ist statt α_1 zu lesen: α_2.