

## Ueber Bewegungen und complexe Zahlen.

Von

K. TH. VAHLEN in Königsberg i./Pr.

Um die *Drehungen* in einem  $n$ -dimensionalen Raume darzustellen, hat Lipschitz complexe Zahlen eingeführt, die den Quaternionen analog sind\*). Dass man mittelst derselben Zahlen auch die *Bewegungen* und zwar in einem elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Raume durch Anwendung linearer gebrochener Substitutionen darstellen kann, soll im Folgenden gezeigt werden. Nur für den parabolischen Fall der Ebene\*\*) und des Raumes\*\*\*) ist das Resultat bisher bekannt†).

1) Es sei  $n = p + 1$ ; die  $p$  Primitiv-Einheiten  $i_\alpha$  genügen den Relationen

$$i_\alpha^2 + 1 = 0, \quad i_\alpha i_\beta + i_\beta i_\alpha = 0. \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, p; \alpha \neq \beta)$$

Die beiden  $2^p$ -gliedrigen Zahlen

$$a = a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_{12} i_1 i_2 + \dots + a_{12 \dots p} i_1 i_2 \dots i_p,$$

$$a' = a_0 - a_1 i_1 - \dots + a_{12} i_1 i_2 + \dots + (-1)^p a_{12 \dots p} i_1 i_2 \dots i_p$$

heissen „conjugirt“. Eine  $(p+1)$ -gliedrige Zahl  $x = x_0 + x_1 i_1 + \dots + x_p i_p$

\*) Lipschitz, Comptes Rendus XCI (1880) p. 619, 660; Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn, 1886. Unabhängig von Lipschitz und zum Theil anders habe ich die Hauptsätze hierüber bewiesen in den „Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr.“, Jahrgang 38 (1897) p. [72]. Die Zahlen selbst ohne die Darstellung der Bewegungen durch dieselben finden sich schon bei Clifford, Math. pap. 26, 30, 43.

\*\*) Study, Complexe Zahlen und Transformationsgruppen, Leipz. Ber., Math. phys. Cl. 41 (1889) p. 177. Wiener Monatshefte I (1890) p. 283.

\*\*\*) Study, Von den Bewegungen und Umlegungen, Math. Ann. 39 (1891) p. 441—566 spec. p. 526. Math. pap. from the Chicago Congress, New York 1896, pag. 376.

†) Vgl. die weitere Litteratur hierzu bei Study, Theorie der gemeinen und höheren complexen Zahlen. Enc. d. Math. I, p. 147, speciell p. 177 ff.

heißt ein „Vector“. Es giebt Zahlen (z. B. Vektoren, s. u.)  $a$ , so dass die  $2^p$  aus

$$ax = ya'$$

durch Vergleichung der Coefficienten von  $1, i_1, \dots, i_p, i_1 i_2, \dots, i_1 i_2 \dots i_p$  folgenden Gleichungen bei variablen  $x_0, x_1, \dots, x_p$  und davon linear abhängigen  $y_0, y_1, \dots, y_p$  coexistiren können. Alsdann gehen die  $y$  aus den  $x$  durch eine allgemeine orthogonale Substitution hervor; denn das Entfernungsquadrat  $(x_0 - \xi_0)^2 + \dots + (x_p - \xi_p)^2 = (x - \xi)(x' - \xi')$  der Punkte

$$(x_0, x_1, \dots, x_p) \quad \text{und} \quad (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_p)$$

wird transformirt in

$$a(x - \xi)a'^{-1} \cdot a'(x' - \xi')a^{-1} = a(x - \xi)(x' - \xi')a^{-1},$$

bleibt also unverändert, da sich  $a$  gegen  $a^{-1}$  wegen der Realität von  $(x - \xi)(x' - \xi')$  forthebt. Da die Substitution schon durch die  $p + 1$  ersten der  $2^p$  Gleichungen gegeben ist, in denen nur die Coefficienten  $a_0, a_1, \dots, a_p, a_{12}, \dots, a_{p-1,p}$  vorkommen, so sind die übrigen Coefficienten der Zahl  $a$  von diesen  $1 + p + \frac{p(p-1)}{2}$  ersten (rational) abhängig. Eine

