DIE NATURWISSENSCHAFTEN

Herausgegeben von

Dr. Arnold Berliner und **Prof. Dr. August Pütter**

Vierter Jahrgang. **18. August 1916.** **Heft 33.**

Das Gedächtnis der Materie.

Von Prof. Dr. Th. von Kármán,
z. Z. im k. u. k. Heere.

E. Du Bois-Reymond hat auf Grund eines Laplaceschen Gedankens[1]) die höchste, ideelle Aufgabe des Naturerkennens darin zusammengefaßt, daß es aus augenblicklichen Werten der Weltparameter, d. h. der Größen, die den momentanen Zustand der Welt völlig bestimmen, die Ermittlung ihres zeitlichen Verlaufes für alle Zeiten ermöglicht. Es ließe — meint *Du Bois* — eine Stufe der Naturerkenntnis sich denken, auf welcher der ganze Weltvorgang durch *eine* mathematische Formel, durch die Lösung eines unermeßlichen Systems simultaner Differentialgleichungen vorgestellt würde.

Nach dieser Auffassung gestaltet sich die Lösung eines mathematisch-physikalischen Problems etwa nach dem folgenden Schema:

Es seien $q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n$ jene Größen, die den Zustand des betrachteten Systems völlig bestimmen. Diese Größen — Parameter des betreffenden Systems genannt — sind durch sogenannte *Differentialgesetze* miteinander verknüpft, d. h. durch Beziehungen, die die zeitliche Änderung, die *zeitlichen Differentialquotienten* derselben durch ihre augenblicklichen Werte bestimmen. Die Naturgesetze haben somit die Gestalt:

$$\frac{d q_1}{d t} = f_1(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

$$\frac{d q_2}{d t} = f_2(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

$$\frac{d q_n}{d t} = f_n(q_1, q_2, \ldots, q_n),$$

wobei die f gegebene Funktionen der q sind. Die Aufgabe, das Naturgeschehen zu beschreiben oder aber „vorauszusagen", besteht nun in der *Integration* dieser *Differentialgleichungen,* d. h. in der Berechnung der q als Funktionen der Zeit t für *alle Werte* von t, falls wir die Parameter q für einen einzigen Zeitpunkt t_0 angeben.

Der erste Einwand gegen diese Formulierung der Naturgesetze und der naturwissenschaftlichen Probleme besteht darin, daß die wenigsten Systeme, geschweige denn die ganze Welt, durch endlich viele Parameter sich bestimmen lassen. Es ist z. B. klar, daß schon der Temperaturzustand oder der elastische Spannungszustand eines einzigen Körpers nur in Ausnahmefällen (Temperaturgleichgewicht, gleichmäßiger Spannungszustand usw.) sich durch endlich viel Zahlen vollständig bestimmen lassen, vielmehr muß man im allgemeinen die Temperatur, die Spannungen in *jedem Punkte,* d. h. als *Ortsfunktionen,* angeben, um den Zustand vollständig festzulegen. Dieser Einwand berührt jedoch nicht das Wesen der Frage, weil das obige Schema in einfacher Weise so erweitert werden kann, daß wir die Größen q als Ortsfunktionen auffassen. Die Naturgesetze würden dann die *zeitliche Änderung* dieser Ortsfunktionen völlig festlegen durch ihre *momentanen Werte* in dem gesamten betrachteten Gebiet, bzw. durch ihre örtlichen Schwankungen („örtliche Differentialquotienten"), d. h. durch unendlich viel Größen, die sich jedoch immerhin *auf einen und denselben Zeitpunkt t_0 beziehen.*

Der Kernpunkt der von *Du Bois-Reymond* aufgeworfenen Frage bleibt somit durch diesen Einwand unberührt; sie kann vielmehr allgemeiner folgendermaßen formuliert werden:

Ist die Änderung eines Zustandes völlig bestimmt durch den augenblicklichen Zustand? Oder mathematisch gesprochen: Sind die Naturgesetze restlos durch Differentialgleichungen darzustellen?

Wäre es dem so, so könnte man doch für ein sogenanntes „abgeschlossenes System" wenigstens mit der Annäherung, mit der das System als von der übrigen Welt abgeschlossen betrachtet werden kann, das Naturgeschehen auf ewige Zeiten voraussagen, falls man einen augenblicklichen Zustand vollständig kennt und durch geeignete Experimente sich in die Kenntnis der „Naturgesetze", d. h. jener Differentialgleichungen, gesetzt hat.

