

Über Behandlung zyklischer Systeme mit Variationsprinzipien, mit Anwendungen auf die Mechanik starrer Körper.

Von

G. KOLOSOFF in Jurjew (Dorpat).

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie v. J. 1888 hat Herr H. Minkowski eine interessante Abhandlung über die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit publiziert. Von den sechs Kirchhoffschen Differentialgleichungen des Problems der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit nimmt er die drei ersten:

$$(1) \quad \frac{dU}{dt} = rV - qW, \quad \frac{dV}{dt} = pW - rU, \quad \frac{dW}{dt} = qU - pV,$$

wo p, q, r die augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um die Achsen eines mit dem Körper starr verbundenen Koordinatensystems und U, V, W die in der Richtung derselben Achsen genommenen Komponenten der Resultante des augenblicklichen Impulses sind, während (P, Q, R) das Drehmoment des Impulses um die im Körper festen Achsen bezeichnen soll. Die Differentialgleichungen der Bewegung haben alsdann das Integral

$$(2) \quad UP + VQ + WR = \text{const.} = JJ_1.$$

Mit seiner Hilfe drückt Minkowski p, q, r als Funktionen von U, V, W und $\frac{dU}{dt}, \frac{dV}{dt}, \frac{dW}{dt}$ aus.

Dann führt er die drei gefundenen Werte für p, q, r in die drei letzten Differentialgleichungen der Bewegung ein, nimmt statt u, v, w zwei Argumente e_1, e_2 derart, daß das Integral der Differentialgleichungen der Bewegung

$$(3) \quad U^2 + V^2 + W^2 = \text{const.} = J^2$$

identisch erfüllt wird, und kommt zu zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für e_1 und e_2 , die folgende Auslegung gestatten: „Man fixiere einen beliebigen Punkt und eine beliebige Richtung im Körper. In einem

Zeitelement dt sei $d\sigma$ der Weg des Punktes längs der unveränderlichen Achse des Impulses, $d\sigma_2$ der Weg der Richtung um diese Achse Die Größen e_1 und e_2 sind innerhalb einer beliebigen Zeitperiode solche Funktionen . . . , daß

$$\delta\Phi = 0,$$

wo

$$\Phi = \int T dt - J d\sigma - J_1 d\sigma_1$$

ist“ (T ist die lebendige Kraft des Systems).

Dieses Verschwinden der ersten Variation entspricht einer neuen und sehr anschaulichen Minimaleigenschaft des Problems der Rotation für den Fall, daß keine Kräfte wirken. Diese Eigenschaft, welche Minkowski, wie er angibt, durch eine umständliche Rechnung gefunden hat, ist jedoch nichts anderes, als der Larmorsche Satz (London Math. Soc. 1884), und die Funktion $T - J \frac{d\sigma}{dt} - J_1 \frac{d\sigma_1}{dt}$ die „modifizierte Lagrangesche Funktion“*) des Problems der Rotation. In der Tat, die sechs Differentialgleichungen der Bewegung entsprechen dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0,$$

wo U das Potential der äußeren Kräfte ist und, da hier keine Kräfte wirken, gleich 0 wird. Wir nehmen jetzt als im Raume festes Koordinatensystem ein rechtwinkliges System $O\Xi, OH, OZ$, von welchem OZ (für unseren Fall, daß keine Kräfte wirken) mit der im Raume stets unveränderlichen Richtung der Achse des Impulses zusammenfällt, führen in die Differentialgleichungen die drei Eulerschen Winkel $\psi = \sigma_1, \vartheta, \varphi$ ein, welche durch das im Körper feste Achsensystem mit den Achsen $O\Xi, OH, OZ$ gebildet werden, und bezeichnen die Koordinaten des Anfangspunktes des im Körper festen Achsensystems x, y, z durch $\xi_0, \eta_0, \zeta_0 = \sigma$. Die Differentialgleichungen der Bewegung ergeben dann die Integrale

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \psi'} &= \frac{\partial T}{\partial \sigma_1'} = \text{const.} = J_1, \\ \frac{\partial T}{\partial \xi_0'} &= \frac{\partial T}{\partial \sigma'} = \text{const.} = J, \end{aligned}$$

welche mit den Integralen (2) und (3) übereinstimmen.

