

Espressione di funzioni intere che in posti dati arbitrariamente prendono valori prestabiliti. (*)

(Nota di PAOLO CAZZANIGA, a Pavia.)

1.

Sapendosi costruire una funzione intera $w(z)$, la quale si annulli in posti dati arbitrariamente, ma tali però che in ogni porzione finita di piano z ne cada sempre un numero finito, è molto facile formare una funzione intera $f(z)$, che in un siffatto sistema di posti, che diremo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, prenda valori prestabiliti f_1, f_2, f_3, \dots . Che una funzione come la $f(z)$ esista, che anzi ve ne sia una infinità, ciò risulta direttamente dal teorema generale del sig. MITTAG-LEFFLER: *Sulla esistenza di infinite funzioni monodrome, finite e continue in tutto il piano, che ammettono soltanto infiniti di dati ordini in posti dati (**).* Ma noi qui vogliamo propriamente trovare l'effettiva espressione della $f(z)$, e costruirla con procedimento analogo a quello che si tiene per la formola di interpolazione di LAGRANGE, e che ci venne suggerito dalla analogia che le trascendenti intere presentano, come è noto, con le razionali intere. E perciò osserveremo che questa ricerca si può, e giova, enunciare proponendosi di costruire una funzione intera, la quale si annulli nei posti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\gamma-1}, \alpha_{\gamma+1}, \dots$, e nel posto α , diventi l'unità; perocchè si prevede subito che se $\partial_{\alpha, \alpha_\gamma}$ fosse una

(*) Per funzione intera intendo, seguendo i sigg. BETTI e WEIERSTRASS, una funzione monodroma finita e continua per tutti i valori della variabile indipendente, e quindi esprimibile per mezzo di una serie, costantemente convergente, di potenze intere e positive di essa variabile.

(**) Come fu dimostrato dal sig. DINI nella Memoria intitolata: *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa*, e stampata nei Collectanea Mathematica in memoriam Dom. CHELINI. Hoepli, 1881.

cosiffatta funzione di z , quella domandata non sarebbe altro che la somma:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} \cdot \partial_{z, \alpha_{\nu}}$$

La formola che insegna a costruire una funzione intera $w(z)$, che divenga nulla, di primo ordine nel caso nostro, nei posti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ [i quali dunque, se in numero infinito saranno tali che sia: $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\alpha_{\nu}| = \infty$ (*)], è la seguente:

$$w(z) = \varphi(z) \cdot e^{w_1(z)}, \quad (**)$$

in cui $w_1(z)$ significa una funzione intera affatto arbitraria; $\varphi(z)$ il prodotto di fattori della forma:

$$E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, p_{\nu}\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_{\nu}}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_{\nu}} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^k}, \quad (***)$$

e propriamente:

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, p_{\nu}\right);$$

e dove p_1, p_2, p_3, \dots sono numeri interi e positivi, scelti in modo, che la somma:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_{\nu}} \left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^{p_{\nu}} \right|$$

risulti convergente per qualunque valore finito di z (****).

Osserviamo intanto che esistono infinite funzioni $w(z)$ che si annullano nei posti considerati; che l'espressione: $\frac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, p_{\nu}\right)}$ rappresenta una funzione intera, la quale si annulla in tutti e soli posti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, eccetto in α_{ν} .

(*) Dinoto qui con WEIERSTRASS il valore assoluto, o modulo di α_{ν} , con $|\alpha_{\nu}|$.

(**) Cfr. BETTI: *Teorica delle funzioni ellittiche*. Annali del TORTOLINI, vol. III, 1860.

" WEIERSTRASS: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*. Abhandlungen der Berlin. Akad. der Wissenschaften, 1876, § 2.

" DINI: Memoria citata.

(***) In particolare intendasi: $E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, 0\right) = 1 - \frac{z}{\alpha_{\nu}}$.

