EXTENSION NOUVELLE D'UN LEMME DE SCHWARZ.

PAR

GASTON JULIA

à PARIS.

On trouve dans les œuvres de SCHWARZ (tome 2, page 109) le lemme suivant.

Si $f(z)$ est holomorphe pour $|z| < 1$ et si, dans tout ce domaine ($|z| < 1$) on a $|f(z)| \leq 1$, avec $f(0) = 0$, on a pour tout point z ($0 < |z| < 1$) l'inégalité $|f(z)| < |z|$ sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire $ze^{i\theta}$, auquel cas $|f(z)| = |z|$.

On en peut conclure immédiatement que, hors le cas d'exception, $|f'(0)| < 1$ *sans égalité possible.* C'est évident si $f'(0) = 0$. Et si $f'(0) \neq 0$ on peut entourer 0 d'un cercle c assez petit pour que, z décrivant l'aire simple (C), $z_1 = f(z)$ décrive aussi une aire simple (C_1), à un seul feuillet, limité par une courbe analytique C_1 fermée *intérieure à C et contenant l'origine.* Cela permet de conclure que $|f'(0)| < 1$ car

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z^2}.$$

Or $\left|\frac{f(z)}{z^2}\right| < \left|\frac{1}{z}\right|$. Donc

$$|f'(0)| < \frac{1}{2\pi}\int \frac{|dz|}{|z|} = \frac{2\pi\varrho}{2\pi\varrho} = 1,$$

ϱ étant le rayon de C.

Le lemme de SCHWARZ affirme que, hors le cas banal $f(z) = ze^{i\theta}$, si z décrit l'intérieur du cercle $|z| \leq \varrho < 1$, son transformé $z_1 = f(z)$ décrit une surface de RIEMANN *toute entière intérieure à ce cercle* $|f(z)| < \varrho$, en supposant que $z = 0$ est un point invariant de la transformation.

Si l'on suppose maintenant que, pour $|z| < 1$ on a encore $|f(z)| \leq 1$, mais que le point ζ invariant ($f(\zeta) = \zeta$) n'est plus l'origine, mais un autre point *intérieur* au cercle $|\zeta|<1$, on verra bien facilement que, si ζ' désigne le point symétrique de ζ par rapport au cercle $|z|=1$, on aura, dans le cercle $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|\leq\varrho<\varrho_0$, ($\varrho_0$ étant la valeur constante de $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$ pour $|z|=1$, $\varrho_0=|\zeta|$), la relation

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right|<\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

quel que soit $\varrho<\varrho_0$, sauf dans le cas où

$$\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}=e^{i\theta}\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}$$

c'est-à-dire où $f(z)$ est *homographique,* auquel cas on a toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta}{f(z)-\zeta'}\right|=\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|.$$

Celà veut dire que, lorsque z décrit l'intérieur d'un cercle quelconque C du faisceau défini par les 2 points cercles ζ et ζ', cercle C intérieur à $|z|<1$, le point $z_1=f(z)$ *reste à l'intérieur du cercle* C sans jamais venir sur ce cercle, et décrit une surface de Riemann simplement connexe contenant ζ, toute intérieure à C (hors le cas où $f(z)$ est homographique).

S'affranchissant de l'hypothèse qu'il existe un point ζ invariant dans $|z|<1$, hypothèse qui peut très bien n'être pas vérifiée, on envisagera un point quelconque ζ et son symétrique ζ' par rapport au cercle $|z|=1$. Alors il est clair que, si $\zeta_1=f(\zeta)$ est la valeur correspondante à ζ et ζ'_1 le symétrique de ζ_1 par rapport au cercle $|z|=1$ (en supposant que ζ_1 ne soit pas sur le cercle), la fonction

$$\psi(z)=\frac{1}{|\zeta_1|}\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}$$

est une fonction de la variable

$$u=\frac{1}{|\zeta|}\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}$$

qui est nulle pour $u=0$ $(z=\zeta)$ et qui pour $|u|<1$ est toujours ≤ 1. On a donc, dans le cercle

$$\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|\leq\varrho<|\zeta|,$$

qui est un cercle quelconque du faisceau (ζ, ζ') intérieur à $|z| < 1$

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{\zeta_1}{\zeta}\right|\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

sauf le cas où $f(z)$ serait homographique et conserverait l'intérieur du cercle $|z| < 1$ auquel cas le signe $<$ est à remplacer par $=$.

