Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven.*)

Von

Artur Rosenthal in München.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Den nachstehenden Untersuchungen liegt der allgemeinste Begriff reeller ebener Kurven zugrunde: Eine *Kurve* oder, schärfer ausgedrückt, eine *Parameterkurve* ist das eindeutige und stetige Abbild einer Strecke. Die Punkte t dieser Strecke $(t_A \cdots t_B)$ sollen dann die *Parameter* unserer Kurve heißen.

Hierbei würde die Kurve zunächst keine unendlichfernen Punkte enthalten können. Unendliche ferne Kurvenpunkte werden jedoch zugelassen, wenn man (wie in der projektiven Geometrie) die Ebene durch Hinzunahme der unendlichfernen uneigentlichen Punkte abgeschlossen macht und dann von der folgenden nichtmetrischen Stetigkeitsdefinition Gebrauch macht**):

Eine abgeschlossene Punktmenge Q heißt *stetiges Abbild* einer anderen abgeschlossenen Punktmenge P, wenn jedem Grenzpunkt einer Punktfolge von P der Grenzpunkt der entsprechenden Punktfolge in Q zugeordnet ist.***)

*) Mit dieser Abhandlung hat sich der Verfasser im Juli 1912 an der Münchener Universität habilitiert. Im vorliegenden Abdruck sind einige geringfügige Kürzungen vorgenommen worden (insbesondere in Nr. 11, 21, 22), wogegen der Anfang von Nr. 40 etwas ausführlicher dargestellt ist.

**) Oder, was dasselbe wäre, man behandle statt des ebenen Gebildes seine Projektion auf eine Kugel K aus deren Mittelpunkt M_K.

***) Vgl. E. Heine, J. f. Math. 74 (1872), S. 182, wo dies als Satz ausgesprochen ist.

Charakteristisch für die Kurve ist einerseits die von ihr gebildete Punktmenge, andererseits die durch die Abbildung der Strecke bewirkte Anordnung der Kurvenpunkte. Zwei Kurven sind demnach als identisch zu betrachten, wenn sie in Punktmenge und Anordnung der Kurvenpunkte übereinstimmen. Im übrigen kann dieselbe Kurve in verschiedenster Weise auf die Parameterstrecke $(t_A \cdots t_B)$ bezogen werden; d. h. (den Parameter t als „Zeit“ gedacht), daß die „Durchlaufungszeit“ der einzelnen Kurvenstücke keine Rolle spielen soll.

Ohne Menge oder Anordnung der Kurvenpunkte einzuschränken, kann man voraussetzen, daß niemals einem ganzen Parameterintervalle $(t_\alpha \cdots t_\beta)$ ein *einziger* Kurvenpunkt P_0 entsprechen soll. Die einem vielfachen Punkte P_0 entsprechenden Parameter t_i bilden dann eine *nirgends dichte* Menge.

Im folgenden soll nun hauptsächlich studiert werden, in welchen *Mengen* die verschiedenen Arten von Singularitäten bei reellen ebenen Kurven auftreten können. Mit Singularitäten sind hierbei (wie auch sonst in der Kurvenlehre) bezeichnet: Spitzen, Ecken, Wendepunkte, mehrfache Punkte und mehrfache Tangenten, ferner nicht differenzierbare Stellen. Die Definitionen dieser Singularitäten im Fall unserer allgemeinen Kurven werden im § 1 genauer erörtert und es ergeben sich dabei mancherlei recht ungewohnte und merkwürdige Möglichkeiten. § 2 behandelt sodann die Menge der in *einem* Punkt vereint liegenden Singularitäten. In den folgenden beiden Paragraphen werden die Mengen der überhaupt auf einer Kurve gelegenen Singularitäten betrachtet. Dabei ergeben sich naturgemäß vielfach schärfere Aussagen, wenn man den Kurven noch gewisse Bedingungen auferlegt (beispielsweise Differenzierbarkeit oder Beschränkung der Mächtigkeit von Art oder Klasse). Die Resultate sind nicht unbeschränkt dualisierbar, sondern die Kurven müssen hierzu noch gewissen verhältnißmäßig speziellen Bedingungen genügen. Der letzte Paragraph untersucht dies näher und betrachtet die „dualisierbaren“ Kurven.

Im ganzen ergeben sich eine große Anzahl allgemeiner Resultate, die nicht nur für die geometrische Kurvenlehre, sondern zum Teil auch für die Funktionentheorie reeller Variabeln Neues bringen.

§ 1.
Die Definitionen der Singularitäten.

1. Ein Punkt P, dem m bzw. unendlichviele t-Parameter zugehören, heiße ein *m-facher* bzw. *unendlichvielfacher Punkt*; in P liegen m bzw. unendlichviele Kurvenpunkte vereinigt. Wir sagen auch, der Punkt P sei von m^{tem} bzw. von unendlichem *Vielfachheitsgrad*. Besitzt eine Kurve nur-endlichvielfache bzw. nur beschränkt-vielfache Punkte, so sagen wir der

Vielfachheitsgrad der Kurve sei endlich bzw. beschränkt. (Ist im letzteren Falle n das Maximum der Vielfachheitsgrade der Kurvenpunkte, so nenne man n zugleich den Vielfachheitsgrad der Kurve.) Enthält dagegen die Kurve auch unendlichvielfache Punkte, so sage man, der Vielfachheitsgrad der Kurve sei unendlich; ist hierbei der Vielfachheitsgrad der Kurvenpunkte höchstens abzählbar bzw. höchstens von der Mächtigkeit des Kontinuums, so bezeichne man den Vielfachheitsgrad der Kurve als abzählbar bzw. als von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Im folgenden bezeichne t immer einen Parameter, P einen Punkt der Ebene; wenn, wie bei mehrfachen Punkten, in *einem* Punkt P mehrere Kurvenstellen vereinigt liegen, so bezeichne $P(t)$ oder P_t die zum Parameter t gehörende Kurvenstelle in P.

2. Das zu den Parametern $t_i < t$ bzw. $t_i > t$ gehörende Kurvenstück soll der *vordere* bzw. *hintere Kurvenzug* von $P(t)$ heißen.

Hat man eine gegen t konvergierende Folge von Parametern $t_1, t_2, t_3, \cdots$ wobei alle $t_i < t$ (bzw. alle $t_i > t$) sind, und gehören zu dieser Folge $\{t_i\}$ lauter von $P(t)$ verschiedene Punkte $\{P_i\}$ und ist die von P ausgehende Halbgerade a_t die Grenzlage der Folge der Halbgeraden $\{\overrightarrow{PP_i}\}$, so heiße a_t eine *vordere* (bzw. *hintere*) *Halbtangente* von $P(t)$. Ergibt sich für alle gegen t von vorn (bzw. hinten) konvergierenden Parameterfolgen *dieselbe* Halbtangente a_t, so heißt die Stelle $P(t)$ *vorn* (bez. *hinten*) *differenzierbar*. Jede Gerade, die eine vordere oder hintere Halbtangente von $P(t)$ enthält, nennen wir *Tangente* oder, wenn eine genauere Bezeichnung nötig ist, *allgemeine Tangente*. Ist die Stelle $P(t)$ vorn und hinten differenzierbar und liegen die vordere und hintere Halbtangente in *einer* Geraden $\bar{a}_t$, so heißt die Stelle $P(t)$ *vollständig differenzierbar*; $\bar{a}_t$ ist die einzige *Tangente* von $P(t)$ und werde, wo eine Unterscheidung von den allgemeinen Tangenten nötig ist, *wirkliche Tangente* genannt. Sind in einer differenzierbaren Stelle die vordere und hintere Halbtangente entgegengesetzt gerichtet, so haben wir eine *gewöhnliche* differenzierbare Stelle, fallen sie zusammen, so haben wir eine *Spitze*. Ist die Stelle $P(t)$ vorn und hinten differenzierbar, aber liegen die vordere und hintere Halbtangente *nicht* in *einer* Geraden, sondern bilden einen Winkel ε miteinander (wobei immer $\varepsilon < \pi$), so haben wir eine *vorn und hinten differenzierbare Ecke von der Größe* ε. Allgemeiner nennen wir eine (auch vorn und hinten nicht differenzierbare) Stelle $P(t)$ eine *Ecke von der Größe* ε, wenn man einen Winkel $\eta < \pi$ finden kann, sodaß alle vorderen und hinteren Halbtangenten von $P(t)$ innerhalb dieses Winkels η eingeschlossen sind, und wenn ε den kleinsten*) aller dieser Winkel η darstellt und außerdem von Null ver-

*) Ein solcher *kleinster* Winkel (dessen Schenkel selbst Halbtangenten sind),

schieden ist. Jede (differenzierbare oder nichtdifferenzierbare) Stelle, die weder Spitze noch Ecke ist, soll eine *gewöhnliche* Stelle heißen. Eine differenzierbare Stelle $P(t)$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn die Tangente in $P(t)$ die Grenzlage aller Folgen von Nachbartangenten ist. Eine Kurve, die lauter stetig differenzierbare Stellen enthält, wird selbst stetig differenzierbar genannt.

3. Ein mehrfacher Kurvenpunkt P heiße ein *vollständiger Selbstberührungspunkt*, wenn von P zwei Halbgerade ausgehen, sodaß für jede in P liegende Stelle $P(t_i)$ die eine eine vordere, die andere eine hintere Halbtangente ist; andernfalls heiße P ein *eigentlicher mehrfacher Punkt*.

Eine mehrfache Tangente a werde *vollständige Selbstberührungstangente* genannt, wenn alle Berührungsstellen von a in einen einzigen Punkt zusammenfallen; andernfalls heiße a *eigentliche mehrfache Tangente*.

4. Bei den Kurven *endlichen Vielfachheitsgrades* existiert (wie man es aus der Lehre der reellen stetigen Funktionen gewohnt ist) in jeder Kurvenstelle immer entweder eine *einzige* vordere (bzw. hintere) Halbtangente oder *ein ganzer Winkelraum* von solchen.

Beweis. Bei Kurven von endlichem Vielfachheitsgrad kann man zu jedem Parameter t eine endliche Umgebung $\tau = (t_\alpha \cdots t \cdots t_\beta)$ finden, derart, daß nur t und sonst keinem andern Parameter von τ der Punkt P zugeordnet ist. Gibt es in $P(t)$ zwei verschiedene vordere (bzw. hintere) Halbtangenten $a_{1,t}$ und $a_{2,t}$, die den Winkel φ und $(2\pi - \varphi)$ begrenzen, so existieren zwei gegen $P(t)$ konvergierende Folgen von Kurvenpunkten, $\{P_{1,i}\}$ und $\{P_{2,i}\}$ derart, daß die Sehnen $\{\overline{PP_{1,i}}\}$ gegen $a_{1,t}$ und die Sehnen $\{\overline{PP_{2,i}}\}$ gegen $a_{2,t}$ konvergieren. Man wähle nun solche Teilfolgen $\{P^0_{1,i}\}$ und $\{P^0_{2,i}\}$ aus, daß die zugehörigen Parameter die Anordnung

$$t^0_{1,i} < t^0_{2,i} < t^0_{1,i+1}$$

besitzen. Da für genügend große i die Kurvenstücke $\mathfrak{C}_i = (P^0_{1,i}\, P^0_{2,i})$ nicht durch $P(t)$ hindurchgehen, so besitzt $P(t)$ eine endliche Entfernung von diesen $\mathfrak{C}_i$ und deshalb wird jedes dieser $\mathfrak{C}_i$ von allen durch $P(t)$ gehenden Halbgeraden eines der beiden Winkelräume $\sphericalangle(P^0_{1,i};\, P(t);\, P^0_{2,i})$ getroffen. Es wird also sicherlich einer der beiden Winkel φ oder $(2\pi - \varphi)$ von Halbtangenten des Kurvenpunktes $P(t)$ vollständig erfüllt. q. e. d.

5. Der vorstehende Satz ist dagegen für Kurven *unendlichen* Vielfachheitsgrades nicht mehr allgemein richtig: In unendlichvielfachen Punkten P können zu einer Stelle $P(t)$ auch *verschiedene, getrennt liegende* vordere

existiert hier immer, da unten (Nr. 5) gezeigt wird, daß die Halbtangenten einer Stelle $P(t)$ immer eine endliche oder abgeschlossene Menge bilden.

(ebenso hintere) Halbtangenten gehören. Solche Stellen $P(t)$, bei denen die vorderen oder die hinteren Halbtangenten nicht eine einzige Halbgerade darstellen oder einen einzigen Winkelraum erfüllen, sollen *Strahlenpunkte* genannt werden; die verschiedenen, getrennt liegenden einzelnen Halbgeraden und vollen Winkelräume, aus denen die Menge der vorderen bzw. der hinteren Halbtangenten einer Stelle $P(t)$ sich zusammensetzt, sollen die *vorderen* bzw. *hinteren Strahlen* von $P(t)$ heißen.