(****) Ciò accade quando si ponga, per es, $p_1 = 0, p_2 = 1, p_3 = 2, \dots, p_{\nu} = \nu - 1, \dots$. In particolare poi, se le quantità α_{ν} siano tali, che si possa trovare un numero finito p , pel quale la somma: $\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_{\nu}} \right|^p$ riesca finita, ciò che in molti casi si verifica, si possono prendere: $p_1 = p_2 = \dots = p_{\nu} = \dots = p - 1$. Cfr. WEIERSTRASS, Memoria citata.

2.

Ciò premesso, supponiamo che le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ siano tutte differenti fra loro, e per il momento supponiamo altresì che fra esse non sia lo zero; e disponiamo inoltre gli indici ν in maniera che si abbia:

$$|\alpha_\nu| \leq |\alpha_{\nu+1}|, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Allora, se per mezzo della:

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)$$

formiamo l'espressione seguente:

$$\psi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(z) \frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)},$$

ove l'apice indica derivazione rispetto a z , possiamo facilmente riconoscere:

- 1.° Che questo secondo membro è una serie convergente incondizionatamente, e rappresenta una funzione intera $\psi(z)$ di z ;
- 2.° Che $\psi(z)$ è la derivata di $\varphi(z)$ rapporto a z ;
- 3.° Che $\psi(z)$ prende per $z = \alpha$, lo stesso valore che il termine:

$$\varphi(z) \frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}.$$

Ed inverso:

- 1.° Che $\psi(z)$ non divenga infinita nei posti α_ν , lo si scorge tosto, osservando che si ha:

$$\frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)} = -\frac{1}{\alpha_\nu} \cdot \frac{\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu}}{1 - \frac{z}{\alpha_\nu}},$$

e che il fattore $\frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha_\nu}}$ viene eliso dal fattore lineare $\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)$, che si trova in

$\varphi(z)$. Che poi la serie converga incondizionatamente anche per ogni altro valore finito di z , ciò risulta da queste considerazioni. In primo luogo, essendo

$\varphi(z)$ funzione intera di z , si potrà sempre fissare una quantità finita L , tale che, per tutti i valori di z il cui modulo non superi una grandezza prefissata l , si abbia: $|\varphi(z)| < L$. E in secondo luogo, la somma:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{-\alpha_{\nu}} \frac{\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^{p_{\nu}}}{1 - \frac{z}{\alpha_{\nu}}} \right|$$

col crescere di n ha per limite lo zero; perocchè, in causa della ammessa convergenza incondizionata della serie:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_{\nu}} \left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^{p_{\nu}} \right|, \text{ la somma } \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\alpha_{\nu}} \left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^{p_{\nu}} \right|$$

si riduce a zero coll'ingrandire di n . E noi possiamo far sempre in modo che, preso n abbastanza grande ma ancora finito, le quantità $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots$ superino in valor assoluto quel qualsiasi modulo z che si vuol considerare; di guisa che, detto H il maggiore dei valori assoluti di:

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha_{n+1}}}, \quad \frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha_{n+2}}}, \dots,$$

si possa scrivere:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\alpha_{\nu}} \frac{\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^{p_{\nu}}}{1 - \frac{z}{\alpha_{\nu}}} \right| < H \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| -\frac{1}{\alpha_{\nu}} \left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}\right)^{p_{\nu}} \right|.$$

2.° Scriviamo adesso la $\psi(z)$ come segue:

$$\psi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(z) \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, p_{\nu}\right),$$

e posto:

$$\chi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, p_{\nu}\right),$$

osserviamo, che, mentre il punto z si muove lungo una linea che conduce da $z=0$ al punto qualunque z , senza mai passare per veruno dei posti α_{ν} , la serie $\chi(z)$ è convergente incondizionatamente e in egual grado; che ciascuno termine di essa è atto alla integrazione; che la serie:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^z \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, p_{\nu}\right)$$

lungo la linea sovraccennata è pure convergente, epperò sopra la $\chi(z)$ si potrà applicare la regola di integrazione termine per termine, e scrivere:

$$\int_0^z \chi(z) dz = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^z \frac{d}{dz} \log E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right).$$

e che in fine è:

$$\int_0^z \chi(z) dz = \log \varphi(z) + \text{costante},$$

da cui:

$$\chi(z) = \frac{d}{dz} \log \varphi(z),$$

e quindi:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \varphi(z).$$

3.° Quanto poi a riconoscere che $\psi(z)$, cioè dunque $\varphi'(z)$, acquista per $z = \alpha_\nu$ lo stesso valore che il termine: $\varphi(z) \frac{E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}$, ciò è ovvio per sè.

Osserveremo però qui che l'espressione $\varphi'(\alpha_\nu)$ non è mai nulla, avendo già fin da principio supposto che le quantità $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ siano tutte differenti fra loro.

Concludendo, possiamo dire che la espressione:

$$\frac{\varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)}{\varphi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right)} \text{ e quindi anche la seguente: } \frac{\varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) e^{w_1(\alpha_\nu)}}$$

è convergente, e per $z = \alpha_\nu$ si riduce all'unità, mentre in tutti i posti rimanenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_{\nu+1}, \dots$ si annulla. E noi potremo prenderla come espressione di δ_{z, α_ν} .

Moltiplicandola allora per f_ν , indi sommando a tutti i valori di ν , otterremo per $f(z)$ la formola:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu \delta_{z, \alpha_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_\nu \cdot \varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) e^{w_1(\alpha_\nu)}},$$

od anche, posto:

$$w(z) = \varphi(z) e^{w_1(z)}$$

la formola:

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v \cdot w(z) E' \left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v \right)}{w'(\alpha_v) E \left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v \right)}, \quad (1)$$

la quale fra breve riconosceremo essere convergente per ogni valor finito di z .

3.

Vi sono dunque, come già dicevamo in principio, infinite funzioni che soddisfanno alle condizioni espresse nel problema da noi proposto: e ciò in causa e dell'anzidetta arbitrarietà della funzione intera $w_1(z)$, e della scelta altresì dei numeri p_v . Volendosi però quella $f(z)$, che nella sua forma si presenta come la più semplice, ed esente dall'arbitrarietà di $w_1(z)$, si potrà prendere $w_1(z) = 0$; e si avrà allora la formola seguente:

$$f(z) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v \cdot \varphi(z) E' \left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v \right)}{\varphi'(\alpha_v) E \left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v \right)}, \quad (2)$$

la quale è affatto analoga a quella di LAGRANGE per le razionali intere. Le funzioni $E \left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v \right)$ sono quelle che in (2) tengono il posto, che i fattori lineari in quella di LAGRANGE.

È precisamente: se il numero dei posti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sia finito, e si domandi la funzione razionale intera e di grado $m-1$ che in essi posti acquisti i valori f_1, f_2, \dots, f_m si osserverà che la somma: $\sum_{v=1}^{v=m} \left| \frac{1}{\alpha_v} \left(\frac{z}{\alpha_v} \right)^{p_v} \right|$ rimane sempre finita qualunque siano i numeri p_v , e quindi anche quando si prendano tutti eguali a zero; e in tal caso speciale si avrà:

$$E \left(\frac{z}{\alpha_v}, 0 \right) = 1 - \frac{z}{\alpha_v}, \quad \varphi(z) = \prod_{v=1}^{v=m} \left(1 - \frac{z}{\alpha_v} \right)$$

e la formola (2) si tradurrà nella:

$$f(z) = \sum_{v=1}^{v=m} \frac{f_v \prod_{v=1}^{v=m} \left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right) \frac{d}{dz} \left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right)}{\left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right) \left(\frac{d}{dz} \prod_{v=1}^{v=m} \left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right)\right)_{z=\alpha_v}}, \quad (3)$$

cioè in quella di LAGRANGE.

4.