Ich zweifle nicht daran, daß ein großer Teil

[1]) „Ein Geist," sagt *Laplace* (Essai philosophique sur les probabilités, Paris 1814), „der für einen Augenblick alle Kräfte kennte, welche in der Natur wirksam sind und die gegenseitige Lage der Wesen, aus denen sie besteht, wenn sonst er umfassend genug wäre, um diese Angaben der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper und des leichtesten Atoms begreifen: nichts wäre ungewiß für ihn und Zukunft wie Vergangenheit wäre seinem Blicke gegenwärtig. Der menschliche Verstand bietet in der Vollendung, die er der Astronomie zu geben gewußt hat, ein schwaches Abbild solchen Geistes dar." — Würde er — der Laplacesche Geist, fügt *Du Bois-Reymond* dazu — $t = -\infty$ in seine Formel setzen, so enthüllte sich ihm der rätselhafte Urzustand der Dinge. Ließe er t im positiven Sinn unbegrenzt wachsen, so erführe er, ob *Carnots* Satz erst nach unendlicher oder schon nach endlicher Zeit das Weltall mit einigem Stillstande bedroht. Ein vor- und rückwärts gewandter Prophet wäre ihm, wie schon *d'Alembert* in der Einleitung zur Enzyklopädie, *Laplaces* Gedanken im Keime hegend, es ausdrückte, „das Weltganze nur eine einzige Tatsache und Eine große Wahrheit". (Vgl. *E. Du Bois-Reymond* „Über die Grenzen des Naturerkennens", Leipzig 1872.)

unserer Naturforscher die bejahende Antwort auf die oben gestellte Frage für so selbstverständlich hält, daß die meisten sich gar nicht die Frage gestellt haben. Die Du Boissche Auffassung leistet ihnen sozusagen die Garantie, daß die Ergebnisse ihrer Forschungen verpflichtend sind. Es ist z. B. ein interessantes Zeichen dafür, wie wenig man im allgemeinen daran zweifelt, daß das Geschehen, und zwar sowohl in der Natur als im Seelenleben, durch Gesetze der oben geschilderten Art geregelt ist, daß ein bedeutender französischer Vertreter der mathematischen Physik für notwendig erachtet hatte, das „Prinzip des freien Willens" mit der bindenden Kraft der als Differentialgleichungen ausdrückbaren Gesetze in Einklang zu bringen. Augenscheinlich führt die Annahme solcher Gesetze für das Seelenleben des Menschen zum Determinismus, da durch den augenblicklichen Zustand der zeitliche Verlauf für alle Zeiten bestimmt wird, ohne daß ein freier Wille innerhalb des Systems sich betätigen und den Kurs ändern könnte. Scheinbar ist man rettungslos dem Determinismus verfallen.

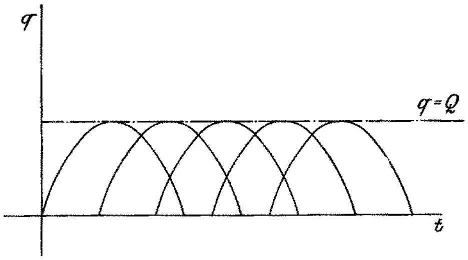

Fig. 1.

Der erwähnte Physiker, *J. Boussinesq*, hat nun die witzige Bemerkung gemacht, daß aus der Existenz der Differentialgesetze, wie wir die Naturgesetze, die sich als Differentialgleichungen ausdrücken lassen, kurz bezeichnen wollen, keineswegs die Eindeutigkeit ihrer Lösungen folgt, und ein mit freiem Willen begabtes Wesen gewissermaßen die allerdings beschränkte Wahl zwischen verschiedenen Lösungen der Differentialgesetze haben kann. Wir wollen z. B. die zeitliche Änderung eines einzigen Parameters q verfolgen. Besteht für diese eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dq}{dt} = f(q),$$

so ist die allgemeine Lösung dargestellt durch eine Kurvenschar aus unendlich vielen Kurven, die durch Parallelverschiebung auseinander entstehen. Die Neigung der Kurve (der Differentialquotient) ist dann eben für gleiche q dieselbe, wie die Differentialgleichung es fordert. Diese Kurvenschar mag z. B. den in Fig. 1 dargestellten Charakter haben. Alsdann sieht man, daß außer diesen Kurven auch die „Einhüllende" (Enveloppe) der Kurvenschar, die Gerade $q = Q$, eine Lösung der Differentialgleichung darstellt. In der Tat ist die Tangente der einzelnen Kurven in jedem Punkte, wo die Einhüllende berührt, horizontal, d. h. $\frac{dq}{dt} = 0$. Ist also Q die Lösung der gewöhnlichen Zahlengleichung

$$f(q) = 0,$$

so wird die Differentialgleichung durch $q = Q =$ constans offenbar befriedigt. Nun — so sagt *Boussinesq* —, wenn auch das System stets an eine Lösung der Differentialgleichung sich halten muß, so steht doch nichts im Wege, in einem geeigneten Augenblicke die bisher befolgte Lösung zu verlassen, die Einhüllende (die sog. „singuläre Lösung") zu betreten und durch diese Brücke gewissermaßen auf eine andere beliebig frei gewählte Lösung überzugehen. Die singuläre Lösung ist somit das mathematische Symbol für den freien Willen.

