Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München*).

Im 15. Bande der Acta Mathematica**) theilt Herr Mittag-Leffler die folgende von Herrn Fredholm aufgefundene Reihe:

$$\sum_0^\infty {}_\nu\, a^\nu \cdot x^{\nu^2} \quad (|a| < 1)$$

als erstes Beispiel einer Function mit, welche über einen gewissen Bereich (den Einheitskreis um den Nullpunkt) nicht analytisch fortgesetzt werden kann, d. h. für keine Stelle auf der *Grenze* dieses Bereiches nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar ist, obschon sie daselbst *mit sämmtlichen Ableitungen* stetig ist.

Die Reihe ist in der That wegen ihrer ausserordentlichen Einfachheit bemerkenswerth: dagegen scheint mir dieselbe keineswegs etwas *principiell neues* darzubieten und in dieser Hinsicht von Herrn Mittag-Leffler einigermassen überschätzt zu werden. Denn abgesehen davon, dass wohl Niemand, der sich mit der Theorie der Taylor'schen Reihe etwas näher beschäftigt hat, an der *Existenz* derartiger Functionen den geringsten Zweifel haben konnte, so möchte ich Herrn Mittag-Leffler nicht einmal darin beistimmen, dass solche Functionen bisher überhaupt noch nicht studirt worden seien.***)

---

*) Der vorliegende Aufsatz bildet eine theilweise Umarbeitung und Erweiterung der unter dem gleichen Titel in den Sitzungsberichten der Münchner Akademie vom 7. Mai 1892 enthaltenen Mittheilung.

**) „Sur une transcendante remarquable trouvée par M. Fredholm." A. a. O. p. 279.

***) Es heisst a. a. O.: Autant que je sache, *toutes* les fonctions qui n'existent que dans un certain domaine du plan et *qui ont été étudiées jusqu'ici, cessent d'exister*, parce que les fonctions elles mêmes ou *leurs dérivées* deviennent *discontinues* sur la frontière.

Die *principielle* Frage, um die es sich hierbei *einzig und allein* handelt, ist doch lediglich die: Giebt es Functionen, die auch nur an irgend *einer einzigen Stelle* endliche Differentialquotienten*) jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch nicht nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind? Denn aus einer Function, die eine derartige Singularität an *einer* Stelle besitzt, lassen sich ja dann nach bekannten Methoden — etwa mit Hülfe des von Herrn Cantor angegebenen Condensations-Principes**) — leicht solche bilden, bei denen die nämliche Singularität in allen Punkten einer beliebigen abzählbaren unendlichen Menge auftritt.

Nun hat aber *im Gegensatze* zu Lagrange, welcher geradezu die Ansicht aussprach,***) dass die Endlichkeit von $f^{(\nu)}(x)$ für jedes endliche ν die Gültigkeit der Entwicklung:

$$f(x+h) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!} h^{\nu}$$

(und damit eo ipso auch die *Convergenz* der betreffenden Reihe) nach sich ziehe, Cauchy schon in seinen ersten „Leçons sur le Calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 ausdrücklich die Bemerkung gemacht,†) dass nicht einmal die *Convergenz der Taylor'schen Reihe* hinreiche, um daraus die *Gültigkeit der obigen Beziehung* zu folgern. Und obschon sich gegen das einzige zum Belege seiner Behauptung angeführte *Beispiel* gewisse, nicht recht zu widerlegende Einwände erheben lassen (wovon weiter unten noch die Rede sein wird), so ist doch die *sachliche Richtigkeit* jener Cauchy'schen Bemerkung, die sich auch in zahlreichen besseren Compendien der Differentialrechnung reproducirt findet, ††) meines Wissens von neueren Mathematikern niemals *bestritten* worden,†††)

---

*) Selbstverständlich handelt es sich hierbei im Falle einer complexen Variabeln nicht um Differentialquotienten nach *allen möglichen* Richtungen, sondern nur *nach einem Theil dieser Richtungen*.

**) Math. Ann. Bd. XIX, p. 588.

***) Théorie des Fonctions. Chap. V. Art. 30 (Oeuvres complètes, T. IX, p. 65). — Leçons sur le Calcul des Fonctions. Leç. III. (Oeuvres compl. T. X, p. 72.)

†) a. a. O. p. 152. Auch in den „Leçons sur le Calcul différentiel" vom Jahre 1826: p. 105, und den „Leçons sur le Calcul différentiel et intégral" von Cauchy-Moigno: T. I, p. 71.

††) z. B. Hermite, Cours d'Analyse, T. I, p. 203. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, T. I, p. 152. — Houël, Calcul infinitésimal, T. I, p. 286.

†††) Nur der Vollständigkeit halber möchte ich als einzig mir bekannte Ausnahme ein Buch mit dem viel versprechenden Titel: „Le Calcul infinitésimal fondé sur des Principes rationnels" von P. H. Fleury (Paris 1879) anführen. Was aber der Verfasser dort auf p. 234—236 vorbringt, enthält nur ein Körnchen Wahrheit,

mag auch die fragliche Bemerkung einzelnen mathematischen Schriftstellern vielleicht gänzlich *entgangen* sein.*)

Immerhin bin auch ich der Ansicht, dass jenes Cauchy'sche Beispiel nicht ausreicht, um die Existenz einer nicht entwickelbaren Function mit lauter stetigen Differentialquotienten schlechthin evident zu machen. Dies wird nun aber thatsächlich vollständig geleistet durch ein von Du Bois Reymond im Jahre 1876 publicirtes Beispiel einer Function,**) welche an einer gewissen Stelle endliche und stetige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt, während die mit diesen Differentialquotienten gebildete Taylor'sche Reihe $\sum_0^\infty \frac{f^{\nu}(x)}{\nu!} h^{\nu}$ für jedes noch so kleine h *divergirt*, woraus dann mit Leichtigkeit folgt, dass $f(x+h)$ in der Umgebung dieser Stelle x überhaupt nicht nach Potenzen von h entwickelt werden kann. Und da Du Bois Reymond es auch unternommen hat, aus dieser Function durch „Condensation" eine andere abzuleiten, welche die fragliche Eigenschaft in unendlich vielen, überall dicht liegenden Punkten einer Linie hat, so scheint mir eben die oben citirte Bemerkung des Herrn Mittag-Leffler nicht recht zutreffend.

Auf der anderen Seite hätte ich gegen die von ihm mitgetheilte Reihe des Herrn Fredholm, deren elegante Einfachheit ich nochmals ausdrücklich anerkenne, vom didaktischen Standpunkte mancherlei einzuwenden. Zunächst scheint mir schon der Beweis dafür, dass jene Reihe die fragliche Eigenschaft besitzt, nicht elementar genug: er beruht auf einem, keineswegs mehr den Elementen der Functionentheorie angehörigen Kowalewski'schen Satze über die Integrale partieller Differentialgleichungen. Zweitens aber bietet diese Methode der Herleitung den grossen Nachtheil, dass wir von der Art und Weise des Zustandekommens einer solchen, doch immerhin merkwürdigen Singularität auch nicht die geringste Anschauung erhalten.

Da mir dies nun aber gerade wünschenswerth erschien, so habe ich vor allem versucht, die schon von Du Bois Reymond befolgte Methode, die in mancher Beziehung der *Ergänzung* geradezu *bedarf*, in anderer der *Erweiterung fähig ist*, derartig zu vervollkommnen, dass es möglich wird, auf dem Wege einer zielbewussten Synthese

---

soweit er sich gegen die besondere Form des Cauchy'schen *Beispiels* wendet. Alles übrige sind theils nichtssagende, theils geradezu absurde Redensarten.

*) z. B. Hankel, der in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Functionen (1870) gelegentlich noch ganz den Lagrange'schen Standpunkt vertritt: cf. Math. Ann. Bd. XX, p. 102.

**) In den Berichten der Bayer. Akad. d. Wiss. Desgl. Bd. XXI dieser Zeitschrift. p. 109 ff.

völlig einwandfreie Beispiele von Functionen der gedachten Art zu erzeugen.

Zu diesem Behufe untersuche ich zunächst nochmals genau die Möglichkeiten, unter denen trotz der Endlichkeit aller Ableitungen von endlicher Ordnung die Entwickelbarkeit nach der Taylor'schen Reihe für *eine* bestimmte Stelle ausgeschlossen erscheint, und belege dieselbe durch einfache, vermittelst directer Rechnung zu controlirende Beispiele (§ 1). Sodann werden allgemeine Bedingungen aufgestellt, unter denen es möglich ist, derartige singuläre Stellen in unendlicher Anzahl beliebig zu condensiren, ohne fürchten zu müssen, dass diedieselben sich etwa gegenseitig in ihrer Wirkung aufheben könnten (§ 2). Auf Grund dieser Bedingungen werden darauf Reihen construirt, welche die verlangte Eigenschaft besitzen, auf dem Einheitskreise durchweg beliebig oft differenzirbar und daselbst dennoch nirgends entwickelbar zu sein.

Die auf diese Weise erzeugten Reihen sind natürlich minder einfach als die von Herrn Mittag-Leffler mitgetheilte, aber sie geben uns, wie gesagt, offenbar eine deutliche Vorstellung von einer der Möglichkeiten, wie derartige Singularitäten zu Stande kommen können.

Im übrigen aber bin ich auch, abgesehen von diesen Betrachtungen, im Stande, Reihen *von ganz ähnlicher Einfachheit* wie die des Herrn Fredholm anzugeben, bei denen sich die fragliche Eigenschaft *ganz elementar* beweisen lässt, indem man durch einfache Rechnung erkennen kann, dass die Taylor'sche Entwickelung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen auf dem Einheitskreise *divergiren* muss (§ 4).

§ 1.

Für das Innere eines gewissen Bereichs der complexen Variablen x sei $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ durch irgendwelche analytische Ausdrücke als eindeutige reguläre analytische Function definirt — z. B. durch gleichmässig convergirende Reihen von der Form $\Sigma f_\nu(x)$ bezw. $\Sigma f_\nu^{(n)}(x)$, wo die $f_\nu(x)$ in dem gedachten Bereiche reguläre algebraische oder transcendente Functionen bedeuten.

