Ueber die Gleichungen fünften Grades.

(Aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)

(Von Herrn *Kronecker*.)

Ich habe in jüngster Zeit eine Frage zum Abschluss gebracht, mit der ich mich seit fünf Jahren ab und zu beschäftigt und welche ich immer wieder aufgenommen hatte, weil deren Erledigung für die weitere Richtung meiner algebraischen Untersuchungen bestimmend sein musste. — Ich kam nämlich bei meinen Studien über die algebraische Auflösung der Gleichungen sehr bald zur Einsicht, dass das Problem nach zwei Seiten hin einer allgemeineren Auffassung fähig ist, und zwar in folgender Weise: einerseits sind statt der Gleichungscoefficienten, d. h. also statt der symmetrischen Functionen der Wurzeln, allgemeinere rationale Functionen derselben, welche ich Affectfunctionen nenne, als gegeben vorauszusetzen: andererseits sind statt der gewöhnlichen Wurzelzeichen d. h., also statt derjenigen Functionszeichen, welche durch die reinen Gleichungen definirt werden, allgemeinere algebraische Functionen einzuführen, welche bei der Auflösung als Hilfsfunctionen dienen sollen. Die erstere Seite dieser erweiterten Auffassung war, wenn auch nicht in deutlich ausgesprochener Weise, schon in älteren algebraischen Arbeiten enthalten; in der zweiten Art der Verallgemeinerung ist das Problem aber erst in neuerer Zeit von Hrn. *Hermite* und gleichzeitig von mir selbst aufgenommen worden. Indessen war der Weg, welchen ich dabei einschlug, von demjenigen des Hrn. *Hermite* durchaus verschieden, und namentlich hat eine Forderung, welche ich an die Methode der Lösung stellte, mir den Abschluss der Frage für die Gleichungen fünften Grades erschwert, aber andererseits, weil sie in der Natur der Sache begründet ist, auch auf weitere interessante Untersuchungen geführt.

„Wenn eine Gleichung algebraisch auflösbar ist, so kann man der Wurzel allezeit eine solche Form geben, dass sich alle algebraischen Functionen, aus welchen sie zusammengesetzt ist, durch rationale Functionen der Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdrücken lassen" — so lautet ein Satz von *Abel*, der eine überaus wichtige Eigenschaft der gewöhnlichen Wurzel-ausdrücke enthält. Diese Eigenschaft ist es, welche auch den allgemeineren Ausdrücken für die Wurzeln der im gewöhnlichen Sinne nicht auflösbaren Gleichungen erhalten bleiben muss, und dieser Forderung gemäss sind die neuen algebraischen Functionszeichen zu wählen, mit Hilfe deren die Auflösung von Gleichungen im weiteren Sinne zulässig wird.

Die erwähnte Forderung, welche ich in einer ausführlicheren Mittheilung näher begründen werde, leitete mich bei der Beschäftigung mit den Gleichungen fünften Grades darauf hin, rationale Functionen der fünf Wurzeln zu suchen, deren verschiedene durch Permutation der Wurzeln entstehende distincte Werthe möglichst viele identische Relationen unter einander haben. Indem ich aus leicht ersichtlichen Gründen nur solche Permutationen zuliess, welche einen Werth der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung fünften Grades ungeändert lassen, fand ich in der That zwölfwerthige rationale Functionen der fünf Wurzeln, welche die Eigenschaft haben, dass je zwei von den zwölf Werthen derselben sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden und die sechs verschiedenen absoluten Werthe durch drei lineare Relationen mit einander verbunden sind. Das Quadrat einer solchen Function ist deshalb Wurzel einer Gleichung sechsten Grades, deren Coefficienten aus denen der Gleichung fünften Grades und aus der Quadratwurzel der Discriminante in rationaler Weise zusammengesetzt und nur von drei solchen rationalen Ausdrücken abhängig sind. Durch die Auffindung dieser Art von Functionen gelang es mir erstens fast ohne alle Rechnung die Modulargleichung fünfter Ordnung für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades zu benutzen, und ich habe deshalb zwei jener bemerkenswerthen Functionen Hrn. *Hermite* in einem Briefe mitgetheilt, welcher in den *comptes rendus* der Pariser Akademie vom Jahre 1858 abgedruckt ist; zweitens aber war dadurch die Möglichkeit gegeben, die allgemeinen Gleichungen fünften Grades in einer der oben erwähnten Forderung entsprechenden Weise aufzulösen, aber freilich nur mit Hilfe algebraischer Functionen von *zwei* Variabeln. Um diesen wichtigen Punkt näher zu erörtern, setze ich:

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma\Sigma \sin\frac{2n\pi}{5}\cdot x_m x_{m+n}^2 x_{m+2n}^2,$$

wo x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades: $X=0$ bedeuten, die Summationen sich auf die Werthe $m=0$, 1, 2, 3, 4 und $n=1$, 2, 3, 4 erstrecken, und die grösseren Indices auf die kleinsten Reste modulo: 5 zu reduciren sind. Alsdann genügt $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ einer

Gleichung zwölften Grades:-

$$\text{(I.)} \qquad (f^2+a)^6+4a(f^2+a)^5+10b(f^2+a)^3+4c(f^2+a)-4ac+5b^2 = 0,$$

in welcher a, b, c zweiwerthige ganze rationale Functionen der fünf Wurzeln x sind. Aber es giebt ausser der Function f noch unzählige rationale Functionen der Wurzeln x, welche dieselbe Eigenschaft haben, Gleichungen zwölften Grades von der angegebenen Form zu erfüllen *), und unter den rationalen *gebrochenen* Functionen dieser Art giebt es wiederum solche, für welche die den Grössen a, b, c entsprechenden Ausdrücke nur von zwei rationalen zweiwerthigen Functionen: $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ abhängen. Eine derartige speciellere Function f ist daher eine implicite gegebene algebraische Function von φ und ψ und möge als solche mit: $W(\varphi, \psi)$ bezeichnet werden. Da nun die Functionen f cyklisch sind, also mit Hilfe derselben die Gleichung: $X=0$ auflösbar wird, so lassen sich die Wurzeln der allgemeinen Gleichung fünften Grades mit Hilfe von Quadratwurzeln, fünften Wurzeln und mit Hilfe des Functionszeichens W explicite darstellen, und zwar in einer Weise, welche die oben angedeutete Forderung vollständig erfüllt. — Alles dies ergab sich mir im Wesentlichen bei Auffindung jener Functionen: f als unmittelbare Consequenz. Aber es galt nun zu ermitteln, ob hiermit die Frage abgeschlossen, d. h. ob es unmöglich sei, die algebraische Function zweier Variabeln: W auf solche von *einer* Variablen zurückzuführen. Dass, wenn man jene mehrerwähnte Forderung dabei fallen lässt, eine solche Reduction in der That möglich ist, war seit lange bekannt und ist von mir in jenem Briefe an Hrn. *Hermite* neuerdings dargelegt worden. Ich hatte auch bei weiterer Beschäftigung mit diesem Gegenstande noch speciellere darauf bezügliche Resultate erlangt. Aber erst vor Kurzem ist es mir gelungen, die Hauptfrage zu erledigen und festzustellen, dass die Reduction der algebraischen Function: W auf Functionen *einer* Variabeln und deshalb überhaupt die Auflösung der allgemeinen Gleichungen fünften Grades mit Hilfe von algebraischen Functionen *einer* Variabeln unmöglich ist, wenn dabei jener oben angeführte und für die Auflösung der Gleichungen durch Wurzelzeichen geltende Satz *Abel*s bestehen bleiben soll. Dieses Ergebniss bildet somit eine, wie mir scheint, bemerkens-

*) Man sehe hierüber auch die Ausführungen des Hrn. *Brioschi* in seiner Note: „*Sul metodo di Kronecker per la risoluzione delle equazioni di quinto grado*" (am 25. November 1858 im Lombardischen Institut gelesen), wo auch für eine besondere Function f der vollständige Ausdruck der Coefficienten a, b, c durch die Invarianten der Gleichung fünften Grades zuerst gegeben ist.

werthe Erweiterung des *Abel*schen Beweises für die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung von Gleichungen höherer Grade; und es enthält zugleich für den Fall des fünften Grades den Abschluss des Auflösungsproblems in seiner allgemeineren Fassung, einen Abschluss, vor dessen Erreichung ich meine Resultate nicht als fertig und für eine Veröffentlichung reif betrachten konnte.