Modifizieren wir nun die Lagrangesche Funktion des Problems (T) mit Hilfe dieser Integrale, so erhalten wir

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(T - J_1 \frac{d\sigma_1}{dt} - J \frac{d\sigma}{dt} \right) dt = 0,$$

was dem Minkowskischen Satz entspricht.

*) E. J. Routh, Die Dynamik der Systeme starrer Körper II, § 450, pg. 331.

Wir haben also hier nach dem Verfahren von Larmor eine Minaleigenschaft abgeleitet, welche mit der von Herrn Minkowski gefundenen identisch ist.

Herr Minkowski bemerkt in seiner Arbeit, daß sich für den Fall des Problems der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt ein ähnlicher Satz beweisen läßt. Mit Hilfe der Theorie der Modifikation werden wir in der Tat einen ähnlichen Satz nicht nur für den Fall der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt beweisen, sondern für jeden Fall der *Rotation um einen festen Punkt, in welchem in einer Ebene der Flächensatz besteht*. Nehmen wir nämlich die Z-Achse senkrecht zu dieser Ebene; dann muß das Moment aller Kräfte um diese Achse verschwinden und das Flächenintegral nimmt die Form an:

$$\frac{\partial(T+U)}{\partial\psi'} = \text{const} = l.$$

Modifizieren wir die Lagrangesche Funktion mit Hilfe dieses Integrals, so erhalten wir:

$$(4) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(T + U - l \frac{d\psi}{dt} \right) dt = 0.$$

Die Methode von Herrn Minkowski hat jedoch den Vorzug, das Problem der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt auf ein Problem der Punktmechanik zu reduzieren. Zum Zweck der gleichen Reduktion nehmen wir statt der Eulerschen Winkel ψ, φ, ϑ drei neue Variable

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{A}} \cos(Zx) = -\frac{1}{\sqrt{A}} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{B}} \cos(Zy) = \frac{1}{\sqrt{B}} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= \frac{1}{\sqrt{C}} \cos(Zz) = \frac{1}{\sqrt{C}} \cos \vartheta \end{aligned}$$

welche der Gleichung

$$(5) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

identisch genügen. Als Achsensystem, welches im Körper fest ist, wählen wir die Hauptachsen im festen Punkt und A, B, C seien die Trägheitsmomente. Dann erhält die lebendige Kraft des Körpers die Form

$$\frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{1}{2} \frac{l^2 + ABC \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]}{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2}.$$

Indem wir nun in das modifizierte Hamiltonsche Prinzip (4) die Größen

$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ statt ψ, ϑ, φ einführen, erhalten wir einen Ausdruck, welcher für den Fall $l=0$ folgende sehr einfache Form annimmt:

$$(6) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{ABC \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]}{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2} + U \right\} dt = 0.$$

Diese Form ist dem Hamiltonschen Prinzip für die Bewegung eines materiellen Punktes ganz analog. Wenn wir die Lösung des Variationsproblems (6) auf Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen und statt der rechtwinkligen die elliptischen Koordinaten λ_1 und λ_2 an der Oberfläche des Ellipsoids (5) heranziehen, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$(7) \quad 2\lambda_1\lambda_2 \left\{ \frac{\varphi(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_1} \right)^2 + \frac{\varphi(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_2} \right)^2 \right\} = U + h,$$

wo

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{1}{A} + \lambda \right) \left(\frac{1}{B} + \lambda \right) \left(\frac{1}{C} + \lambda \right)$$

ist.

Das vollständige Integral dieser Gleichung kann, falls

$$(8) \quad U = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \{ \Phi(\lambda_1) - \Phi(\lambda_2) \}$$

ist, in der Form

$$V = \int \frac{V_{\lambda_1} \sqrt{-\Phi(\lambda_1) - \frac{h}{\lambda_1} + C}}{V^2 \sqrt{\varphi(\lambda_1)}} d\lambda_1 + \int \frac{V_{\lambda_2} \sqrt{-\Phi(\lambda_2) - \frac{h}{\lambda_2} + C}}{V^2 \sqrt{\varphi(\lambda_2)}} d\lambda_2$$

hingeschrieben werden.