Auf der *Begrenzung* dieses Bereiches befinde sich eine Stelle α, für welche $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n noch eindeutig bestimmt, endlich und stetig sei. Wenn dann eine für irgendwelche Umgebung von $x = \alpha$ convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ existirt, dergestalt dass die Beziehung:

$$(1) \qquad f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$$

besteht für denjenigen Theil des Convergenzbezirkes von $\mathfrak{P}(x-\alpha)$, welcher in den ursprünglichen Definitionsbereich von $f(x)$ hineinfällt, so hat dieselbe sicher die Form:

$$\mathfrak{P}(x-\alpha) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^{\nu}. \tag{2}$$

Daraus folgt aber, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ im Punkte α gemachten Voraussetzungen *zwei* und *nur* zwei Möglichkeiten denkbar sind, unter denen *keine* Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ von der gedachten Beschaffenheit *existiren kann*, nämlich:

1. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^{\nu}$ für $|x-\alpha| < \varepsilon$ *divergirt*, wie klein man auch die positive Grösse ε annehmen möge.
2. Wenn die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^{\nu}$ zwar für irgend welche Umgebung der Stelle α *convergirt*, aber ihre Summe nicht den Werth $f(x)$ hat, wo ihr Convergenzbezirk noch in den Definitionsbereich von $f(x)$ hineinfällt.

Die erste dieser beiden Möglichkeiten bietet für unsere Vorstellung auch nicht die geringste Schwierigkeit dar. Da nämlich $f^{(n)}(\alpha)$, wenn auch für jedes endliche n endlich, mit unendlich wachsendem n *geradezu in der Regel* gleichfalls *in's Unendliche* wachsen wird*) (andernfalls würde ja die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^{n}$ *beständig* convergiren, also ihre Summe eine ganze transcendente Function darstellen, was doch nur ein ganz specieller Fall wäre; das gleiche findet selbst dann noch statt, wenn $f^{(n)}(\alpha)$ mit n so unendlich wird, wie die n^{te} Potenz einer beliebig grossen endlichen Zahl), so liegt absolut keine Veranlassung dazu vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x = \alpha$ die Zunahme von $f^{(n)}(\alpha)$ für wachsende n so stark ist, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^{\nu}$ für keinen noch so kleinen Werth von $|x-\alpha|$ convergirt. Und es lassen sich auch mit Leichtigkeit *hinreichende* Bedingungen für die Art des Unendlichwerdens von $f^{(n)}(\alpha)$ für $n=\infty$ aufstellen, welche die *Convergenz* der obigen Reihe für jede noch so kleine Umgebung der Stelle α *definitiv ausschliessen*.

---

*) Dieser Umstand ist thatsächlich von manchen mathematischen Autoren völlig übersehen worden, indem sie die für die Existenz der Taylor'schen Reihe nothwendige Bedingung der „*Endlichkeit sämmtlicher Ableitungen*" dahin missverstanden, als müsse $f^{n}(\alpha)$ für jedes noch so grosse *n unter einer festen endlichen Grenze* bleiben. Auf diesem Missverständnisse beruht z. B. eine völlig irrthümliche Bemerkung des Herrn Mansion über den Rest der Taylor'sche Reihe und speciell über das oben erwähnte Beispiel von Du Bois Reymond. (Note sur quelques principes fondamentaux d'analyse" Art. III. — Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1879.) Desgleichen ein unzulänglicher Beweis des Taylor'schen Satzes von F. König. (Nouvelles démonstration du théorème de Taylor. Nouv. Annales: 2de Série, T. XIII, p. 270.)

So folgt z. B. aus dem Cauchy'schen Fundamentalkriterium zweiter Art, dass die Reihe für kein noch so kleines $|x-\alpha|$ convergiren kann, wenn für $\nu=\infty$

$$\lim\left\{\frac{|f^{(\nu-1)}(\alpha)|}{(\nu-1)!}:\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!}\right\}=\lim\left\{\nu\cdot\left|\frac{f^{(\nu-1)}(\alpha)}{f^{(\nu)}(\alpha)}\right|\right\}=0$$

wird, oder anders geschrieben:

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)}\right|>\nu$$

eine Bedingung, die sicher erfüllt ist, wenn von einer beliebigen Stelle $\nu\geqq n$ ab:

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{f^{(\nu-1)}(\alpha)}\right|=\nu\cdot\psi(\nu) \tag{3}$$

ist, wo $\psi(\nu)$ eine positive Grösse bedeutet, die mit ν — wenn auch *beliebig langsam* in's Unendliche wächst.

Geht man, statt von dem Cauchy'schen Kriterium, von der Bemerkung aus, dass die Reihe $\sum\frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu$ sicher beständig divergirt, wenn für jedes noch so kleine positive ε und für $\nu\geqq n$ die Beziehung besteht:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!}\cdot\varepsilon^\nu\geqq 1$$

so gelangt man statt der Bedingung (3) zu der folgenden:

$$\frac{|f^{(\nu)}(\alpha)|}{\nu!}\geqq\big(\psi(\nu)\big)^\nu \tag{4}$$

welche, wegen $\nu!<\nu^\nu$, a fortiori erfüllt ist, falls für $\nu\geqq n$:

$$\begin{aligned}|f^{(\nu)}(\alpha)|&\geqq\big(\nu\cdot\psi(\nu)\big)^\nu\\&\geqq e^{\nu\{\lg\nu+\varphi(\nu)\}}\end{aligned} \tag{6}$$

wobei $\varphi(\nu)=\lg\psi(\nu)$ gleichfalls eine mit ν beliebig langsam in's Unendliche wachsende positive Grösse bedeutet.

Ich will nun zunächst ein überaus einfaches und, wie ich glaube, in jeder Hinsicht tadelfreies Beispiel*) einer Function mit der eben besprochenen Eigenschaft angeben. Es werde gesetzt:

---

*) Bei der a. a. O. von Du Bois Reymond angegebenen Reihe die mit der hier betrachteten formal sehr verwandt ist, nämlich:

$$f(x)=\sum_0^\infty{}_\nu\frac{(-1)^{\nu+1}}{(2\nu!)}\;\frac{x^{2\nu}}{x^2+a_\nu^2}$$

(wobei $a_\nu^2>0$, $\lim a_\nu=0$) sind, wie man auf den ersten Blick erkennt, die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung so complicirt, dass ihre explicite Aufstellung

(6) $$f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \frac{1}{1+a^\nu x}$$

wo a eine positive Zahl > 1 bedeutet. Diese Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für die ganze x-Ebene mit Ausschluss einer beliebig kleinen Umgebung der Stellen $x = -a^0, -a^{-1}, -a^{-2} \dots$. Sie convergirt insbesondere auch noch für $x = 0$ und zwar *gleichmässig* für jeden Bereich, welcher den Punkt $x = 0$ auf der Begrenzung enthält *einschliesslich dieser Begrenzung*, sofern nur keine weitere Stelle der Strecke $\overline{0\,(-1)}$ im Innern oder auf der Begrenzung jenes Bereiches liegt. Denn in der That wird für alle solchen Werthe x der absolute Betrag von $\frac{1}{1+a^\nu x}$ eine gewisse angebbare Grösse nicht übersteigen, woraus dann ohne Weiteres die gleichmässige Convergenz der Reihe in dem behaupteten Umfange resultirt.

Das gleiche gilt von jeder Reihe, die sich durch n-malige Differentiation aus der obigen ergiebt, sodass also auch:

(7) $$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \frac{a^{n\nu}}{(1+a^\nu x)^{n+1}}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt aber für $x = 0$:

(8) $$\begin{cases} f(0) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} = e, \\ f^{(n)}(0) = (-1)^n \cdot n! \sum \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} = (-1)^n \cdot n!\, e^{a^n} \end{cases}$$

also für hinlänglich grosse Werthe von n sicher:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} > (e^n)^n$$

woraus auf Grund der oben aufgestellten Bedingung (4) sofort erkannt wird, dass die Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ für jedes noch so kleine x *divergirt*, obschon $f(x)$ für $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen von jeder end-

---

äusserst umständlich erscheint. Diese wird nun a. a. O. in der That auch gar nicht geliefert, vielmehr wird nur gezeigt, dass $|f^{(\nu)}(x)|$ für jedes endliche n unter einer gewissen mit n endlich bleibenden Grenze liegt. Zur Bildung von $f^{(n)}(0)$ wird sodann die gliedweise Entwickelung der obigen Reihe nach Potenzen von x benützt, was einerseits eine unnöthige Weitläufigkeit der Rechnung zur Folge hat, andererseits aber auch den Nachtheil mit sich bringt, dass die *Stetigkeit* von $f^{(n)}(x)$ an der kritischen Stelle $x = 0$ wohl aus allgemeinen Principien geschlossen, aber nicht *ad oculos* demonstrirt werden kann, wie es doch bei einem derartigen Beispiele wünschenswerth erscheint.

lichen Ordnung endlich und ausser in der Richtung der negativen reellen Axe auch durchweg stetig ist.

Man bemerkt, dass bei der eben betrachteten Reihe die auf der negativen reellen Axe gelegenen Punkte $-a^0$, $-a^{-1}$, $-a^{-2}\dots$, welche die Häufungsstelle 0 haben, singuläre Stellen für die einzelnen Glieder sind. Verlegt man diese Stellen in die positive und negative imaginäre Axe, indem man in (6) x durch x^2 und a durch a^2 ersetzt, so kann man eine Function mit durchweg reellen Coefficienten herstellen, welche mit allen Ableitungen in der Umgebung der Nullstelle auf der *reellen* Axe *vorwärts* und *rückwärts* stetig ist, und für welche die *Mac Laurin'sche Reihe* dennoch *divergirt*. Man erhält auf diese Weise:

$$(9)\qquad f(x)=\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\cdot\frac{1}{1+a^{2\nu}x^2}$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!}\left\{\frac{1}{a^\nu x-i}-\frac{1}{a^\nu x+i}\right\}$$

also:

$$(10)\qquad f^{(\nu)}(x)=\frac{1}{2i}\cdot n!\sum_0^\infty{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!}\cdot\left\{\frac{1}{(a^\nu x-i)^{n+1}}-\frac{1}{(a^\nu x+i)^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot n!\sum_0^\infty{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{n!}\cdot\frac{(a^\nu x+i)^{n+1}-(a^\nu x-i)^{n+1}}{1+a^{2\nu}x^2}$$

Da hieraus folgt:

$$(11)\qquad \begin{cases} f^{(2m-1)}(0)=0, \\ f^{(2m)}(0)\quad=(-1)^m\cdot(2m)!\,e^{a^{2m}}, \end{cases}$$

so erkennt man wiederum ganz direct (also ohne irgendwie functionentheoretische Gesichtspunkte zu Hülfe zu nehmen) dass die Mac Laurin'sche Reihe für jedes noch so kleine x divergirt, und es dürfte daher dieses Beispiel insbesondere geeignet sein, auch im Rahmen einer gewöhnlichen Vorlesung über Differentialrechnung die Möglichkeit dieses Vorkommnisses zu illustriren.

