

3. Böcke, welche in der 2. Abschlußperiode stehen, also zum zweiten Male einen 16. Mai erlebt haben; wenn sie spät (Juni) gesetzt sind (z. B. 23. VI. 05) und früh (Mai) geschossen werden (z. B. 30. V. 07) im Lebensalter von $23\frac{1}{2}$ Monat — oder älter sind, bis $35\frac{1}{2}$ Monaten, tragen ihr drittes Gehörn: Sechserstangen oder noch ihr Erstlingsgehörn. Dieses hatte bei einem untersuchten Bock eine Stangenlänge von rechts 67, links 61 mm. Warum es ein Erstlingsgehörn ist (Spieße 1. Ordnung), soll später dargelegt werden.
4. Böcke, die in der dritten Abschlußperiode stehen, d. h. zum dritten Male einen 16. Mai erlebt haben, sind solche, die ihr viertes Gehörn tragen. Es sind Sechsergehörne oder durch Zurücksetzen Gabeln oder Spieße 2. Ordnung (d. h. kein Erstlingsgehörn).

Kurz zusammengefaßt heißt dies:

- Der Bock trägt unter Umständen bis in sein 3. Lebensjahr Spieße 1. Ordnung, er trägt unter Umständen bereits vor vollendetem 1. Lebensjahr ein Sechsergehörn.

Wie kann man Erstlingsgehörne von solchen, die nach einem Abwurf entstanden sind, unterscheiden?

Das Gehörn erhält die Stoffe zu seinem Aufbau durch die Blutbahnen im Innern des Rosenstocks und durch die unter dem Bast liegenden Gefäße. Diese markieren sich am Rosenstock und am unteren Ende der Stangen durch Längsfurchen. Das Erstlingsgehörn hat noch nicht die für jedes folgende Gehörn charakteristischen Knochenwucherungen (Rosen), die als Ringwulst am unteren Ende der Stange in die Augen fallen. Ein rosenloses Gehörn, bei dem die Knochenfurchen, in denen die Blutgefäße verlaufen, ohne Unterbrechung vom Rosenstock in die Stange übergehen, ist ein Erstlingsgehörn.

Welche Regeln für den Jagdbetrieb kann der Jäger aus diesen Tatsachen folgern?

Er wird sich klarzumachen versuchen, wie ein Bock mit schwachem Gehörn sich wahrscheinlich weiter entwickeln wird, d. h. er wird gut veranlagte Spießer 1. Ordnung unterscheiden müssen von Kümmeren, die ihrem Alter entsprechend ein Gehörn höherer Stufe tragen müßten. Letztere wird er abschießen, möglichst bevor sie ihre schlechten Eigenschaften vererben. Gut veranlagte Spießer 1. Ordnung wird er nicht abschießen. Mit dem Abschluß stärkerer Sechserböcke wird er, wenn er weidgerechte Jagdnachbarn hat, auch nicht voreilig sein. Er wird für ein zweckmäßiges Zahlenverhältnis zwischen Böcken und Ricken sorgen und für einen den Äsungsverhältnissen entsprechenden Wildstand überhaupt. Diejenigen Kitze werden starke Böcke, die als einziges Junges, dessen Vater ein braver Bock ist, von einer kräftigen Ricke zeitig gesetzt werden, vorzügliche

Äsungsverhältnisse finden und gut durch den Winter kommen.

Man hat auch Rot- und Dammwild mit Wildmarken gezeichnet, aber nur in so wenigen Fällen, daß Ergebnisse noch nicht vorliegen.

Über eine wahrscheinlichkeitstheoretische Rechtfertigung des Erwartungsgefühles (Bayessche Regel).

Von Paul Hertz, Göttingen.

§ 1.

Der Wahrscheinlichkeitsrechnung kommt deshalb vor allem ein so hervorragendes Interesse zu, weil wir in den unser Handeln bestimmenden Erwägungen beständig, mehr oder weniger bewußt, von ihren Grundsätzen Gebrauch machen. Eine ihrer wichtigsten Anwendungen ist die folgende: Wer bei einer bestimmten Gelegenheit eine vorhandene Gefahr fürchtet (Eisenbahnunglück, Bankrott eines Unternehmens, Infektion durch Zusammensein mit einem Kranken), läßt sich wohl durch die Bemerkung beruhigen, daß auf die fragliche Weise bisher ein Unfall noch nie eingetreten sei; also sei auch weiterhin nichts zu besorgen. Die Berechtigung dieses Schlusses soll hier untersucht werden.