Per costruire le funzioni elementari $E\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)$ da porre in (2) è necessario in prima determinare, come si disse, dei numeri p_v , pei quali la somma: $\sum_{v=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_v} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right)^{p_v} \right|$ rimanga finita per ogni valor finito di z .

Ma ora dobbiamo anche aver riguardo a che riesca convergente la serie in (2).

A tal uopo scriviamo questa formola come segue:

$$f(z) = \sum_{v=1}^{v=n} \frac{f_v \cdot \varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)}{\varphi'(\alpha_v) E\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)} + R_n, \text{ con } R_n = \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{f_v \cdot \varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)}{\varphi'(\alpha_v) E\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)};$$

ed osserviamo anzi tutto che, essendo $\frac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)}$ funzione intera di z , si potrà

sempre fissare una quantità finita L tale che, finchè $|z|$ rimane minore di una certa grandezza prefissata l si abbia:

$$\left| \frac{\varphi(z)}{E\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right)} \right| < L$$

In secondo luogo, siccome:

$$\begin{aligned} E'\left(\frac{z}{\alpha_v}, p_v\right) &= -\frac{1}{\alpha_v} e^{\sum_{k=1}^{k=p_v} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right)^k} + \left(1 - \frac{z}{\alpha_v}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p_v} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right)^k} \left\{ \frac{1}{\alpha_v} + \frac{1}{\alpha_v} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right) + \dots + \frac{1}{\alpha_v} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right)^{p_v-1} \right\} \\ &= -\frac{1}{\alpha_v} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right)^{p_v} \cdot e^{\sum_{k=1}^{k=p_v} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_v}\right)^k} \end{aligned}$$

e d'altra parte, siccome:

$$\phi'(\alpha_\nu) = -\frac{1}{\alpha_\nu} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}} \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}, p_\rho\right) \prod_{\sigma=1}^{\infty} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+\sigma}}, p_{\nu+\sigma}\right),$$

così sostituendo s'avrà:

$$|R_n| < L \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left| \frac{f_\nu \cdot \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}}{e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}} \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}, p_\rho\right) \prod_{\sigma=1}^{\infty} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+\sigma}}, p_{\nu+\sigma}\right)} \right|.$$

In terzo luogo osserviamo che, avuto riguardo alle condizioni: $\lim_{\nu=\infty} |\alpha_\nu| = \infty$, $|\alpha_{\nu-1}| \leq |\alpha_\nu|$ si potrà sempre prendere, qualunque siano gli esponenti p_ν ed il valor finito di z che si considera, un valore di n finito abbastanza grande, perchè per $\nu > n$ sia sempre $|\alpha_\nu| > |z|$, e quindi:

$$\left| \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k} \right|$$

riesca minore di una quantità finita M .

Oltre a ciò si ha:

$$\begin{aligned} & \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} \left(1 - \frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^k} = \\ & = \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} \left(1 - \frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right) e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right)^k} \prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} \left(-\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^{p_\rho} e^{\left[\sum_{k=1}^{p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_\rho}\right)^k - \sum_{k=1}^{p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}\right)^k\right]} \end{aligned}$$

E siccome il modulo del prodotto:

$$\prod_{\rho=1}^{\rho=\nu-1} E\left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_\nu}, p_\rho\right) \prod_{\sigma=1}^{\infty} E\left(\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+\sigma}}, p_{\nu+\sigma}\right)$$

non può essere inferiore ad una quantità $\frac{1}{N}$ finita e diversa dallo zero; e di

più potendosi scrivere:

$$\left| \prod_{\rho=1}^{\rho=v-1} \left(-\frac{\alpha_v}{\alpha_\rho} \right) \right| > \eta^{v-1},$$

dove η è il minimo dei moduli di: $\left(-\frac{\alpha_v}{\alpha_1} \right), \left(-\frac{\alpha_v}{\alpha_2} \right), \dots, \left(-\frac{\alpha_v}{\alpha_{v-1}} \right)$, che son tutti maggiori dell'unità, così avremo a fortiori:

$$|R_n| < LMN \sum_{v=n+1}^{\infty} \left| \frac{f_v \cdot \left(\frac{1}{\eta} \right)^{v-1}}{e^{\sum_{k=1}^{k=p_v} \frac{1}{k} \prod_{\rho=v-1}^{\rho=v-1} \left[\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_\rho} \right)^k - \sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_v} \right)^k \right]}} \right|.$$