Was nun die *zweite* der oben erwähnten Eventualitäten betrifft, dass nämlich die Reihe $\sum\frac{f^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}(x-\alpha)^\nu)$ zwar *convergiren*, aber ihre Summe von $f(x)$ *verschieden* sein könne, so scheint man, soviel ich weiss, bis zum heutigen Tage über das von Cauchy a. a. O. gegebene Beispiel:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$$

nicht hinausgekommen zu sein. Indessen *fehlt* demselben aus zwei Gründen *die rechte Beweiskraft*: einmal (was auch Du Bois Reymond in dem citirten Aufsatze ausdrücklich hervorhebt), weil hier $f(0)$ und $f^{(n)}(0)$ nicht „*eigentlich*" definirt sind, d. h. nicht *durch directes Einsetzen* von $x = 0$ aus einer der Definitionen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \frac{1}{x^{2\nu}} \quad \text{oder:} \quad e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(\sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} \frac{1}{x^{2\nu}} \right)^{-1}$$

berechnet werden können, sondern lediglich auf Grund der zweiten Definition als $\lim f(\pm \varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ eine feste Bedeutung gewinnen;*) zweitens aber nach meinem Dafürhalten auch deshalb, weil das so definirte $f(0)$ mit allen Ableitungen den *besonderen* Werth *Null* hat, sodass von einer *convergirenden Mac Laurin'schen Reihe* auch wiederum nur *cum grano salis* die Rede sein kann, da dieselbe *formal eigentlich gar nicht existirt* — ein Mangel, der durch Einführung einer Function von der Form $f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$ (wo $\varphi(x)$ entwickelbar) zwar *verdeckt*, aber in seinem *Wesen* doch nicht *gehoben* wird.

Man erhält nun aber völlig einwandfreie Beispiele dieser Art, wenn man in den oben betrachteten Reihen (6) und (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ ersetzt. Auf diese Weise entsteht aus (6):

$$(12) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{1 + a^\nu x} \quad \text{also:} \quad f(0) = e^{-1}$$

woraus:

$$(13) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \sum_0^\infty {}^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{a^{n\nu}}{(1 + a^\nu x)^{n+1}}$$

also:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n e^{-a^n} = (-1)^n \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}.$$

Hier erkennt man aber: dass die Reihe:

$$(14) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{a^\nu} \cdot x^\nu = \varphi(x)$$

geradezu *beständig convergirt*. Dass sie aber nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, geht daraus hervor, dass $f(x)$ wegen der in unmittelbarer Nachbarschaft der Nullstelle sich häufenden singulären Stellen $x = -a^{-\nu}$ für *keine noch so kleine Umgebung der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelbar sein kann* (wie sich mit aller Strenge aus den Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergiebt).

---

*) Dieser Einwand wird auch durch das Raisonnement des Herrn Hermite (Cours d'Analyse, T. I, p. 208) nicht entkräftet.

Es erschien mir indessen vom didaktischen Standpunkte aus wünschenswerth, die *Nicht-Entwickelbarkeit* der durch Gl. (12) definirten Function $f(x)$ auch erweisen zu können, *ohne* auf die Theorie der analytischen Functionen einer *complexen* Variablen zu recurriren.

Hierzu würde es offenbar genügen, die *Nicht-Uebereinstimmung* von $f(x)$ mit der Mac Laurin'schen Reihe $\varphi(x)$ *für einen einzigen positiven Werth* von x nachzuweisen.

Angenommen nämlich, die Beziehung:

$$f(x) = \varphi(x)$$

gelte für ein beliebig kleines positives Intervall $0 \leqq x < h$, so wähle man eine positive Grösse x_0 so, dass $\frac{1}{2} h < x_0 < h$: alsdann lassen sich — lediglich unter Anwendung des Cauchy'schen Satzes über die Umordnung unbedingt convergirender Doppelreihen — $f(x)$ und $\varphi(x)$ in Reihen nach positiven ganzen Potenzen von $(x - x_0)$ umformen, von denen die erste für $0 \leqq x \leqq 2x_0$, die zweite beständig convergirt. Aus der Uebereinstimmung der Summen dieser beiden Potenzreihen für diejenige Umgebung von x_0, welche dem Intervalle: $0 \leqq x < h$ angehört (d. h. also für: $2x_0 - h < x < h$) folgt dann nach einem bekannten Satze deren Identität und somit die Gültigkeit der Beziehung: $f(x) = \varphi(x)$ für das Intervall: $0 \leqq x \leqq 2x_0$, wo jetzt: $2x_0 > h$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Schlussweise ergiebt sich offenbar schliesslich, dass für *jeden* endlichen positiven Werth x: $f(x) = \varphi(x)$ sein muss, sofern diese Beziehung für eine beliebig kleine, positive Nachbarschaft der Stelle $x = 0$ gilt.

Daraus folgt dann aber umgekehrt, dass die Gleichung $f(x) = \varphi(x)$ für kein noch so kleines Intervall $0 \leqq x < h$ bestehen kann, sobald sich zeigen lässt, dass für irgend einen einzigen positiven Werth x' die Werthe von $f(x')$ und $\varphi(x')$ verschieden sind.

Leider ist es mir bisher nicht gelungen, diesen Nachweis *ganz allgemein*, d. h. für ganz beliebige, nur die Einheit übersteigende Werthe der in $f(x)$ und $\varphi(x)$ auftretenden Constante a zu führen. Dagegen gestaltet sich der Beweis überaus einfach für solche Werthe von a, welche nicht unter einer gewissen, sogleich näher anzugebenden Grösse liegen, und dies genügt immerhin, um das fragliche Beispiel auch für eine gewöhnliche Vorlesung über Differentialrechnung nutzbar zu machen.

Man hat nämlich für jedes $x \leqq 1$ nach Gl. (14):

$$\varphi(x) < \frac{1}{e}. \tag{15}$$

Andererseits ist für jedes positive x nach Gl. (12):

$$f(x) > \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+ax}. \tag{16}$$

Legt man hier x denjenigen Werth bei, für welchen der rechts stehende Ausdruck ein Maximum wird, nämlich: $x = a^{-\frac{1}{2}}$, so folgt:

$$(17) \qquad f\left(a^{-\frac{1}{2}}\right) > \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1}$$

und daher:

$$(18) \qquad f\left(a^{-\frac{1}{2}}\right) \geqq \frac{1}{e} \quad \text{und somit:} \quad > \varphi\left(a^{-\frac{1}{2}}\right),$$

sobald:

$$(19) \qquad \frac{a^{\frac{1}{2}} - 1}{a^{\frac{1}{2}} + 1} \geqq \frac{1}{e},$$

d. h. falls:

$$(20) \qquad a \geqq \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2 = 4,68\ldots.$$

Damit ist aber nach dem oben gesagten für solche Werthe von a, welche der Ungleichung (20) genügen, die *Nicht-Entwickelbarkeit* von $f(x)$ vollständig bewiesen.

Zur näheren Erläuterung dieses eigenthümlichen Verhaltens von $f(x)$ in der Nähe der Nullstelle möge hier noch folgendes bemerkt werden. Setzt man

$$(21) \qquad f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

wo:

$$(22) \qquad \begin{cases} f_1(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \dfrac{1}{(2\nu)!} \cdot \dfrac{1}{1 + a^{2\nu} x}, \\[2ex] f_2(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \dfrac{1}{(2\nu+1)!} \cdot \dfrac{1}{1 + a^{2\nu+1} x}, \end{cases}$$

so wird:

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{f_1^{(n)}(x)}{n!} = (-1)^n \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \dfrac{1}{(2\nu)!} \cdot \dfrac{(a^n)^{2\nu}}{(1 + a^{2\nu} x)^{n+1}}, \\[2ex] \dfrac{f_2^{(n)}(x)}{n!} = (-1)^n \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \dfrac{1}{(2\nu+1)!} \cdot \dfrac{(a^n)^{2\nu+1}}{(1 + a^{2\nu+1} x)^{n+1}}, \end{cases}$$

also:

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{f_1^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2}\left(e^{a^n} + e^{-a^n}\right), \\[2ex] \dfrac{f_2^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2}\left(e^{a^n} - e^{-a^n}\right), \end{cases}$$

woraus man sofort erkennt, dass die Mac Laurin'sche Reihe für $f_1(x)$ und $f_2(x)$ *divergiren* muss, da ihre Coefficienten mit n so wie e^{a^n} in's

Unendliche wachsen. Bildet man nun: $f^{(n)}(x) = f_1^{(n)}(x) - f_2^{(n)}(x)$, so hebt sich *für den einen speciellen Werth* $x = 0$ die Gesammtheit derjenigen positiven Bestandtheile, welche zusammen e^{a^n} ergeben, gegen die entsprechenden negativen weg, und hierdurch kommt zwar die *Convergenz* der Mac Laurin'schen Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ zu Stande; dagegen heben sich die *in unmittelbarer Nähe der Nullstelle* gelegenen *Singularitäten* von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ *nicht* heraus, und deshalb bleibt die *Nicht-Entwickelbarkeit*, die man bei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sofort an der *Divergenz* der Mac Laurin'schen Reihe erkennt, auch für:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

trotz der Convergenz jener Reihe bestehen. Es findet nämlich für beliebig *kleine* positive Werthe $x = x_0$ zwischen den positiven und negativen Gliedern von $f(x)$ ein ähnlicher *Ausgleich*, wie an der Nullstelle, *nicht* mehr statt; genauer ausgedrückt: es nimmt $f^{(n)}(x_0)$ mit wachsendem n immerhin *so grosse* Werthe an, dass das Convergenzintervall der Taylor'schen Reihe $\sum \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu!)} (x - x_0)^\nu$ mit x_0 selbst unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt*). Der nahe liegende