solche Zahl  $a$  heisse ein „Transformator“,  $r = (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{12}^2 \dots a_p^2)^{\frac{1}{2}}$  ihr „Tensor“ und  $\frac{a}{r}$  ihr „Versor“. Der zu  $a$  „reciproke“ Transformator  $\frac{1}{a} = a^{-1}$  ist gleich

$$\frac{1}{r} \left\{ a_0 - a_1 i_1 - \dots - a_{12} i_1 i_2 + \dots + a_{123} i_1 i_2 i_3 + \dots + (-1)^{\frac{p(p+1)}{2}} a_{12 \dots p} i_1 i_2 \dots i_p \right\}.$$

Jeder Vector, also auch jedes Vektoren-Product\*) ist ein Transformator,

denn in  $\sum_0^n a_h i_h \cdot \sum_0^n x_k i_k \cdot \sum_0^n a_l i_l, (i_0 = 1)$ , hat  $i_h i_k i_l (h < k < l)$  den Coef-

ficienten  $\begin{vmatrix} a_h & a_k & a_l \\ x_h & x_k & x_l \\ a_h & a_k & a_l \end{vmatrix}$ . Die Producte  $ab$  und  $ba$ , und die Quotienten

$\frac{a}{b} = ab^{-1}, \frac{b}{a} = ba^{-1}, a^{-1}b, b^{-1}a$  der Transformatoren  $a, b$  sind Transformatoren; und es ist  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ . Der Zusammensetzung orthogonaler Substitutionen entspricht die Multiplication ihrer Transformatoren.

2) Dies vorausgeschickt suchen wir die Bedingungen unter denen  $y = \frac{ax + b'}{j^2 bx + a}$  ein Vector ist. Hier ist  $x$  ein variabler Vector,  $a$  und  $a', b$  und  $b'$  conjugirte Transformatoren,  $j^2$  eine vorläufig beliebige reelle Zahl

\*) Dass es keine andern Transformatoren giebt, wird in (10) bewiesen.

einschliesslich der Null. Für  $x = 0$  ergibt sich als nothwendig, dass  $\frac{b'}{a'}$  ein Vector  $v$  ist. Dies ist hinreichend, denn es folgt daraus durch Transformation mit  $a^{-1}$ , dass auch  $a^{-1}b' \cdot a'^{-1}a' = a^{-1}b' = u$  ein Vector ist.

Setzt man also

$$b' = au, \quad b = a'u',$$

so wird

$$y = a(x+u) (a'(1+j^2u'x))^{-1} = a(x+u) (1+j^2u'x)^{-1} a'^{-1};$$

es müsste also auch  $(x+u) (1+j^2u'x)^{-1}$ , demnach der reciproke Werth

$$\frac{(1+j^2u'x)(x+u)}{(x+u)(x'+u')},$$

also, nach Weglassung von Vektoren und reellen Factoren:

$$u'xu' = u'xu^{-1} \cdot uu'$$

ein Vector sein, was offenbar der Fall ist.

Eine solche Transformation  $y = \frac{ax+b'}{j^2bx+a'}$  soll eine „Vector-Transformation“ heissen.