Ce fait s'énonce plus simplement si l'on transforme par une substitution linéaire convenable l'intérieur de $|z| < 1$ en l'intérieur du demi-plan analytique supérieur ($I(z) =$ partie imaginaire de $z > 0$). On voit alors immédiatement que, si $z_1 = f(z)$ transforme tout point z de ce demi-plan $(I(z) > 0)$ en un point z_1 du demi-plan $(I(z_1) > 0)$, si ζ est un point quelconque du demi-plan $(I(\zeta) > 0)$ et $\zeta_1 = f(\zeta)$ pour lequel $I(\zeta_1) > 0$, en désignant par ζ' et ζ'_1 les valeurs *conjuguées* de ζ et ζ_1 on aura

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

tant que $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \varrho < 1$ quel que soit $\delta < 1$, sauf dans le cas où $f(z)$ est une fonction linéaire du type $\frac{az+b}{cz+d}$ conservant le demi-plan supérieur. Pour une telle fonction on aurait toujours

$$\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta'_1}\right| = \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$$

et d'ailleurs

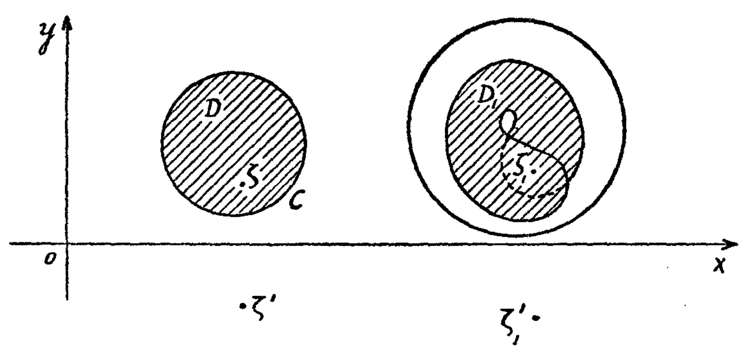
$$\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'} = \frac{z-\zeta}{z-\zeta'}e^{i\theta}.$$

Extension nouvelle du lemme de Schwarz.

On a analysé précédemment comment se comportait dans le cercle $|z| \leq 1$ la transformation $z_1 = f(z)$ lorsque cette transformation transforme en lui-même *l'intérieur du cercle* en laissant invariant un point *intérieur*. Il peut arriver que la transformation ne laisse invariants que des points situés *sur la circonférence* du cercle $|z| = 1$. Ici encore on peut analyser l'allure de la transformation *dans le cercle*.

En supposant que ce cercle a été transformé dans le demi-plan $I(z) \geq 0$, $z_1 = f(z)$ sera une fonction analytique dans le demi-plan supérieur; nous la supposerons analytique et réelle sur l'axe réel:[1] elle transformera l'axe réel en lui-même, et tout point situé au-dessus de l'axe réel en un point situé au-dessus de l'axe réel. On a vu que, si ζ est un point du demi-plan supérieur et $\zeta_1 = f(\zeta)$ son correspondant on a $\left|\frac{f(z)-\zeta_1}{f(z)-\zeta_1'}\right| < \left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right|$ lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence du cercle C $\left|\frac{z-\zeta}{z-\zeta'}\right| \leq \varrho < 1$ (excepté si $f(z)$ est homographique.)

Cela veut dire que, si z est intérieur à C ou sur sa circonférence, $z_1 = f(z)$ *est intérieur* au cercle C_1 défini par $\left|\frac{z_1-\zeta_1}{z_1-\zeta'_1}\right| = \varrho$.



Les cercles C et C_1 sont homothétiques par rapport à un point de l'axe réel; dans cette homothétie ζ et ζ_1 se correspondent. Le rapport des rayons de C et C_1 égale le rapport des ordonnées de ζ et ζ_1. Imaginons que ζ *tende vers un point* τ *de l'axe réel*, le cercle C conservant un rayon fini R; alors ζ_1 tendra vers τ_1 de l'axe réel[2] ($\tau_1 = f(\tau)$). Il est visible que, sur l'axe réel, $f'(z)$ est réelle et positive (non nulle); donc, ζ et ζ_1 tendant vers τ et τ_1, on conclut que le rapport $\frac{\text{ordonnée de } \zeta_1}{\text{ordonnée de } \zeta}$ tend vers une limite bien déterminée qui est égale à $f'(\tau)$. Il n'est pas difficile alors de conclure que, C tendant vers une position limite Γ qui est un cercle de rayon R tangent en τ à l'axe réel, C_1 tendra vers une position imite Γ_1 qui est un cercle de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à l'axe réel. Lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence du cercle Γ, $z_1 = f(z)$ décrit un domaine Δ_1 *qui n'aura aucun point extérieur à* Γ_1, mais qui, a priori, pourrait très bien avoir des points sur Γ_1. L'hypothèse contraire, celle où Δ_1 aurait des points extérieurs à Γ_1 conduirait à une contradiction; envisageant en effet un cercle C infiniment voisin de Γ et situé au-dessus de ox, auquel correspondrait un cercle C_1 infini-