*) Es ist zwar $\frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x)$ für jedes *bestimmte*, wenn auch noch so grosse n, eine *stetige* Function von x für die positive Nachbarschaft von $x = 0$, sodass also zu bel. klein gegebenem δ sich x_0 stets so bestimmen lässt, dass:

$$\frac{1}{n!} \left| f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0) \right| < \delta \quad \text{für} \quad x \leqq x_0.$$

Allein diese Stetigkeit ist eine *ungleichmässige*, wenn man $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$ als Function der *beiden* Veränderlichen x und n auffasst, d. h. man muss mit zunehmendem n den Werth von x_0 beständig verkleinern, um die obige Ungleichung zu erzielen. Hieraus erklärt es sich, dass $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ von unendlich hoher Ordnung $\left(\text{so, wie } \lim \left(\frac{1}{e}\right)^{a^n}\right)$ *verschwindet*, während für *beliebig kleine positive Werthe* x_0: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$ *nicht einmal unter einer endlichen Grenze* bleiben kann $\left(\text{da ja sonst die Taylor'sche Reihe } \sum \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu \text{ einen Convergenzradius } \geqq 1 \text{ besitzen würde}\right)$. Der Grund dieses Verhaltens liegt darin, dass die Reihe:

$$\frac{|f^n(x)|}{n!} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{a^{n\nu}}{(1 + a^\nu x)^{n+1}}$$

bei festgehaltenem, beliebig grossen n zwar *gleichmässig* convergent für alle $x \geqq 0$; dass sich aber für $x < 1$ die Convergenz der Reihe mit *wachsendem* n

Versuch, dies durch directe Rechnung zu constatiren, ist mir freilich bisher nicht geglückt. Indessen ergiebt sich die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung sowohl aus den functionentheoretischen Betrachtungen des folgenden Paragraphen, als auch — ohne deren Beihilfe — aus einem Satze, den ich weiter unten (§ 4, gegen Ende) beweise, und welcher, auf den vorliegenden Fall angewendet, lehrt, dass in jeder beliebigen Nähe der Stelle $x = 0$ positive Werthe x_0 liegen müssen, für welche das Convergenzintervall von $\sum \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x-x_0)^\nu$ die Null zur Grenze hat*).

Will man statt der eben betrachteten Function, welche bei reell veränderlichen x an der Stelle $x = 0$ mit sämmtlichen Differentialquotienten *nur vorwärts* stetig ist, wiederum eine solche construiren, für welche das Gleiche sowohl *vorwärts* als *rückwärts* stattfindet, so braucht man nur in (9) den Coefficienten $\frac{1}{\nu!}$ durch $\frac{(-1)^\nu}{\nu!}$ zu ersetzen. Alsdann ergiebt sich:

$$(25)\qquad f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{1}{1+a^{2\nu}x^2} \quad \text{also:}\quad f(0) = e^{-1}$$

und daraus:

$$(26)\qquad f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (2m)!\,(-1)^m \cdot e^{-a^{2m}}.$$

Die Mac Laurin'sche Reihe würde auch hier wiederum beständig convergiren, stellt aber nicht die Function $f(x)$ dar. Bezeichnet man ihre Summe mit $\varphi(x)$, sodass also:

$$(27)\qquad \varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu},$$

so stimmt $\varphi(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ nur für $x = 0$ mit $f(x)$, $f^{(n)}(x)$ überein. Bildet man daher:

$$(28)\quad F(x) = f(x) - \varphi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \left\{\frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{1+a^{2\nu}x^2} - \left(\frac{1}{e}\right)^{a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu}\right\},$$

so liefert dieselbe ein Beispiel — und, wie ich glaube, das *erste* bekannte Beispiel — einer Function, welche für alle endlichen *reellen* x incl. $x = 0$ *mit sämmtlichen Ableitungen endlich und stetig* und auch noch für $x = 0$ *eigentlich* definirt ist, dabei aber (gleichwie die für

---

beständig *verzögert*, und zwar um so mehr, je kleiner x wird — wie man sofort erkennt, wenn man das allgemeine Glied auf die Form bringt:

$$\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{a^{n\nu}}{(1+a^\nu x)^{n+1}} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!}\cdot\frac{1}{1+a^\nu x}\cdot\frac{1}{(x+a^{-\nu})^n}.$$

*) Vgl. die Fussnote zu dem eben citirten Satze, S. 181.

$x = 0$ *nicht eigentlich* definirte Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$) die Eigenschaft besitzt, in beliebiger Nähe der Nullstelle *nicht* zu verschwinden, obschon sie für $x=0$ *mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet.* Damit erscheint aber die von Lagrange im 5. Capitel seiner Théorie des Fonctions*) geäusserte Ansicht, dass eine stetige Function, welche für irgend einen Werth einer *reellen* Variablen mit sämmtlichen Ableitungen verschwindet, *identisch verschwinden müsse*, nunmehr endgültig widerlegt.

§ 2.

Der allgemeine Typus der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ eine abzählbare Punktmenge bedeutet,**) welche (mindestens) einen nicht zur Menge gehörigen Grenzpunkt α besitzt: gerade dadurch, dass die Stelle $x = \alpha$ für *kein einzelnes Glied* der $f(x)$ definirenden Reihe eine singuläre ist, entsteht an der Stelle $x = \alpha$ für $f(x)$ jene besondere Singularität, welche $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ endlich und nach allen denjenigen Richtungen stetig sein lässt, in denen nicht unendlich viele Punkte der Menge (α_ν) liegen. Es fragt sich aber, ob auch wirklich in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ sein muss. Dies ist nämlich keineswegs selbstverständlich: denn wenn auch in jeder noch so kleinen Umgebung von α unendlich viele Punkte α_ν liegen, welche *für je ein Glied* der obigen Reihe singuläre Stellen sind, so wäre es gerade wegen der Unbegrenztheit ihrer Anzahl möglich, dass sie sich zusammengenommen in ihrer Wirkung annulliren.***)

---

*) Oeuvres complètes, T. IX, p. 63.

**) Ich bemerke, dass die folgenden Betrachtungen auch Gültigkeit behalten für Reihen von der etwas allgemeinen Form:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{m_\nu}},$$

wo die m_ν auch *negativ gebrochene* oder *beliebige rationale positive* Zahlen bedeuten.

***) Gerade in dieser Hinsicht enthält der oben erwähnte Versuch von Du Bois Reymond, durch Condensation eine Function der fraglichen Art herzustellen eine Beweislücke. Es wird nämlich eigentlich nur gezeigt, dass man eine Function bilden kann, welche die betreffende Singularität in einer beliebig grossen *endlichen* Anzahl (n) von Punkten eines gewissen Intervalles besitzt, und dass diese Function auch noch für $n = \infty$ einen bestimmten Sinn behält. Alsdann aber

Es sei nun irgend ein einfach zusammenhängendes von einer Curve C begrenztes Flächenstück gegeben, welches keinen Punkt der abzählbaren Menge (α_ν) im Innern oder auf der Begrenzung enthält, während auf der letzteren der eine Grenzpunkt α (aber kein weiterer, falls solche vorhanden) sich befinden soll. Ist dann $\Sigma|c_\nu|$ convergent, so stellt nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass die obige Reihe eine *innerhalb* C reguläre analytische Function dar. Dies gilt aber auch noch für jeden Punkt x' *auf der Curve* C — mit eventueller Ausnahme des einen Punktes α. Denn da nach Voraussetzung x' weder der Menge (α_ν) angehören, noch ein Grenzpunkt derselben sein kann, so existirt stets eine gewisse Umgebung von x', innerhalb deren kein Punkt der Menge (α_ν) liegt, sodass also $f(x)$ für diese Umgebung wiederum regulär bleibt.

Um nun das Verhalten von $f(x)$ für die Stelle $x = \alpha$ zu untersuchen, bemerke man zunächst, dass allemal, wenn man den Punkt α durch einen der Menge selbst angehörigen Punkt — etwa α_0 — ersetzt, dieser sicher eine *singuläre* Stelle für $f(x)$ sein muss (gleichgültig, ob α_0 ein Grenzpunkt der Menge ist oder nicht). Man erkennt dies, wie Herr Goursat gezeigt hat,*) indem man die obige Reihe folgendermassen in drei Partien zerlegt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{c_0}{\alpha_0 - x} + \sum_1^n \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} + \sum_{n+1}^\infty \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \\ &= f_1(x) + f_2(x) + f_3(x), \end{aligned}$$

wo n so fixirt sein soll, dass $\sum_{n+1}^\infty |c_\nu| = \vartheta \cdot |c_0|$ $(\vartheta < 1)$ wird, was in Folge der Convergenz von $\Sigma|c_\nu|$ stets möglich ist. Alsdann ist $f_2(x)$ regulär für eine gewisse Umgebung der Stelle α_0, während $f_1(x)$ in α_0 eine singuläre Stelle besitzt, welche durch $f_3(x)$ wie mit Hülfe der Bedingung: $\sum_{n+1}^\infty |c_\nu| = \vartheta \cdot |c_0|$ leicht zu ersehen ist, *nicht* annullirt werden kann.

Tritt sodann an die Stelle des *einen* Punktes α_0 eine unendliche Anzahl solcher Punkte, welche auf der Curve C oder irgendwelchen Bögen derselben überall dicht liegen, so lässt sich weiter folgern, dass

---

heisst es (a. a. O. p. 617): „*Es wäre freilich noch direct zu zeigen, dass die* (bei dem eben erwähnten Grenzübergange resultirende) *Function* $F(x)$ *nicht entwickelbar ist, doch wollen wir hier diese Rechnung nicht anstellen.*" — Ich halte es für sehr zweifelhaft, ob sich das hier überhaupt auf dem Wege *blosser Rechnung* erweisen lässt.