Zweifellos ist die hier dargestellte „mathematische Theorie des freien Willens" für nicht viel mehr als ein Spiel mit mathematischen Begriffen einzuschätzen, insbesondere wenn man beachtet, daß erstens das Seelenleben wohl kaum je durch zahlenmäßige Angaben und Beziehungen erschöpft werden kann, und zweitens, daß es nicht einmal im Bereiche der einfachsten physikalischen Erscheinungen gelingt, die *Naturgesetze restlos in Form von Differentialgleichungen zu fassen*, daß wir Erscheinungen begegnen, die überhaupt *die Möglichkeit einer solchen Darstellung scheinbar ausschließen.*

Über diesen Punkt wollen wir in den folgenden Zeilen etwas näher berichten.

Wilhelm Weber hat zuerst die Aufmerksamkeit auf die Tatsache gelenkt, daß ein elastischer Körper, z. B. ein Draht oder ein Faden, einmal gedehnt und plötzlich entlastet, erst allmählich die ursprüngliche Gestalt zurückgewinnt. Diese Erscheinung, die schlechthin „elastische Nachwirkung" genannt wird, fordert somit eine Abänderung des sog. Hookeschen Gesetzes, nach welchem Kraftwirkung und Deformation elastischer Körper proportional sind, und zwar hilft es auch nicht, wenn man die Proportionalität — die ja offenbar nur als eine Annäherung zum wahren gesetzmäßigen Zusammenhang gedacht ist — durch eine allgemeine funktionale Beziehung zwischen den beiden Größen Spannung und Dehnung (Kraft und Formänderung) ersetzt. Offenbar handelt es sich hier um eine grundsätzliche Abweichung; die Erscheinung der elastischen Nachwirkung zeigt, daß überhaupt keine eindeutige und wechselseitige Beziehung zwischen den beiden Größen besteht, weil doch beim Verschwinden der Spannung die Deformation nicht gleichzeitig verschwindet, sondern den Bereich bis zum ursprünglichen Nullwert nach einer zunächst unbekannten, aber offenbar genau bestimmten zeitlichen Gesetzmäßigkeit durchläuft. Die Ermittlung dieser Gesetzmäßigkeit hat, da zumal ähnliche „Nachwirkungserscheinungen“ fast in allen Gebieten der physikalischen Erscheinungen auftreten, seitdem sowohl die Experimentalphysiker als die Theoretiker oft und lebhaft beschäftigt.

Die einfachste und natürlichste Vorstellung, um die erwähnte Erscheinung begreiflich zu machen, ist die von *der inneren Reibung*. Man denke einen Draht oder z. B. eine Gummischnur durch ein Gewicht belastet und gedehnt; wird jetzt das Gewicht plötzlich weggenommen, so ist zwar die Spannung, die das Gewicht hervorgerufen hat, bestrebt, den Draht wieder zusammenzuziehen, wenn jedoch die einzelnen Teile in der Bewegung durch eine gegenseitige, d. h. innere Reibung gehindert werden, so bedarf es dazu einer gewissen Zeit, die Deformation wird nur verzögert dem Spannungswechsel folgen. Genau so, falls ein unbelasteter Körper plötzlich belastet wird, so wird er nicht sofort die endgültige Gestalt annehmen, sondern erst verzögert der Belastung folgen. Die Erscheinung der elastischen Nachwirkung, soweit sie sich in einer „verzögerten Deformation“ äußert, kann somit durch die Vorstellung der inneren Reibung erklärt werden. Führt man gewisse Annahmen über die Abhängigkeit der inneren Reibung von der Deformationsgeschwindigkeit ein, wobei man sich am einfachsten durch Analogien mit der inneren Reibung von Flüssigkeiten und Gasen leiten läßt, so gelangt man zu Resultaten, die sich auch quantitativ mit der Erfahrung vergleichen lassen.

