SOPRA UNA NUOVA ESPRESSIONE DELL'ORDINE E DELLA CLASSE DI UNA CURVA GOBBA ALGEBRICA.

Nota di **G. B. Guccia** (Palermo).

Adunanza del 10 giugno 1906.

In due Note comunicate all'Accademia delle Scienze di Parigi *) ho mostrato che gl'invarianti projettivi: *ordine* e *classe* di una curva algebrica piana, nonchè di una superficie algebrica, potevano esprimersi come *rapporti anarmonici* di quattro elementi di una forma fondamentale di prima specie. Farò qui notare che *la stessa proprietà compete alle curve gobbe algebriche* (e, per dualità, alle superficie sviluppabili).

Sia data nello spazio una curva gobba algebrica, C, qualunque, dell'*ordine* n e della *classe* r. Fissiamo ad arbitrio nello spazio: 1° una retta R_2; 2° un piano Π_2, non passante per R_2. Indichiamo con:

O il punto d'incontro della retta R_2 col piano Π_2;

$K_n \equiv L_r$ il cono di vertice O *prospettivo* alla curva data C; ossia il cono, dell'ordine n e della classe r: 1° *luogo* delle rette che dal punto O vanno ai punti di C; 2° *inviluppo* dei piani passanti per O e per le tangenti di C.

Siano:

Π_1 il piano tangente lungo R_2 al cono-luogo, unico, del fascio di coni (K_n, Π_2^n), che passa per R_2;

Π_3 il piano polare della retta R_2 rispetto al cono-luogo K_n.

Un quarto piano, Π_4, sarà determinato mercè la costruzione seguente: Il fascio di coni (K_n, Φ_n) (dove Φ_n denota il gruppo di n piani determinati dalla retta R_2 insieme a ciascuna delle n generatrici del cono-luogo K_n che giacciono nel piano Π_2) contiene un cono, il quale si scinde

R_1 la generatrice di contatto in Π_2 del cono-inviluppo, unico, della schiera di coni (L_r, R_2^r), che è tangente a Π_2;

R_3 la retta polare del piano Π_2 rispetto al cono-inviluppo L_r.

Una quarta retta, R_4, sarà determinata mercè la costruzione seguente: La schiera di coni (L_r, Ψ_r) (dove Ψ_r denota il gruppo di r rette determinate dal piano Π_2 insieme a ciascuno degli r piani tangenti del cono-inviluppo L_r che passano per la retta R_2) contiene un cono, il quale si scinde

*) *Un théorème sur les courbes algébriques planes d'ordre n* [Comptes Rendus, t. CXLII (1er semestre 1906), pp. 1256-1259 (séance du 5 juin 1906)]; *Un théorème sur les surfaces algébriques d'ordre n* [Ibid., id. (séance du 25 juin 1906)].

[25 giugno 1906].

nel piano Π_2 e in un cono-luogo residuale, K_{n-1}, dell'ordine $n-1$ [passante per le $n(n-1)$ residuali rette d'intersezione di K_n e Φ_n]. Analogamente, il fascio di coni (K_{n-1}, Φ_{n-1}) (dove Φ_{n-1} denota il gruppo di $n-1$ piani determinati dalla retta R_2 insieme a ciascuna delle $n-1$ generatrici del cono-luogo K_{n-1} che giacciono nel piano Π_2) contiene un cono, il quale si scinde nel piano Π_2 e in un cono-luogo residuale, K_{n-2}, dell'ordine $n-2$; etc. Rimangono così determinati $n-1$ coni-luoghi (di vertice O):

$$K_{n-1}, K_{n-2}, \ldots K_{n-(n-1)},$$

l'ultimo dei quali è un piano:

$$K_{n-(n-1)} \equiv K_1 \equiv \Pi_4.$$

nella retta R_2 e in un cono-inviluppo residuale, L_{r-1}, della classe $r-1$ [tangente agli $r(r-1)$ residuali piani tangenti comuni ad L_r e Ψ_r]. Analogamente, la schiera di coni (L_{r-1}, Ψ_{r-1}) (dove Ψ_{r-1} denota il gruppo di $r-1$ rette determinate dal piano Π_2 insieme a ciascuno degli $r-1$ piani tangenti del cono-inviluppo L_{r-1} che passano per la retta R_2) contiene un cono, il quale si scinde nella retta R_2 e in un cono-inviluppo residuale, L_{r-2}, della classe $r-2$; etc. Rimangono così determinati $r-1$ coni-inviluppi (di vertice O):

$$L_{r-1}, L_{r-2}, \ldots L_{r-(r-1)},$$

l'ultimo dei quali è una retta:

$$L_{r-(r-1)} \equiv L_1 \equiv R_4.$$

Ciò premesso, si ha la seguente proposizione:

TEOREMA. — *La retta R_2 e il piano Π_2 (non passante per R_2) essendo genericamente fissati nello spazio:*

1° *I quattro piani Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 (uscenti dal punto O) passano per una medesima retta.*

2° *Il loro rapporto anarmonico è costante e uguale ad n.*

1° *Le quattro rette R_1, R_2, R_3, R_4 (uscenti dal punto O) giacciono in un medesimo piano.*

2° *Il loro rapporto anarmonico è costante e uguale ad r.*

La dimostrazione di questo teorema si desume, per projezione e dualità, dalla proposizione analoga relativa alle curve algebriche piane, della quale ho dato una dimostrazione *algebrica* nella prima delle due Note dianzi citate.

Una dimostrazione del teorema medesimo per via puramente geometrica richiede la nozione di certi gruppi di punti (di raggi) nella geometria della punteggiata (del fascio di raggi) associati a un gruppo dato, che io chiamo *congiunti*. Di questi, farò conoscere la definizione e le principali proprietà geometriche in un lavoro che spero di poter pubblicare più tardi *), nel quale darò anche le dimostrazioni di quelle proposizioni sulle curve e superficie *congiunte* che ho soltanto enunciate in due Note del 1902 **).

Palermo, 10 giugno 1906.

G. B. GUCCIA.

---

*) Ciò sarà tosto che i doveri inerenti alla direzione di questo periodico me lo consentiranno.

**) *Sulle curve algebriche piane* [questi Rendiconti, t. XVI (1902), pp. 204-208]; *Sulle superficie algebriche* [Ibid., t. XVI (1902), pp. 286-293].