*) Sur les Fonctions à Espaces lacunaires. Bulletin des Sciences mathématiques, 1887. 2ième Série, T. XI, p. 109.

jeder solche Bogen eine *singuläre Linie* für $f(x)$ sein muss, sodass also für keinen Punkt α' eines solchen Bogens eine Reihe $\mathfrak{P}(x-\alpha')$ existirt, welche innerhalb C mit $f(x)$ übereinstimmt.

Die obige Schlussweise beruht nun aber wesentlich darauf, dass der Term $\frac{c_0}{x-\alpha_0}$ *wirklich* in $f(x)$ *vorkommt*, während in dem hier zu betrachtenden Falle die Existenz eines Gliedes von der Form $\frac{c}{x-\alpha}$ gerade ausgeschlossen ist, da ja α der Menge der α_ν nicht angehören sollte.

Es lässt sich indessen zeigen, dass auch in diesem Falle α stets eine singuläre Stelle für $f(x)$ ist, sofern man nur die Menge (α_ν) der einzigen Beschränkung unterwirft, *dass in jeder Nähe von α solche α_ν vorhanden sind, die höchstens in Linien* (aber nicht in Flächentheilen) *oder überhaupt nicht überall dicht liegen.**)

Angenommen nämlich $f(x)$ wäre für die Stelle α regulär, so müsste das Gleiche für alle Stellen innerhalb eines gewissen um α zu beschreibenden Kreises der Fall sein. Dies ist aber in Folge der über die Vertheilung der α_ν gemachten Voraussetzung unmöglich, da nach dem angeführten Satze innerhalb jenes Kreises stets singuläre Punkte oder Linien von $f(x)$ liegen müssen.

Die Möglichkeit dieser Schlussweise bleibt aber unverändert bestehen, wenn an die Stelle des einen Grenzpunktes α eine beliebige Anzahl solcher Punkte tritt, die auch auf C oder irgend einem Bogen von C überall dicht liegen dürfen, sofern nur die Punkte α_ν in der Umgebung jedes solchen Punktes α der oben angegebenen Bedingung genügen, und es gilt somit der folgende Satz:

Befinden sich auf der geschlossenen Curve C beliebig viele Grenzpunkte α der durchweg **ausserhalb** des Bereiches (C) gelegenen Punktmenge (α_ν), so ist für die innerhalb (C) reguläre analytische Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}' \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \quad \left(\text{wo } \sum_0^\infty {}' |c_\nu| \text{ convergent}\right)$$

jeder Punkt α ein singulärer Punkt und jeder Curvenbogen von C, auf dem solche Punkte α überall dicht

---

*) Damit ist nicht ausgeschlossen, dass ein *Theil* der Menge (α_ν) in der Nähe von α auch in Flächentheilen überall dicht liegt. Der Beweis behält sogar noch seine Gültigkeit, wenn die Menge (α_ν) in der Nähe von α *ausschliesslich* aus Punkten besteht, welche in Flächentheilen überall dicht liegen, sofern nur irgendwo auf der *Begrenzung* derselben in jeder Nähe von α stets auch Punkte α_ν (nicht bloss Grenzpunkte) liegen.

liegen, eine singuläre Linie, sofern in beliebiger Nähe jedes Punktes α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien (nicht in Flächentheilen) überall dicht liegen.

Beispiele solcher Punktmengen sind:

$$\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad \alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \varepsilon^\nu \quad \begin{pmatrix}\nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

wo p_ν positiv und für jedes endliche $\nu > 1$, dagegen $\lim_{\nu=\infty} p_\nu = 1$ $\left(\text{z. B. } p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu+1},\ p_\nu = 1 + \frac{1}{2^\nu},\ p_\nu = e^{\frac{1}{\nu+1}} \text{ etc.}\right)$, während ε eine complexe Zahl mit dem absoluten Betrage 1, aber keine Einheitswurzel sein soll, also $\varepsilon = e^{2s\pi i}$, wo s eine Irrationalzahl bedeutet. Die Punkte ε^ν $(\nu = 0, 1, 2 \ldots)$ liegen dann auf dem Einheitskreise überall dicht, während die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$, $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon^\nu$ durchweg ausserhalb des Einheitskreises liegen, aber alle Punkte desselben zu Grenzpunkten haben. Dabei nähern sich mit wachsendem ν die Punkte $\alpha_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu$ in spiralartiger Anordnung asymptotisch dem Einheitskreise und liegen *nirgends* (auch auf keiner Linie) überall dicht, während die Punkte $\alpha_{\mu,\nu} = p_\mu \cdot \varepsilon_\nu$ auf *allen* um den Nullpunkt concentrischen Kreisen mit den Radien p_μ $(\mu = 0, 1, 2 \ldots)$, aber nicht in irgendwelchen Flächentheilen überall dicht liegen.

§ 3.

Auf Grund der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtung sind wir nunmehr im Stande, Reihen zu construiren, welche im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches — etwa des Einheitskreises um den Nullpunkt — durchweg endliche Ableitungen jeder endlichen Ordnung besitzen und dennoch in beliebig vielen, auch unendlich vielen auf dem Kreise überall dicht liegenden Punkten α *nicht* nach Potenzen von $(x - \alpha)$ entwickelbar sind, also in dem zuletzt genannten Falle eine analytische Fortsetzung über den Einheitskreis hinaus nicht zulassen.

Es seien also *ausserhalb* des Einheitskreises unendlich viele Punkte α_ν gegeben, welche auf der Peripherie desselben beliebig viele Grenzpunkte α besitzen sollen. Man hat alsdann für jedes endliche ν: $|\alpha_\nu| > 1$, während für $\nu = \infty$ entweder geradezu $\lim |\alpha_\nu| = 1$ ist oder wenigstens die untere Unbestimmtheitsgrenze von α_ν den Werth 1 haben muss (mit anderen Worten: es können die Punkte α_ν auch noch *ausserhalb* des Einheitskreises beliebig viele Grenzpunkte besitzen). In der Umgebung jedes auf dem Einheitskreise gelegenen Grenzpunktes α sollen die α_ν der in dem Satze des vorigen Paragraphen statuirten Bedingung genügen. Bedeutet dann $\Sigma|c_\nu|$ eine convergirende Reihe, so ist die Reihe:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x}$$

zunächst innerhalb des Einheitskreises gleichmässig convergent und kann für diesen Bereich in die ebendaselbst convergirende Potenzreihe:

$$(2) \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda x^\lambda \quad \text{wo:} \quad A_\lambda = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden. Man kann nun aber durch eine passende Wahl der c_ν leicht erzielen, dass die Reihe (1), wie auch die Potenzreihe (2) auch noch *auf der Peripherie* des Einheitskreises unbedingt und gleichmässig convergire. Da nämlich für $|x| \leqq 1$ die Beziehung besteht:

$$|\alpha_\nu - x| \geqq |\alpha_\nu| - |x| \geqq |\alpha_\nu| - 1,$$

so hat man insbesondere für alle Punkte x auf der Peripherie:

$$\left| \frac{|\alpha_\nu| - 1}{\alpha_\nu - x} \right| \leqq 1$$

und es wird daher die Reihe (1) noch auf dem gesammten Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren, falls die Reihe

$$\sum \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu| - 1}$$

convergirt, also für:

$$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1) \cdot c_\nu'$$

wo c_ν' das Glied einer absolut convergirenden Reihe bedeutet. Zugleich erkennt man, dass dann auch die Potenzreihe (2) auf dem Einheitskreise noch unbedingt und gleichmässig convergirt, denn man hat:

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty{}_\lambda |A_\lambda x^\lambda|_{|x|=1} &= \sum_0^\infty{}_\lambda \left| \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}} \right| \\ &\leqq \sum_0^\infty{}_\nu |c_\nu| \sum_0^\infty \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \right|^{\lambda+1} \\ &= \sum_0^\infty \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu| - 1}. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (1) und (2) durch n malige Differentiation:

$$\begin{aligned} (3) \qquad f^{(n)}(x) &= n! \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}} \\ &= \sum_n^\infty{}_\nu \lambda(\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) A_\lambda x^{\lambda - n} \end{aligned}$$

zunächst wieder für das Innere des Einheitskreises. Es werden aber auch diese beiden Reihen für irgend ein bestimmtes n noch auf dem Einheitskreise unbedingt und gleichmässig convergiren und demgemäss dort auch noch die n^{te} Ableitung von $f(x)$ darstellen, wenn die c_ν so gewählt werden, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu| - 1)^{n+1}}$$

convergirt, was man offenbar wiederum erzielen kann, wenn man setzt:

$$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1)^{n+1} \cdot c_\nu' \quad \text{wo} \quad \Sigma|c_\nu'| \text{ convergirt.}$$

Man erkennt zugleich, dass bei dieser Wahl der c_ν die obige Reihe auch *a fortiori* für jedes kleinere n convergirt, falls schlechthin $\lim|\alpha_\nu| = 1$ ist; hat dagegen nur die *untere Unbest.-Grenze* von $|\alpha_\nu|$ den Werth 1, so erzielt man dasselbe durch die Substitution:

$$c_\nu = \left(\frac{|\alpha_\nu| - 1}{|\alpha_\nu|}\right)^{n+1} \cdot c_\nu.$$

Daraus folgt dann zunächst wieder ohne Weiteres die unbedingte und gleichmässige Convergenz der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$ für alle Punkte der Peripherie, während das Gleiche für die entsprechende Potenzreihe erkannt wird aus der Beziehung:

$$\begin{aligned}
&\sum_n^\infty{}^\lambda \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1)\,|A_\lambda| \\
&\leqq \sum_n^\infty{}^\lambda \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdots (\lambda - n + 1) \sum_0^\infty \frac{|c_\nu|}{|\alpha_\nu|^{\lambda+1}} \\
&\leqq \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \cdot \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^{n+1} \sum_0^\infty{}^\lambda (\lambda + 1)(\lambda + 2) \cdots (\lambda + n) \left|\frac{1}{\alpha_\nu}\right|^\lambda \\
&= n! \sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu| - 1)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Nun lassen sich aber die c_ν in mannigfacher Weise geradezu so fixiren, dass die Reihe:

$$\sum \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu| - 1)^m}$$

nicht nur für alle Werthe m bis zu irgend einem bestimmten hin, sondern geradezu für *jedes* m (ohne obere Grenze) convergirt.