3) Die Vector-Transformationen bilden eine Gruppe. Denn

$$z = \frac{cy+d'}{j^2dy+c'} \quad \text{und} \quad y = \frac{ax+b'}{j^2bx+a'}$$

zusammengesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} z &= \{c(ax+b') + d'(j^2bx+a')\} (j^2bx+a')^{-1} \\ &\quad \cdot \{[j^2d(ax+b') + c'(j^2bx+a')] (j^2bx+a')^{-1}\}^{-1} \\ &= (Ax'+B') (j^2bx+a')^{-1} (j^2bx+a') (j^2Bx+A')^{-1} \\ &= \frac{Ax+B'}{j^2Bx+A'}; \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} A &= ca + j^2d'b, & A' &= c'a' + j^2db', \\ B &= da + c'b, & B' &= d'a' + cb' \end{aligned}$$

gesetzt ist. Dies ist natürlich eine Vector-Transformation, wie auch daraus folgt, dass  $A$  und  $A'$ , ebenso  $B$  und  $B'$  conjugirt, dass

$$A = c(ab^{-1} + j^2c^{-1}d')b, \quad B = d(ab^{-1} + d^{-1}c')b$$

Transformatoren, und

$$\frac{B'}{A'} = \frac{c \frac{b'}{a'} + d'}{j^2d \frac{b'}{a'} + c'}$$

ein Vector ist.

4) Nunmehr sei  $j$  eine neue Primitiv-Einheit, deren Quadrat reell ist, und die den Gleichungen

$$i_\alpha j + j i_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p)$$

also

$$aj = ja'$$

genügt.

Alsdann componiren sich die Vector-Transformationen

$$z = \frac{cy + d'}{j^2 dy + c'}, \quad y = \frac{ax + b'}{j^2 bx + a'}$$

wie die „Bi-Transformatoren“  $c + d'j$ ,  $a + b'j$ . Denn es wird

$$(c + d'j)(a + b'j) = ca + j^2 d'b + cb'j + d'a'j = A + B'j.$$

5) Für  $j^2 = 0$  repräsentirt die Transformation

$$x \parallel x + v$$

eine Verschiebung, die Transformation

$$x \parallel ax \frac{1}{a'}$$

eine Drehung, also die aus beiden zusammengesetzte:

$$x \parallel \frac{ax + b'}{a'}$$

eine Bewegung im parabolischen Raum. Für  $p=2$  werden die Bewegungen abhängig von den parabolischen Bi-Quaternionen\*)

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_{12} i_1 i_2 + j(b_0 + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_{12} i_1 i_2),$$

mit den Relationen

$$i_1^2 + 1 = i_2^2 + 1 = j^2 = 0; \quad i_1 j = -j i_1, \quad i_2 j = -j i_2, \quad i_1 i_2 = -i_2 i_1.$$

Die acht Parameter  $a_0 \dots b_{12}$  müssen aber der Relation

$$ab^{-1}$$

gleich einem Vector, also

$$a_0 b_{12} + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_{12} b_0 = 0$$

genügen.

6) Für  $j^2 = \pm 1$  beweisen wir zunächst, dass eine Vector-Transformation die Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_p^2 = j^2$$

oder

$$x = \frac{j^2}{x'}$$

in sich transformirt. Setzt man nämlich  $x = \frac{j^2}{x'}$  in  $y = \frac{ax + b'}{j^2 bx + a'}$  ein, so erhält man

\*) Mit den drei Arten von Biquaternionen haben sich Clifford (Math. pap. Nr. 20, 41, 42) und Buchheim (Amer. J. 7 (1885) p. 293) beschäftigt, ohne die Darstellung der Bewegungen durch dieselben zu finden; vgl. Study, Math. Ann. 39 (1891) p. 520 Anm. \*\*).

$$a \left( \frac{j^2}{x'} + u \right) \left( 1 + \frac{u'}{x'} \right)^{-1} a'^{-1} = j^2 a (1 + j^2 u x') x'^{-1} \cdot x' (x' + u')^{-1} a'^{-1} \\ = j^2 \{ a' (x' + u') (1 + j^2 u x')^{-1} a'^{-1} \}^{-1} = j^2 y'^{-1}. \quad \text{q. e. d.}$$

7) Untersuchen wir die Veränderung, die das Doppelverhältniss von vier Vektoren  $x, y, z, t$ :