Zunächst scheint es sehr kühn, das Nichteintreten eines Ereignisses zum Ausgangspunkt für weiteres Schließen zu machen. Doch läßt sich auch wiederum die Stichhaltigkeit eines solchen Verfahrens nicht verkennen. Auch ohne besondere astronomische Kenntnisse würden wir es fast für ausgeschlossen halten, daß in den nächsten 5 Minuten eine Katastrophe durch Zusammenstoß mit einem anderen Stern eintritt. Daß aber eine solche innerhalb eines Zeitraumes von a^a Jahren ($a = 1\,000\,000\,1\,000\,000\,1\,000\,000$) möglich sei, wer wollte das in Abrede stellen?

Sind aber überhaupt solche Schlüsse gestattet, so müssen sie auch in quantitativer Form vollzogen werden können. Wie das möglich ist, soll im folgenden gezeigt werden.

§ 2.

Wir bedürfen, um in der angegebenen Weise schließen zu können, eines wichtigen Lehrsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der sogenannten Bayesschen Regel, die wir zunächst darlegen müssen:

Es möge ein bestimmtes Ereignis \mathcal{E} in verschiedenen Fällen A_1, A_2, A_3, \dots usw. eintreten können. Wenn A_1 vorliegt, so sei \mathcal{E} mit der Wahrscheinlichkeit w_1 zu erwarten, während A_2, A_3, \dots usw. \mathcal{E} mit der Wahrscheinlichkeit w_2, w_3, \dots usw. herbeiführen. Nun sei aber bekannt, daß \mathcal{E} wirklich eingetreten ist. Dann verhalten sich nach der Bayesschen Regel die Wahrscheinlichkeiten für das Vorliegen von A_1 bzw. A_2 bzw. A_3 usw. wie $w_1 : w_2 : w_3$, oder die Wahrscheinlichkeit von A_1 beträgt:

$$P_1 = \frac{w_1}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots} \quad (1)$$

Diese Regel nun läßt sich auf das uns beschäftigende Problem anwenden.

Um das einzusehen, betrachten wir den Fall, daß gewisse Ereignisse E von irgendeiner scharf charakterisierten Art von Zeit zu Zeit immer wieder eintreten werden, indem sie sich mit gleichmäßiger

Häufigkeit über die unendliche Zeitausdehnung verteilen. Trifft das zu, so erhält man, wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt wird, als Wahrscheinlichkeit dafür, daß man von einem beliebigen Zeitpunkt an auf ein E eine zwischen t und $t + dt$ liegende Zeit warten muß, den Wert $b(t)dt$, wo

$$b(t) = p \cdot e^{-pt} \quad (2)$$

ist. Hier ist p eine Konstante — wir wollen sie Frequenzzahl nennen —, die eben für die Gattung unserer Ereignisse E charakteristisch ist.

Man sieht sofort, daß die verschiedenen für die Werte von p bestehenden Möglichkeiten gerade den bei Anwendung der Bayesschen Regel zu unterscheidenden Fällen entsprechen. In der Tat, aus jeder Annahme über p geht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit — nämlich e^{-pT} — dafür hervor, daß in der Zeit 0 bis T das Ereignis E nicht eingetreten ist. Nun sei E tatsächlich nicht eingetreten¹⁾. Die Bayessche Regel gestattet dann also umgekehrt die Wahrscheinlichkeit jeder Frequenzzahl zu ermitteln. Hieraus kann dann weiter die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß die Zeit, die wir noch weiter warten müssen, in gegebenen Grenzen liegt. Der Zusammenhang wird klar sein: Ist E lange Zeit hindurch nicht eingetreten, kann man auf eine kleine Frequenzzahl schließen und von da aus weiter auf eine fernere große Wartezeit. Folgendes ist das Ergebnis der Rechnung:

Ist uns bekannt, daß E in der Zeit 0 bis T nicht eingetreten ist, so besteht die Wahrscheinlichkeit $\psi(t)dt$ dafür, daß die weiterhin erforderliche Wartezeit zwischen t und $t + dt$ liegt und die Wahrscheinlichkeit $\Psi(t)$, daß sie größer als t ist, wo

$$\Psi(t) = \frac{T}{(T+t)^2} \quad (3)$$

$$\psi(t) = \frac{T}{(T+t)^3} \quad (4)$$

Endlich folgt für die *wahrscheinliche Wartezeit* Θ , d. h. eine Zeit, die eben so oft überschritten als unterschritten wird:

$$\Theta = T. \quad (5)$$

Wenn bekannt ist, daß E die Zeit T hindurch nicht eingetreten ist, darf man sein Eintreten mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ in der folgenden Zeitstrecke T erwarten.