Man erzielt dieses Resultat im Falle $\lim|\alpha_\nu| = 1$ (d. h. falls die Punktmenge α_ν keine weiteren Grenzpunkte besitzt, als die auf der Peripherie des Einheitskreises gelegenen) in der einfachsten Weise, indem man setzt:

(4) $$c_\nu = (|\alpha_\nu| - 1)^\nu \cdot b_\nu,$$

wo die b_ν ganz beliebige Grössen bedeuten, deren absolute Beträge unter einer endlichen Grenze g bleiben. Hierbei ergiebt sich nämlich:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu|\,(|\alpha_\nu|-1)^{\nu-m},$$

also:

(5) $$\sum_m^\infty{}^\nu \frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = \sum_0^\infty{}^\nu |b_{m+\nu}|\,(|\alpha_{m+\nu}|-1)^\nu$$
$$< g \cdot \sum_0^\infty{}^\nu (|\alpha_{m+\nu}|-1)^\nu,$$

wo die rechts stehende Reihe wegen: $\lim\,(|\alpha_\nu|-1)=0$ von einer bestimmten Stelle ab stärker convergirt, als jede convergente geometrische Reihe.

Besitzt dagegen die Punktmenge α_ν auch Grenzpunkte *ausserhalb* des Einheitskreises, so genügt es offenbar, wenn man in (4) b_ν durch: $\frac{b_\nu}{|\alpha_\nu|^\nu}$ ersetzt, wobei in dem besonderen Falle, dass auch der Punkt ∞ ein Grenzpunkt der α_ν ist, die b_ν nöthigenfalls als Glieder einer beliebigen absolut convergirenden Reihe zu wählen sind, während sie in jedem anderen Falle wieder nur der Bedingung $|b_\nu| < g$ zu genügen haben.

Andere Bestimmungsweisen für die Coefficienten c_ν ergeben sich folgendermassen. Man setze zur Abkürzung:

(6) $$\frac{1}{|\alpha_\nu|-1} = q_\nu \quad \text{d. h.} \quad |\alpha_\nu| = 1 + \frac{1}{q_\nu},$$

wo also q_ν wesentlich positiv und für $\nu=\infty$ entweder geradezu $\lim q_\nu = \infty$ oder zum mindesten die obere Unbestimmtheitsgrenze von q_ν unendlich wird. Alsdann hat man identisch:

(7) $$\frac{|c_\nu|}{(|\alpha_\nu|-1)^m} = |c_\nu| \cdot q_\nu^m = |c_\nu \cdot r_\nu| \cdot \frac{q_\nu^m}{r_\nu}$$

und wenn daher r_ν positiv und so gewählt wird, dass für jeden noch so grossen Werth von m:

(8) $$\lim_{\nu=\infty} \frac{q_\nu^m}{r_\nu} = \lim \frac{(e^m)^{\lg q_\nu}}{r_\nu} = 0$$

wird — was z. B. für $\lim q_\nu = \infty$ stets der Fall ist, wenn man setzt: *)

*) Wäre nur die obere Unbestimmtheitsgrenze von $q_\nu = \infty$, so würde man der Forderung beispielsweise genügen können, indem man setzt:

$$r_\nu = b^{-\nu \cdot q_\nu}$$

oder:

$$r_\nu = \nu \cdot [\lg q_\nu]!$$

(9) $$r_\nu = b^{-q_\nu} \qquad (b < 1)$$

oder auch:

(10) $r_\nu = [\lg q_\nu]!$ (wo $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl), so genügt es nach Gleichung (7) für den gewünschten Zweck in jedem Falle, wenn sodann:

(11) $$|c_\nu| \cdot r_\nu = |c_\nu'| \quad \text{also:} \quad c_\nu = \frac{c_\nu}{r_\nu}$$

genommen wird, wo $|c_\nu'|$ das Glied einer convergenten Reihe bedeutet. Wenn aber hierbei schon $\frac{q_\nu^m}{r_\nu}$ für jedes noch so grosse m das Glied einer convergenten Reihe bildet, was z. B. stets der Fall ist für $q_\nu \gtrless \nu$ und $r_\nu = b^{-q_\nu}$, ebenso für $q_\nu \lessgtr a^\nu$ $(a > 1)$ und $r_\nu = \nu!$, so reicht es schon hin, wenn man setzt:

(12) $$|c_\nu| \,.\, r_\nu = 1 \quad \text{also:} \quad |c_\nu| = \frac{1}{r_\nu}\cdot$$

Hiernach ergiebt sich aber in Verbindung mit dem Satze des § 2 das folgende Resultat:

Besitzt die durchweg ausserhalb des Einheitskreises gelegene abzählbare Menge (α_ν) auf dem Einheitskreise beliebig viele Grenzpunkte, so lassen sich auf mannigfache Weise unendliche Reihen von Grössen c_ν stets so bestimmen, dass die Reihen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu - x} \qquad f^{(n)}(x) = n! \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{(\alpha_\nu - x)^{n+1}}$$

nicht nur im Innern, sondern auch **auf der Peripherie** unbedingt und gleichmässig convergiren und in die eben daselbst unbedingt und gleichmässig convergirenden Potenzreihen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_0^\infty{}_\lambda A_\lambda x^\lambda \\ f^{(n)}(x) &= \sum_n^\infty{}_\lambda \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1) A_\lambda x^{\lambda-n} \end{aligned}\right\} \quad \text{wo:} \quad A_\lambda = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{c_\nu}{\alpha_\nu^{\lambda+1}}$$

umgeformt werden können.

Bedeutet dann α einen auf der Peripherie befindlichen Grenzpunkt der α_ν von solcher Beschaffenheit, dass in jeder Nähe von α stets Punkte α_ν vorhanden sind, welche höchstens in Linien, nicht aber in Flächentheilen, überall dicht liegen, so existirt keine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ derart, dass die Gleichung $f(x) = \mathfrak{P}(x-\alpha)$ besteht für Punkte in beliebiger Nähe von α, die im Innern oder auf der Peripherie des Einheitskreises liegen.

Wenn also solche Punkte α auf der Peripherie überall dicht liegen (sodass schliesslich jeder Punkt der Peripherie als ein Grenzpunkt der Menge (α_ν) anzusehen ist), so existirt für $f(x)$ keine analytische Fortsetzung über die Peripherie des Einheitskreises hinaus, obschon $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen jeder endlichen Ordnung dort noch endlich und stetig ist.

Der Vollständigkeit halber sei hierzu noch bemerkt, dass der Convergenzbezirk der Reihe $\sum \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ in Folge der den Punkten α_ν auferlegten Beschränkung mit dem Einheitskreise noch nicht erschöpft sein wird, sondern je nach der Wahl der α_ν noch aus einem oder mehreren (eventuell auch unendlich vielen) Stücken *ausserhalb* des Einheitskreises bestehen muss. Alsdann stellt also auf Grund der von Herrn Weierstrass gegebenen Begriffsbestimmung der analytische Ausdruck $\sum \frac{c_\nu}{a_\nu - x}$ in verschiedenen Gebieten *verschiedene* analytische Functionen dar.

Um mit Hülfe des oben ausgesprochenen allgemeinen Satzes bestimmte Beispiele von Functionen zu construiren, die trotz der Endlichkeit der Ableitungen über den Einheitskreis nicht fortgesetzt werden können, mögen etwa die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführten Punktmengen benützt werden. Sei also:

$$a_\nu = p_\nu \cdot \varepsilon^\nu \quad \begin{pmatrix} \text{wo } \varepsilon = e^{2s\pi i},\ s \text{ eine Irrationalzahl} \\ p_\nu > 1, \quad \lim p_\nu = 1 \end{pmatrix}$$

so kann man nach Gl. (4) setzen:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{(p_\nu - 1)^\nu}{p_\nu \varepsilon^\nu - x},$$

oder auch nach Gl. (9) und (12):

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\frac{1}{p_\nu - 1}}}{p_\nu \varepsilon^\nu - x} \quad (b < 1).$$

Setzt man in der letzten Formel speciell:

$$p_\nu = 1 + \frac{1}{\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3 \cdots)$$

so wird:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\nu}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\varepsilon^{\nu} - x} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} A_{\lambda} x^{\lambda},$$

wo

$$A_{\lambda} = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left(\frac{\nu}{\varepsilon^{\nu}(\nu+1)}\right)^{\lambda+1} b^{\nu}.$$

Nimmt man $p_{\nu} = e^{\frac{1}{\nu}}$, also $\frac{1}{p_{\nu}-1} \backsimeq \nu$, so ergiebt sich, wenn man für ε seinen Werth einsetzt:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\nu}}{e^{\frac{1}{\nu}+2\nu\varepsilon\pi} - x} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} A_{\lambda} x^{\lambda},$$

wo

$$A_{\lambda} = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\nu}}{e^{\left(\frac{1}{\nu}+2\nu\varepsilon\pi i\right)(\lambda+1)}}.$$

Diese Reihen convergiren dann auch noch gleichmässig für das ganze Gebiet ausserhalb des Einheitskreises mit Ausschluss der unmittelbaren Umgebung der Punkte $\alpha_{\nu} = p_{\nu}\varepsilon^{\nu}$, welche ausserhalb des Einheitskreises keine weiteren Grenzpunkte besitzen. Zwischen den Werthen der Reihen $f(x)$ im Innern und ausserhalb des Einheitskreises existirt jedoch kein „analytischer" Zusammenhang.