[1] Cette hypothèse n'a rien de nécessaire, mais elle simplifie l'exposition. Nous donnerons en terminant des conditions de validité moins restrictives.

[2] On peut toujours supposer τ et τ_1 à distance finie.

ment voisin de Γ_1, C_1 devrait toujours contenir z_1 lorsque z est dans C; et ceci ne serait pas vrai lorsque z_1 serait voisin d'un point de Δ_1 extérieur à Γ_1, donc extérieur à C_1. On peut cependant affirmer que, lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence de Γ, z_1 décrit un domaine qui n'a, en commun avec Γ_1 que le point τ_1 lorsque $f(z)$ n'est pas homographique. On vient de voir en effet que, lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence de Γ (qui est évidemment un cercle *quelconque* de rayon R tangent à l'axe réel en τ), z_1 décrit un domaine dont tous les points sont à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ_1, tangent en τ_1 à ox, de rayon $R_1 = Rf'(\tau)$. Cela veut dire que la partie imaginaire de la fonction $\frac{1}{f(z)-\tau_1}$ est, à l'intérieur ou sur la circonférence de Γ, $\leq$ à une certaine limite négative qui est $-\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{Rf'(\tau)}$

$$I\left(\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right) \leq -\frac{1}{Rf'(\tau)}.[1]$$

Or, lorsque z décrit l'intérieur de Γ, on a

$$I\left(\frac{1}{z-\tau}\right) < -\frac{1}{R},$$

le signe $<$ étant remplacé par $=$ quand z vient sur Γ. Donc, *lorsque z décrit la circonférence Γ*, on aura

$$I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1} - \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right] \leq 0.$$

La fonction $I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1} - \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$ est une fonction harmonique et régulière en tout point intérieur à Γ, et en tout point de Γ sauf peut-être en $z=\tau$. Or, en ce point, on a

$$\begin{aligned} f(z)-\tau_1 = f(z)-f(\tau) &= (z-\tau)f'(\tau) + \frac{(z-\tau)^2}{2!}f''(\tau) + \cdots \\ &= (z-\tau)f'(\tau)[1+\lambda(z-\tau)+\cdots]. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1} = \frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}[1-\lambda(z-\tau)+\cdots],$$

[1] Car évidemment le point $\frac{1}{z_1-\tau_1}$, lorsque z_1 est dans Γ_1, est dans le demi-plan $I\left(\frac{1}{z_1-\tau_1}\right) \leq -\frac{1}{R_1}$.

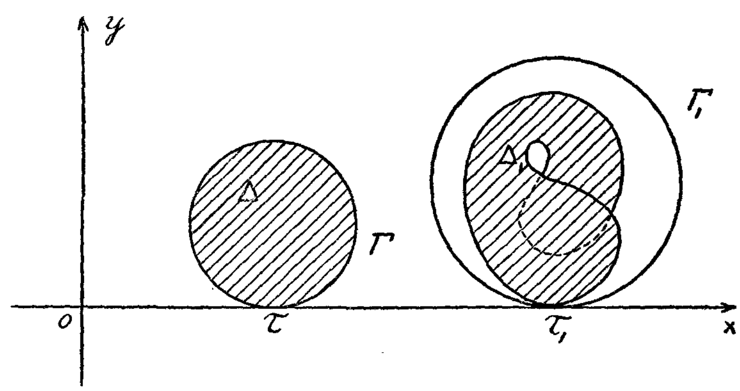
la quantité entre parenthèses étant régulière autour de $z=\tau$. Donc

$$\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}=-\frac{\lambda}{f'(\tau)}+\cdots,$$

le second membre étant régulière autour de $z=\tau$.