$(x-z)(x-t)^{-1} : (y-z)(y-t)^{-1} = (x-z)(x-t)^{-1}(y-t)(y-z)^{-1}$   
bei einer Vector-Transformation erleidet. Es geht  $x$  über in:

$$a \frac{x+u}{1+j^2 u' x} a'^{-1} = a \cdot \frac{\frac{1}{j^2 u'}(1+j^2 u' x) + u - \frac{1}{j^2 u'}}{1+j^2 u' x} \cdot a'^{-1} = a \left( \frac{1}{j^2 u'} + \xi \right) a'^{-1},$$

wenn zur Abkürzung  $\left( u - \frac{1}{j^2 u'} \right) (1 + j^2 u' x)^{-1} = \xi$  gesetzt wird. Führt man entsprechend  $\eta, \xi, \tau$  ein, so wird:

$$x - z \parallel a(\xi - \xi) a'^{-1}, \\ x - t \parallel a(\xi - \tau) a'^{-1}$$

also

$$(x-z)(x-t)^{-1} \parallel a(\xi - \xi) a'^{-1} \cdot a'(\xi - \tau)^{-1} a^{-1} = a(\xi - \xi)(\xi - \tau)^{-1} a^{-1}.$$

Ebenso

$$(y-z)(y-t)^{-1} \parallel a(\eta - \xi)(\eta - \tau)^{-1} a^{-1},$$

also

$$(x-z)(x-t)^{-1}(y-t)(y-z)^{-1} \parallel a(\xi - \xi)(\xi - \tau)^{-1}(\eta - \tau)(\eta - \xi)^{-1} a^{-1}.$$

Ferner wird:

$$\xi - \xi = \left( u - \frac{1}{j^2 u'} \right) \left( \frac{1}{1+j^2 u' x} - \frac{1}{1+j^2 u' z} \right) \\ = \left( u - \frac{1}{j^2 u'} \right) \cdot (1+j^2 u' z)^{-1} ((1+j^2 u' z) - (1+j^2 u' x)) \cdot (1+j^2 u' x)^{-1} \\ = v \cdot Z j^2 u' (z-x) X,$$

wenn  $v = u - \frac{1}{j^2 u'}$ ,  $X = (1+j^2 u' x)^{-1}$  u. s. w. gesetzt wird. Also wird:

$$(\xi - \xi)(\xi - \tau)^{-1} = v Z j^2 u' (z-x) X X^{-1} (t-x)^{-1} \frac{1}{j^2 u'} Z^{-1} v^{-1} \\ = v Z j^2 u' (x-z)(x-t)^{-1} (v Z j^2 u')^{-1} \\ = U(x-z)(x-t)^{-1} U^{-1},$$

also

$$(\xi - \xi)(\xi - \tau)^{-1}(\eta - \tau)(\eta - \xi)^{-1} = U(x-z)(x-t)^{-1}(y-t)(y-z)^{-1} U^{-1},$$

und schliesslich:

$$\frac{x-z}{x-t} : \frac{y-z}{y-t} \parallel a U \frac{x-z}{x-t} : \frac{y-z}{y-t} (a U)^{-1}.$$

Das Doppelverhältniss bleibt demnach im Allgemeinen dann und nur dann ungeändert, wenn es reell ist; dann hebt sich nämlich  $a U$  gegen  $(a U)^{-1}$

fort. Sind  $P, Q, R, S$  die Endpunkte der Vektoren  $x, y, z, t$ , so liegen  $P, Q, R, S$  in einem dreidimensionalen Raume; demnach ist  $\frac{x-z}{x-t} : \frac{y-z}{y-t}$  das Verhältniss von zwei Quaternionen, deren Versoren die Winkel  $SPR$  und  $SQR$  haben; diese müssen also gleich sein und in derselben Ebene liegen. Also: Bei einer beliebigen Vector-Transformation bleibt das Doppelverhältniss von vier Vektoren dann und nur dann ungeändert, wenn die vier Endpunkte derselben auf einem Kreise (oder einer Geraden) liegen.