Es werde ferner gesetzt:

$$\alpha_{\mu,\nu} = p_{\mu}\varepsilon^{\nu}$$

wo etwa wiederum $p_{\mu} = 1 + \frac{1}{\mu}$ oder $p_{\mu} = e^{\frac{1}{\mu}}$ $(p = 1, 2, 3 \cdots)$ und ε gleichfalls die frühere Bedeutung hat. Bildet man alsdann:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{c_{\mu,\nu}}{p_{\mu}\varepsilon^{\nu} - x},$$

so erkennt man leicht, dass die gleichmässige Convergenz von $f(x)$ und $f^{(n)}(x)$ auf der Peripherie wiederum erhalten bleibt, wenn man etwa setzt:

$$c_{\mu,\nu} = b^{\mu+\nu} \quad (b < 1).$$

Alsdann ergiebt sich:

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \frac{b^{\mu+\nu}}{p_{\mu}\varepsilon^{\nu} - x} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\lambda} A_{\lambda} x^{\lambda}$$

wo:

$$A_\lambda = \sum_1^\infty{}^\mu \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^{\mu+\nu}}{(p_\mu \varepsilon^\nu)^{\lambda+1}} = \sum_1^\infty{}^\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{b^\nu}{\varepsilon^{(\lambda+1)\nu}}$$

$$= \frac{b}{\varepsilon^{\lambda+1} - b} \sum_1^\infty{}^\mu \frac{b^\mu}{p_\mu^{\lambda+1}}.$$

Der Convergenzbereich von $f(x)$ besteht hier — abgesehen von dem Innern des Einheitskreises — aus dem ganzen Ebenenstücke ausserhalb des Kreises mit dem Radius p_1 (wobei für die oben getroffene specielle Wahl $p_1 = 2$ bez. $p_1 = e$ ist), sodann aus unendlich vielen concentrischen Ringen, welche begrenzt werden von Kreisen mit den Radien p_μ und $p_{\mu+1}$ ($\mu = 1, 2, 3 \cdots$). Auf allen diesen Kreisen liegen die Punkte $\alpha_{\mu,\nu}$ überall dicht, sodass also die Reihe $f(x)$ in diesen sämmtlichen Stücken ihres Convergenzbereiches lauter verschiedene analytische Functionen darstellt. Jedoch besitzt sie nur auf dem Einheitskreise die Eigenschaft mit allen Ableitungen endlicher Ordnung endlich undstetig zu sein, während sie auf den sämmtlichen übrigen Begrenzungen divergirt.

Will man Functionen construiren, welche in der einen Halbebene z. B. der oberen — einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen stetig und dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind, so braucht man nur das Innere des Einheitskreises mit Hülfe der Substitution:

$$x = \frac{z - i}{z + i}$$

auf die obere z-Halbebene abzubilden.

§ 4.

Ich gehe nun dazu über, einen weiteren Typus von Reihen anzugeben, welche auf der Grenze eines gewissen Bereiches noch mit allen Ableitungen endlich und stetig, dennoch nicht analytisch fortsetzbar sind. Obschon dieselben mit den Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen nicht in unmittelbarem Zusammenhange stehen, so liefern sie doch eine sehr brauchbare Illustration zu den im § 1 entwickelten Principien, indem sie bei ausserordentlicher formaler Einfachheit auf dem Wege ganz elementarer Rechnung deutlich erkennen lassen, *warum* die Entwickelbarkeit auf jeder Grenzlinie vollständig aufhört: nämlich, *weil die Ableitungen n^{ter} Ordnung für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen mit n so stark zunehmen, dass die Taylor'sche Reihe nicht mehr convergirt.*

Es werde gesetzt:

(1) $$\psi(t) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i} = \sum_0^\infty {}^\nu u_\nu$$

wo a eine positive ganze Zahl $\geqq 2$, $t = \tau_1 + \tau_2 i$ eine complexe Variable bedeutet. Um den Convergenzbereich dieser Reihe zu erkennen, hat man:

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{a^\nu (a-1) t i}$$

$$= \frac{1}{\nu+1} \cdot e^{-a^\nu (a-1) \cdot \tau_2} \cdot e^{a^\nu (a-1) \tau_1 i}$$

und daher für $\nu = \infty$:

$$\lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \right| = \lim \frac{e^{-a^\nu (a-1) \cdot \tau_2}}{\nu+1} \begin{cases} = 0, & \text{wenn } \tau_2 \geqq 0, \\ = \infty, & \text{wenn } \tau_2 < 0 \end{cases}$$

d. h. die Reihe convergirt absolut für alle t mit nicht-negativem imaginärem Bestandtheil, also innerhalb der oberen Halbebene *einschliesslich der reellen Axe.* Das Gleiche gilt auch für sämmtliche Ableitungen von $\psi(t)$. Man hat nämlich:

(2) $$\psi^{(n)}(t) = i^n \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i}$$

und daher insbesondere für reelle t:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \left| \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} \cdot e^{a^\nu t i} \right| = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} a^{n\nu} = e^{a^n}$$

sodass also die Reihe für $\psi^{(n)}(t)$ auch auf der ganzen reellen Axe absolut convergirt. Es stellt hiernach $\psi(t)$ für die obere Halbebene eine analytische Function von t dar, welche noch auf der Grenze dieses Bereiches, nämlich der reellen Axe, mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Nichtsdestoweniger lässt sich leicht zeigen, dass $\psi(t)$ über diesen Bereich nicht analytisch fortgesetzt werden kann.

Setzt man zunächst in (2) $t = 2\varkappa\pi$ ($\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$), so folgt:

$$|\psi^{(n)}(2\varkappa\pi)| = e^{a^n}$$

und ebenso für $t = (2\varkappa + 1)\pi$:

$$\left|\psi^{(n)}\big((2\varkappa+1)\pi\big)\right| = e^{a^n} \text{ bezw. } = e^{a^n} - 2 \text{ (ersteres, wenn } a \text{ ungerade, letzteres, wenn } a \text{ gerade).}$$

Daraus erkennt man aber zunächst, dass die Taylor'sche Reihe für sämmtliche Stellen $t = \mu\pi$ ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) divergirt (cf. § 1, Gl. (5)).

Das Gleiche findet nun aber statt für alle Stellen $t = \frac{\mu\pi}{a^p}$, wenn p eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Setzt man nämlich $\psi^{(n)}(t)$ in die Form:

$$\psi^{(n)}(t) = i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_p^{\infty} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

$$= i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^\nu t i} + i^n \cdot \sum_0 {}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!} e^{a^{p+\nu} t i}$$

so ergiebt sich zunächst für $t = \frac{2\varkappa\pi}{a^p}$ ($\varkappa = \pm 1, \pm 2 \cdots$):

$$(3) \qquad \psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) = i^n \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} + i^n \cdot \sum_0^{\infty} {}_\nu \frac{a^{n(p+\nu)}}{(p+\nu)!}$$

$$= i^n \left\{ C_{p,n} + e^{a^n} \right\}$$

wo:

$$C_{p,n} = \sum_0^{p-1} {}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} \left\{ e^{a^{\nu-p} \cdot 2\varkappa\pi i} - 1 \right\}.$$

Nun ist aber:

$$(4) \qquad |C_{p,n}| < 2 \cdot \sum_0^{p-1} {}_\nu a^{n\nu} < 2 \cdot \frac{a^{pn} - 1}{a - 1} < 2 \cdot a^{pn}$$

folglich wird, wie gross man auch p annehmen mag, n stets so gross genommen werden können, dass der in (3) vorkommende Term e^{a^n} beliebig viel grösser ist als $|C_{p,n}|$; dies gilt selbst dann noch, wenn man p über alle Grenzen wachsen lässt, sobald man nur $n \geq p$ nimmt. Somit folgt aus (3) und (4), dass für unendlich wachsende n:

$$(5) \qquad \psi^{(n)}\left(\frac{2\varkappa\pi}{a^p}\right) \cong e^{a^n}$$

wird, und das Nämliche ergiebt sich auf analoge Weise auch für $\psi^{(n)}\left(\frac{(2\varkappa+1)\pi}{a^p}\right)$. In Folge dessen muss aber die Taylor'sche Reihe für $\psi(t)$ an allen Stellen $t = \frac{m\pi}{a^p}$ divergiren, wie gross man auch p nehmen mag, und da diese Stellen auf der reellen Axe überall dicht liegen, so ergiebt sich in der That, dass $\psi(t)$ für keinen einzigen reellen Werth t_0 nach Potenzen von $t - t_0$ entwickelt werden kann.

Die Reihe (1) ist aber auch noch in einer weiteren Beziehung lehrreich, insofern man daran erkennen kann, dass auch die zweite der beiden in § 1 erörterten Möglichkeiten, nämlich die *Convergenz* der Taylor'schen Reihe

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$$

aber *ohne* die Gültigkeit der Beziehung:

$$\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu;}(t-t_0)^\nu = \psi(t)$$

geradezu *in unendlich vielen Punkten jedes noch so kleinen Intervalles* stattfinden kann.

Angenommen nämlich, es sei jetzt speciell a eine ungerade Zahl von der Form $4k+3$ ($k=0, 1, 2\cdots$). Alsdann bemerke man zunächst, dass alle *ungeraden* Potenzen von a gleichfalls von der Form $4k+3$, dagegen alle *geraden* von der Form $4k+1$ sind, sodass also:

$$e^{\frac{1}{2}a^{2\mu-1}\pi i} = -i, \quad e^{\frac{1}{2}a^{2\mu}\pi i} = +i$$

d. h. allgemein:

$$e^{\frac{1}{2}a^\nu \pi i} = (-1)^\nu \cdot i$$

wird. Setzt man daher in (2) $t=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$, so ergiebt sich:

$$\psi^{(n)}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = i^n \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \frac{a^{n\nu}}{\nu!} e^{ma^\nu \pi i} \cdot e^{\frac{1}{2}a^\nu \cdot \pi i}$$

$$= (-1)^m \cdot i^{n+1} \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{a^{n\nu}}{\nu!}$$

also:

(6) $$\left|\psi^{(n)}\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right| = e^{-a^n}$$

sodass die Taylor'sche Reihe zunächst an allen Stellen

$$t_0 = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$$

für jedes noch so grosse $(t-t_0)$ *convergirt.*

Man findet nun aber ganz analog wie oben Gl. (5), dass

(7) $$\left|\psi^{(n)}\left(\frac{m+\frac{1}{2}}{a^p}\pi\right)\right| \leqq C'_{p,n} + e^{-a^n}$$

wo:

(8) $$C'_{p,n} < a^{pn}$$

und da, wie gross man auch p nehmen möge, die Reihe mit dem allgemeinen Gliede: $\frac{1}{n!}\left\{a^{pn} + e^{-a^n}\right\} r^n$ für jedes noch so grosse r convergirt, so folgt, dass die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!}(t-t_0)^\nu$ für alle Stellen $t_0 = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{a^p}$ d. h. schliesslich für unendlich viele, überall dicht liegende Punkte der reellen Axe *convergirt* und zwar sogar *beständig convergirt.* Da aber in beliebiger Nähe jeder solchen Stelle andere liegen, für welche nach dem zuvor gesagten die Taylor'sche Reihe *divergirt*, so kann sie nicht die Summe $\psi(t)$ haben.