§ 3.

Ähnliche Betrachtungen gelten, wenn E nur zu diskreten Zeitpunkten möglich ist. Sei jetzt p^2 die Wahrscheinlichkeit, daß E bei einer dieser Gelegenheiten auftritt, so ist mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ anzunehmen, daß es die ersten \mathfrak{X} -Male seit Beginn der Beobachtung nicht vorkommen wird. Aus der Bayesschen Regel (1) folgt jetzt: Wenn E die ersten \mathfrak{X} Male nicht eingetreten ist, so besteht eine Wahrscheinlichkeit:

$$\psi(t) = \frac{\mathfrak{X}+1}{\mathfrak{X}+t+1} \quad (6^3)$$

¹⁾ Das im vorigen Paragraphen mit \mathfrak{E} bezeichnete Ereignis besteht also darin, daß E in der Zeit von 0 bis T nicht eintritt.

²⁾ p ist also nur Werte zwischen 0 und 1. fähig, während p alle Werte zwischen 0 und ∞ annehmen kann.

³⁾ P. J. Laplace, Oeuvres VIII, S. 31 unten (setze $q = \mathfrak{X}$, $n = t$, $p = m = 0$).

M. J. Condorcet, Réfl. sur la déterm. de la probabilité des événements futures. Par. hist. 1783, p. 539.

dafür, daß man auf sein Eintreten mehr als weitere t Zeitpunkte warten muß. Als wahrscheinlichen Wert Θ^* für die Zahl der noch abzuwartenden Gelegenheiten findet man aber:

$$\Theta^* = \mathfrak{X} + 1 \quad (7)$$

Durch Grenzübergang kommt man von (6) und (7) zu (4) und (5) zurück.

§ 4.

Gegen diese Berechnung bestehen nun verschiedene Bedenken. Zunächst gilt die Formel (1) nur, wenn die möglichen Ursachen von vornherein dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Ist das nicht der Fall, und sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die sogenannten apriorischen Wahrscheinlichkeiten für A_1, A_2, A_3 , d. h. diejenigen Wahrscheinlichkeiten, mit denen man A_1, A_2, A_3 vor der Beobachtung zu erwarten hatte, so verhalten sich, falls nun \mathfrak{E} wirklich beobachtet wurde, die aposteriorischen Wahrscheinlichkeiten für A_1, A_2, A_3 wie $\omega_1 \cdot \omega_1 : \omega_2 \cdot \omega_2 : \omega_3 \cdot \omega_3$; speziell ist die Wahrscheinlichkeit für A_1 :

$$P_1' = \frac{\omega_1 \cdot \omega_1}{\omega_1 \cdot \omega_1 + \omega_2 \cdot \omega_2 + \omega_3 \cdot \omega_3 + \dots}$$

Über die apriorischen Wahrscheinlichkeiten läßt sich aber naturgemäß allgemein nichts aussagen. Man könnte etwa die apriorische Wahrscheinlichkeit von p als konstant ansehen⁴⁾. Eine solche Annahme erscheint aber durchaus willkürlich⁵⁾. Am einleuchtendsten wäre wohl noch die Annahme, daß die apriorischen Wahrscheinlichkeiten für die Frequenzzahlen p an einer Stelle p_0 ein Maximum besitzen und von da nach beiden Seiten nach dem Gaußischen Fehlergesetze abfallen⁶⁾.

So würde man vielleicht für die Frequenzzahl von Erkrankungen, bei Beschränkung auf Einwohner einer

Essai sur l'applic. de l'analyse à la probabilité des décisions.