Die Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung nehmen dann die Form an

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{\lambda_1 d\lambda_1}{V_{\varphi(\lambda_1)} \sqrt{C\lambda_1 - h - \lambda_1 \Phi(\lambda_1)}} + \int \frac{\lambda_2 d\lambda_2}{V_{\varphi(\lambda_2)} \sqrt{C\lambda_2 - h - \lambda_2 \Phi(\lambda_2)}} = \text{const.}, \\ & \int \frac{d\lambda_1}{V_{\varphi(\lambda_1)} \sqrt{C\lambda_1 - h - \lambda_1 \Phi(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2}{V_{\varphi(\lambda_2)} \sqrt{C\lambda_2 - h - \lambda_2 \Phi(\lambda_2)}} = 2\sqrt{2} (t - t_0). \end{aligned} \right.$$

Auf diese Weise erhalten wir, bei $\Phi(\lambda) = \text{const.} \times \lambda$, die Lösung des Problems der Rotation, wenn

$$\begin{aligned} U &= \text{const.} \times (A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) \\ &= \text{const.} \times (A \cos^2(Zx) + B \cos^2(Zy) + C \cos^2(Zz)) \end{aligned}$$

ist. Es ist dieses das Problem von de Brun*), welches, wie Herr Stekloff nachgewiesen hat**), mit dem Problem von A. Clebsch***) über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit identisch ist. Die hier durch die Formeln (9) gegebene Lösung ($l = 0$) stimmt mit der von Herrn H. Weber†) gegebenen überein.

Bei $\Phi(\lambda) = \text{const.} \times \lambda^2$ erhalten wir eine Lösung für den Fall

$$U = \text{const.} (A \cos^2(Zx) + B \cos^2(Zy) + C \cos^2(Zz)) \\ \cdot \left(\frac{1}{A} \sin^2(Zx) + \frac{1}{B} \sin^2(Zy) + \frac{1}{C} \sin^2(Zz) \right)$$

und bei $\Phi(\lambda) = \frac{\text{const.}}{\lambda^2}$ für den Fall

$$U = \text{const.} \frac{\frac{1}{A} \sin^2(Zx) + \frac{1}{B} \sin^2(Zy) + \frac{1}{C} \sin^2(Zz)}{A \cos^2(Zx) + B \cos^2(Zy) + C \cos^2(Zz)} \\ \text{usw.}$$

Es läßt sich nun folgende Bemerkung über die Modifikation der Lagrangeschen Funktion machen, wenn es sich um ein mechanisches Problem handelt, das die Integrale

$$(10) \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial\psi'} = \text{const.} = l_1, \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial\varphi'} = \text{const.} = l_2 \dagger\dagger)$$

zuläßt und der Fall $l_1 = l_2 = 0$ zu untersuchen ist, bei dem die Integrale (10) die Form

$$(11) \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial\psi'} = 0, \quad \frac{\partial(T+U)}{\partial\varphi'} = 0$$

annehmen. Werden in dem unter dem Integralzeichen des Hamiltonschen Prinzips stehenden Ausdruck $T+U$ die Variablen ψ' , φ' mittels der Integrale eliminiert und die so gebildete Funktion durch $[T+U]$ bezeichnet, so ist

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [T+U] dt = 0,$$

da in der modifizierten Funktion die Glieder

$$- l_1 \frac{d\psi}{dt} - l_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

verschwinden.

*) Appell, *Traité de Mécanique rationnelle* II art. 500, pg. 449. — Kobb, *Bulletin des sciences mathématiques* t. XXIII.

**) Remarque sur un problème de Clebsch... *Journal de Mathématiques* 1903.

***) *Math. Annalen* III.

†) *Math. Annalen* XIV.

††) Hier sind nur zwei Variablen angeführt; doch ist die Theorie natürlich auch bei einer beliebigen Anzahl derselben richtig.