Die Möglichkeit der *Existenz solcher Strahlenpunkte* in unendlichvielfachen Kurvenpunkten ergibt sich aus den folgenden Beispielen:

Beispiel für Strahlenpunkte mit endlichvielen Strahlen (vgl. Figur 1): Man wähle etwa n vom Punkte P ausgehende Halbgeraden a_i $(i=1,\cdots,n)$*) und zu jeder der Halbgeraden a_i eine unendliche Folge von ineinanderliegenden Schleifen $\{\mathfrak{S}_k\}_i$, die alle in P die Halbgerade a_i berühren (etwa in P Spitzen haben); mit wachsendem k soll die Länge der Schleifen und der Winkel, unter dem die Schleifen von P aus gesehen werden, wie $\frac{1}{k}$ gegen Null abnehmen. Nunmehr teile man das Parameterintervall $(t_0 \cdots t_\omega)$ mittels der gegen t_ω

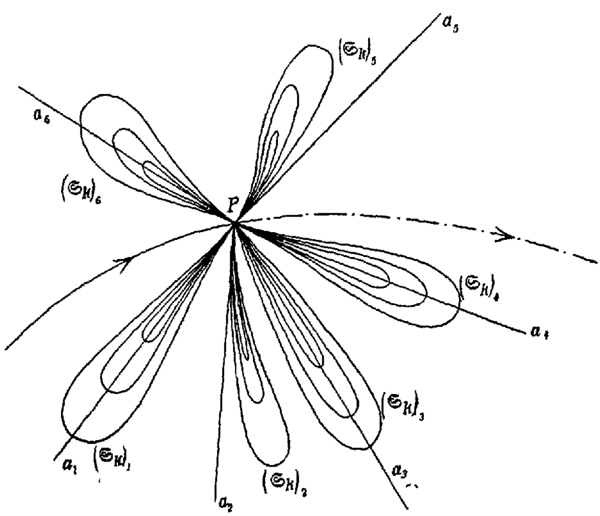

Fig. 1.

konvergierenden Parameterfolge $\{t_m\}$ in eine Intervallfolge $\{\tau_m\}$**). Schließlich lasse man den Parametern $\{t_m\}$ und t_ω den Punkt P entsprechen und ordne dem Intervall τ_{nk+i} die Schleife $(\mathfrak{S}_k)_i$ zu. Dann sind die Halbgeraden $a_1, \cdots, a_m$ die alleinigen (vorderen bzw. hinteren) Halbtangenten und Strahlen für $P(t_\omega)$.

Wollte man auch Strahlen erhalten, die aus einem ganzen Winkelraum von Halbtangenten bestehen, so hätte man im vorigen für das betr. i den Winkel, unter dem die Schleifen $\{\mathfrak{S}_k\}_i$ von P aus erscheinen, etwa konstant zu halten.

*) n ist eine beliebige ganze Zahl.

**) Um vordere Strahlen zu erhalten, muß t_ω rechter Endpunkt des Parameterintervalls $(t_0 \cdots t_\omega)$ sein, um hintere Strahlen zu erhalten, linker Endpunkt.

Beispiel für Strahlenpunkte mit abzählbar unendlichvielen Strahlen. Man nehme eine unendliche Folge von Halbgeraden $\{a_i\}$ durch P, verfahre im übrigen wie vorhin; nur ordne man z. B. dem Intervall τ_m dann die Schleife $(\mathfrak{S}_k)_i$ zu, wenn m die k^{te} ganze Zahl ist, die sich aus i Primzahlen multiplikativ zusammensetzt.

Satz. *Die Menge der (vorderen bzw. hinteren) Halbtangenten und ebenso die Menge der (vorderen bzw. hinteren) Strahlen eines Kurvenpunktes ist immer endlich oder abgeschlossen.*

Beweis. Es sei die Menge der (vorderen bzw. hinteren) Halbtangenten des Kurvenpunktes P_t nicht endlich und man habe irgendeine Folge $\{a_i\}_t$ von Halbtangenten, deren Häufungshalbgerade a_ω sei. Jede Halbtangente a_i ist selbst Häufungshalbgerade von Sehnen $r_i^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots)$, die P_t mit Nachbarpunkten verbinden. Nun wähle man aus diesen Sehnen die Folge $\{r_i^{(i)}\}$ aus; dann ist a_ω Häufungshalbgerade dieser Folge von Sehnen, also Halbtangente von P_t. Die Menge der (vorderen bzw. hinteren) Halbtangenten von P_t ist also endlich oder abgeschlossen; daraus folgt dasselbe auch für die (vorderen bzw. hinteren) Strahlen von P_t. Ist nämlich $\{s_i\}$ eine einfache Folge von Strahlen, so repräsentiere man jedes s_i durch eine in ihm enthaltene Halbtangente a_i; a_ω sei die Häufungshalbtangente von $\{a_i\}$; dann kann a_ω keinem s_i für $i \geqq 2$ angehören, da die s_i alle voneinander durch Halbgerade, die nicht Halbtangenten sind, getrennt liegen. Deshalb gehört a_ω einem von allen s_i für $i \geqq 2$ verschiedenen s_ω an. q. e. d.

Satz. *Jede endliche oder abgeschlossene Menge von (vorderen bzw. hinteren) Halbtangenten und ebenso von (vorderen bzw. hinteren) Strahlen ist in einem Kurvenpunkte möglich.*

Beweis. Für endliche Mengen ist der Beweis schon durch Aufstellung des obigen Beispiels (S. 484) erbracht; es ist also jenes Beispiel nur noch für beliebige abgeschlossene Mengen zu verallgemeinern. Man bilde zu diesem Zweck wieder die gegen t_ω konvergierende Intervallfolge $\{\tau_i\}$. Nun trage man an $P(t_\omega)$ die verlangte abgeschlossene Menge A von Halbtangenten an. Die Komplementärmenge von A besteht aus den inneren Punkten einer abzählbaren Menge von nicht übereinandergreifenden Winkeln $\{\varphi_\varkappa\}$. Die Menge A wird möglicherweise gewisse Winkel χ_λ vollständig erfüllen. Die beiden Schenkel eines Winkels χ_λ sollen mit $c_1^{(\lambda)}$ und $c_2^{(\lambda)}$, die von $\varphi_\varkappa$ mit $f_1^{(\varkappa)}$ und $f_2^{(\varkappa)}$ bezeichnet werden. Die Gesamtheit aller im Innern der Winkel χ_λ enthaltenen Elemente von A soll B genannt werden. Man trage nun in jedem Intervall τ_i eine zu der abgeschlossenen und nirgends überall dichten Menge $(A-B)$ ähnliche Parametermenge T_i auf. Allen Elementen dieser sämtlichen Mengen T_i soll in der Kurvenebene unser Punkt P entsprechen. Den Intervallen χ_λ

fügen wir je eine Folge von Schleifen $\{\mathfrak{C}_\lambda^{(i)}\}$ ein, die alle ganz im Innern von χ_λ verlaufen und die Halbgeraden $c_1^{(\lambda)}$ und $c_2^{(\lambda)}$ in P berühren; außerdem soll die Schleifenlänge proportional zu $\chi_\lambda \cdot \frac{1}{i}$ sein. Jedem Intervall $\varphi_\varkappa$ sollen zwei Folgen von Schleifen, $\{\mathfrak{F}_{1,\varkappa}^{(i)}\}$ und $\{\mathfrak{F}_{2,\varkappa}^{(i)}\}$, eingefügt werden, die ganz im Innern von $\varphi_\varkappa$ verlaufen und beziehungsweise $f_1^{(\varkappa)}$ und $f_2^{(\varkappa)}$ berühren; die Länge dieser Schleifen und der Winkel, unter dem sie von P aus erscheinen, seien proportional zu $\varphi_\varkappa \cdot \frac{1}{i}\cdot$ Nun werden durch die Menge T_i in τ_i die Intervallmengen $\{\delta_\varkappa\}_i$ und $\{\delta_\lambda\}_i$ bestimmt, die den Winkelmengen $\{\varphi_\varkappa\}$ bzw. $\{\chi_\lambda\}$ ähnlich sind. Man ordne jetzt jedem Parameterintervall $(\delta_\varkappa)_i$ bzw. $(\delta_\lambda)_i$ die Schleifen $\mathfrak{F}_{1,\varkappa}^{(i)} + \mathfrak{F}_{2,\varkappa}^{(i)}$ bzw. $\mathfrak{C}_\lambda^{(i)}$ zu. Hiermit ist die Konstruktion des verlangten Beispiels durchgeführt und seine Möglichkeit erwiesen. q. e. d.

6. Hat man einen Strahlenpunkt $P(t)$ mit zwei vorderen Halbtangenten a_1 und a_2, welche die entgegengesetzten Halbgeraden einer und derselben Geraden $\bar{a}$ sind, und sind entweder a_1 oder a_2 oder beide die einzigen hinteren Halbtangenten von $P(t)$, so ist $\bar{a}$ die einzige Tangente von $P(t)$, ohne daß $P(t)$ eine einzige vordere bzw. hintere Halbtangente besitzt (vgl. Fig. 2)*). Also ist damit gezeigt:

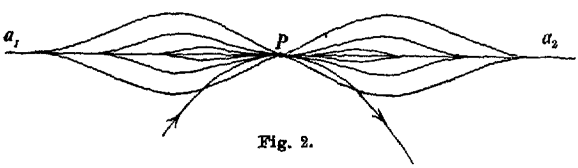

Fig. 2.

Ist P ein unendlichvielfacher Punkt, so kann in der Stelle $P(t)$ eine einzige Tangente existieren, ohne daß $P(t)$ vorn und hinten differenzierbar zu sein braucht.

Eine solche Tangente heiße eine *außerordentliche* Tangente. Nach der Definition S. 482 rechnen wir eine solche Stelle nicht zu den vollständig differenzierbaren.

Eine Kurve, die an *jeder* Stelle eine *einzige* Tangente besitzt, soll *tangierbar* genannt werden. Wenn diese Tangenten eine stetige Gesamtheit bilden, soll die Kurve *stetig tangierbar* heißen**); (eine stetig tangierbare Kurve braucht, wie Fig. 2 zeigt, noch nicht überall stetig differenzierbar zu sein).

---

*) Diese Figur zeigt, daß ein solcher Strahlenpunkt $P(t)$ mit einziger Tangente sogar bei einer Kurve vorhanden sein kann, die sonst überall stetig differenzierbar ist.

**) Es ist für das Spätere zu bemerken, daß bei einer stetig tangierbaren Kurve jeder Punkt mit außerordentlicher Tangente Häufungspunkt von Spitzen ist.

7. Hat man zwei von verschiedenen Seiten gegen t konvergierende Parameterfolgen

$$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t < \cdots < t_3' < t_2' < t_1'$$

und sind die zu t_i und t_i' gehörenden Kurvenpunkte P_i und P_i' voneinander verschieden, so heiße jede Grenzgerade der Sekanten $\{\overline{P_i P_i'}\}$ nach J. Hjelmslev*) eine *Grenzsekante* von $P(t)$.**)

Jede Tangente von $P(t)$ ist, wie leicht ersichtlich, zugleich eine Grenzsekante. Die Grenzsekanten, die nicht (eigentliche) Tangenten sind, kann man im Anschluß an C. Juel***) *uneigentliche Tangenten* nennen.

8. Die Menge der Kurvenstellen, von denen eine Grenzsekante durch den festen Punkt A hindurchgeht, heiße die *Klasse*†) *von A in bezug auf die Kurve.* Ist jeder Punkt A der Kurvenebene von endlicher bzw. beschränkter Klasse, so heiße die Kurve selbst von endlicher bzw. beschränkter *Klasse*†). Ist in letzterem Fall k die Maximalzahl der Klassen aller Punkte in bezug auf die Kurve, so heiße k *die Klasse der Kurve.* Gibt es Punkte A, deren Klasse in bezug auf die Kurve unendlich oder genauer von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ ist, und existiert kein Punkt, dessen Klasse von höherer Mächtigkeit als $\mathfrak{m}$ ist, so heißt die Kurve selbst von unendlicher Klasse bzw. von Klasse der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$.

Analog ist *Ordnung* zu definieren. Die Menge von Kurvenstellen, die auf einer festen Geraden a liegen, heiße die *Ordnung von a in bezug auf die Kurve.* Genau, wie soeben bei der Klasse, ist dann endliche, beschränkte, unendliche Ordnung der Kurve und Ordnung k bzw. Ordnung der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ der Kurve zu definieren.

Hierbei soll jedoch jede der Kurve angehörende, in einem Zug durchlaufene Strecke einschließlich der Endpunkte als ein *einziger* („*verlängerter*" ††)) Punkt zählen.†††)

*) J. Hjelmslev, Overs. ov. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1911, Nr. 5, S. 486.

**) P. du Bois-Reymond und A. Harnack bezeichnen bei reellen Funktionen als „mittleren Differentialquotienten", was hier Richtung d. Grenzsekante genannt wird, vgl. Math. Ann. 16, S. 220 bzw. 23, S. 255.