⁴⁾ Dann würde aber, da von vornherein für p alle Werte zwischen 0 und ∞ möglich sind, jedem endlichen Intervall die apriorische Wahrscheinlichkeit 0 zukommen. Entweder müßte man also das Bayessche Theorem anders formulieren, oder die Konstanz der Wahrscheinlichkeit von p nur in einem wenn auch noch so großen Intervall voraussetzen, außerhalb dessen die Wahrscheinlichkeit rasch gegen Null sänke. Diese Bedenken bestehen nicht gegen die Betrachtungen des vorigen Paragraphen.

⁵⁾ Die gleichen Bedenken würde auch die von Helmholtz (Astr. Nachr. 88, 1876) gegebene Ableitung des mittleren Fehlers aus dem scheinbaren Fehler treffen.

In unserem Falle hätte man z. B. auch die mittleren Erwartungszeiten $\tau = \frac{1}{p}$ als a priori gleich wahrscheinlich ansehen können. Allerdings erhielte man dadurch einen unendlich großen Nenner des Bayesschen Quotienten. Man müßte also dann die Konstanz von τ auf ein endliches Intervall beschränken.

⁶⁾ Die durch p dividierte apriorische Wahrscheinlichkeit dafür, daß p zwischen p und $p + dp$ liegt, wäre also:

$$\omega(p) = \frac{e^{-h^2(p-p_0)^2}}{\int_0^\infty e^{-h^2(p-p_0)^2} dp} = \frac{h \cdot e^{-h^2(p-p_0)^2}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(h p_0)}$$

$$\text{wo} \quad \Phi(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du$$

ist.

Stadt, Zahlen p erhalten, deren Häufigkeiten ein durch zwei Zahlen p_0 und $h^7)$ charakterisiertes Fehlergesetz befolgen. Aber die für alle deutschen Städte festzustellenden Werte von p_0 und h würden vermutlich ihrerseits wieder um Zentralwerte schwanken usw. ad infinitum. Daraus ergibt sich:

Eine quantitative Behandlung des von uns aufgeworfenen Problems ist nur möglich in bezug auf Individuen oder Mechanismen innerhalb einer scharf begrenzten Klasse.

Ferner scheint jetzt die einfache Formel (5) ungültig zu werden, weil sie die Konstanten p_0 und h nicht enthält. Es wird ihr aber doch ein allgemeiner Erkenntniswert zugeschrieben werden können, wenn es gelingt, sie für einen Grenzfall aus unseren jetzigen Ansätzen abzuleiten. Das ist in der Tat möglich. Man kann zeigen, daß Θ für sehr große T wirklich von p_0 und h unabhängig wird.

§ 5.

Zu diesem Zwecke braucht man nur die Bayessche Regel (8) auf sämtliche unendlich viele für p möglichen Fälle anzuwenden. Man findet dann: Ist E bis zur Zeit T nicht eingetreten, so besteht eine Wahrscheinlichkeit dafür, daß man noch länger als die Zeit t darauf zu warten habe, im Betrage von

$$\psi(t) = \frac{T}{T+t} \cdot \alpha, \quad \dots \dots \dots (9)$$

wo α mit wachsendem T gegen 1 konvergiert⁸⁾.

Auch diese Betrachtungen sind nicht frei von Willkür. Wir haben von der Annahme Gebrauch gemacht, daß die apriorische Wahrscheinlichkeit dem Gaußschen Fehlergesetz folgt⁹⁾.

⁷⁾ Vergl. die vorige Anmerkung.

⁸⁾ Es ist:

$$\left(1 - \frac{2h^2 p_0}{T}\right) \left[1 - \frac{T^2}{2h^2 \left(1 - \frac{2h^2 p_0}{T}\right)^2}\right] \\ \leq \alpha \leq \left(1 - \frac{2h^2 p_0}{T}\right)^{-1} \left[1 - \frac{T^2}{2h^2 \left(1 - \frac{2h^2 p_0}{T}\right)^3}\right]^{-1};$$

also ist z. B. α zwischen 0,81 und 1,24, wenn

$$T > 20 h^2 p_0$$

und

$$T > 5 h$$

ist. Um diese Ungleichungen anschaulich zu interpretieren, mag man die mittlere Wartezeit $\tau = \frac{1}{p}$ einführen. Deren Mittelwert ist zwar unendlich. Falls aber $h p_0$ sehr groß ist, kann man vielleicht annehmen, daß ω für beträchtlich von p_0 verschiedene Werte stärker abfällt als dem Gaußschen Fehlergesetz entspricht. Ist dann τ_0 der Mittelwert und τ_m der mittlere Fehler von τ , so lauten die obigen Ungleichungen angenähert:

$$T > 10 \frac{\tau^3}{\tau_m^2}$$

$$T > \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{\tau_0^2}{\tau_m},$$

eine Umformung, die nur erlaubt ist, wenn $\frac{\tau_1}{\tau_m}$ groß gegen 1 ist.