Nun kommen aber, wenn man den Bereich seiner Beobachtungen erweitert, Erscheinungen vor, welche wieder grundsätzlich einer solchen Vorstellung sich nicht fügen, obwohl sie offenbar auf dieselbe Quelle zurückzuführen sind als die verzögerte Deformation. Man denke wieder denselben Draht, jedoch statt durch ein bestimmtes Gewicht, d. h. durch eine bestimmte Kraft zu belasten, halte man ihn fest eingespannt mit konstanter Dehnung und messe die Kraft, die notwendig ist, die Dehnung konstant zu halten. Alsdann beobachtet man folgendes: Wenn zu einer bestimmten Deformation im ersten Moment eine gewisse Kraft notwendig war, so nimmt allmählich der Kraftbedarf bei konstant gehaltener Dehnung ab, d. h. der Draht „entspannt sich“, ohne sich dabei zu rühren. *Maxwell* hat diese Erscheinung, die man sozusagen als eine Akkommodation des Materials an den neuen Zustand auffassen kann, „*Relaxation*“ getauft, und ihr Analogon findet man ebenfalls wie das der verzögerten Deformation, durchwegs in allen Gebieten, wo es sich um Prozesse in materiellen Körpern handelt.

Es ist klar, daß die Relaxation nicht in das Schema der inneren Reibung paßt, weil eine Spannungsänderung ohne jede sichtbare Bewegung vor sich geht, während man zur Erklärung der verzögerten Deformation annehmen muß, daß die innere Reibung lediglich eine Funktion der Deformationsgeschwindigkeit ist.

Maxwell hat eine neue Annahme als allgemeines „Relaxationsgesetz“ vorgeschlagen, das für den einfachsten Fall, den wir betrachtet haben, sich folgendermaßen formulieren läßt:

Im endgültigen Gleichgewichtszustande entspricht jeder Dehnung eine gewisse Spannung, bestimmt durch das Hookesche Gesetz oder durch das rein elastische Verhalten des Materials bei außerordentlich langsamen Deformationen. Wird nun irgendeine Spannungsänderung vorgenommen, so entsteht entweder ein Spannungsüberschuß oder ein Spannungsfehlbetrag. Dem Material wohnt dann die Tendenz inne, dies auszugleichen, und zwar geschieht dieser Ausgleich, die „Relaxation“, mit einer Geschwindigkeit, die dem Überschuß bzw. dem Fehlbetrag proportional ist.

Mathematisch würde dies folgendes bedeuten: Es sei σ_0 die Spannung, entsprechend der Deformation nach dem Hookeschen Gesetze, σ die tatsächliche Spannung, d. h. $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_0$ der Spannungsüberschuß. Alsdann ist die Abnahme der Spannung in der Zeiteinheit, d. h. der negativ genommene zeitliche Differentialquotient der Spannung $-\frac{d\sigma}{dt}$ proportional $\Delta \sigma$, d. h.

$$\frac{d\sigma}{dt} = -k(\sigma - \sigma_0)$$

oder allgemeiner

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma - \sigma_0),$$

wobei das Zeichen $f(\sigma - \sigma_0)$ eine für jedes Material genau bestimmte funktionale Abhängigkeit bedeuten soll.

Man sieht, wir haben wieder ein charakteristisches Beispiel unserer Differentialgesetze, wobei die zeitliche Änderung von den augenblicklichen Werten abhängt, aber durch diese auch völlig festgelegt ist.

Es ist unschwer zu zeigen, daß die Relaxation den Fall der verzögerten Deformation umfaßt, so daß die Maxwellsche Vorstellung sicher der Vorstellung der inneren Reibung gegenüber den Vorzug verdient. Es fragt sich jedoch, ob sie den ganzen Komplex von Beobachtungen, wenigstens qualitativ zu erklären, zu umfassen vermag.

Die weitere Ausdehnung der Beobachtungen zeigt, daß dies nicht der Fall ist, daß vielmehr Nachwirkungserscheinungen auftreten, die überhaupt grundsätzlich keinem Differentialgesetz der dargestellten Art sich fügen.

Ein sehr charakteristisches Beispiel hierzu liefert folgender Vorgang:

Wir nehmen wieder einen Draht; wir wollen ihn jedoch diesmal nicht ziehen, sondern tordieren, d. h. das eine Ende festhalten, das andere verdrehen. Wir erteilen ihm zunächst eine Verdrehung nach rechts und halten ihn in diesem gespannten Zustand durch mehrere Minuten, alsdann — statt zu entlasten — verdrehen wir ihn in dem entgegengesetzten Sinne, d. h. nach links und zwar um denselben Winkelbetrag, jedoch nur für ganz kurze Zeit, und lassen ihn plötzlich frei, entlastet. Man beobachtet nun folgendes: Die Linksverdrehung geht allmählich zurück, wie man nach dem vorher Gesagten auch erwarten muß; statt jedoch in Ruhe zu kommen, verdreht sich der Draht nochmals in dem anderen Sinne, nach rechts, und kommt dann erst in die Ruhelage ganz langsam zurück. Und zwar ist diese nachträgliche Rechtsverdrehung um so stärker, je länger die ursprüngliche erste Deformation gedauert hat und je intensiver sie gewesen ist.