Diese Regel bleibt auch richtig für den Fall, daß partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen der Bewegung von der Form (11) bestehen, vorausgesetzt, daß diese nicht Spezialfälle von Integralen der Form (10) sind. Auf diesem Wege läßt sich das Hauptresultat des Hess'schen Falles der Bewegung eines starren Körpers unter dem Einfluß gegebener Kräfte und Reaktionen der Zwangsverbindungen*) beweisen. Diese Kräfte und Reaktionen sind hier der Bedingung unterworfen, daß die Momente derselben um die Senkrechte P zu den Kreisschnitten des reziproken Trägheitsellipsoids (im Schwerpunkt) verschwinden. Dann ergeben die Differentialgleichungen die Lösung

$$(12) \quad A\alpha p + C\gamma r = 0$$

(α, β, γ sind die Richtungskosinus der oben erwähnten Senkrechten P in bezug auf die Hauptachsen im Schwerpunkt; p, q, r sind die augenblicklichen Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um dieselben Achsen; A, B, C sind die Hauptträgheitsmomente im Schwerpunkt und es ist $A > B > C$). Drehen wir nun die Hauptachsen um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments und bringen die neue z -Achse mit der Senkrechten P zum Zusammenfallen, dann kann die Lösung (12), da ihre linke Seite die Winkelbewegungsgröße des Körpers um die Senkrechte P oder um die neue Achse Z darstellt, in die Form gebracht werden

$$(13) \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{\partial(T+U)}{\partial \varphi'} = 0$$

wo T die lebendige Kraft des Körpers und φ einer der Eulerschen Winkel ψ, ϑ, φ ist, welche die neuen Achsen mit den festen Achsen $O\Xi, OH, OZ$ bilden. Wir können nun φ' mittels des Integrals (13) oder (12) in dem unter dem Integralzeichen des Hamiltonschen Prinzips stehenden Ausdruck $T + U$ eliminieren. Dann nimmt dieser Ausdruck die Form

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} B(p^2 + q^2) + U$$

an, wo M die Masse des Körpers und v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts bezeichnen. Das modifizierte Hamiltonsche Prinzip können wir in der Form

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{B}{2} (p^2 + q^2) + \frac{1}{2} Mv^2 + U \right] dt = 0$$

schreiben und folgenden Satz aufstellen:

*) Der Hess'sche Fall der Bewegung eines schweren starren Körpers (F. Klein und A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels p. 374 ff., Kap. V, § 9) und dessen Verallgemeinerungen (G. Kolossoff, Gött. Nachr. 1898; G. Kolossoff, On a case of motion of a rigid body, Messenger of Mathem. 1901).

Wenn es sich um die Untersuchung der Bewegung von P handelt, so können wir die ganze Masse des Körpers in P konzentriert denken, wobei wir sie so zu verteilen haben, daß ihr Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt $= B$ ist.

Nachdem hier die Modifikationen des Hamiltonschen Prinzips besprochen sind, erscheint es zweckmäßig, auch die Anwendung einiger anderer Methoden zum Übergang von einem kanonischen System von Differentialgleichungen zu einem anderen zwecks Lösung von Problemen aus der Mechanik starrer Körper zu geben.

Die lebendige Kraft eines um einen festen Punkt rotierenden Körpers ist unter der Annahme, daß die im Körper festen Achsen mit den Hauptachsen zusammenfallen:

$$\begin{aligned} 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = & (A \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + B \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + C \cos^2 \varphi) \psi'^2 \\ & + (A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \vartheta'^2 + C \varphi'^2 + 2\psi' \vartheta' (B - A) \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \\ & + 2C \psi' \varphi' \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Das Moment der äußeren Kräfte um die im Raume feste Achse OZ setzen wir $= 0$; dann ergeben die Differentialgleichungen der Rotation das Flächenintegral

$$\begin{aligned} (14) \quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = & \psi' (A \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + B \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + C \cos^2 \varphi) \\ & + \vartheta' (B - A) \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + C \varphi' \cos \vartheta = \text{const.} = l. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$p_{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = Cr,$$

$$p_{\psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi'} = -Ap \sin \vartheta \cos \varphi + Bq \sin \vartheta \sin \varphi + Cr \cos \vartheta,$$

$$p_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = Ap \sin \varphi + Bq \cos \varphi,$$

so folgt leicht

$$(15) \quad \begin{cases} Ap = p_{\vartheta} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi (p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}, \\ Bq = \frac{(p_{\psi} - p_{\varphi} \cos \vartheta) \sin \varphi}{\sin \vartheta} + p_{\vartheta} \cos \varphi, \\ Cr = p_{\varphi}. \end{cases}$$