8) Definiert man also als Entfernung zweier Punkte  $P, Q$  den Logarithmus des Doppelverhältnisses der zu  $P, Q, R, S$  gehörigen Vektoren, wo  $R, S$  die Schnittpunkte der Geraden  $PQ$  mit  $x_0^2 + \dots + x_p^2 = j^2$  sind, so bleiben bei einer Vector-Transformation die Entfernungen ungeändert; dieselbe repräsentirt daher die Bewegung für  $j^2 = -1$  im elliptischen, für  $j^2 = +1$  im hyperbolischen Raum\*).

9) Ein beliebiger Punkt  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{p+1}$  der „sphärischen Mannigfaltigkeit“  $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_{p+1}^2 = 1$  liegt mit dem „Pole“

$$\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_p = 0, \quad \xi_{p+1} = 1$$

und dem Punkte

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_1 = x_1, \quad \dots, \quad \xi_p = x_p, \quad \xi_{p+1} = 0$$

in einer Geraden, wenn sich verhält:

$$x_0 + i_1 x_1 + \dots + i_p x_p : 1 \quad \text{wie} \quad \xi_0 + i_1 \xi_1 + \dots + i_p \xi_p : 1 - \xi_{p+1},$$

wie man aus einem ebenen Schnitt durch die  $\xi_{p+1}$ -Axe und die beiden Punkte erkennt. Hierdurch wird die ebene Mannigfaltigkeit  $\xi_{p+1} = 0$  auf die sphärische ein-eindeutig stereographisch abgebildet. Demnach ergibt eine elliptische ( $j^2 = -1$ ) Bewegung  $y = \frac{ax+b'}{-bx+a}$  der ersteren für die letztere die Transformation:

$$(1) \quad \frac{\eta}{1 - \eta_{p+1}} = \frac{a\xi + b'(1 - \xi_{p+1})}{-b\xi + a(1 - \xi_{p+1})}.$$

Setzt man

$$\frac{\eta}{1 - \eta_{p+1}} = \frac{1 + \eta_{p+1}}{\eta}, \quad \frac{\xi}{1 - \xi_{p+1}} = \frac{1 + \xi_{p+1}}{\xi'}$$

ein, und geht dann zur conjugirten und reciproken Gleichung über, so kommt:

\*) Legt man, allgemeiner,  $i_\alpha^2$  einen der drei Werthe  $+1, 0, -1$  bei, so sind die Vector-Transformationen die automorphen Transformationen von

$$x_0^2 - i_1^2 x_1^2 - \dots - i_p^2 x_p^2 = j^2;$$

z. B. im Raume die Bewegungen mit festem Kreiscylinder.

$$(2) \quad \frac{\eta}{1 + \eta_{p+1}} = \frac{a\xi - b'(1 + \xi_{p+1})}{b\xi + a'(1 + \xi_{p+1})}.$$

Setzt man in (1) und (2)  $\eta = \frac{1 - \eta_{p+1}^2}{\eta'}$  und geht zu den reciproken Gleichungen über, so erhält man:

$$(3) \quad \frac{\eta'}{1 + \eta_{p+1}} = \frac{-b\xi + a'(1 - \xi_{p+1})}{a\xi + b'(1 - \xi_{p+1})},$$

$$(4) \quad \frac{\eta'}{1 - \eta_{p+1}} = \frac{a'(1 + \xi_{p+1}) + b\xi}{-b'(1 + \xi_{p+1}) + a\xi}.$$