***) C. Juel, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrift, (6) X, Nr. 1 (1899), S. 9, 39 u. 77.

†) Man kann einen anderen Klassenbegriff bilden, wenn man die uneigentlichen Tangenten nicht mitzählt. Für diesen Fall kann man etwa den Namen *Klasse im engeren Sinn* gebrauchen. Im Gegensatz hierzu wäre der im Text definierte Begriff als *Klasse im weiteren Sinn* zu bezeichnen. Im folgenden (insbes. in § 4) wird nur die Klasse im weiteren Sinn betrachtet und stets kurzweg *Klasse* genannt.

††) So bei J. Hjelmslev, a. a. O., S. 469—470 genannt.

†††) Solche Strecken können in höchstens abzählbarer Menge in der Kurve vorhanden sein.

9. Existiert ein Winkel $\varphi < \pi$ der alle vorderen Halbtangenten und die Verlängerungen aller hinteren Halbtangenten von $P(t)$ einschließt, so sei der kleinste dieser Winkel φ mit σ_1 ($0 \leqq \sigma_1 < \pi$) bezeichnet; der Scheitelwinkel σ_2 von σ_1 stellt dann gleichzeitig den kleinsten Winkel dar, der alle hinteren Halbtangenten und die Verlängerungen aller vorderen Halbtangenten von $P(t)$ einschließt. σ sei der vollständige Winkel, der sich aus σ_1 und σ_2 zusammensetzt. Nach Angabe von J. Hjelmslev*) (die sich auf Jordansche Kurven bezieht, aber leicht allgemein bewiesen werden kann) liegen dann alle Grenzsekanten von $P(t)$ innerhalb σ und erfüllen σ gänzlich. σ möge deshalb der *Grenzsekantenwinkel* von $P(t)$ heißen. Existiert kein Winkel $\varphi < \pi$, also auch nicht $\sigma < \pi$, so ist jede Gerade durch $P(t)$ Grenzsekante und wir sagen, der Grenzsekantenwinkel sei $= \pi$. Es ist dann und nur dann $\sigma = 0$, wenn $P(t)$ eine gewöhnliche differenzierbare Stelle ist (also vollständig differenzierbar, ohne Spitze zu sein). Der kleinste Winkel ζ_1 bzw. ζ_2, in den sich die vorderen bzw. hinteren Halbtangenten einschließen lassen, heiße das *vordere* bzw. *hintere Schwingungsintervall* (der Halbtangenten) von $P(t)$. ζ_1 und ζ_2 sind immer $\leqq \sigma$.

10. Die *Wendepunkte und Wendetangenten* kann man geometrisch in zwei verschiedenen Weisen definieren, indem man einmal die Eigenschaft als trennende Tangente, das andere Mal die Eigenschaft als stationäre Tangente hervorhebt. In allgemeiner Weise scharf gefaßt, lauten diese Definitionen:

Definition a)**). Einen Kurvenpunkt $W(t)$ nenne man einen Wendepunkt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1) Es existiere in $W(t)$ eine den vorderen und hinteren Kurvenzug trennende Gerade w (die „Wendetangente"), derart, daß ein endliches, an $W(t)$ anschließendes Stück des vorderen Kurvenzuges ganz in der einen von w bestimmten Halbebene [ev. einschließlich w selbst], ein ebensolches Stück des hinteren Kurvenzuges ganz in der anderen von w bestimmten Halbebene [ev. einschließlich w selbst] gelegen ist.

Tritt, wie klein man auch das Kurvenstück wählt, eine der in [ ] gesetzten Eventualitäten ein, so sagen wir, der Wendepunkt sei *ausgeartet*.

2) w muß Tangente im Wendepunkt sein und zwar soll eine Halbgerade von w vordere Halbtangente, die andere Halbgerade von w hintere Halbtangente in $W(t)$ sein. (Man bezeichne sie mit *vordere* bzw. *hintere Wendehalbtangente*.)

---

*) a. a. O., S. 486.

**) Diese Definition ist hier nur für einen im Endlichen gelegenen Kurvenpunkt gegeben; für einen unendlichfernen Punkt wende man zuerst eine Umprojektion ins Endliche an.

3) Die vordere Wendehalbtangente soll nicht zugleich hintere Halbtangente und die hintere Wendehalbtangente soll nicht zugleich vordere Halbtangente von $W(t)$ sein.

Im Falle der ausgearteten Wendepunkte hat man noch folgende weitere Bedingung hinzuzufügen:

4*) Auf beiden Seiten und in jeder noch so kleinen Umgebung von t soll es Parameter geben, denen nicht auf w gelegene Kurvenpunkte entsprechen.

Man überzeugt sich leicht durch geeignete Beispiele, daß die vorstehenden Bedingungen voneinander unabhängig sind.

Definition b).*) Ein gewöhnlicher Punkt $W(t)$ heißt hier ein Wendepunkt, wenn sich eine Tangente w von $W(t)$ (die „Wendetangente") und ein t umschließendes endliches Parameterintervall $\tau = (t_\alpha \cdots t \cdots t_\beta)$ angeben läßt, derart, daß die Wendetangente w für alle zu τ gehörenden Tangentenrichtungen ein (eigentliches oder uneigentliches) Extremum darstellt.

Die Definition b), die den extremalen Charakter der Wendetangente betont, hat der Natur der Sache nach nur für *stetig tangierbare* Stellen eine Berechtigung.

Einen Wendepunkt nach Definition a) bzw. b) nennen wir *Wendepunkt der Gattung a)* bzw. *b)*.

11. *Die beiden Definitionen a) und b) decken sich selbst bei überall stetig differenzierbaren Kurven nicht, sondern es existieren Wendepunkte der Gattung a), die nicht der Gattung b) angehören, und umgekehrt.*

Durch Angabe der folgenden beiden Beispiele wird dies erwiesen.

Ein Beispiel einer überall n-fach stetig differenzierbaren Kurve, die einen Wendepunkt der Gattung a) besitzt, der *nicht* der Gattung b) angehört, erhält man, wenn man die Nr. 27 angegebene Kurve $y = \int \varphi(t)\, dt$ so umprojiziert, daß der unendlich ferne Punkt der t-Achse ins Endliche transformiert wird.

Das Gleiche wie in diesem Beispiel gilt von jedem Wendepunkt $W(t)$ der Gattung a), dessen Wendetangente w einen von $W(t)$ verschiedenen Punkt enthält, von dem aus beiderseits gegen w sich häufende Nachbartangenten ausgehen.

---

*) Auch diese Definition b) bezieht sich nur auf im Endlichen gelegene Kurvenpunkte; wir wollen sagen, ein im Unendlichen gelegener Kurvenpunkt $W_\infty(t)$ sei ein Wendepunkt nach Definition b), wenn sich $W_\infty(t)$ durch eine projektive Transformation in einen Punkt $W'(t)$ verwandeln läßt, welcher der Definition b) genügt. (Vgl. auch Nr. 11 u. 14.)

Zugleich geht aus jenem Beispiel hervor, daß *auch bei n-fach stetig differenzierbaren Kurven Wendepunkte der Gattung b) projektiven*) Transformationen gegenüber nicht notwendig invariant sind.* Dagegen ist der Begriff des Wendepunkts der Gattung a) projektiven Transformationen gegenüber stets invariant.

Beispiele von überall stetig differenzierbaren Kurven, die einen Wendepunkt der Gattung b) besitzen, der *nicht* der Gattung a) angehört, stellen die Fig. 3 und 4 dar.**)

12. In diesen letzten Beispielen ist der Wendepunkt W ein Häufungspunkt von Spitzen. Man sieht in der Tat:

Ist ein Wendepunkt $W(t)$ der Gattung b) nicht Häufungspunkt von Ecken oder Spitzen, so gehört er gleichzeitig der Gattung a) an.

Beweis: Man braucht (wegen der Fußnoten zu Nr. 10) den Beweis nur für im Endlichen gelegene Punkte $W(t)$ zu führen. Wir können also

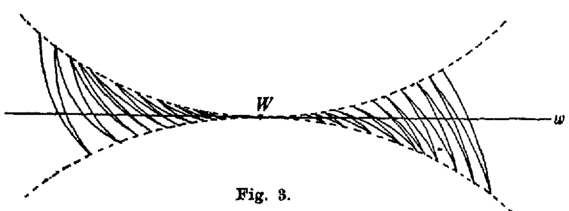

Fig. 3.

einen endlichen Bereich $\mathfrak{J}$ um W herum abgrenzen und das Kurvenstück $\mathfrak{C}_{\mathfrak{J}}$ betrachten, das $W(t)$ enthält und ganz innerhalb $\mathfrak{J}$ liegt. Wir wählen nun auf w zwei außerhalb $\mathfrak{J}$ gelegene Punkte Q_1 und Q_2, die durch $\mathfrak{J}$ getrennt werden. Wäre W Häufungspunkt von Schnittpunkten $P_i(t_i)$ von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{J}}$ mit w (die ev. auch mit W zusammenfallen könnten), so gingen von Q_1 und Q_2 aus an jedes Stück $(P_i(t_i) \cdots P_{i+1}(t_{i+1}))$ Stützgerade $q_1^{(i)}$ und $q_2^{(i)}$, die eigent-

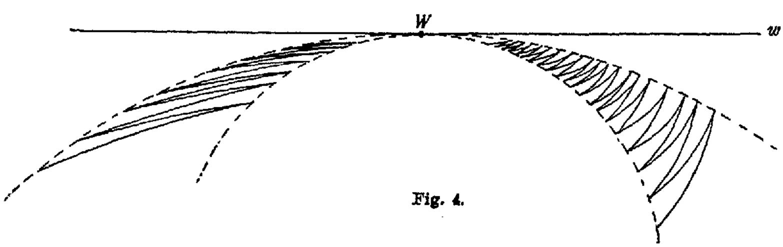

Fig. 4.

liche Tangenten wären, und diese würden, der Richtung nach, w um-

*) Dagegen bleibt der Begriff der Wendepunkte der Gattung b) *affinen* Transformationen gegenüber invariant.

**) In meiner Hab.-Schr. S. 18 ist ein weiteres Beispiel angegeben, bei dem auf dem vorderen und hinteren Kurvenzug von W_t die Tangente (ohne Berücksichtigung des Vorzeichens der Richtung) monoton variiert, und das durch geringfügige Änderung in einen Wendepunkt übergeht, der gleichzeitig Gattung a) und b) angehört.

geben, im Widerspruch mit der Definition b). Wären beide Halbgeraden w_1 und w_2 von w gleichzeitig vordere (bzw. hintere) Halbtangenten von $W(t)$, so gäbe es Halbtangenten von $W(t)$, die in der gleichen Halbebene von w liegend, w_1 und w_2 benachbart wären, also Tangenten, die w einschlössen. Darnach wären noch zwei Möglichkeiten vorhanden, die durch die Worte „Schnabelspitzen" und „Wendepunkte" gekennzeichnet sind. Da aber in die Definition b) mit aufgenommen ist, daß $W(t)$ ein gewöhnlicher Punkt sein soll, so sind alle Bedingungen der Definition a) erfüllt. q. e. d.

Wendepunkte, die gleichzeitig der Gattung a) und b) angehören, wollen wir als *reguläre Wendepunkte* bezeichnen.

13. In einem tangierbaren Wendepunkt $W(t)$, sowohl der Gattung a) wie b), ist natürlich nur eine *einzige* Wendetangente vorhanden, da ja in $W(t)$ hier überhaupt nur eine einzige Tangente existiert.

Dagegen:

In einem nicht tangierbaren Wendepunkt $W(t)$ der Gattung a) können entweder eine oder zwei verschiedene Wendetangenten vorhanden sein.

Beweis: Die Möglichkeit, daß ein nicht tangierbarer (auch nicht ausgearteter) Wendepunkt der Gattung a) zwei verschiedene Wendetangenten (w_1 und w_2) besitzen kann, ergibt sich etwa aus folgendem Beispiel:

$$y = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x} \qquad \text{für} \quad x = -2 \quad \text{bis} \quad x = +2;$$

dabei ist $x = 0$ der Wendepunkt und w_1 und w_2 sind durch $y = \pm x$ dargestellt.

Nach Bedingung 1) unserer Definition a) müssen die in $W(t)$ vorhandenen Wendetangenten w_i so gelegen sein, daß die Kurve in $W(t)$ in bezug auf *alle* w_i von der einen Halbebene in die andere tritt. Daraus ergibt sich sofort, daß es *höchstens* zwei verschiedene Wendetangenten in $W(t)$ geben kann. q. e. d.

Aus Bedingung 2) folgt weiter, daß falls zwei verschiedene Wendetangenten w_1 und w_2 von $W(t)$ existieren, der von w_1 und w_2 gebildete Winkel mit dem Grenzsekantenwinkel σ identisch ist. Damit also überhaupt zwei Wendetangenten in $W(t)$ möglich sind, muß das vordere Schwingungsintervall der Halbtangenten = dem hinteren Schwingungsintervall $= \sigma$ sein.

14. Wir haben zunächst den

Hilfssatz: Liegen auf einer Geraden a zwei Punkte P und Q, von denen aus eine Tangente an ein stetig tangierbares Kurvenstück $\mathfrak{C}$ geht, so gehen auch von allen Punkten des einen der beiden durch P und Q auf a bestimmten Abschnitte Tangenten an $\mathfrak{C}$.