Or finalmente disponiamo dei numeri p_1, p_2, \dots, p_{v-1} in modo che il modulo del prodotto Π , ora scritto, risulti maggiore, od almeno eguale all'unità (*);

(*) Ciò si può fare, perchè se si pone:

$$\frac{\alpha_v}{\alpha_\rho} = R_\rho (\cos \omega_\rho + i \sin \omega_\rho)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{\rho=1}^{\rho=v-1} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_v}{\alpha_\rho} \right)^k - \sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha_\rho}{\alpha_v} \right)^k} \right| &= \prod_{\rho=1}^{\rho=v-1} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} R_\rho^k \cos k \omega_\rho - \sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} R_\rho^{-k} \cos k \omega_\rho} \\ &= \prod_{\rho=1}^{\rho=v-1} e^{\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \cos k \omega_\rho (R_\rho^k - R_\rho^{-k})} \end{aligned}$$

ed è chiaro che quand'anche il coefficiente dell'ultimo termine della somma:

$$\sum_{k=1}^{k=p_\rho} \frac{1}{k} \cos k \omega_\rho (R_\rho^k - R_\rho^{-k})$$

fosse negativo, cioè quando fosse, ad es., $2m\pi + \frac{\pi}{2} < p_\rho \omega_\rho < 2m\pi + \frac{3\pi}{2}$ si potrà sempre aumentare p_ρ di una, due, ... r_ρ unità, finchè $(p_\rho + r_\rho) \omega_\rho$ si sia trasportato nel quarto o nel primo quadrante, ossia finchè $\cos(p_\rho + r_\rho) \omega_\rho$ non riesca più negativo. Lo stesso può dirsi pel caso di $\omega_\rho = 2\pi m + \frac{\pi}{2}$ oppure di $\omega_\rho = 2\pi m + \frac{3\pi}{2}$. S'intende poi che, preso $|x_v|$ sufficientemente

e dei numeri $p, p_{\nu+1}, \dots$ in modo che si abbia: $|f_{\nu}| \leq e^{\sum_{k=1}^{k=p_{\nu}} \frac{1}{k}}$ (*), e si concluderà allora che:

$$|R_n| < LMN \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\eta}\right)^{\nu-1}, \text{ ossia: } |R_n| < LMN \left(\frac{1}{\eta}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta}},$$

con $\eta > 1$; e da ciò poi, facendo crescere n , che R_n si riduce a zero.

In modo affatto analogo ragionerebbersi per la convergenza della serie in (1).

Se pertanto diciamo adesso q_1, q_2, q_3, \dots i numeri così scelti in luogo dei corrispondenti p_1, p_2, p_3, \dots , e costruiamo le funzioni $E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, q_{\nu}\right)$, noi potremo concludere che la serie seguente:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f_{\nu} \varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, q_{\nu}\right)}{\varphi'(\alpha_{\nu}) E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, q_{\nu}\right)}, \quad (4)$$

con

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_{\nu}}, q_{\nu}\right),$$

sarà costantemente convergente; e rappresenterà perciò una funzione intera, la quale nei posti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ prende i valori f_1, f_2, f_3, \dots come si cercava.