Offenbar ist der weitere Verlauf in diesem Falle nicht bestimmt durch den augenblicklichen Spannungs- und Deformationszustand; es spielt vielmehr sozusagen die Vergangenheit herein, die Deformationen, die der Draht durchgemacht hat, die Stärke und die Dauer derselben.

Boltzmann zeigte, daß man diese Erscheinungen zwanglos erklären kann, wenn man der Materie — sei es auch nur formal — sozusagen ein Gedächtnis, ein Erinnerungsvermögen zuschreibt.

In der Tat kann man den oben geschilderten Prozeß sich folgenderweise denken: Der Draht ist zunächst unter dem Einfluß der ersten Rechtsverdrehung und würde, falls entlastet, langsam zum Gleichgewichtszustand zurückkehren, indem dieser Eindruck langsam sich auslöscht, wenn wir ihm nicht die entgegengesetzte Deformation auferlegt hätten. Da die letztere jedoch nur von kurzer Dauer war, so wird ihr Eindruck in der Erinnerung der Materie rasch abklingen; es kommt die Erinnerung an die erste langdauernde Deformation wieder zum Vorschein; daher die spontane Rechtsdrehung wieder, bis dann auch allmählich dieser stärkere Eindruck ebenfalls verschwindet.

Eine etwas phantastische Vorstellung — ohne Zweifel; sie umfaßt jedoch, wie *Boltzmann* selbst gezeigt hat, alle erwähnten Einzelerscheinungen der Nachwirkung, sowohl die verzögerte Deformation, als die Relaxation, und auch den Verlauf abklingender Schwingungen und Belastungswechsel.

Es ist nicht uninteressant, zu sehen, wie sich die Gesetze der Erinnerung der Materie mathematisch fassen lassen:

Wir nehmen wieder den Fall der einfachen Dehnung (ε) und einer zugehörigen Spannung (σ). Nach dem Hookeschen Gesetze wäre

$$\sigma = E\,\varepsilon,$$

wo E den sog. Elastizitätsmodul bedeutet. Wir wollen den Stab in dem Zeitpunkte t betrachten, nehmen jedoch an, daß er in dem Zeitraum von 0 bis t bereits Deformationen erlitten hat. Die Hypothese der Erinnerung besteht darin, daß die zur Erzeugung einer gewissen Dehnung nötige Spannung σ kleiner ist, als sie nach der obigen Formel ausfallen würde, falls der Stab bereits früher Deformationen in demselben Sinne durchgemacht hat. und zwar kleiner um Beträge, die proportional sind den erlittenen Deformationen, der Zeitdauer derselben und einem „Erinnerungsfaktor“, der um so kleiner wird, je weiter das betreffende Ereignis zurückliegt. Teilen wir den Zeitraum von 0 bis t in n Zeiträume $\Delta\tau = \frac{t}{n}$ ein, und sind die Deformationen in den Zeiträumen:

$$\begin{array}{lll} t \text{ bis } t - \Delta\tau & & \varepsilon_1 \\ t - \Delta\tau \;\;,, & t - 2\Delta\tau & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t-(n-1)\Delta\tau \;\;,, & 0 & \varepsilon_n \end{array}$$

gewesen, ferner die Erinnerungsfaktoren ψ_1, ψ_2, $\ldots$, ψ_n, wobei $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ eine abnehmende Zahlenreihe darstellt, so ist die Spannung gleich:

$$\varrho = E\,\varepsilon - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\,\psi_k\,\Delta\tau.$$

Wenn wir die Anzahl der Zeitintervalle immer größer, ihre Dauer immer kleiner nehmen, so kommen wir dazu, die Summe durch ein Integral zu ersetzen, wobei ψ als eine Funktion der „verstrichenen Zeit“ τ angesehen werden muß, falls das betreffende ε zur Zeit $t - \tau$ aufgetreten ist. Die Grenzen des Integrals sind offenbar $\tau = t$ und $\tau = 0$. Somit wird

$$\sigma = E\,\varepsilon - \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

Dies ist die Grundformel in der Lehre vom Gedächtnis der Materie. Die Funktion ψ kann als Erinnerungsfunktion bezeichnet werden.