Es kann nämlich nicht auf den beiden durch P und Q auf a bestimmten Abschnitten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ Strecken geben, durch deren Punkte keine Tangenten an $\mathfrak{C}$ gehen, da sonst die Tangentenrichtungen in Punkten von $\mathfrak{C}$ Sprünge haben müßten. Darnach muß also auf $a^{(1)}$ oder $a^{(2)}$ eine zusammenhängende Menge von Punkten liegen, die Tangenten an $\mathfrak{C}$ senden, und diese Menge muß, wie leicht ersichtlich, auch abgeschlossen sein.

Nun kann man zeigen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß auf einer stetig tangierbaren Kurve ein Wendepunkt $W(t)$ der Gattung b), der nicht Häufungspunkt von Spitzen (also regulär) ist), jeder projektiven Transformation gegenüber invariant bleibt, ist, daß kein von W verschiedener Punkt Q existiert (der notwendig auf w gelegen wäre), von dem aus an jedes noch so kleine $W(t)$ enthaltende Kurvenstück $\mathfrak{C}_0$ unendlich viele Tangenten laufen.*

Beweis: Nimmt man in hinreichender Nähe von W einen Punkt R auf $\mathfrak{C}_0$, so bildet die Gerade $r = (RW)$ einen beliebig kleinen Winkel η mit w und man kann R immer so wählen, daß der Bogen $\widehat{RW}$ ganz in η liegt. Dann gibt es mindestens eine zu r parallele Tangente $\bar{r}_1$ von $\widehat{RW}$, deren Berührungspunkt R_1 Maximum von $\widehat{RW}$ in bezug auf die Richtung von r ist. Jetzt kann man dasselbe für den Bogen $\widehat{R_1W}$ machen. Man erhält so eine Reihe aufeinanderfolgender gegen $W(t)$ konvergierender Bogenstücke $\mathfrak{B}_i$, die alle je mindestens eine Tangente $\bar{r}_i$ besitzen, sodaß der Schnittpunkt S_i von w mit $\bar{r}_i$ bei wachsendem i immer näher an W heranrückt. Existiert nun ein auf w gelegener und von W verschiedener Punkt Q, von dem aus unendlich viele Tangenten an $\mathfrak{C}_0$ gehen, so gehen nach dem vorstehenden Hilfssatz von allen Punkten eines der beiden von W und Q auf w bestimmten Abschnitte unendlich viele Tangenten an $\mathfrak{C}_0$; sei dieser Abschnitt von w mit $w^{(1)}$ bezeichnet. Zieht man jetzt irgend eine $w^{(1)}$ in einem Punkte U treffende Gerade u und macht man u durch Umprojektion zur unendlichfernen Geraden, so wird bei dieser Transformation der $W(t)$ entsprechende Punkt $W'(t)$ nicht mehr ein Wendepunkt der Gattung b) sein. Also ist unsere Bedingung *notwendig.*

Die Bedingung ist aber auch *hinreichend.* Wenn nämlich aus $W(t)$ durch projektive Transformation ein Punkt $W'(t)$ wird, der nicht mehr Wendepunkt der Gattung b) ist, so gibt es in jeder beliebigen Nähe von $W'(t)$ Tangentenrichtungen, welche die Richtung von w' einschließen; daher

*) Diese Voraussetzung kann nicht entbehrt werden; für Häufungspunkte von Spitzen gilt der Beweis und der Satz nicht mehr.

gibt es in jeder beliebigen Nähe von $W'(t)$ Stellen P_i', deren Tangenten die Richtung von w' besitzen. Deshalb muß, auch wenn die Stellen P_i' auf w' selbst liegen, der unendlichferne Punkt Q_∞' der Geraden w' unendlichviele Tangenten an jedes noch so kleine $W'(t)$ enthaltende Kurvenstück senden. Es muß also auch vor der Projektion ein derartiger von W verschiedener Punkt Q auf w vorhanden gewesen sein, was der vorausgesetzten Bedingung widerspricht. q. e. d.

Bei Erfüllung der gleichen Bedingung ist auf einer stetig tangierbaren Kurve ein Wendepunkt der Gattung a), der nicht Häufungspunkt von Spitzen ist, zugleich regulär.

Beweis: Würde der Wendepunkt $W(t)$ der Gattung a), dagegen nicht der Gattung b) angehören, so gäbe es auf jedem noch so kleinen $W(t)$ enthaltenden Kurvenstück $\mathfrak{C}_0$ Tangentenrichtungen, welche die Richtung von w einschließen. Daraus folgt, genau wie vorhin, daß der unendlichferne Punkt Q_∞ von w unendlichviele Tangenten an $\mathfrak{C}_0$ senden würde, im Widerspruch mit unserer Bedingung. q. e. d.

Die in den beiden vorstehenden Sätzen verwendete Bedingung ist, auf jeden Kurvenpunkt erstreckt, wie im § 5 gezeigt wird, (neben der Forderung, daß die Kurve keine Strecke enthalten soll) zugleich der wesentlichste Bestandteil der Bedingung der *Dualisierbarkeit* einer Kurve. Im Fall der Dualisierbarkeit ist also jeder Wendepunkt, der nicht Häufungspunkt von Spitzen ist, regulär und gegenüber projektiver Transformation invariant und außerdem ist hier die Wendepunktdefinition der Gattung b) dual zur Definition der Spitze.

Letzteres folgt daraus, daß mit der oben gegebenen Spitzendefinition die folgende identisch ist: Ein Kurvenpunkt S_t mit der Tangente s_t heißt Spitze, wenn die Nachbarpunkte von S_t durch jede von s_t verschiedene durch S gehende Gerade g nicht getrennt werden. Das Duale hierzu ist aber, wenn man noch hinzunimmt, daß W_t keine Spitze (Schnabelspitze u. dergl.) sein soll, im Falle der Dualisierbarkeit mit obiger Definition b) dem Inhalt nach identisch.

§ 2.

Die in einem Punkt vereinigten Singularitäten.

15. Aus dem in der Einleitung Gesagten folgt, daß die Menge der einem Punkt P zugehörigen Parameter *endlich oder abgeschlossen und nirgends dicht* ist.

Alle drei hierin enthaltene Möglichkeiten der Parametermengen (endliche, abzählbare Menge oder Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums) können wirklich vorkommen, wenn die in P vereinigten Kurvenpunkte $P(t)$ auch nicht-differenzierbar sein dürfen. Diese drei Möglichkeiten können auch noch eintreten, wenn alle $P(t)$ entweder (vorn und hinten bzw. vollständig) differenzierbar oder sogar alle stetig differenzierbar sein sollen, vorausgesetzt daß eine genügende Menge der $P(t)$ Spitzen oder Ecken sind. Dies geht aus den weiter unten (Nr. 17) gegebenen Beispielen hervor, bei denen in P, dessen Vielfachheitsgrad abzählbar bzw. von Mächtigkeit des Kontinuums ist, Spitzen oder Ecken in abzählbarer Menge bzw. in einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums vorhanden sind. Man kann aber ferner beweisen:

Sind alle in P vereinigten Kurvenpunkte $P(t)$ vorn und hinten differenzierbar und sind nur abzählbar viele bzw. nur endlichviele von ihnen Spitzen oder Ecken, so ist P nur ein abzählbar- bzw. endlichvielfacher Punkt.

Also:

*Eine überall vorn und hinten differenzierbare Kurve mit nur abzählbar vielen bzw. mit nur endlichvielen Spitzen oder Ecken ist von höchstens abzählbarem bzw. von endlichem Vielfachheitsgrad.**)

Dies folgt unmittelbar aus dem nachstehenden Satz:

Entsprechen der Parameterfolge $\{t_i\}$ in P vereint liegende *„gewöhnliche"* (differenzierbare oder nichtdifferenzierbare) Kurvenpunkte, so entspricht dem *Häufungsparameter* t_ω ein in P liegender *„gewöhnlicher" nichtdifferenzierbarer* Punkt.

Beweis: Wäre $P(t_\omega)$ eine Ecke oder Spitze, so müßte ein Winkel $\vartheta_\omega < \pi$ existieren, derart daß sämtliche vorderen und hinteren Halbtangenten von $P(t_\omega)$ in diesem Winkel enthalten sind. Nun wähle man einen so kleinen Winkel ε, daß auch $(\vartheta_\omega + \varepsilon) < \pi$ ist. Dann müßte eine gewisse endliche Umgebung τ von t_ω existieren, sodaß alle den Werten von τ entsprechenden Kurvenpunkte im Winkel $(\vartheta_\omega + \varepsilon)$ liegen. Es müßten also auch, von einem gewissen i ab, für alle $P(t_i)$ die zugehörigen vorderen und hinteren Halbtangenten im Winkel $(\vartheta_\omega + \varepsilon)$ liegen, was im Widerspruch damit steht, daß alle $P(t_i)$ „gewöhnliche" Punkte sein sollen. Es ist also $P(t_\omega)$ ein „gewöhnlicher" Punkt. Greift man nun noch aus $\{t_i\}$ eine Teilfolge $\{\bar{t}_i\}$ heraus, sodaß entweder alle $\bar{t}_i < t_\omega$ oder alle $\bar{t}_i > t_\omega$ sind, so ergibt sich in gleicher Weise, daß das Schwingungsintervall der vorderen oder der hinteren Halbtangenten von $P(t_\omega) \geqq \pi$, also $P(t_\omega)$ nicht differenzierbar ist. q. e. d.

Hieraus folgt noch:

Die Parameter der in einem Punkt P vereint liegenden *gewöhnlichen* Punkte sowie der *gewöhnlichen nicht-differenzierbaren* Punkte bilden eine *abgeschlossene Menge.*

---

*) Man kann noch zeigen, daß der Vielfachheitsgrad einer *stetig* differenzierbaren Kurve mit nur endlich vielen Spitzen sogar immer *beschränkt* ist. Es ergibt sich dies aus dem Hilfssatz von Nr. 41.

Die Parameter der in P liegenden *gewöhnlichen* Punkte, deren *Grenzsekantenwinkel* $< \pi$ ist, bilden eine *isolierte* Menge.

Die Parameter der in P liegenden *gewöhnlichen differenzierbaren* Punkte bilden eine *isolierte* Menge und sogar nur eine *endliche* Menge, wenn alle in P liegenden Kurvenpunkte vorn und hinten differenzierbar sind.

16. Zu den gewöhnlichen Punkten gehören insbesondere auch die *Wendepunkte* und zwar ist für diese, wenn sie zur Gattung a) gehören, sicher der Grenzsekantenwinkel $< \pi$. Also haben wir:

Die Parameter der in einem Punkt P vereint liegenden *Wendepunkte der Gattung a)* bilden eine *isolierte* Menge.

Dieser Satz gilt nicht mehr für Wendepunkte der Gattung b); sondern die in einem Punkte P vereinigten Wendepunkte der Gattung b) können (wenn sie nicht alle differenzierbar, sondern etwa nur tangierbar sind) auch eine abgeschlossene, ja sogar eine perfekte Menge bilden, wie man aus folgendem Beispiel sieht:

Man nehme eine Gerade $\bar{a}$, die durch den Punkt P in zwei Halbgerade a_1 und a_2 zerlegt wird. Dann bilde man zwei Folgen von überall stetig differenzierbaren, zweispitzigen Schleifen, $\{\mathfrak{S}_k\}_1$ und $\{\mathfrak{S}_k\}_2$, die alle von P ausgehen und nach P zurückkehren; derart, daß alle $(\mathfrak{S}_k)_1$ in ihren beiden Endpunkten a_1 und alle $(\mathfrak{S}_k)_2$ in ihren beiden Endpunkten a_2 als einzige Halbtangenten besitzen. Die beiden Folgen $\{\mathfrak{S}_k\}_1$ und $\{\mathfrak{S}_k\}_2$ sollen auf den beiden entgegengesetzten Seiten von $\bar{a}$ liegen. Die Richtung von $\bar{a}$ soll ein eigentliches Extremum der Tangentenrichtungen jeder Schleife darstellen. Ferner soll die Länge von $(\mathfrak{S}_k)_h$, der Winkel, unter dem $(\mathfrak{S}_k)_h$ von P aus gesehen wird, sowie die Variation der Tangentenrichtungen auf $(\mathfrak{S}_k)_h$ proportional zu $\frac{1}{k}$ sein. Nun nehme man wieder, wie in dem Beispiel S. 485/486, eine perfekte nirgends dichte Parametermenge T, welche die Parameterintervalle $\{\tau_i\}$ bestimmt. Man ordne hierauf jedem Werte von T den Punkt P zu und jedem Intervall τ_i die Doppelschleifen $(\mathfrak{S}_i)_1 + (\mathfrak{S}_i)_2$. So erhält man die gewünschte Kurve, die überall stetig tangierbar ist und alle in P vereinigten Kurvenstellen zu Wendepunkten der Gattung b) hat.

Dagegen bilden nach Nr. 15 die in einem Punkte P vereinigten *differenzierbaren* Wendepunkte der Gattung b) immer eine *isolierte* Menge.