Hieran knüpft sich naturgemäss die Frage, ob es denkbar wäre, *dass die Taylor'sche Reihe für alle Stellen eines gewissen Intervalles einer reellen Variablen convergirte oder genauer gesagt, ein Convergenzintervall besitzt, dessen Ausdehnung unter eine bestimmte angebbare Grösse nicht herabsinkt, und dass ihre Summe nichtsdestoweniger mit der erzeugenden Function nicht übereinstimmte?*

Diese Frage ist aber zu *verneinen.* Angenommen nämlich, es convergire die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} \cdot r^\nu$$

für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ und $r \leqq r_1$, so hat man sicher für alle Werthepaare (t, r) aus dem angegebenen Bereiche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t)}{n!} r^n = 0$$

und daher insbesondere, wenn ϱ die kleinere der beiden Grössen $(t_1 - t_0)$ und r_1 bezeichnet:

(9) $$\lim_{n=\infty} \frac{\psi^{(n)}(t_0+\vartheta\varrho)}{n!} \cdot \varrho^n = 0 \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1).$$

Nun gilt aber mit Benützung der Lagrange'schen Restform die Entwickelung:

(10) $$\psi(t_0+h) = \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu + \frac{\psi^{(n)}(t_0+\vartheta h)}{n!} h^n$$

und man erkennt aus Gl. (9), dass dieses Restglied für $h \leqq \varrho$ mit unendlich wachsenden n verschwindet, sodass also in der That die Beziehung gilt:

(11) $$\psi(t_0+h) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu \quad \text{für } h \leqq \varrho.$$

Damit ist also bewiesen, dass die Taylor'sche Reihe nicht für *alle* Stellen eines beliebigen kleinen Intervalles einen Convergenzbereich von angebbarer Grösse besitzen kann, ohne dort auch die betreffende Function darzustellen. Mithin gilt der Satz:

Wenn die Taylor'sche Reihe $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t_0)}{\nu!} h^\nu$ für irgend einen bestimmten Werth t_0 der reellen Variablen t und für $h \leqq \varrho$ convergirt, ohne die Summe $\psi(t_0+h)$ zu besitzen, so müssen entweder in jeder beliebigen Nähe von t_0 Stellen t' existiren, sodass $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für jedes noch so kleine h divergirt; oder es muss zum mindesten die untere Grenze für die Convergenzintervalle aller möglichen Reihen: $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t')}{\nu!} h^\nu$ für Werthe t' in der Nähe von t_0 den Werth Null haben.*)

Der Satz gilt offenbar auch für den Fall einer complexen Variablen t. Denn man kann die Gesammtheit der Stellen, welche auf irgend einer im Punkte t_0 beginnenden geradlinigen Strecke liegen, durch eine ganze lineare Substitution auf ein Stück der reellen Axe congruent abbilden und sodann wieder die oben benützte Schlussweise anwenden.

Bei dem oben betrachteten Beispiel:

$$(1) \qquad \psi(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} e^{a^\nu t i}$$

tritt also — wenn $a = 4k + 3$ — thatsächlich der Fall ein, dass in jedem noch so kleinen Intervalle Stellen liegen, für welche der Convergenzradius der Taylor'schen Reihe *unendlich gross* ist

---

*) Da der Convergenzradius von $\sum \frac{\psi^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu$ in dem vorliegenden Falle offenbar eine *unstetige* Function von t ist, so brauchte in der That *keine bestimmte Stelle* t' zu existiren, wo derselbe wirklich $= 0$ wird. Ein Beispiel für diese Art des Verhaltens giebt die in § 1 betrachtete Function;

$$f(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^\nu t},$$

für welche die Mac Laurin'sche Reihe convergirte, ohne die Function darzustellen. Hier existirt für jedes noch so kleine positive t eine convergente Taylor'sche Entwickelung:

$$f(t+h) = \sum \frac{f^{(\nu)}(t)}{\nu!} h^\nu,$$

deren Convergenzbezirk sich nach links nur bis zur Nullstelle erstreckt, also mit t selbst unter jede noch so kleine Grösse herabsinkt, ohne aber jemals wirklich $= 0$ zu werden, da ja für $t = 0$ die *beständig convergirende* Reihe

$$\sum (-1)^\nu \cdot e^{-a^\nu} h^\nu$$

resultirt.

$\left(\text{nämlich für } t = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{a^p}\right)$, und ebenfalls solche, für welche dieselbe *gleich Null* ist $\left(\text{nämlich für } t = \frac{m\pi}{a^p}\right)$.

Ersetzt man in (1) t durch $(-t)$, so wird die Reihe:

$$\psi(-t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} e^{-a^\nu t i} \tag{12}$$

eine analytische Function darstellen, welche nur für die untere Halbebene einschliesslich der reellen Axe mit sämmtlichen Ableitungen existirt, und es ergeben sich durch Addition und Subtraction von $\psi(t)$ und $\psi(-t)$ (wobei, wie man leicht erkennt, die fraglichen Singularitäten sich nicht etwa herausheben), die Reihen:

$$\psi_1(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\cos a^\nu t}{\nu!}, \quad \psi_2(t) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{\sin a^\nu t}{\nu!} \tag{13}$$

als Beispiele von Functionen, welche für alle reellen t mit sämmtlichen Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung endlich und stetig sind, und dennoch nicht in das complexe Gebiet der Variablen t fortgesetzt werden können.*)

Ist hierbei insbesondere a eine ungerade Zahl von der Form $4k+3$, so besitzen jene Functionen wiederum noch die merkwürdige Eigenschaft, dass in der Umgebung *jeder* Stelle t_0 sowohl Stellen t' liegen, für welche die Taylor'sche Reihe bei beliebig kleinem $(t-t')$ *divergirt*, als auch solche, für welche dieselbe bei beliebig grossem $(t-t')$ *convergirt* – letzteres natürlich, *ohne* die Function $\psi_1(t)$ bezw. $\psi_2(t)$ darzustellen.

Setzt man schliesslich in (1) noch $e^{ti} = x$, so folgt, dass die Function:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu!} x^{a^\nu} \tag{14}$$

nicht über den Einheitskreis hinaus analytisch fortgesetzt werden kann, obschon sie noch auf der Peripherie derselben mit allen Ableitungen jeder endlichen Ordnung endlich und stetig ist.

Der allgemeine Typus derartiger Reihen lautet offenbar:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu \cdot x^{m_\nu} \tag{15}$$

*) Wie ich nachträglich bemerkt habe, findet sich die erste dieser beiden Reihen mit der Beschränkung auf *ungerade* ganzzahlige Werthe von a schon in einem Aufsatze des Herrn Lerch: *„Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen."* Journ. f. Math. Bd. 103, S. 136.

wo die m_ν positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass der grösste gemeinsame Theiler von m_ν, $m_{\nu+1}$, $m_{\nu+2}$, ... mit ν selbst in's Unendliche wächst, während die Coefficienten c_ν so beschaffen sein müssen, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu m_\nu^n = S_n$$

für jedes endliche n zwar *convergirt*, aber ihre Summe mit n so stark zunimmt, dass:

$$\sum_0^\infty{}^n \frac{S_n}{n!}\,\varrho^n$$

für jeden noch so kleinen Werth ϱ *divergirt*.

Ich möchte diese Gelegenheit benützen, um einer Stelle in meinem Aufsatze: „*Ueber die Convergenz unendlicher Producte*" (Bd. XXXIII dieser Zeitschr.) eine etwas schärfere Fassung zu geben. Es handelt sich dort (a. a. O. p. 140) um den Beweis des folgenden Satzes:

Bei einem unbedingt convergenten Product convergirt auch jedes beliebig herausgehobene Partialproduct.

Sei also

$$\prod_1^\infty{}^\nu (1+u_\nu) = U$$

ein *unbedingt* convergentes Product, so muss zunächst, wenn man die Reihe der u_ν in zwei Partien zerlegt, deren Glieder mit v_ν, w_ν bezeichnet werden mögen, und:

$$\prod_1^m{}^\nu (1+v_\nu) = V_m, \qquad \prod_1^n{}^\nu (1+w_\nu) = W_\nu$$

setzt:

$$\lim V_m W_n = U$$

d. h. *endlich bestimmt und von Null verschieden* sein, wenn m und n in beliebiger Weise und *unabhängig von einander* in's Unendliche wachsen. Es ist also einerseits für alle ganzzahligen m:

(1) $\quad |V_m W_n| \geqq g,\quad$ wo g eine von Null verschiedene positive Grösse bedeutet,

und andererseits müssen sich zu jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ zwei ganze positive Zahlen M, N so bestimmen lassen, dass für $m \geqq M$, $n \geqq N$:

(2) $$|V_{m+\varrho} W_{n+\sigma} - V_m W_n| < g\delta$$

wird, wobei für ϱ, σ jede beliebige Combination aus der Zahlenreihe: 0, 1, 2, ... gewählt werden kann. Setzt man nun speciell einmal $\sigma = 0$, das andere Mal $\varrho = 0$, und dividirt die so resultirenden Ungleichungen durch Ungl. (1), so ergeben sich die Beziehungen:

$$\left|\frac{V_{m+\varrho}}{V_m} - 1\right| < \delta \quad (m \geqq M,\ \varrho = 0, 1\,2, \ldots),$$

$$\left|\frac{W_{n+\sigma}}{W_n} - 1\right| < \delta \quad (n \geqq N,\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots)$$

welche in der That die Convergenz der Producte V_m, W_n nach sich ziehen. —

München, März und November 1892.