Donc $I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$ est harmonique et régulière autour de $z=\tau$. Cette fonction, si elle n'est pas constamment $=0$ sur Γ sera donc <0 à l'intérieur de Γ puisque, sur Γ, elle est ≤ 0. On aura donc *en tout point intérieur à* Γ

$$I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right]<I\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$



Cette inégalité ne peut devenir une égalité que si $I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}-\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right]$ est $=0$ sur tout Γ, alors la dite quantité est nulle dans tout Γ, et évidemment $f(z)$ est une fonction homographique: $\frac{1}{f(z)-\tau_1}=\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}+\varkappa$, $\varkappa$ étant une constante réelle quelconque.

Donc, hors le cas où $f(z)$ est homographique, on a, en tout point intérieur à Γ

$$I\left[\frac{1}{f(z)-\tau_1}\right]<I\left[\frac{1}{(z-\tau)f'(\tau)}\right].$$

Cette inégalité est valable en tout point z situé au-dessus de ox, car on peut trouver un cercle Γ tangent en τ à ox et contenant ce point z. Et elle prouve, ce qu'il fallait démontrer, que le domaine Δ_1 décrit par z_1 lorsque z décrit l'intérieur et la circonférence d'un cercle Γ tangent en τ à ox, de rayon R quelconque, est intérieur au cercle Γ_1, de rayon $Rf'(\tau)$ tangent en τ_1 à ox, sans avoir avec la circonférence de Γ_1 d'autre point commun que τ_1 lui-même.

Remarque. — Tout ce que nous avons dit reste vrai si nous supposons seulement $f'(z)$ analytique *autour de* τ (et réelle aux environs de τ sur l'axe réel), sans la supposer *analytique sur tout l'axe réel*, en supposant toujours qu'à tout point z au-dessus de ox correspond un point z_1 au-dessus de l'axe réel ou sur l'axe réel.

En particulier, *si* τ *est un point invariant* $f(\tau)=\tau$, et si $0<f'(\tau)\leq 1$ Γ_1 est intérieur à Γ ou confondu avec lui est Δ_1 et intérieur à Γ.

En résumé voici comment on peut, avec des hypothèses presque aussi générales que celles que l'on fait pour établir le lemme de Schwarz, énoncer l'extension de ce lemme:

Soit $f(z)$ une fonction *analytique à l'intérieur* d'un cercle C du plan des z, qu'on peut toujours supposer être le demi-plan $I(z)>0$; supposons en outre:

1° que tout point z intérieur à C soit transformé en un point $z_1=f(z)$ *intérieur à* C *ou situé sur* C, $I[f(z)]\geq 0$ en tout point $I(z)>0$;

2° qu'un point O du cercle C reste invariant: par exemple l'origine $f(0)=0$;

3° que $f(z)$ soit holomorphe dans une petite region[1] autour de ce point (on ne suppose rien d'autre sur C ailleurs qu'en 0).

Alors il faut nécessairement que $f'(0)$ *soit réelle et positive* pour que la condition 1° soit vérifiée autour de l'origine.

Tous les raisonnements qui précèdent sont ici valables; en tout point intérieur à C, c'est-à-dire *en tout point* $I(z)>0$, on a $I\left[\frac{1}{f(z)}\right]<I\left[\frac{1}{zf'(0)}\right]$, *l'égalité ne pouvant avoir lieu que si* $f(z)$ *est homographique.*

Donc, *lorsque* z *décrit l'intérieur et le contour d'un cercle quelconque* Γ *de rayon* R *tangent en* 0 *à* C, z_1 *décrit un domaine* Δ_1 *dont tous les points, y compris les points frontières, (sauf* 0*) sont intérieurs au cercle* Γ_1 *tangent en* 0 *à* C, *et de rayon* $R_1=Rf'(0)$. Δ_1 *est tangent en* 0 *à* C.

En particulier, si $f'(0)\leq 1$, Δ_1 est tout entier intérieur à Γ, sauf en 0 où Δ_1 touche Γ.

[1] Il suffit même de supposer que $f(z)$, holomorphe dans C, admet, lorsque z tend vers 0, *dans* C, une dérivée première et une dérivée seconde finies et continues de façon qu'on puisse écrire

$$z_1 = zf'(0)+z^2\frac{f''(0)}{2!}+z^2\varepsilon(z),$$

$\varepsilon(z)$ étant *holomorphe dans* C et tendant vers *zéro* lorsque z tend vers 0 dans C.