Und allgemein gilt noch für Gattung a) und b):

Bei einer vorn und hinten differenzierbaren Kurve können nur *endlich* viele Wendepunkte in einem Punkt P vereint liegen.

17. Wir gehen nunmehr zu den *Ecken* und *Spitzen* über und haben zunächst, wie oben angedeutet, durch Beispiele die Existenz von unendlich vielfachen Ecken bzw. Spitzen bei (vorn und hinten bzw. vollständig und

stetig) differenzierbaren Kurven nachzuweisen. Ein solches Beispiel einer überall vollständig differenzierbaren Kurve, bei welcher die in einem Punkt P vereint liegenden Spitzen eine abzählbare Menge oder sogar eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden, ergibt sich, wenn man in dem S. 485/486 konstruierten Beispiel die einem Parameterintervall τ_i entsprechende Teilfigur betrachtet. Diese Kurve wird sogar überall stetig differenzierbar, wenn man die in Fig. 1 verwendeten Schleifen mit nur je einer Spitze durch die in Fig. 2 gebrauchten zweispitzigen Schleifen ersetzt. Ein ähnliches Beispiel einer überall stetig differenzierbaren Kurve mit einer perfekten in P vereinigten Menge von Spitzen ist in Fig. 5 angedeutet; hierbei kann man sich die Parameter auf dem die Figur ein schließenden Kreis aufgetragen denken und die perfekte Parametermenge T in bekannter Weise durch fortgesetzte Dreiteilung erhalten.

Durch geringe Abänderungen der Konstruktionen erhält man unendlich vielfache Ecken und zwar abzählbar vielfache Ecken bei vorn und hinten differenzierbaren Kurven. Fig. 5 kann man beispielsweise so verändern: Jedem Intervall τ_i der durch die perfekte Parametermenge T ausgeschlossenen Intervallmenge $\{\tau_i\}$ lasse man nicht mehr eine Schleife $\mathfrak{S}_i$ entsprechen, welche die Schenkel des τ_i aus P projizierenden Sektors σ_i berührt, sondern eine ähnliche Schleife $\mathfrak{S}_i'$, welche die Schenkel eines anderen Sektors σ_i' berührt. Läßt man dabei σ_i' dadurch entstehen, daß man σ_i nach beiden Seiten hin um etwa je $\frac{1}{c}\sigma_i$ vergrößert, so erhält man eine überall vorn und hinten differenzierbare Kurve mit einer (in sich dichten) abzählbaren Eckenmenge; jedem Endpunkte von τ_i entspricht nämlich eine Ecke der Größe $\frac{1}{c}\sigma_i$; allen übrigen Punkten von T dagegen entspricht wieder eine Spitze, deren Menge also wiederum von der Mächtigkeit des Kontinuums ist. Läßt man jedoch σ_i' etwa dadurch entstehen, daß man σ_i nach beiden Seiten hin um den konstanten Winkel ϑ vergrößert, so erhält man in P eine perfekte Menge von nicht mehr vorn oder hinten differenzierbaren Ecken der Größe $\vartheta_i \geqq 2\vartheta$ (ohne Spitzen in P).

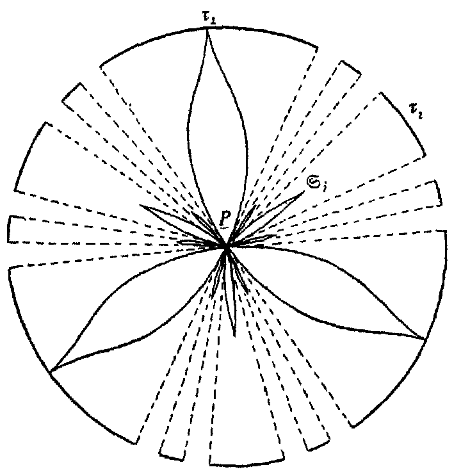

Fig. 5.

18. Wir haben zunächst den

Hilfssatz: Eine Ecke $P(t_\omega)$ der Größe ϑ kann nicht Häufungsstelle von ebenfalls in P liegenden Ecken $\{P(t_i)\}$ der Größe $\vartheta_i \geqq \vartheta_0$ sein, wobei ϑ_0 ein fester Winkel $> \vartheta$ ist.

Beweis: Nimmt man eine beliebig kleine Winkelgröße ε, so kann man immer eine endliche Umgebung τ von t_ω finden, derart, daß das zu τ gehörige Kurvenstück ganz im Winkel $(\vartheta + 2\varepsilon)$ liegt. Man wähle nun ε so klein, daß $(\vartheta + 2\varepsilon) < \vartheta_0$ ist. Dann kann also $P(t_\omega)$ nicht Häufungspunkt von Ecken $\{P(t_i)\}$ sein, die ebenfalls in P liegen und deren Winkel $\vartheta_i \geqq \vartheta_0$ ist. q. e. d.

Speziell sagt dies aus:

Eine Spitze in P kann nur Häufungspunkt von ebenfalls in P liegenden Ecken $\{P(t_i)\}$ sein, wenn deren Winkel ϑ_i mit wachsendem i unter jede beliebig kleine Winkelgröße herabsinkt.

19. Nunmehr ergibt sich der

Satz: *Die Parameter t_α, welche allen in einem Punkte P vereint liegenden Spitzen entsprechen, bilden eine innere Grenzmenge.**)

Beweis: Um jeden Parameter t_α unserer Spitzen legen wir eine Folge von Parameterintervallen $\{\delta_\alpha^{(i)}\}$, derart daß

1) in $\delta_\alpha^{(i)}$ kein Parameter sich befindet, der einem in P liegenden „gewöhnlichen" Kurvenpunkt entspricht. (Dies kann man immer tun, da nach Nr. 15 t_α nicht Häufungsstelle von Parametern von „gewöhnlichen" in P liegenden Kurvenpunkten sein kann.)

2) in $\delta_\alpha^{(i)}$ kein Parameter sich befindet, der einer in P gelegenen Ecke entspricht, deren Winkel $\vartheta \geqq \vartheta_i$ ist; dabei sei ϑ_i der dem Werte i entsprechende Winkel aus der gegen Null abnehmenden Reihe von Winkeln:

---

*) Kann man jeden Punkt P der linearen Punktmenge E so mit einer Intervallfolge $\{\delta_P^{(i)}\}$ umgeben, daß kein zu E nicht gehörender Punkt existiert, der für jedes i innerer Punkt mindestens eines der E zugeordneten Intervalle ist, so wird (nach W. H. Young) E eine *innere Grenzmenge* genannt.

Über den Begriff und die Eigenschaften der *inneren Grenzmengen* siehe: W. H. Young, Leipz. Ber. 55 (1903), S. 287 und Proc. Lond. Math. Soc. (2) 1 (1904), S. 262; W. H. u. G. C. Young, The theory of sets of points, Cambridge 1906, S. 63/75; ferner E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable, Cambridge 1907, S. 127/135. Insbesondere sei an die Haupteigenschaft erinnert, daß nämlich die inneren Grenzmengen entweder *endlich* oder *abzählbar* oder von *Mächtigkeit des Kontinuums* sind; letzteres nur, wenn die Menge einen in sich dichten Bestandteil enthält.

W. H. u. G. C. Young, l. c., bezeichnen, was in den früheren Abhandlungen und bei E. W. Hobson „inner limiting set" genannt ist, mit „ordinary inner limiting set"; hier wird immer einfach *„innere Grenzmenge"* gesagt.

A. Schoenflies hat die inneren Grenzmengen und ihre Komplementärmengen *Borelsche Mengen* genannt; vgl. Bericht über Mengenlehre, Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. 8 (1899), S. 110 und Ergänzungsband II (1908), S. 80/83.

$$\vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_3 > \cdots > \vartheta_i > \cdots > 0.$$

(Auch dies ist, nach dem vorhergehenden Hilfssatz, immer möglich.)

3) $\delta_\alpha^{(i+1)}$ liege ganz innerhalb $\delta_\alpha^{(i)}$ (für jedes festgehaltene α).

4) $\lim\limits_{i=\infty} \delta_\alpha^{(i)} = 0$.

Auf diese Weise wird eine Intervallmenge erhalten, welche eine innere Grenzmenge T definiert, wobei nur noch zu zeigen ist, daß T ausschließlich aus den Parametern t_α besteht, die den in P liegenden Spitzen entsprechen: Angenommen zu T würde ein anderer Parameterwert t_β gehören, der nicht einer in P gelegenen Spitze entspricht. Dann gäbe es eine Intervallfolge $\{\delta_\beta^{(i)}\}$, so daß t_β innerhalb jedes Intervalls $\delta_\beta^{(i)}$ liegt und $\lim\limits_{i=\infty} \delta_\beta^{(i)} = 0$ ist. t_β ist dabei Häufungspunkt von Parametern t_α und deshalb liegt der t_β entsprechende Kurvenpunkt in P. Wegen 1) kann $P(t_\beta)$ kein „gewöhnlicher" Punkt sein. Wäre $P(t_\beta)$ eine Ecke von der Größe ϑ_β, so könnte man i so groß wählen, daß $\vartheta_i < \vartheta_\beta$ ist; dann würde aber (für dieses und alle größeren i) nach 2) $\delta_\beta^{(i)}$ den Parameter t_β entgegen der Annahme nicht umfassen. Also muß T ausschließlich aus Parametern bestehen, denen Spitzen in P entsprechen. q. e. d.

Genau die gleichen Schlüsse, die im vorstehenden für Spitzen allein gemacht wurden, lassen sich auch für die Gesamtheit der in P vereintliegenden Spitzen und Ecken anstellen, deren Winkel $\vartheta \leqq \vartheta_0$ ist, wobei ϑ_0 einen festen Winkel bezeichnet. Man erhält so den:

Satz: Die Parameter, welche der Gesamtheit der in einem Punkt P vereint liegenden Spitzen und Ecken entsprechen, deren Winkel $\vartheta \leqq \vartheta_0$ ist, bilden eine innere Grenzmenge.

Wählt man hierin $\vartheta_0 = \pi$ (oder läßt man im Beweisverfahren die Bedingung 2) fallen), so ergibt sich der:

Satz: *Die Parameter, welche der Gesamtheit der in einem Punkte P vereint liegenden Ecken und Spitzen entsprechen, bilden eine innere Grenzmenge.*

Dagegen brauchen die Parameter, welche nur den in P vereint liegenden *Ecken* entsprechen, *nicht notwendig* eine innere Grenzmenge zu bilden. Ein Beispiel hierfür stellt die Nr. 17 angegebene überall vorn und hinten differenzierbare Kurve dar, bei welcher die Parameter der in P liegenden Ecken eine abzählbare, in sich dichte Menge (also keine innere Grenzmenge) bilden.

20. Wir müssen nun zunächst *zwei Hilfssätze über lineare innere Grenzmengen* beweisen.

W. H. und G. C. Young haben gezeigt, daß die Summe von endlich vielen inneren Grenzmengen*) und ferner daß die Differenz einer inneren Grenzmenge und einer abzählbaren Menge**) selbst innere Grenzmengen sind.

Wir haben dem noch hinzuzufügen:

Hilfssatz a): *Die Differenz von zwei inneren Grenzmengen besitzt endliche, abzählbare oder Kontinuums-Mächtigkeit* und ist darstellbar als $\mathfrak{M}(E_i)$, wo alle E_i selbst innere Grenzmengen sind.***)

Beweis: Es sei die innere Grenzmenge E_2 ein Teil der inneren Grenzmenge E_1. $\{\{\delta_1^{(i)}\}\}$ sei die zu E_1, $\{\{\delta_2^{(i)}\}\}$ die zu E_2 gehörige Intervallmenge. Die Gesamtheit derjenigen Intervalle von $\{\{\delta_2^{(i)}\}\}$, die einem festen $i = i_0$ entsprechen, sei mit $\Delta_2^{(i_0)}$ bezeichnet, und E_{1,i_0} sei diejenige Teilmenge von E_1 und von $(E_1 - E_2)$, die nicht innerhalb $\Delta_2^{(i_0)}$ gelegen ist. Dann liegt auch kein Punkt der Ableitung von E_{1,i_0} innerhalb $\Delta_2^{(i_0)}$ und deshalb enthält die Menge aller Intervalle von $\{\{\delta_1^{(i)}\}\}$, die zu den Punkten von E_{1,i_0} gehören, E_{1,i_0} als innere Grenzmenge. Läßt man nun i_0 die Reihe aller ganzen positiven Werte durchlaufen, so erhält man lauter innere Grenzmengen $E_{1,i}$ derart, daß $E_{1,i}$ ein Teil von $E_{1,i+1}$ ist, und es wird $(E_1 - E_2) = \mathfrak{M}(E_{1,i})$. Sind alle Mengen $E_{1,i}$ endlich oder abzählbar, so ist auch $(E_1 - E_2)$ endlich oder abzählbar. Besitzt eine der Mengen $E_{1,i}$ die Mächtigkeit des Kontinuums, so muß dies auch für $(E_1 - E_2)$ der Fall sein. q. e. d.