Beseitigt man in (1), (2), (3), (4) die Nenner, was wegen der Realität von  $\eta_{p+1}$  keine Schwierigkeiten hat, so ergibt die Differenz der aus (1) und (2) folgenden Gleichungen:

$$(5) \quad a\xi - b'\xi_{p+1} = \eta a' + \eta_{p+1} b',$$

und die Differenz der aus (3) und (4) folgenden

$$(6) \quad b\xi + a'\xi_{p+1} = -\eta' b' + \eta_{p+1} a'.$$

(5) und (6) kann man zusammenfassen in:

$$(7) \quad (a + b'j)(\xi + j\xi_{p+1}) = (\eta + j\eta_{p+1})(a' - bj).$$

Diese Transformation der sphärischen Mannigfaltigkeit repräsentirt (nach 1)) eine Drehung derselben, um den Nullpunkt

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \dots, \xi_{p+1} = 0.*$$

16) Die elliptischen Bewegungen des  $(p+1)$ -dimensionalen Raumes sind also auf die Drehungen des  $(p+2)$ -dimensionalen abgebildet;  $a + b'j$  muss ein Transformator für  $p + 2$  Dimensionen sein. Da aber  $\frac{1}{b'} a$  ein Vector ist, so wird  $a + b'j$  das Product aus einem Vector

$$v_{p+1} = v_{p+1,0} + v_{p+1,1}i_1 + \dots + v_{p+1,p}i_p + v_{p+1,p+1}j,$$

den man als Einheits-Vector ( $v_{p+1}v_{p+1}' = 1$ ) annehmen kann, und einem Transformator für  $p + 1$  Dimensionen. Recursiv folgt daraus unschwer die Darstellung eines Transformators für  $p + 1$  Dimensionen als Product des Tensors  $r$  und der Einheitsvectoren:

$$v_\alpha = v_{\alpha 0} + v_{\alpha 1}i_1 + \dots + v_{\alpha \alpha}i_\alpha$$

nämlich als

$$r \cdot v_{h_1} v_{h_2} \dots v_{h_p},$$

wo  $h_1, h_2, \dots, h_p$  eine beliebige Permutation von  $1, 2, \dots, p$  ist.

\*) Für  $p = 1$  ergibt sich die Cayley'sche Darstellung der Drehung einer Kugel durch eine linear-gebrochene Substitution; s. Cayley, On the correspondence of Homographies and Rotations, Math. Ann. 15 (1879) p. 288. Aus diesem Resultat hätte die Darstellung der Bewegung in der elliptischen Ebene abgeleitet werden können.

Diese Darstellung eines Transformators ist nach Festsetzung der Reihenfolge der  $i_1 \dots i_p$  und Wahl einer Indexfolge  $h_1 \dots h_p$  eine völlig bestimmte\*).

11) Wir wollen insbesondere an die Darstellung des Transformators als

$$r \cdot v_1 v_2 \dots v_{p-1} v_p = r \dots \frac{v_{p-2}}{v'_{p-2}} \cdot \frac{v_{p-1}}{v'_p}$$

anknüpfen und eine andere Darstellung desselben daraus herleiten.

Eine Quaternion mit dem Tensor  $r$ , dem Drehungswinkel  $2\varphi$ , den Stellungscosinussen der Ebene desselben  $c_1, c_2, c_{12}$ , ist bekanntlich gleich

$$r(\cos \varphi + (i_1 c_1 + i_2 c_2 + i_1 i_2 c_{12}) \sin \varphi),$$

oder wenn man  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  durch ihre Potenzreihen ersetzt und beachtet, dass  $(i_1 c_1 + i_2 c_2 + i_1 i_2 c_{12})^2 = -1$  ist, gleich:

$$r \left( 1 + \frac{(i_1 \varphi_1 + i_2 \varphi_2 + i_1 i_2 \varphi_{12})}{1!} + \frac{(i_1 \varphi_1 + i_2 \varphi_2 + i_1 i_2 \varphi_{12})^2}{2!} + \dots \right),$$

wo  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{12}$  die Componenten ( $\varphi_1 = c_1 \varphi$  u. s. w.) von  $\varphi$  in den Coordinatenebenen sind; diese Darstellung ist analog der Darstellung einer gewöhnlichen complexen Zahl als  $r e^{i\varphi}$ .