⁹⁾ Übrigens läßt sich ein viel allgemeinerer Satz beweisen. Herr R. v. Mises hat mir einen Beweis für folgenden Satz mitgeteilt: Wenn die durch $d p$ dividierte apriorische Wahrscheinlichkeit $\omega^*(p)$ dafür, daß p zwischen p und $p+d p$ liegt, eine

§ 6.

Es wäre wünschenswert, die Gültigkeit der erhaltenen Formeln, etwa von (5), empirisch zu bestätigen. Es müßte in bezug auf einen gegebenen Zustand E zu jedem T eine Sammlung von Individuen gefunden werden, an denen E zur Zeit T noch nicht aufgetreten ist. Diese den verschiedenen Werten T entsprechenden Sammlungen müßten aber alle demselben übergeordneten Bereich angehören und aus ihm in willkürlicher Weise ausgesondert werden.

Wir wollen als solche Bereiche Mengen von Autoren heranziehen, und als Ereignis E gewisse sprachliche Eigentümlichkeiten. Indem wir als Zeitmaß die Zahl der gebrauchten Wörter verwenden, gelangen wir allerdings nicht zu einer Prüfung des Ergebnisses von § 2 — woran uns am meisten gelegen wäre —, sondern von § 3. Aber beide hängen so eng zusammen, daß eine Bestätigung oder Widerlegung des einen auch das andere betreffen würde.

Ich wählte 300 Schriftsteller, die in Westermanns Monatsheften Arbeiten veröffentlicht haben. Beginnend mit dem 41. Band berücksichtigte ich die 300 ersten Verfasser — jeden nur einmal — in der Reihenfolge des alphabetischen Autorenverzeichnisses. Nun ermittelte ich die Stelle — die t_1 -te —, an der zuerst nach der Kapitelüberschrift ein Fremdwort vorkommt. Ebenso sei t_2 die erste Stelle eines Fremdwortes auf der auf das erste Fremdwort folgenden Seite. So gelangte ich zu 300 zugeordneten Zahlenpaaren t_1 und t_2 ¹⁰⁾.

Hieraus kann nun Θ^* empirisch bestimmt werden. Die nachstehende Tabelle enthält in der zweiten Spalte

\mathfrak{Z}	Zahl der t_1	Θ^* ber.	Θ^* beob.	100 ψ (50) ber.	100 ψ (50) beob.
0	300	1	17	2,0	18,7
10	184	11	19	18,0	22,3
20	135	21	19	29,6	24,4
30	92	31	18 1/2	38,3	28,3
40	63	41	26 1/2	45,1	36,8
50	49	51	29	50,5	34,7
60	44	61	29	55,0	38,6
70	37	71	30	58,7	40,6
80	32	81	41 1/2	61,8	46,9
90	24	91	35 1/4	64,5	45,8
100	16	101	69 1/2	66,9	56,3

zu den verschiedenen Werten von \mathfrak{Z} (erste Spalte) die Anzahl der ermittelten Zahlen $t_1 > \mathfrak{Z}$. Der zugehörige

beschränkte Funktion ist, so gilt für unendlich wachsendes \mathfrak{Z} :

$$\lim \Psi = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z} + \tau}$$

$$\mathfrak{Z} = \infty$$

Ein entsprechend allgemeiner Satz gilt auch für das kontinuierliche Problem. (Es muß aber in beiden Fällen $\omega(0) \neq 0$ sein.)