Hilfssatz b): *Der gemeinsame Teil von zwei inneren Grenzmengen ist wieder eine innere Grenzmenge.*†)

Aus den soeben angegebenen Sätzen von W. H. u. G. C. Young und diesem Hilfssatz a) folgt, daß *jedes Aggregat von inneren Grenzmengen* entweder *endlich* oder *abzählbar* oder von *Mächtigkeit des Kontinuums* ist.††)

21. Wendet man den Hilfssatz a) auf die Sätze von Nr. 19 an, so ergibt sich:

---

*) W. H. u. G. C. Young, The theory of sets of points, Cambridge 1906, S. 72, Theorem 37a. **) ibid., S. 75, Cor.

***) Hat man die Differenz zwischen einer abgeschlossenen Menge und einer inneren Grenzmenge, so sind diese E_i sogar alle abgeschlossen.

W. H. u. G. C. Young nennen (a. a. O., S. 70) eine Menge $E = \mathfrak{M}(E_i)$, wenn alle E_i abgeschlossen sind, eine „*gewöhnliche äußere Grenzmenge*".

Zu bemerken ist noch, daß nach W. H. u. G. C. Young (a. a. O., S. 74, Theorem 40) die Differenz zwischen einer gewöhnlichen äußeren oder inneren Grenzmenge und einer abgeschlossenen Menge gleichzeitig eine gewöhnliche äußere und innere Grenzmenge darstellt.

†) Der Beweis ist überaus einfach; vgl. meine Hab.-Schr. S. 23.

††) Mit Hilfe des Theorems 41 von W. H. u. G. C. Young (a. a. O., S. 74) folgt noch weiter:

Jedes Aggregat von gewöhnlichen äußeren und inneren Grenzmengen besitzt endliche, abzählbare oder Kontinuumsmächtigkeit.

Die Menge der in einem Punkte P vereint liegenden *Ecken* ist entweder *endlich* oder *abzählbar* oder von *Mächtigkeit des Kontinuums.*

Ferner beweisen wir:

Die Parameter der in einem Punkt P vereint liegenden *vorn und hinten differenzierbaren Ecken der Größe* $\vartheta > \vartheta_0$ bilden eine *isolierte Menge* (für jede positive Winkelgröße $\vartheta_0 < \pi$) und sogar nur eine *endliche* Menge, wenn alle in P liegenden Kurvenpunkte vorn und hinten differenzierbar sind.

Hat man nämlich eine einfache Folge von solchen Ecken $\{P(t_i)\}$, wobei alle $t_i < t_\omega$ (bzw. $> t_\omega$) sind, so kann der Häufungspunkt $P(t_\omega)$ dieser Ecken nicht vorn (bzw. hinten) differenzierbar sein; denn zu einer vorderen (bzw. hinteren) Halbtangente l_ω gehört als weitere vordere (bzw. hintere) Halbtangente von $P(t_\omega)$ eine von l_ω mindestens um den Winkel ϑ_0 abstehende Halbgerade.

Setzt man nun an Stelle von ϑ_0 nacheinander die Elemente der gegen Null abnehmenden Folge

$$\vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_3 > \cdots > \vartheta_n > \cdots,$$

so erhält man auf diese Weise abzählbar viele isolierte Mengen von vorn und hinten differenzierbaren Ecken. Also haben wir den

Satz: *Die in einem Punkte P vereint liegenden vorn und hinten differenzierbaren Ecken* (ohne die Spitzen) *bilden eine höchstens abzählbare Menge.*

22. Wir gehen nun zu der Gesamtheit der in einem Punkt P vereint liegenden differenzierbaren bzw. nichtdifferenzierbaren Stellen über.

Satz: *Die Parameter der in einem Punkte P liegenden vollständig differenzierbaren Stellen bilden eine innere Grenzmenge.*

Beweis: Die Menge besteht aus den Parametern der in P liegenden „gewöhnlichen" differenzierbaren Punkte und der in P liegenden Spitzen; sie ist daher die Summe einer isolierten Menge und einer inneren Grenzmenge, also selbst eine innere Grenzmenge. q. e. d.

Daraus folgt wieder, daß die Menge der in P liegenden *nicht vollständig differenzierbaren* Kurvenpunkte *endlich, abzählbar* oder von *Mächtigkeit des Kontinuums* ist.*) — Aber diese Menge braucht *keine innere Grenzmenge* zu bilden, wie das zweite Beispiel von Nr. 17 zeigt.

Satz: *Die Parameter der in einem Punkt P liegenden vorn und hinten differenzierbaren Kurvenstellen bilden eine innere Grenzmenge.*

Man beweist dies ähnlich wie den ersten Satz von Nr. 19.**)

Nach Hilfssatz a) von Nr. 20 folgt hieraus, daß die Menge der in P liegenden, *nicht vorn und hinten differenzierbaren* Kurvenpunkte *endlich*

*) Und zwar ist sie (nach der Youngschen Ausdruckweise) eine gewöhnliche äußere Grenzmenge.

**) Vgl. meine Hab.-Schrift S. 24/25.

abzählbar oder von *Mächtigkeit des Kontinuums* ist.*) — Diese Menge braucht aber *keine innere Grenzmenge* zu sein.**)

23. Hat man eine Folge von Punktmengen E_n, so versteht man unter der Grenzmenge E_ω von $\{E_n\}$ nach P. Painlevé***) die Gesamtheit aller Punkte, gegen deren jeden sich Elemente von unendlichvielen E_n häufen. Man beweist dann ohne weiteres den

Hilfssatz: Eine abgeschlossene Menge F von abgeschlossenen Punktmengen E ist selbst eine abgeschlossene Punktmenge.

Hieraus und aus dem ersten Satz von Nr. 5 folgt nun:

Alle (vorderen bzw. hinteren) Halbtangenten und ebenso alle (vorderen bzw. hinteren) Strahlen der in einem Punkte P vereinigten Kurvenstellen $P(t_i)$ bilden eine endliche oder abgeschlossene Menge.

24. *Die Menge der in P vereinigten Kurvenpunkte $P(t_i)$, welche eine gemeinsame Halbtangente a besitzen, ist endlich oder abgeschlossen.*

Beweis: Sei in P eine Folge von Kurvenpunkten $\{P(t_i)\}$ vorhanden, welche eine gemeinsame Halbtangente a besitzen, so existieren dazu Folgen von Kurvenpunkten $R_i^{(k)}$ derart, daß für jedes i

$$\lim_{k=\infty} (\overline{P, R_i^{(k)}}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k=\infty} (\overrightarrow{P, R_i^{(k)}}) = a$$

ist. Setzt man jetzt $k = i$, so ergibt sich daraus, daß auch $P(t_\omega)$ die Halbtangente a besitzt. q. e. d.

Da beliebig viele abgeschlossene Mengen immer eine endliche oder abgeschlossene Menge gemeinsam haben, so gilt der vorstehende Satz auch für die in P vereinigten Kurvenpunkte, welche *irgendeine* Menge A gemeinsamer Halbtangenten besitzen.

§ 3.

Die Singularitätenmengen auf der Kurve.

25. Wir betrachten zunächst die Menge der auf einer Kurve gelegenen *Ecken* und *Spitzen*.

Die Aussagen über die Mächtigkeit dieser Mengen stützen sich wesentlich auf die folgenden beiden Sätze von A. Schoenflies†):

*) Und zwar ist sie (nach der Youngschen Ausdrucksweise) eine gewöhnliche äußere Grenzmenge.

**) Ein Gegenbeispiel ist in meiner Hab.-Schrift S. 25 angegeben.

***) Vgl. L. Zoretti, J. de Math. (6) 1 (1905), S. 8.

†) Schriften d. phys. ökon. Ges. zu Königsberg, 41 (1900), S. [13], und Bericht über Mengenlehre I, Jahresb. d. deutsch. Math.-Ver. 8 (1899), S. 157—159.

(I.) Die eigentlichen Maxima und Minima einer (eindeutigen) stetigen, nirgends konstanten Funktion (beliebig vieler) reellen Variablen bilden eine endliche oder abzählbare Menge.
und

(III.) Die Menge aller Werte, die eine (eindeutige) stetige reelle Funktion in ihren Extrempunkten annehmen kann, ist endlich oder abzählbar.

Der Ausspruch und Beweis dieser beiden Sätze sowie der eines anderen von Schoenflies l. c. aufgestellten (und mit II. bezeichneten) Satzes läßt sich unmittelbar von den eindeutigen Funktionen auf beliebige Parameterkurven (für eine beliebige x-Abzissenrichtung) übertragen, wenn man den in den Beweisen verwendeten Extrembereich ϑ nicht durch die Abszissendifferenz, sondern durch die t-Parameterdifferenz der Endpunkte von ϑ mißt.

Auf Grund des Schoenfliesschen Satzes I. hat nun B. Levi*) für eindeutige stetige Funktionen einer reellen Variablen den folgenden Satz bewiesen:

Die Menge der Stellen, für welche die Funktion eine vordere und eine hintere Ableitung besitzt, die beide voneinander verschieden sind, ist höchstens abzählbar.**)

Dieser Satz, den B. Levi für die vorn und hinten differenzierbaren Ecken ausspricht, läßt sich bei wörtlich gleichem Beweise auch auf die *Gesamtmenge sämtlicher* (auch der nicht vorn und hinten differenzierbaren) *Ecken und Spitzen einer eindeutigen stetigen reellen Funktion* verallgemeinern.

Daß aber der so erhaltene Satz *nicht mehr für beliebige Kurven* gilt, ersieht man aus den in Nr. 17 angegebenen Beispielen von Kurven, bei denen die in einem Punkte P vereint liegenden Ecken und Spitzen eine Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums bilden.***) Der Grund für diese Tatsache liegt in dem Umstande, daß für eine Ecke oder Spitze $P(t)$, die in einem *unendlichvielfachen* Punkte P liegt, nicht mehr eine Richtung zu existieren braucht, in bezug auf die $P(t)$ ein *eigentliches* Extremum darstellt.

Für eine Ecke oder Spitze $P(t)$, die in einem nur *endlichvielfachen* Punkte P liegt, muß dagegen *immer* ein Winkel von Richtungen existieren, in bezug auf die $P(t)$ ein *eigentliches* Extremum darstellt. Man kann

*) B. Levi, Rend. Accad. Lincei (5) 15 (1906), S. 437.

**) Für *konvexe* Funktionen hat F. Bernstein einen anderen sehr einfachen Beweis dieses Satzes gegeben, Math. Ann. 64 (1907), S. 425/6.

***) Man kann leicht eine überall stetig differenzierbare Kurve mit sogar abzählbar unendlichvielen Punkten P angeben, in denen je eine Menge von Spitzen von der Mächtigkeit des Kontinuums vereint liegt, indem man eine Folge von geeigneten, immer schmäler und kleiner werdenden Ausschnitten aus Fig. 5 aneinander reiht.

daher für Kurven *endlichen* Vielfachheitsgrades den B. Levischen Beweis (unter Benutzung der Verallgemeinerung des Schoenfliesschen Satzes I.) übertragen.

26. Dagegen muß die Untersuchung für Kurven unendlichen Vielfachheitsgrades in anderer Weise geführt werden. Wir beweisen zunächst:

Satz. *Die Punkte $\overline{P}$ der Ebene, in denen Ecken oder Spitzen einer Kurve liegen, bilden eine höchstens abzählbare Menge.*

Beweis: Man nehme eine gegen Null konvergierende Folge von positiven Winkelgrößen, die alle Bruchteile von π sind,

$$\pi = \vartheta_0 > \vartheta_1 > \vartheta_2 > \cdots > \vartheta_n > \cdots$$

und fasse alle diejenigen Punkte $\overline{P}$, welche Spitzen oder Ecken der Größe $\varepsilon = \pi - \vartheta$ enthalten, wobei $\vartheta_h \geqq \vartheta > \vartheta_{h+1}$ ist, in eine Klasse K_h zusammen. Derselbe Punkt $\overline{P}$ kann dabei natürlich mehreren dieser Klassen angehören. Angenommen nun, es gäbe mehr als abzählbar viele Punkte $\overline{P}$. Dann müßte mindestens eine dieser abzählbar vielen Klassen K_h vorhanden sein, die mehr als abzählbar viele Punkte $\overline{P}$ enthält; sei dies die Klasse K_m. Nun teile man die Gesamtheit aller Richtungen in endlichviele aneinander grenzende Winkel der Größe $\frac{\vartheta_{m+1}}{2}$. Dann müßten Ecken oder Spitzen von mehr als abzählbar vielen Punkten $\overline{P}$ der Klasse K_m in bezug auf sämtliche Richtungen mindestens eines dieser Winkel $\left(\text{nennen wir ihn} \left[\frac{\vartheta_{m+1}}{2}\right]_0\right)$ Extreme darstellen. Diese Punkte $\overline{P}$ bezeichnen wir mit $\overline{P}_0$. Sei s_{m+1} eine Richtung des Winkels $\left[\frac{\vartheta_{m+1}}{2}\right]_0$. Nach dem verallgemeinerten Schoenfliesschen Satze III können diese Extrema nur auf abzählbar vielen Geraden der Richtung s_{m+1} liegen. Es müßte also mindestens eine solche Gerade, $g_{s_{m+1}}$, vorhanden sein, auf der mehr als abzählbar viele Punkte $\overline{P}_0$ liegen. Die auf $g_{s_{m+1}}$ liegenden Punkte $\overline{P}_0$ bezeichnen wir mit $\overline{P}_{00}$. Nun wählen wir irgendeine andere Richtung r_{m+1}, die ebenfalls dem Winkel $\left[\frac{\vartheta_{m+1}}{2}\right]_0$ angehört; dann könnten keine zwei Punkte $\overline{P}_{00}$ auf derselben Geraden der Richtung r_{m+1} liegen, und die vorher verwendeten Ecken und Spitzen der Punkte $\overline{P}_{00}$ wären auch in bezug auf r_{m+1} Extrema. Es müßten also mehr als abzählbar viele Gerade der Richtung r_{m+1} vorhanden sein, auf denen Extrema liegen, was im Widerspruch zum verallgemeinerten Schoenfliesschen Satz III stehen würde. Die Punkte $\overline{P}$ können deshalb nur eine höchstens abzählbare Menge bilden. q. e. d.