Dass sich hier in der Algebra das Bedürfniss geltend macht, Functionen zweier Variabeln einzuführen, wiewohl dieselben in gewisser Weise auf Functionen *einer* Variabeln zurückführbar sind, kann durchaus nicht befremden, wenn man sich dessen erinnert, dass auch in der Analysis die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln durch *Jacobi* eingeführt und als durchaus naturgemäss beibehalten worden sind, obgleich dieselben, wie er selbst im 30sten Bande dieses Journals gezeigt hat, sich aus Functionen *einer* Variabeln algebraisch zusammensetzen lassen. Ohne indessen auf diese Analogie näher einzugehen, will ich mich zu den Gleichungen fünften Grades zurückwenden und an die oben angedeutete Form der Auflösung derselben noch einige Bemerkungen knüpfen.

Wenn man, wie im Vorhergehenden, mit $f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine der Functionen bezeichnet, die einer Gleichung von der Form (I.) genügen, und wenn

$$f_k = f(x_k, x_{k+3}, x_{k+4}, x_{k+1}, x_{k+2})$$

gesetzt wird, so sind: $\pm f$, $\pm f_0$, $\pm f_1$, $\pm f_2$, $\pm f_3$, $\pm f_4$ die zwölf verschiedenen Wurzeln jener Gleichung. Es giebt nun wiederum rationale Functionen der sechs verschiedenen Grössen f, welche Wurzeln von Gleichungen fünften Grades sind, deren Coefficienten sich aus a, b, c rational zusammensetzen. Wenn Φ eine dieser Functionen der Grössen f bedeutet, so ist demnach Φ zugleich eine rationale Function der Wurzeln x selbst, und zwar eine solche, die, als ganze rationale Function *einer* der Wurzeln x dargestellt, in ihren Coefficienten nur diejenigen der Gleichung: $X=0$ und die Quadratwurzel der Discriminante derselben rational enthält. Auch lässt sich ohne alle Rechnung zeigen, dass das Product: $(f-f_0)(f_1-f_4)(f_2-f_3)$, welches unter den mit: Φ bezeichneten Functionen inbegriffen ist, einer Gleichung fünften Grades genügt, in welcher sowohl der zweite als der vierte Coefficient gleich Null ist. Dieses Resultat, welches ein gewisses formales Interesse hat, lässt sich übrigens auch aus einer der schönen Notizen entnehmen, mit welchen Hr. *Brioschi* die Anzeige von der *Hermite*schen Auflösung der Gleichungen fünften Grades begleitet hat. Ferner hat neuerdings auch Hr. *Hermite* in einer brieflichen Mittheilung an Hrn. *Borchardt* *) eine specielle Function der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades angegeben, welche zu jenen Functionen: Φ gehört und sowohl durch ihre Einfachheit als namentlich durch ihre Beziehung zu den Invarianten der Gleichung ein besonderes Interesse darbietet. Das Wesen der Sache aber, welches schon aus den einfachsten Betrachtungen über die Functionen f hervorgeht, lässt sich folgendermaassen zusammenfassen:

> Unter den zehnwerthigen rationalen Functionen von fünf Grössen: x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, welche bei allen cyklischen Permutationen von je drei dieser Grössen nur fünf Werthe annehmen, giebt es solche, für welche die symmetrischen Functionen dieser fünf Werthe nur von zwei Functionen der Grössen x abhängen; es giebt ferner unter ihnen speciell solche, für welche die Summe der fünf Werthe selbst ebenso wie die Summe der dritten Potenzen derselben identisch verschwindet.

Durch die hiernach auftretenden *speciellen* Gleichungen fünften Grades, wie z. B. durch die Gleichungen von der Form: $z^5+pz^3+qz+r=0$, werden algebraische Functionen, die im Wesentlichen von zwei Variabeln abhängen, definirt; es werden also algebraische Functionen dadurch eingeführt, die ebenso wie die obige Function W für die Auflösung der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades benutzt werden könnten. Aber in Hinsicht auf gewisse allgemeinere Auflösungsprobleme verdient die Einführung der obigen Gleichung zwölften Grades als Hilfsgleichung den Vorzug, und eine genauere Discussion derselben lässt ihre vielen bemerkenswerthen Eigenschaften und damit zugleich die verschiedenen Formen erkennen, welche man bei Anwendung des Zeichens W den Wurzeln der Gleichungen fünften Grades geben kann.

*) Pag. 304.

Berlin, im Juni 1861.