Man sieht, daß in dem Ansatz z. B. die Erscheinung der Relaxation ohne weiteres enthalten ist. Nehmen wir z. B. an, daß der Draht bis $t = 0$ unbelastet war, von $t = 0$ an enthält sie eine konstante Dehnung ε. Alsdann ist

$$\sigma = E\,\varepsilon - \varepsilon \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau,$$

$$\sigma = \varepsilon\left(E - \int_0^t \psi(\tau)\,d\tau\right),$$

d. h. der Stab hat einen scheinbar mit der Zeit abnehmenden Elastizitätsmodul, da vom ursprünglichen Elastizitätsmodul das stets wachsende Integral über die Erinnerungsfunktion abgezogen wird. Den zeitlichen Verlauf der Spannung stellt Fig. 2 dar. Dieses Integral wird in einfacher Weise durch die Fläche dargestellt, die wir durch graphische Darstellung der Erinnerungsfunktion in ihrer Abhängigkeit von der Zeit erhalten (s. Fig. 3). Der Relaxationsversuch kann also z. B. zur experimentellen Bestimmung der Erinnerungsfunktion dienen. Das Beispiel zeigt auch, wie ungefähr die Erinnerungsfunktion verlaufen muß: Offenbar muß sie mit der Zeit so rasch abnehmen, daß die mit der Zeitachse eingeschlossene Fläche F in Fig. 3 bis zu unendlichen Zeiten genommen, d. h. das Integral

$$\int_0^\infty \psi(\tau)\,d\tau = F$$

endlich bleibt. Das bis zu unendlichen Zeiten fortgesetzte Integral bestimmt dann den Betrag, um den der sog. „Endwert“ des Elastizitätsmoduls E' kleiner ist, als der Anfangswert E:

$$E' = E - F.$$

Man kann unschwer zeigen, daß der obige Ansatz nicht nur die Erscheinung der Relaxation, sondern eine große Reihe anderer Nachwirkungserscheinungen wenigstens in qualitativer Hinsicht richtig darzustellen vermag.

Was ist nun das Charakteristische an unserem Erinnerungsansatz? Offenbar die Annahme, daß der momentane Wert der Spannung und der Dehnung durch Werte bestimmt werden, die das System zu anderen Zeiten angenommen hat, sie

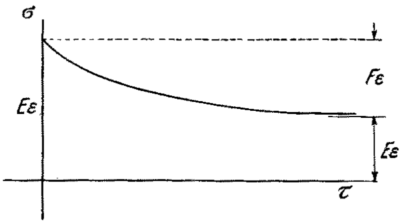

Fig. 2.

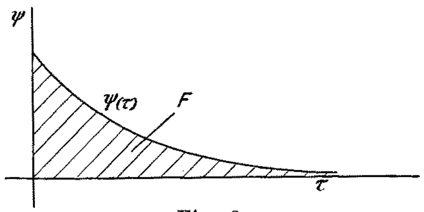

Fig. 3.

sind bestimmt durch Integrale über verflossene Zeiten; mathematisch genommen ist unser Naturgesetz keine Differentialgleichung mehr, sondern eine Integralgleichung.

Die Neuartigkeit der Auffassung erhellt aus dem bisherigen Ansatz vielleicht nicht ganz klar, weil man annehmen könnte, daß die Integralgleichung gewissermaßen bereits als Lösung eines Differentialgesetzes zustande gekommen ist. In der Tat muß die Integralgleichung in vielen Fällen, z. B. auch in dem soeben betrachteten Falle der reinen Relaxation, auf eine Differentialgleichung zurückzuführen sein, weil doch manche einfachen Fälle der Nachwirkung — wie wir früher gesehen haben — durch Differentialgesetze dargestellt werden können. Ganz klar tritt jedoch der prinzipielle Unterschied des neuen Ansatzes hervor, falls wir auch die Trägheitserscheinungen, d. h. die Massenwirkungen mit den Nachwirkungserscheinungen kombinieren.