Avevamo più sopra escluso il caso che qualcuna delle quantità α_{ν} fosse zero; ma è chiaro che le cose fin qui dette sussistono ancora, quando si consideri il prodotto $z\varphi(z)$ in luogo di $\varphi(z)$. Ed è facile riconoscere che una funzione la quale nei posti $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ prende i valori f_0, f_1, f_2, \dots vien data senz'altro

grande noi possiamo rendere i termini: R_1, R_2, \dots epperò anche i termini:

$$\left(R_1^{p_1+\nu_1} - R_1^{-(p_1+\nu_1)}\right), \quad \left(R_2^{p_2+\nu_2} - R_2^{-(p_2+\nu_2)}\right), \dots$$

talmente grandi, che essi diano il proprio segno a ciascuna delle somme da prendersi rispetto a k , e quindi anche tali, che la somma totale da prendersi rispetto a ρ sia positiva.

(*) Ciò pure è sempre possibile; perocchè la somma $\sum_{k=1}^{k=p_{\nu}} \frac{1}{k}$ col crescere di p_{ν} può rendersi maggiore di qualsiasi quantità grande quanto si voglia, e quindi anche di $|\log f_{\nu}|$, che noi supponiamo finito, finchè lo sia ancora ν .

dalla formola:

$$f(z) = f_0 \cdot \varphi(z) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{f_v \cdot z^v \varphi(z) E' \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right)}{\alpha_v \varphi'(z_v) E \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right)}.$$

5.

Poniamo:

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \alpha_{\lambda} z^{\lambda}$$

$$E \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\lambda}^{(v)} z^{\lambda}, \quad E' \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (\lambda+1) b_{\lambda+1}^{(v)} z^{\lambda}$$

ed infine:

$$\frac{\varphi(z)}{E \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right)} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} g_{\lambda}^{(v)} z^{\lambda}, \quad \varphi(z) \frac{E' \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right)}{E \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} c_{\lambda}^{(v)} z^{\lambda}$$

ed avremo, grazie alle relazioni:

$$\begin{array}{l} \dots \dots \dots c_0^{(v)} = b_1^{(v)} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 = b_1^{(v)} + g_1^{(v)} \\ a_2 = b_2^{(v)} + g_1^{(v)} b_1^{(v)} + g_2^{(v)} \\ a_3 = b_3^{(v)} + g_1^{(v)} b_2^{(v)} + g_2^{(v)} b_1^{(v)} + g_3^{(v)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1^{(v)} = 2b_2^{(v)} + b_1^{(v)} g_1^{(v)} \\ c_2^{(v)} = 3b_3^{(v)} + 2b_2^{(v)} g_1^{(v)} + b_1^{(v)} g_2^{(v)} \\ c_3^{(v)} = 4b_4^{(v)} + 3b_3^{(v)} g_1^{(v)} + 2b_2^{(v)} g_2^{(v)} + b_1^{(v)} g_3^{(v)} \end{array} \right. \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

la $f(z)$ di (4) espressa in serie di potenze come segue:

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu} z^{\mu}, \quad \text{con } A_k = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{c_k^{(v)} f_v}{\varphi'(z_v)}. \quad (5)$$

Come si vede, per lo sviluppo (5) non occorrono che gli sviluppi di $E \left(\frac{z}{z_v}, q_v \right)$, e di $\varphi(z)$ in serie di potenze; perocchè noti i coefficienti a_k e $b_k^{(v)}$ si potranno

facilmente calcolare i coefficienti $c_k^{(\nu)}$ per mezzo delle due serie di relazioni scritte più sopra.

Per esempio, per $c_0^{(\nu)}$, $c_1^{(\nu)}$, $c_2^{(\nu)}$ avrebbesi:

$$c_0^{(\nu)} = b_1^{(\nu)}$$

$$c_1^{(\nu)} = 2b_2^{(\nu)} + b(a_1 - b_1^{(\nu)})$$

$$c_2^{(\nu)} = 3b_3^{(\nu)} + 2b_2^{(\nu)}(a_1 - b_1^{(\nu)}) + b_1^{(\nu)}[(a_2 - b_2^{(\nu)}) - b_1^{(\nu)}(a_1 - b_1^{(\nu)})]$$

.....