Die Jacobi-Hamiltonsche partielle Differentialgleichung ist, wenn die Kräfte eine Kräftefunktion U besitzen,

$$(16) \quad \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{C} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cos \varphi + \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) \sin \varphi}{\sin \vartheta} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \sin \varphi - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \cos \vartheta \right) \cos \varphi}{\sin \vartheta} \right)^2 \right\} = U + h.$$

Gehen wir nun zu den neuen Variablen u, v über, indem wir annehmen, daß

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 = F(u, v), \\ Cr = \Phi(u, v),$$

wo F und Φ beliebige Funktionen sind. Dann erhalten wir mit Hilfe der Ausdrücke (15) und des Flächenintegrals (14):

$$p_\varphi = \Phi(u, v), \\ p_\vartheta = \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}.$$

Mittels der Funktion

$$\chi(u, v, \varphi, \vartheta) = \Phi(u, v) \varphi + \int \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta$$

führen wir an Stelle der Variablen $\varphi, \vartheta, p_\varphi, p_\vartheta$ die Variablen u, v, p_u, p_v nach den Jacobischen Formeln ein:

$$(17) \quad \begin{cases} p_\varphi = \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} = \Phi(u, v), \\ p_\vartheta = \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} = \sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}, \\ p_u = -\frac{\partial \chi}{\partial u} = -\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial u} + 2 \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial u}}{\sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}} d\vartheta, \\ p_v = -\frac{\partial \chi}{\partial v} = -\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial v} + 2 \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} \cos \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\sqrt{F(u, v) - \frac{(l - \Phi(u, v) \cos \vartheta)^2}{\sin^2 \vartheta}}} d\vartheta. \end{cases}$$

Diese Integrale können durch Logarithmen dargestellt werden.

Auf diesem Wege können wir den *Goriatschoffschen**) *Fall der Rotation eines starren Körpers* um einen Punkt behandeln und die *Tschaplyginschen***) *Formeln der Reduktion des Problems auf ultra-*

*) D. N. Goriatschoff, Mosk. Math. Gesellschaft 1900.

**) S. A. Tschaplygin, Arbeiten der phys. Sektion der Moskauer Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde 1901. Diese Formeln sind von S. Tschaplygin mit Hilfe eines vierten Integrals

$$r(p^2 + q^2) + ap \cos \vartheta = \text{const.}$$

erhalten worden.

elliptische Funktionen erhalten. Wir haben hier $A=B=4C$ (wir können $A=B=1$, $C=4$ setzen), $l=0$, $U=a \cos (Zx)$ (der Schwerpunkt liegt in der Ebene der gleichen Hauptträgheitsmomente). Die Differentialgleichung (16) nimmt hier die Form

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)^2 \cot^2 \vartheta \right\} \right] = -a \sin \vartheta \cos \varphi + h$$

an.

Setzen wir in den Transformationsformeln (17)

$$\Phi(u, v) = i(u + v),$$

$$F(u, v) = 4uv,$$

so erhalten wir:

$$p_\varphi = i(u + v),$$

$$p_\vartheta = \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta},$$

$$\begin{aligned} p_u &= -\varphi i - \int \frac{2v + (u + v) \cot^2 \vartheta}{\sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta}} d\vartheta \\ &= -i\varphi + \lg \{ a \cos \vartheta [(v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta}] + 2ua \sin \vartheta \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_v &= -i\varphi - \int \frac{2u + (u + v) \cot^2 \vartheta}{\sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta}} d\vartheta \\ &= -i\varphi + \lg \{ a \cos \vartheta [(v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta}] + 2va \sin \vartheta \}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(18) \quad \begin{cases} e^{p_u + i\varphi} = a \cos \vartheta \{ (v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta} \} + 2ua \sin \vartheta, \\ e^{p_v + i\varphi} = a \cos \vartheta \{ (v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta} \} + 2va \sin \vartheta, \end{cases}$$

$$\frac{e^{p_u} - e^{p_v}}{2a(v - u)} = -\sin \vartheta e^{-\varphi i} = -\sin \vartheta \cos \varphi + i \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$\frac{(ve^{p_u} - ue^{p_v})e^{i\varphi}}{a(v - u) \{ (v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta} \}} = \cos \vartheta.$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (18) erhalten wir

$$e^{2i\varphi + p_u + p_v} = a^2 ((v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta})^2$$

oder

$$\frac{e^{i\varphi}}{a((v + u) \cot \vartheta + \sqrt{4uv + (u + v)^2 \cot^2 \vartheta})} = e^{-\frac{p_u + p_v}{2}}$$

