

inhalt (Pythagoras, Ptolemäus, Inhalt, Isoperimetrie), Dreieck (merkwürdige Punkte, Malfatti) Viereck. Unter dem Titel „allgemeine ebene Konfigurationen“ (!) ist zusammengestellt: Ähnlichkeit, Teilung der Strecke, Schwerpunkt, Transversalen. Hieran schließen sich allgemeine<sup>1</sup> und besondere räumliche Beziehungen. Den Schluß bildet die ebene und sphärische Trigonometrie.

Die aufgezählten Schriften sind entweder bloß dem Titel nach (ohne Bewertung) genannt oder es sind ganz kurze (zum Teil nur schwer verständliche) Bemerkungen beigelegt. Manche Titel oder Namen sind durch fetten Druck hervorgehoben. Der verbindende Text ist ziemlich kurz gehalten. Nach den gemachten Stichproben dürften die Angaben nicht immer ganz verläßlich sein. Auf S. 64 stimmt die Bezeichnung der Fig. 1 nicht zum Text. Auf S. 89 ist dieselbe Abhandlung von A. Adler zweimal hintereinander angeführt, nur das erste Mal mit unrichtiger Jahreszahl, das andere Mal mit unrichtiger Bandzahl. Zu S. 87 wäre zu bemerken, daß die unendlich ferne Gerade eigentlich auch schon bei Desargues (I., S. 106) vorkommt. Auf S. 11 wäre die Schrift „A. Sturm, Das Delische Problem [Seitenstetten 1895, 1896, 1897]“ zu nennen gewesen, welche auch Cantor (3. Auflage, I., S. 231) anführt. Überhaupt ist die Delische Aufgabe (Verdoppelung des Würfels) kaum berührt, obwohl dieselbe für Mittelschulkreise gewiß beachtenswert ist und im XIX. Jahrhundert insofern eine gewisse Entwicklung erfuhr, als die Frage nach der Lösbarkeit mit gewissen Hilfsmitteln beantwortet wurde. Zur ersten Orientierung über den oben angeführten Inhalt kann das Buch manchem gute Dienste leisten.

*Th. Sch.*

**La géométrie analytique générale.** Von H. Laurent. (VII u. 151 S.) Paris, A. Hermann, 1906.

In weiteren Kreisen besteht das berechtigte Interesse, sich über wesentliche und prinzipielle Erweiterungen zu unterrichten, welche die geometrische Wissenschaft im Laufe der letzten Jahrzehnte erfahren hat. Diesem Interesse kommt der Verfasser entgegen und bietet ausgewählte Abschnitte aus der mehrdimensionalen und der nichteuklidischen Geometrie.

Er definiert zunächst den  $n$ -dimensionalen Raum als Zahlenraum durch sein Element, den Inbegriff von  $n$ -Größen (Koordinaten)  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Indem er die orthogonalen Substitutionen der Koordinaten als Bewegungen des Raumes deutet, wobei sich die Begriffe Distanz und Winkel als Invarianten dieser Substitutionsgruppe darbieten, gelangt er zur euklidischen Geometrie des  $n$ -dimensionalen Raumes. Von dieser Geometrie wird ein erheblicher Teil in durchsichtiger Weise entwickelt, und zwar findet man die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung der wichtigsten Überlegungen und Formeln, die ein Elementarkursus der analytischen Geometrie des Raumes zu enthalten pflegt. Man wird dem Verfasser Dank wissen, daß er die Gelegenheit wahrnimmt, einen klaren Abriß seiner Eliminationstheorie zu geben, die sich als Grundlage für eine Theorie der algebraischen Flächen gut einfügt.

Das letzte Kapitel sucht die nichteuklidische Geometrie dem Verständnis des Lesers näher zu rücken. Der Verfasser betrachtet zu diesem Zwecke die Geometrien auf den Flächen  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2$  und  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = R^2$  des euklidischen Raumes von vier Dimensionen. Nur gestreift.

wird die Geometrie, welche entsteht, wenn man die linearen Transformationen, welche eine im Endlichen verlaufende Fläche zweiter Ordnung in sich transformieren, als Bewegungen ansieht.

Man braucht nicht mit allen philosophischen Anschauungen, durch welche der Verfasser den Gegenstand belebt und seine Tragweite kennzeichnet, übereinzustimmen, um zu dem Schlusse zu kommen, daß seine Schrift zu einer Einführung insbesondere in den Ideenkreis der mehrdimensionalen Geometrie wohl geeignet ist.

G. K.

**Leçons sur les séries trigonométriques.** Par Henri Lebesgue (Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). 128 S. Preis Fcs. 3.50. Paris. Gauthier-Villars, 1906.

In einer Einleitung sind die zur Verwendung gelangenden Sätze, die nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden konnten, zusammengestellt und kurz begründet; hauptsächlich sind es Sätze über die Funktionen von beschränkter Schwankung (*à variation bornée*), über die verallgemeinerte zweite Derivierte, den Inhalt der Punktmengen und das Lebesgue'sche Integral. Das erste Kapitel ist größtenteils von historischem Inhalt: wie man auf das Problem kam, eine willkürliche Funktion durch eine trigonometrische Reihe darzustellen und wie man die Koeffizienten dieser Reihen zu bestimmen suchte. Methoden von Fourier und Euler werden dargelegt und kritisiert, die alle zu den bekannten Formeln für die Koeffizienten führen und alle hoffnungslos unexakt sind. Nun wird präzisiert, was im folgenden unter der Fourierschen Reihe einer Funktion  $f(x)$  von der Periode  $2\pi$  verstanden werden soll: es ist die trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten — die Fourier'schen Konstanten von  $f(x)$  — durch die bekannten Formeln aus  $f(x)$  zu bilden sind, das darin auftretende Integral im Sinne von Lebesgue verstanden. Nur Funktionen die in diesem Sinne integrierbar sind („fonctions sommables“) wird eine Fourier'sche Reihe zugeordnet. Kap. II beginnt mit dem Zusammenhang zwischen trigonometrischen Reihen und Potenzreihen mit komplexer Veränderlicher, der zur Summierung einfacher trigonometrischer Reihen dient. Dann wird gezeigt, daß eine stetige Funktion durch ihre Fourierschen Konstanten völlig bestimmt ist. Es folgen Kriterien für die Konvergenz trigonometrischer Reihen, die sich aus der Abel'schen Reihentransformation ergeben. Weiter zeigt eine einfache Abschätzung, daß, wenn  $f(x)$  von beschränkter Schwankung ist, die Absolutwerte der Fourier'schen Konstanten  $a_n, b_n$  die Schranke  $\frac{A}{n}$  nicht übersteigen, wo  $A$  eine von  $n$  unabhängige Konstante ist. Hieraus folgt sofort, daß wenn  $f(x)$  stetig ist und eine Ableitung von beschränkter Schwankung besitzt, die Fourier'sche Reihe von  $f(x)$  gleichmäßig konvergiert, und somit, da  $f(x)$  durch diese Reihe eindeutig bestimmt ist, auch wirklich  $f(x)$  darstellt. Dieses Ergebnis reicht aus, um nach Lerch und Volterra den Weierstraß'schen Satz von der Entwickelbarkeit der stetigen Funktionen in Reihen von Polynomen zu beweisen, sowie um das Dirichlet'sche Randwertproblem der Potentialtheorie für den Kreis bei stetigen Randwerten zu lösen. Kap. III bringt die Bedingungen dafür, daß die Fourier'sche Reihe von  $f(x)$  gegen  $f(x)$  konvergiert.