Für mehr als drei Dimensionen stellt der entsprechende Ausdruck zwar einen Transformator, aber, wie schon die Parameter-Abzählung erkennen lässt, nicht einen allgemeinen Transformator dar.

Es seien  $a$  und  $b$  zwei vom Nullpunkt ausgehende Gerade, deren letztere in  $x_p = 0$  liege;  $ab = \varphi$  der Winkel derselben,

$$a_\alpha = \cos \alpha x_\alpha, \quad b_\alpha = \cos b x_\alpha \quad (\alpha = 0, 1, \dots, p)$$

ihre Richtungscosinusse; also

$$a_0^2 + \dots + a_p^2 = 1, \quad b_0^2 + \dots + b_{p-1}^2 = 1, \quad b_p = 0,$$

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_p b_p = \cos \varphi,$$

ferner, nach einer bekannten Formel für vier Punkte einer Kugel:

$$a_\alpha b_\beta - a_\beta b_\alpha = \sin x_\alpha x_\beta \cdot \sin ab \cdot \cos ab | x_\alpha x_\beta = c_{\alpha\beta} \sin \varphi,$$

wenn mit  $c_{\alpha\beta} = \cos ab | x_\alpha x_\beta$  der Cosinus des Winkels bezeichnet wird, den die Ebene von  $\varphi$  mit der Ebene  $x_\alpha x_\beta$  bildet. Nunmehr sei

$$v_{p-1} = b_0 + b_1 i_1 + \dots + b_{p-1} i_{p-1}, \quad v'_p = a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_p i_p.$$

Dann wird:

$$\frac{v_{p-1}}{v'_p} = v_{p-1} v_p = (b_0 + b_1 i_1 + \dots + b_{p-1} i_{p-1})(a_0 - a_1 i_1 - \dots - a_p i_p)$$

\*) Die Darstellung einer Quaternion als Product (oder Quotient) von  $p = 2$  Vektoren findet sich bekanntlich schon bei Hamilton, Elements of Quaternions, II. art. 108.



gleich

$$\cos \varphi + (i_1 c_1 + \dots + i_p c_p + i_1 i_2 c_{12} + \dots + i_{p-1} i_p c_{p-1,p}) \sin \varphi;$$

wo  $c_{0\alpha} = c_\alpha$  gesetzt ist. Ersetzt man  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  durch ihre Potenzreihen und beachtet, dass

$$(i_1 c_1 + i_2 c_2 + \dots + i_p c_p + \dots + i_{p-1} i_p c_{p-1,p})^2$$

zufolge der Relationen

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_{p-1,p}^2 = 1,$$

$$c_{\alpha\beta} c_{\gamma\delta} - c_{\alpha\gamma} c_{\beta\delta} + c_{\alpha\delta} c_{\beta\gamma} = 0$$

gleich  $-1$  ist, so erhält man den Versor  $v_{p-1} v_p = V_p$  in der Form

$$V_p = 1 + \frac{(i_1 \varphi_1 + \dots + i_{p-1} i_p \varphi_{p-1,p})}{1!} + \frac{(i_1 \varphi_1 + \dots + i_{p-1} i_p \varphi_{p-1,p})^2}{2!} + \dots,$$

wo  $\varphi_{\alpha\beta}$  die Componente von  $\varphi$  in der  $x_\alpha x_\beta$ -Ebene ist.

Dieses ist aber kein allgemeiner Versor; ein allgemeiner stellt sich vielmehr nach Obigem als ein Product von solchen speciellen, etwa als  $\dots V_{p-4} V_{p-2} V_p$  dar.

Es ist beachtenswerth, dass sich die beiden Darstellungen eines allgemeinen Transformators oder Versors ergeben haben ohne Benutzung der zwischen den Coefficienten desselben bestehenden Relationen, allein auf Grund der Eingangs (s. o.) festgesetzten Definition.

Königsberg i. Pr., April 1901.