Um ein konkretes Beispiel zu betrachten, nehmen wir einen Draht von der Länge l und vom Querschnitt f und hängen eine Masse m darauf. Wenn der Zeitpunkt $t = 0$ den Anfang des ganzen Vorganges bildet und in einem Zeitpunkt t die Dehnung mit $\varepsilon(t)$, die Spannung mit $\sigma(t)$ bezeichnet wird, so ist offenbar die Elongation am Drahtende $l \times \varepsilon(t)$ und die zugehörige Kraft $f \times \sigma(t)$. Die Masse m macht die Bewegung des Drahtendes mit, sie hat also eine Geschwindigkeit $l\frac{d\varepsilon}{dt}$ und eine Beschleunigung $l\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$. Zwischen Kraft und Beschleunigung besteht aber nach dem Newtonschen Bewegungsgesetz die Beziehung:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung},$$

$$\text{d. h.} \quad -f\sigma = m \cdot l\frac{d^2\varepsilon}{dt^2},$$

wobei das negative Vorzeichen ausdrücken soll, daß eine Zugspannung im Draht bestrebt ist, die Masse nach oben zu beschleunigen; sie stellt offenbar eine Kraft dar, die auf die Masse in der Richtung nach oben wirkt, diese nach oben zieht.

Nun ist nach unserem Erinnerungsansatz

$$\sigma = E\varepsilon - \int_0^t \varepsilon(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau.$$

Setzen wie diesen Ausdruck für σ ein, so erhalten wir

$$-fE\varepsilon + f\int_0^t \varepsilon(t-\tau)\,\psi(\tau)\,d\tau = ml\frac{d^2\varepsilon}{dt^2},$$

d. h. der zeitliche (zweite) Differentialquotient von ε zur Zeit t ist bestimmt:

a) durch den Wert von ε zur Zeit t,
b) durch ein Integral über die Werte von ε in dem gesamten Zeitraum von 0 bis t.

Eine solche Gleichung stellt offenbar eine von der Differentialgleichung abweichende Form eines Naturgesetzes dar, sie wird als *Integraldifferentialgleichung* bezeichnet.

Es ist ein Verdienst des italienischen Mathematikers *Vito Volterra*, daß er — nachdem die Theorie der Integralgleichungen von *Fredholm*, *Hilbert*, *Erhardt Schmidt* und von vielen anderen Forschern entwickelt wurde — wenigstens die Grundlagen zur weiteren Behandlung dieser allgemeinsten Form physikalischer Gesetze, der Integraldifferentialgleichungen, gegeben hat. Und für jene, die sich in die Frage vertiefen wollen, sei außer seinen Originalarbeiten an die in 1914 im Teubnerschen Verlag erschienenen „Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik“[1]) hingewiesen, wo er die dritte dieser an der Clark-Universität gehaltenen Vorlesungen den von der Vorgeschichte des Körpers abhängigen Erscheinungen und der Entwicklung von grundlegenden Theoremen über Integraldifferentialgleichungen widmet. Es sei dabei erwähnt,

[1]) Drei Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. Leipzig, B. G. Teubner, 1914. Arch. der Math. und Physik Bd. 22 (S. 97—181; daselbst Verzeichnis der Originalarbeiten desselben Verfassers). Preis M. 3.—.

daß *Volterra* die Erscheinungen, die wir der Erinnerung der Materie zugeschrieben haben, als „Vererbungserscheinungen“ (Heredität der Materie) bezeichnet.

Nun fragt es sich natürlich, ob wir uns, wenn wir auch gewisse Genugtuung fühlen, mathematische Form und brauchbare Ansätze für Erscheinungen scheinbar so komplizierter Art gefunden zu haben, mit dieser Erklärung vom physikalischen Standpunkt aus zufrieden stellen. Ob man doch nicht auf anderem Wege versuchen wird, die Gültigkeit der gewohnten Vorstellung, nach der primäre gesetzmäßige Beziehungen nur zwischen gleichzeitigen Ereignissen bestehen können, aufrecht zu erhalten. Es scheint dies gar nicht so unmöglich zu sein. Und zwar wäre die Lösung des Rätsels auf folgendem Wege zu suchen:

Alle Ansätze der Elastizitätstheorie und aller anderen physikalischen Theorien, wo Erinnerungs- oder Verzögerungserscheinungen auftreten, sind rein phänomenologischer Natur, d. h. sie suchen Beziehungen zwischen direkt meßbaren Größen, ohne auf die Einzelvorgänge in Molekulardimensionen einzugehen, aus denen die meßbaren Vorgänge gewissermaßen durch Mittelwertbildung hervorgehen. Nun ist es leicht denkbar, daß, obwohl jede Einzelbewegung einfachen Differentialgesetzen folgt, zwischen den Mittelwerten solche Beziehungen nicht mehr konstruiert werden können, mit anderen Worten: die Vorgänge in dem Augenblick t sind zwar völlig bestimmt durch den Zustand des Systems in demselben Augenblick, aber der Zustand ist nicht bestimmt durch die Mittelwertgrößen, wie Spannung und Dehnung usw., sondern es müßten die Koordinaten und Geschwindigkeiten des molekularen Systems herangezogen werden.