¹⁰⁾ Zu bemerken ist noch, daß lange eingebürgerte Wörter fremder Abkunft, die nicht mehr als fremd empfunden werden, auch bei der Zählung nicht als solche betrachtet wurden. Hier bestand freilich die Gefahr einer Beeinflussung durch theoretische Erwartungen. Um sie auszuschließen, habe ich in allen nur irgend zweifelhaften Fällen die Entscheidung eines Philologen, des Herrn Dr. J. Lochner, angerufen. Ich danke ihm auch an dieser Stelle herzlich für seine Mühe.

theoretische Wert Θ^* ist nach (7) um 1 größer als \mathfrak{Z} und in der dritten Spalte verzeichnet. Die vierte Spalte enthält die beobachteten Werte Θ^* , die folgendermaßen ermittelt wurden: Es wurden diejenigen Zahlen für t_2 , denen Zahlen $t_1 > \mathfrak{Z}$ entsprachen, der Größe nach geordnet. War ihre Anzahl ungerade, so galt die mittlere als beobachtetes Θ^* . War die Anzahl gerade, so wurden die zwei mittleren Zahlen aufgesucht und aus ihnen das arithmetische Mittel genommen. Die fünfte Spalte enthält die nach (6) berechnete Wahrscheinlichkeit in Prozenten dafür, daß, wenn ein Ereignis bei \mathfrak{Z} Gelegenheiten nicht eingetreten ist, man noch mehr als 50 weitere Gelegenheiten darauf warten muß, während in der letzten Spalte dieser Wert empirisch bestimmt ist. Sie enthält nämlich die Angabe des Prozentsatzes der Zahlen $t_2 > 50$ unter allen denjenigen, denen Zahlen $t_1 > \mathfrak{Z}$ entsprechen.

Hier ist nun in der Tat ein leichtes Anwachsen der Zahlen $\Theta^*_{\text{beob.}}$ zu bemerken, aber dieses Anwachsen bleibt weit hinter dem gemäß Formel (7) zu erwartenden zurück. Insbesondere ist zunächst $\Theta^*_{\text{beob.}}$ nahezu konstant. Die mangelhafte Übereinstimmung wird nicht wundernehmen: Für kleinere \mathfrak{Z} nämlich ist die apriorische Wahrscheinlichkeit der Wahrscheinlichkeit p noch von entscheidendem Einfluß. Aber (7) wurde gerade unter der Voraussetzung abgeleitet, alle möglichen Werte für p von 0 bis 1 seien a priori gleich wahrscheinlich. Der Fehler, den man durch diese Annahme begeht, wird für kleinere \mathfrak{Z} am größten und verschwindet mit wachsendem \mathfrak{Z} ¹¹⁾.

Für größere \mathfrak{Z} muß der Einfluß der apriorischen Wahrscheinlichkeit zurücktreten, und wir dürften eine bessere Übereinstimmung mit (7) erwarten. Aber die zweite Spalte zeigt, daß für große \mathfrak{Z} unsere Statistik viel zu dürftig ist. So dürfen wir uns denn nicht wundern, wenn auch in diesem Gebiete die Formel (7) versagt¹²⁾.

Ebensowenig kann, wie die letzte Spalte zeigt, die Statistik genügen, empirisch diejenigen Werte von Ψ zu erhalten, die sich theoretisch für den Fall gleicher apriorischer Wahrscheinlichkeit ergaben. Immerhin zeigt der Verlauf der beiden letzten Spalten einen ganz ähnlichen Verlauf. Darin, daß die berechneten Ψ -Werte dauernd unter den beobachteten liegen und nicht unregelmäßig um diese schwanken, erkennen wir einen systematischen Einfluß. Er kann nur in der Apriori-Wahrscheinlichkeit liegen, deren Einfluß noch nicht zurückgetreten ist.

So sind wir noch nicht zu einer Bestätigung der Gleichung (6) gelangt. Die mitgeteilten Betrachtungen zeigen nur einen Weg, auf dem wir zu einer solchen

¹¹⁾ Der Fehler wird besonders groß für $\mathfrak{Z} = 0$, wo wir über gar keine aposteriorische Erfahrung verfügen. Vgl. auch E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bd. I, S. 208.