Man erhält so

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta = \frac{e^{p_u} - e^{p_v}}{(u - v)^2} (u^2 e^{-p_u} - v^2 e^{-p_v})$$

$$-\sin \vartheta \cos \varphi - i \sin \vartheta \sin \varphi = -\frac{\sin^2 \vartheta}{\sin \vartheta e^{-\varphi i}} = -2a \frac{u^2 e^{-p_u} - v^2 e^{-p_v}}{u - v}.$$

Daraus folgt

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \frac{a}{2} \left\{ \frac{1}{2a} \frac{e^{pu} - e^{pv}}{u - v} + 2a \frac{u^2 e^{-pu} - v^2 e^{-pv}}{u - v} \right\}.$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft, ausgedrückt durch die neuen Variablen, nimmt die Form an:

$$-\frac{1}{2}(u^2 + uv + v^2) + \frac{1}{4} \frac{e^{pu} - e^{pv} + 4a^2(u^2 e^{-pu} - v^2 e^{-pv})}{u - v} = h$$

oder

$$-(u^3 - v^3) + \frac{1}{2}(e^{pu} - e^{pv} + 4a^2(u^2 e^{-pu} - v^2 e^{-pv})) = 2h(u - v).$$

Die partielle Differentialgleichung lautet nach Einführung der neuen Variablen

$$(19) \quad \begin{aligned} &\left(-u^3 + \frac{1}{2} e^{\frac{\partial V}{\partial u}} + 2a^2 u^2 e^{-\frac{\partial V}{\partial u}} - 2hu \right) \\ &- \left(-v^3 + \frac{1}{2} e^{\frac{\partial V}{\partial v}} + 2a^2 v^2 e^{-\frac{\partial V}{\partial v}} - 2hv \right) = 0. \end{aligned}$$

Zur Integration dieser Gleichung können wir annehmen, daß

$$\begin{aligned} -u^3 + \frac{1}{2} e^{\frac{\partial V}{\partial u}} + 2a^2 u^2 e^{-\frac{\partial V}{\partial u}} - 2hu &= \Gamma, \\ -v^3 + \frac{1}{2} e^{\frac{\partial V}{\partial v}} + 2a^2 v^2 e^{-\frac{\partial V}{\partial v}} - 2hv &= \Gamma \end{aligned}$$

ist, wo Γ eine willkürliche Konstante darstellt.

Daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u} &= \lg(u^3 + 2hu + \Gamma + \sqrt{(u^3 + 2hu + \Gamma)^2 - 4a^2 u^2}), \\ \frac{\partial V}{\partial v} &= \lg(v^3 + 2hv + \Gamma + \sqrt{(v^3 + 2hv + \Gamma)^2 - 4a^2 v^2}). \end{aligned}$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (19) lautet:

$$\begin{aligned} V &= \int \lg(u^3 + 2hu + \Gamma + \sqrt{(u^3 + 2hu + \Gamma)^2 - 4a^2 u^2}) du \\ &+ \int \lg(v^3 + 2hv + \Gamma + \sqrt{(v^3 + 2hv + \Gamma)^2 - 4a^2 v^2}) dv. \end{aligned}$$

Die Integrale des Problems der Rotation nehmen dann folgende Form an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \Gamma} &= \int \frac{du}{\sqrt{(u^3 + 2hu + \Gamma)^2 - 4a^2 u^2}} + \int \frac{dv}{\sqrt{(v^3 + 2hv + \Gamma)^2 - 4a^2 v^2}} = \text{const.}, \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \int \frac{2u du}{\sqrt{(u^3 + 2hu + \Gamma)^2 - 4a^2 u^2}} + \int \frac{2v dv}{\sqrt{(v^3 + 2hv + \Gamma)^2 - 4a^2 v^2}} = t - t_0. \end{aligned}$$

Dieses System stimmt mit dem ultraelliptischen System von S. Tschaplygin überein.