Von diesem Gesichtspunkte aus muß man sagen, daß, wenn auch die geistreichen Vorstellungen vom Gedächtnis der Materie und die daran knüpfende Theorie der Integraldifferentialgleichungen wertvolle Beiträge zur vollständigen Ausgestaltung eines mathematischen Weltbildes liefern, der Forscher, dessen Augen auf das physikalische Weltbild gerichtet sind, sein Heil auf anderen Wegen suchen wird, auf den Wegen, die auch gerade *Boltzmann* mit so glänzendem Erfolg betreten hat, und die zu einer Erklärung der sichtbaren Phänomene aus Erscheinungen der molekularen Welt mit den Hilfsmitteln der Mittelwert- und Wahrscheinlichkeitsrechnung führen.

Die Dinosaurier und Ornithischier Nordamerikas.

Von Prof. Dr. O. Abel, Wien.

(Schluß.)

Die Zeitgenossen von Tyrannosaurus waren die gehörnten Ornithischier vom Stamme der Ceratopsiden, die durch die bekannte Gattung Triceratops repräsentiert werden; die Nackenschilde und mächtigen Hörner dieser pflanzenfressenden Reptilien mochten eine wirksame Verteidigungswaffe gegen die Angriffe eines Tyrannosaurus darstellen.

Im Gegensatz zu dem schwerfälligen Tyrannosaurus der oberen Kreidezeit stellt die ältere Gattung Ornitholestes aus der Juraformation, der in die Verwandtschaft des europäischen Compsognathus gehört, einen kleinen, schlankfüßigen und jedenfalls sehr flinken Räuber vor. Dieser Stamm ist in der oberen Kreidezeit durch die seit 1914 in einem vollständigen Skelett aus Alberta bekannte Gattung Ornithomimus vertreten. Die Bewegungsart von Ornitholestes ist vielleicht ähnlich jener gewesen, die uns die lebende Reptiliengattung Chlamydosaurus repräsentiert.

Ein ganz anderes Bild tritt uns in den vierfüßigen Riesenreptilien entgegen, von denen Diplodocus und Brontosaurus die bekanntesten sein dürften. Über die Körperhaltung, Schreitstellung und die Beinstellung dieser Sauropoden haben vor etwa sieben Jahren lebhafte Diskussionen stattgefunden. Obwohl die zuerst von den amerikanischen Paläontologen gemachte Annahme einer aufrechten Schreitstellung bei steilgestellten Gliedmaßenachsen dieser Dinosaurier von *O. P. Hay* und *G. Tornier* heftig bekämpft wurde, so ergab doch die wiederholte Untersuchung und Prüfung der einschlägigen Fragen mit voller Gewißheit, daß die Sauropoden mit steilstehenden Gliedmaßen und über dem Boden hoch erhobenem Rumpfe sich bewegten und nicht wie ein sich träge fortwälzendes und schiebendes Krokodil dahinkrochen.

Die Körperlänge dieser Riesen, welche die gewaltigsten Landtiere waren, die wir bis heute kennen, wird nur vom lebenden Blauwal übertroffen, dessen größtes bekanntes Exemplar eine Länge von 30 m erreicht haben soll. Alle Sauropoden waren quadrüped, im Gegensatz zu den bipeden theropoden Dinosauriern, und haben in ihrem Gliedmaßenbau auffallende Konvergenzerscheinungen mit den Gliedmaßen der großen Huftiere mit „Säulenbeinen“ aufzuweisen.

Die nordamerikanischen Sauropoden sind in Ablagerungen gefunden worden, welche dem oberen Jura und der unteren Kreide angehören und als „Atlantosaurus-Beds“ oder „Como-Beds“ unterschieden werden.

Das im New Yorker Museum aufgestellte Skelett von Brontosaurus excelsus ist über 20 m lang, das des Diplodocus Carnegiei im Pittsburger Museum 26,5 m (von der Schnauzenspitze bis zum Schwanzende). Die Maße sind freilich nicht ganz exakt, da das berühmte und durch Abgüsse auch in Europa bekannt gewordene Skelett dieses Ungeheuers aus zahlreichen Individuen und sogar aus den Resten verschiedener, freilich nahe verwandter Gattungen kombiniert worden ist. Da jedoch die Hauptelemente des Skeletts in der Tat zu Diplodocus Carnegiei und nur zum kleineren Teile zu Diplodocus longus gehören, so kommen diese Ergänzungen für die Beurteilung des Gesamtbildes nicht weiter in Betracht.