¹²⁾ Man kann sagen: Für kleine \mathfrak{Z} gibt (6) gar nicht richtig die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ereignis zu erwarten ist. Für große \mathfrak{Z} wird die Wahrscheinlichkeit zwar durch diese Formel richtig bestimmt, aber wir haben nicht so viel Fälle, daß sich in dem wirklichen Geschehen die Wahrscheinlichkeit widerspiegeln könnte. Übrigens dürfte $\mathfrak{Z} = 100$ noch als klein zu gelten haben, da sonst die beobachteten Werte nach beiden Seiten von den berechneten abweichen müßten. Wie unzuverlässig die letzten Zahlen sind, geht daraus hervor, daß 35½ bzw. 69½ als Mittelwert von 29 und 42 bzw. 55 und 84 entstanden sind. Alles das spricht nicht gegen die vorgeschlagene Methode, sondern nur gegen den Umfang, auf den wir uns hier beschränkt haben.

gelangen würden. Ferner zeigt die Tabelle deutlich, daß überhaupt eine funktionale Abhängigkeit der Größe Θ^* von \mathfrak{Z} besteht, wenn diese auch nicht ohne besondere Annahmen anzugeben ist.

Entsprechendes muß auch für die in § 2 angestellten Überlegungen gelten. Für große T werden wir erwarten, die Beziehung $\Theta = T$ bestätigt zu finden. Die Abschätzung des täglichen Lebens, von der wir ausgingen, trifft also im wesentlichen das Richtige.

Besprechungen.

Wasman, D., Die Gastpflege der Ameisen, ihre biologischen und philosophischen Probleme. 234. Beitrag zur Kenntnis der Myrmecophilen und Termitophilen. Abh. z. theoret. Biologie, herausgegeben von Dr. Julius Schaezel. Heft 4. Berlin, Gebt Bornträger, 1920. XVII, 176 S., 2 Taf. und 1 Abbild. im Text. Preis M. 20,—.

In dieser Schrift sind die Ergebnisse 35-jähriger Beobachtungen, Versuche und Studien des Verfassers aus dem interessantesten Teil seines Spezialgebietes kurz zusammengefaßt und nach einheitlichen Gesichtspunkten durchgearbeitet, um das Wesen des echten Gastverhältnisses (Symphilie) und die hauptsächlichsten biologischen und philosophischen Probleme, die es enthält, aufzuklären. Die Pflege, welche die Ameisen bzw. die Termiten einer bestimmten biologischen Klasse unter ihren Nestgenossen den sogen. echten Gästen (Symphilien) zuwenden, ist nicht nur vom biologischen, sondern auch vom deszendenztheoretischen, psychologischen und naturphilosophischen Standpunkt aus eine der merkwürdigsten Erscheinungen unter allen tierischen Biocönos. Insbesondere wird die höchstentwickelte und besterforschte Form der Symphilie, die Pflege der *Lomechusini* (Col. *Staphylinidae*) durch die psychisch hochstehende Ameisengattung *Formica* behandelt. Zwei autotyp. Doppeltafeln am Schlusse der Arbeit nach Originalaufnahmen des Verfassers erleichtern das Verständnis der betreffenden Formen.

Im I. Teil wird das Wesen der Symphilie erörtert durch Vergleichung derselben mit dem von Wheeler 1918 aufgestellten Begriff des Nahrungsaustausches (Trophallaxis) bei sozialen Insekten. Hier wird gezeigt, daß das echte Gastverhältnis nicht auf Nahrungsaustausch zwischen Gast und Wirt beruht, und daß die von Wh. versuchte Verallgemeinerung des Prinzips der Trophallaxis unhaltbar ist.

Der II. Teil beschäftigt sich mit den Einwendungen, welche Wh. gegen die Annahme erblicher, spezifisch begrenzter Gastpflegeinstinkte (Symphilie-Instinkte) erhoben hat. Auf Grund zahlreicher Beobachtungen zeigt der Verfasser, daß die Existenz spezifischer Symphilie-Instinkte, der verschiedenen *Formica*-Arten und -Rassen für verschiedene Arten und Rassen der *Lomechusini* eine feststehende biologische Tatsache ist; also muß auch die stammesgeschichtliche Entwicklung solcher erblicher Instinktmifikationen möglich gewesen sein. Sie ist aber nur denkbar auf Grund der Vererbung erworbener Eigenschaften. Die Unterschiede zwischen individuell erworbenen und erblich befestigten Instinktabänderungen der Ameisen im Verhalten gegenüber ihren Gästen werden hier dargelegt und der Versuch gemacht, durch eine trophische Hypothese zu erklären, wie durch ursprünglich individuelle Instinktmifikationen jene Mutationen der Gene ausgelöst werden können, die als erblich gewordene Instinktabänderungen sich äußern. Aus der