Hieraus folgt sofort:

Jede Kurve von endlichem oder abzählbarem Vielfachheitsgrad besitzt höchstens abzählbar viele Ecken und Spitzen.

Da ferner nach Nr. 21 und Nr. 19 die in einem Punkte vereint liegenden Ecken bzw. Spitzen endliche, abzählbare oder Kontinuumsmächtigkeit besitzen, so haben wir jetzt:

Die *Ecken* bzw. die *Spitzen* einer beliebigen Kurve bilden eine *endliche* oder *abzählbare* Menge oder eine Menge von der *Mächtigkeit des Kontinuums.*

Und:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Ecken oder Spitzen einer Kurve in $\left\{\begin{matrix}\textit{höchstens abzählbarer Menge}\\ \textit{Menge von Mächtigkeit des Kontinuums}\end{matrix}\right\}$ *vorhanden sind, ist das* $\left\{\begin{matrix}\textit{Fehlen}\\ \textit{Vorhandensein}\end{matrix}\right\}$ *unendlich vielfacher Punkte, in denen die Menge der vereinigt liegenden Ecken oder Spitzen von Mächtigkeit des Kontinuums ist.*

Durch Heranziehung des letzten Satzes von Nr. 21 erhalten wir noch:

Die vorn und hinten differenzierbaren Ecken (*ohne* Spitzen!) *bilden bei jeder Kurve eine höchstens abzählbare Menge.*

Da die in einem Punkte P vereint liegenden Kurvenpunkte einer nirgends dichten Parametermenge angehören, so kann man, wenn man von dem Baireschen Begriff der Mengen erster Kategorie*) Gebrauch macht, noch sagen:

Die Parameter, welche zu den Ecken bzw. den Spitzen einer Kurve gehören, bilden eine Menge erster Kategorie.

27. Wir gehen nun zu den *Wendepunkten* über. In § 5 wird gezeigt, daß das Dualitätsprinzip nicht mehr allgemein anwendbar ist, sondern nur für Kurven, die noch gewisse spezielle Bedingungen erfüllen; für diese „dualisierbaren“ Kurven entsprechen nach Nr. 14 immer Spitzen und Wendepunkte, die nicht Häufungspunkte von Spitzen sind, einander dual. In § 5 wird dies benutzt werden.

Hier sei allgemein folgendes hervorgehoben:

Die Existenz von eindeutigen monotonen, überall vollständig differenzierbaren reellen Funktionen, die eine Menge zweiter Kategorie von regulären Wendepunkten mit (der Abszissenachse) parallelen Wendetangenten besitzen, hat D. Pompeiu**) durch ein geeignetes Beispiel dargetan.

Man kann nun auch Beispiele von eindeutigen monotonen, überall sogar *n-mal stetig differenzierbaren* reellen Funktionen angeben, die eine

*) R. Baire, Ann. di Mat. (3) 3 (1899), S. 65. Die Punktmengen, die sich aus höchstens abzählbarvielen nirgends dichten Mengen zusammensetzen, heißen Mengen erster Kategorie; alle anderen heißen Mengen zweiter Kategorie.

**) D. Pompeiu, Math. Ann. 63 (1907) S. 326; ein weiteres derartiges Beispiel hat H. A. Schwarz, Sitzb. Berliner Akademie 1910, S. 592 angegeben und R. Remak, J. f. Math. 141 (1912), S. 77 hat dasselbe eingehend behandelt.

perfekte Menge*) von regulären Wendepunkten mit (der Abszissenachse) parallelen Wendetangenten besitzen: Man nehme auf einer Geraden a eine nirgends dichte perfekte Menge T und errichte über jedem Intervall τ_i der durch T bestimmten Intervallmenge einen (ganz oberhalb τ_i gelegenen) Bogen $\mathfrak{C}_i$ von folgenden Eigenschaften:

1) $\mathfrak{C}_i$ sei $(n-1)$-mal stetig differenzierbar;

2) $\mathfrak{C}_i$ berühre τ_i in seinen Endpunkten $t_1^{(i)}$ und $t_2^{(i)}$ $(n-1)$-fach;

3) $\mathfrak{C}_i$ und seine Ableitungen $\mathfrak{C}_i', \mathfrak{C}_i'', \ldots, \mathfrak{C}_i^{(n-1)}$ sollen von $t_1^{(i)}$ und $t_2^{(i)}$ aus durch Winkel projiziert werden, die proportional zu τ_i sind.

Ist nun die von der Gesamtheit $\{\mathfrak{C}_i\}$ und T gebildete Kurve mit $\varphi(t)$ bezeichnet, so stellt

$$y = \int \varphi(t)\,dt$$

die gewünschte Funktion dar.

Bei einer stetig differenzierbaren Kurve können in höchstens abzählbar vielen verschiedenen Richtungen Wendetangenten der Gattung b) (oder speziell *reguläre*) *vorhanden sein.***) Dies folgt unmittelbar durch Anwendung des Nr. 25 zitierten Schoenfliesschen Satzes III auf die stetige Kurve, welche durch die Ableitungswerte der gegebenen Kurve dargestellt wird. Dieser Schluß würde zunächst nur für ganz im Endlichen gelegenen Kurvenstücke gelten; die unendlich fernen Kurvenpunkte können aber nichts weiter ausmachen, da jeder Häufungspunkt von Schnittpunkten einer Kurve mit einer Geraden diese Gerade zur Tangente hat.

Daß dies *nicht* allgemein für *Wendetangenten der Gattung* a) gilt, ergibt sich, wenn man die eben angegebene Kurve $y = \int \varphi(t)\,dt$ so umprojiziert, daß der unendlich ferne Punkt der Abszissenachse ins Endliche transformiert wird.

28. Ein Gegenstück zu den in einem Punkt vereinigt liegenden Spitzen bilden die Wendepunkte mit gemeinsamer Wendetangente. Es ergibt sich hier:

Die Wendepunkte der Gattung a) (oder speziell *reguläre*), *welche dieselbe Wendetangente* w *besitzen, bilden eine isolierte Menge.****)

---

*) Die Menge der Wendepunkte mit parallelen Wendetangenten kann schon bei überall stetig differenzierbaren Funktionen nicht mehr überall dicht liegen und daher nicht von zweiter Kategorie sein, da bei den stetig differenzierbaren Funktionen die Menge der parallelen Tangenten abgeschlossen ist.

**) Also sind bei stetig differenzierbaren Kurven abzählbarer Klasse höchstens abzählbar viele Wendepunkte der Gattung b) (oder speziell reguläre) vorhanden.

***) Für vorn und hinten differenzierbare Kurven läßt sich auch noch beweisen, daß die Wendepunkte der Gattung a), die überhaupt auf *einer* Geraden liegen, eine isolierte Menge bilden.

Beweis: Sei P_ω der Häufungspunkt einer einfachen Folge $\{P_i\}$ von Wendepunkten mit gemeinsamer Wendetangente w. Nun liegt zwar, da zwei Kurven (wie überhaupt zwei abgeschlossene Punktmengen) eine abgeschlossene Menge von Punkten gemeinsam haben, P_ω ebenfalls auf w. Da aber in jeder beliebigen Parameternähe von P_i Kurvenpunkte auf beiden Seiten von w liegen, so gibt es Kurvenpunkte *eines* Kurvenzuges von P_ω auf beiden Seiten von w und in jeder beliebigen Nähe von P_ω. Also kann w nicht Wendetangente der Gattung a) von P_ω sein. q. e. d.

Dies gilt jedoch *nicht* mehr allgemein für *Wendepunkte der Gattung b)* oder genauer gesagt, für Wendepunkte der Gattung b), die Häufungspunkte von Spitzen sind. Man sieht dies aus folgendem Beispiel:

Man nehme auf der Geraden a eine nirgends dichte perfekte Punktmenge T und füge in jedes Intervall τ_i der von T bestimmten Intervall-

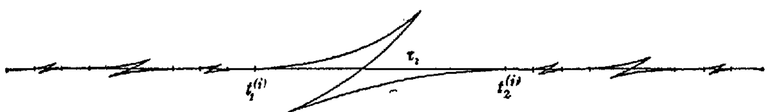

Fig. 6.

menge ein stetig differenzierbares Kurvenstück $\mathfrak{K}_i$ von folgenden Eigenschaften ein (wie in Fig. 6 angegeben):

1) $\mathfrak{K}_i$ berühre τ_i in den Endpunkten $t_1^{(i)}$ und $t_2^{(i)}$;

2) $\mathfrak{K}_i$ werde von $t_1^{(i)}$ und $t_2^{(i)}$ aus durch einen Winkel projiziert, der proportional zu τ_i ist;

3) die Richtungen der Tangenten von $\mathfrak{K}_i$ seien in einem Winkel φ_i enthalten, der proportional zu τ_i sei;

4) die Gesamtheit aller Winkel φ_i bilde einen Winkel φ, dessen einer Schenkel die Richtung von a sei.

Die Gesamtheit aller $\{\mathfrak{K}_i\}$ und T ergibt eine stetig differenzierbare Kurve, die in den Punkten der perfekten Menge T Wendepunkte der Gattung b) mit der gemeinsamen Wendetangente a besitzt.

29. Bei den mehrfachen Punkten ist der Gegensatz zwischen den *vollständigen Selbstberührungspunkten* und den *eigentlichen mehrfachen Punkten* wichtig.

Die vollständigen Selbstberührungspunkte können auch bei n-fach differenzierbaren Kurven in perfekter Menge vorkommen. Wenn man von dem trivialen Fall, daß ein ganzer Kurvenbogen mehrfach durchlaufen wird, absieht, so kann man ein Beispiel einer solchen Kurve mit einer nirgends dichten perfekten Menge von Selbstberührungspunkten auf folgende Weise erhalten: Man durchlaufe das in Nr. 27 konstruierte Kurvenstück $\varphi(t)$ und hierauf die Gerade a, welche die perfekte Menge T trägt. Will man eine nirgends geradlinige Kurve erhalten, so kann man $\varphi(t)$ (statt über a) über einem Kreisbogen k konstruieren und dann nacheinander $\varphi(t)$ und k durchlaufen.

Für die eigentlichen mehrfachen Punkte dagegen gilt der Satz:

Bei einer vorn und hinten differenzierbaren Kurve bilden die eigentlichen mehrfachen Punkte eine höchstens abzählbare Menge.

Beweis: Nach Nr. 26 gibt es nur abzählbar viele Punkte P, in denen Ecken oder Spitzen liegen, und nach dem letzten Satz von Nr. 15 müssen hier in jedem unendlich vielfachen Punkt Ecken oder Spitzen liegen.

Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die eigentlichen endlichvielfachen Punkte, die ausschließlich gewöhnliche Kurvenstellen enthalten, eine höchstens abzählbare Menge bilden. Sei P_i ein solcher m_i-facher Punkt und seien (in natürlicher Anordnung)

$$t_1^{(i)},\ t_2^{(i)},\ \ldots,\ t_{m_i}^{(i)}$$

die Parameter der in P vereinigt liegenden Kurvenstellen. Das Parameterintervall σ, dessen eindeutiges und stetiges Abbild unsere Kurve $\mathfrak{K}$ ist, habe die Länge s. Wir können σ als geschlossen annehmen; denn wenn $\mathfrak{K}$ nicht von selbst geschlossen ist, so denke man sich $\mathfrak{K}$ durch Hinzufügung eines einfachen Kurvenbogens geschlossen gemacht; dadurch kann die Menge unserer mehrfachen Punkte höchstens noch vermehrt werden, was für unseren Beweis nichts schadet. Die Parameter

$$t_1^{(i)},\ t_2^{(i)},\ \ldots\ t_{m_i}^{(i)}$$

liegen dann in zyklischer Anordnung vor. Jedes Parameterintervall $\left(t_h^{(i)} \cdots t_{h+1}^{(i)}\right)$ zerlege man nun durch Halbierung in die beiden neuen Parameterintervalle $\underset{+}{\tau}{}_h^{(i)}$ und $\underset{-}{\tau}{}_{h+1}^{(i)}$; die zugehörigen Kurvenstücke seien mit $\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}{}_h^{(i)}\right)$ bzw. $\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}{}_{h+1}^{(i)}\right)$ bezeichnet. Zu jedem Punkt muß es einen ersten Index k geben, sodaß die Kurvenstellen $P_i\left(t_k^{(i)}\right)$ und $P_i\left(t_{k+1}^{(i)}\right)$ verschiedene Tangenten besitzen. $\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}{}_k^{(i)}\right)$, $\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}{}_k^{(i)}\right)$, $\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}{}_{k+1}^{(i)}\right)$ und $\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}{}_{k+1}^{(i)}\right)$ können nicht in jeder beliebigen Nähe von P_i Punkte gemeinsam haben, und daher muß es Parameterintervalle $\bar{\tau}_i$ von folgender Eigenschaft geben: Trägt man $\bar{\tau}_i$ von $t_k^{(i)}$ aus auf $\underset{-}{\tau}{}_k^{(i)}$ und $\underset{+}{\tau}{}_k^{(i)}$ ab und ebenso von $t_{k+1}^{(i)}$ aus auf $\underset{-}{\tau}{}_{k+1}^{(i)}$ und $\underset{+}{\tau}{}_{k+1}^{(i)}$, und erhält man so die Parameterintervalle

$$\underset{-}{\bar{\tau}}{}_k^{(i)},\quad \underset{+}{\bar{\tau}}{}_k^{(i)},\quad \underset{-}{\bar{\tau}}{}_{k+1}^{(i)},\quad \underset{+}{\bar{\tau}}{}_{k+1}^{(i)}$$

und die zugehörigen Kurvenstücke

$$\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\bar{\tau}}{}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\bar{\tau}}{}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\bar{\tau}}{}_{k+1}^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\bar{\tau}}{}_{k+1}^{(i)}\right),$$

so haben

$$\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\bar\tau}_k^{(i)}\right) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_{k+1}^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_{k+1}^{(i)}\right),$$

ebenso

$$\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\bar\tau}_k^{(i)}\right) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_{k+1}^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_{k+1}^{(i)}\right),$$

ferner

$$\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\bar\tau}_{k+1}^{(i)}\right) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_{k+1}^{(i)}\right),$$

und

$$\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\bar\tau}_{k+1}^{(i)}\right) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_k^{(i)}\right),\ \mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_{k+1}^{(i)}\right)$$

außer P_i keinen Punkt gemeinsam. Die obere Grenze aller zu festem i gehörigen $\bar\tau_i$ sei mit $\bar{\bar\tau}_i$ bezeichnet. Man nehme nun eine gegen Null abnehmende Folge von positiven Größen

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > \cdots.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß die Punkte P_i, deren $\bar{\bar\tau}_i > a_n$ ist, nur in endlicher Anzahl vorhanden sind. Wären es unendlich viele, so gäbe es eine Häufungsstelle t_ω der $t_k^{(i)}$ und in deren Nähe zwei Werte $t_k^{(i_1)}$ und $t_k^{(i_2)}$, derart, daß $t_k^{(i_1)} < t_k^{(i_2)}$ und $\left(t_k^{(i_2)} - t_k^{(i_1)}\right) < \varepsilon \cdot a_n$, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl ist. Wächst der Parameter von $t_k^{(i_2)}$ aus weiter, so kehrt die Kurve zuerst wieder nach P_{i_2}, darnach erst nach P_{i_1} zurück, da $\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\bar\tau}_k^{(i_2)}\right)$ weder von $\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\tau}_k^{(i_2)}\right)$ noch von $\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\tau}_{k+1}^{(i_2)}\right)$ getroffen werden darf. Also

$$t_k^{(i_1)} < t_k^{(i_2)} < t_{k+1}^{(i_2)} < t_{k+1}^{(i_1)}.$$

Da ferner P_{i_1} nicht Schnittpunkt von $\mathfrak{C}\left(\underset{+}{\bar\tau}_k^{(i_1)}\right)$ und $\mathfrak{C}\left(\underset{-}{\bar\tau}_{k+1}^{(i_1)}\right)$ sein kann, so muß

$$\left(t_{k+1}^{(i_1)} - t_{k+1}^{(i_2)}\right) > a_n$$

sein. Da dies für je zwei aufeinanderfolgende Werte der gegen t_ω sich häufenden Folge $\{t_k^{(i)}\}$ gilt, so erhält man

$$t_k^{(i_1)} < t_k^{(i_2)} < t_k^{(i_3)} < \cdots < t_k^{(i_\nu)} < t_{k+1}^{(i_\nu)} < \cdots < t_{k+1}^{(i_3)} < t_{k+1}^{(i_2)} < t_{k+1}^{(i_1)}$$

und

$$\left(t_{k+1}^{(i_\mu)} < t_{k+1}^{(i_\mu + 1)}\right) > a_n \quad (\text{für jedes } \mu = 1, 2, 3, \cdots, \nu - 1).$$

Wählt man nun ν hinreichend groß, so könnte man erreichen, daß

$$\left(t_{k+1}^{(i_1)} - t_k^{(i_1)}\right) > \nu \cdot a_n > \sigma$$

wird, was unmöglich ist. Daher können die Punkte P_i, deren $\bar{\bar\tau}_i > a_n$ ist, nur in endlicher Anzahl vorhanden sein und deshalb ist die Menge aller P_i und also aller eigentlichen mehrfachen Punkte unserer Kurve höchstens abzählbar. q. e. d.

Der vorstehende Beweis gilt noch allgemeiner *für alle Kurven, die nur höchstens abzählbar viele, gewöhnliche, nicht differenzierbare Punkte besitzen*; für eben diese Gesamtheit von Kurven ist auch nach dem letzten Satz von Nr. 15 die Menge der *unendlich vielfachen Punkte höchstens abzählbar.*

Es sei noch erwähnt, daß die *gemeinsamen Punkte zweier Kurven* (wie überhaupt zweier abgeschlossenen Mengen) immer eine *abgeschlossene* Menge bilden, und daß diejenigen gemeinsamen Punkte, in denen die beiden Kurven keine gemeinsamen Halbtangenten haben, eine *isolierte* Menge bilden. Beide Aussagen gelten nicht mehr für die mehrfachen Punkte einer Kurve, wie man sich leicht durch Beispiele überzeugt.

30. Bei den *mehrfachen Tangenten* macht sich wiederum bemerkbar, daß die Möglichkeit zu dualisieren nicht allgemein vorhanden ist.

Selbst bei überall n-fach stetig differenzierbaren Kurven kann die Menge der *eigentlichen* mehrfachen Tangenten die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen.

Beispiel: Man nehme die Nr. 27 angegebene Kurve $y = \int \varphi(t)\, dt$ und füge ein zweites Exemplar hinzu, das aus dem ersten durch Parallelverschiebung längs der Abszissenachse entstanden ist, sodaß beide Exemplare keine Punkte gemeinsam haben. Verbindet man nun beide durch einfache Kurvenbögen, so erhält man eine n-fach differenzierbare Kurve mit einer perfekten Menge eigentlicher Doppeltangenten, die der Abszissenachse parallel sind.

Wie Fig. 7 zeigt, brauchen auch bei vollständig differenzierbaren Kurven die von einem Punkt ausgehenden Tangenten keine abgeschlossene Menge zu bilden. Nimmt man eine zweite längs a parallel verschobene

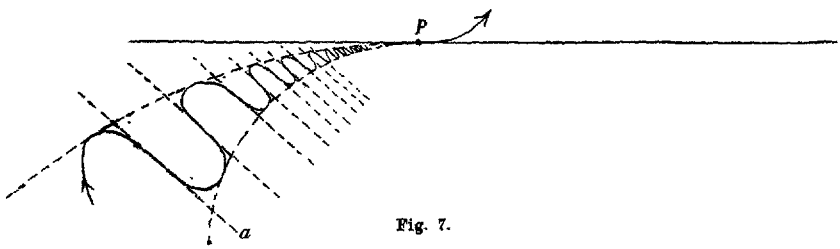

Fig. 7.

gleiche Kurve hinzu, so erhält man ein Beispiel von zwei vollständig differenzierbaren Kurven, die eine *nicht abgeschlossene* Menge von gemeinsamen Tangenten besitzen.

Dagegen bilden natürlich die an eine stetig differenzierbare Kurve von einem Punkt ausgehenden Tangenten eine abgeschlossene Menge und man beweist auch leicht:

Die *gemeinsamen Tangenten* von *zwei stetig differenzierbaren* Kurven bilden eine *abgeschlossene* Menge.*)

Beweis: Es sei $\{a_k\}$ eine unendliche Folge gemeinsamer Tangenten der beiden Kurven $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Man zeichne von den Berührungsstellen von a_k auf $\mathfrak{C}_1$ und ebenso auf $\mathfrak{C}_2$ je eine aus.**) Diese haben auf $\mathfrak{C}_1$ mindestens einen Häufungspunkt $P(t_\omega^{(1)})$. Man wähle aus $\{a_k\}$ eine Teilfolge $\{a_k'\}$ aus, deren auf $\mathfrak{C}_1$ ausgezeichnete Berührungsparameter $t_\omega^{(1)}$ als einzige Häufungsstelle besitzen. Dann haben die zu $\{a_k'\}$ gehörigen, auf $\mathfrak{C}_2$ ausgezeichneten Berührungsparameter mindestens eine Häufungsstelle $t_\omega^{(2)}$. Man wähle nun aus $\{a_k'\}$ eine neue Teilfolge $\{a_k''\}$ aus, deren auf $\mathfrak{C}_2$ ausgezeichnete Berührungsparameter $t_\omega^{(2)}$ als einzige Häufungsstelle besitzen. Wegen der stetigen Differenzierbarkeit von $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ hat $\{a_k''\}$ nur eine einzige Häufungsgerade a_ω'' und diese ist gemeinsame Tangente von $P(t_\omega^{(1)})$ und $P(t_\omega^{(2)})$. q. e. d.

31. Wir gehen nun zu den *nicht differenzierbaren Stellen* einer Kurve über. Wir beweisen hier zunächst den folgenden Hilfssatz über die Menge der von einem Punkt ausgehenden Grenzsekanten (der ein Seitenstück zu einem für eindeutige, stetige reelle Funktionen bewiesenen Satz von T. Brodén***) und seiner Verallgemeinerung von W. H. Young†) ist):

Bei einer stetigen Kurve bilden die Parameter derjenigen Stellen, für welche durch einen gegebenen Punkt A hindurchgehende Grenzsekanten existieren, eine innere Grenzmenge.

Beweis: Man hat nur zu zeigen, daß die Stellen, für welche Grenzsekanten einer gegebenen Richtung a existieren, eine innere Grenzmenge bilden. Daraus folgt dann der allgemeine Satz durch Umprojizieren. Ist $P(\bar t)$ ein Punkt, der eine Grenzsekante $a_{\bar t}$ der Richtung a besitzt, so existieren zwei gegen $\bar t$ konvergierende Folgen $\{t_i\}$ und $\{t_i'\}$, derart, daß

*) Dagegen brauchen auch bei einer n-fach stetig differenzierbaren Kurve die mehrfachen Tangenten *keine* abgeschlossene Menge zu bilden; Beispiel: Die der x-Achse parallelen Doppeltangenten von

$$x^{2n+1}\cdot\sin\frac{1}{x}.$$

**) Da die Menge der Berührungsstellen von a_k auf $\mathfrak{C}_1$ (bzw. $\mathfrak{C}_2$) abgeschlossen ist, kann beispielsweise immer die *erste* Berührungsstelle genommen werden; das Auswahlpostulat wird hier also nicht verwendet.

***) T. Brodén, Acta Univ. Lund, 33_2 (1897), S. 31; A. Schoenflies, Bericht über Mengenlehre I, Jahresb. d. Deutschen Math.-Ver. 8 (1899), p. 148/9. Der Schönfliessche Beweis und damit der Brodénsche Satz lassen sich auf Parameterkurven übertragen, wenn man zu den Intervallen $(x_n\cdots x') = s'$ noch die zugehörigen Parameterintervalle τ' bildet und dann die Intervallmenge $\{\{\tau'\}\}$ betrachtet.

†) W. H. Young, Arkiv för Mat., Astr. och Fys. 1 (1903/4), S. 201.

$$t_i < \bar{t} < t_i'$$

und

$$\lim_{i=\infty} (\overline{P(t_i),\, P(t_i')}) = a_{\bar{t}}.$$

Wir wählen nun eine gegen Null abnehmende Folge von Größen

$$\eta_1 > \eta_2 > \cdots > \eta_n > \cdots$$

und bestimmen für jeden unserer Punkte $P(\bar{t})$ den Index $i = i_n^{(\bar{t})}$ so, daß

1) für alle $i \geqq i_n^{(\bar{t})}$

$$\sphericalangle (a;\, \overline{P(t_i),\, P(t_i')}) < \eta_n,$$

2) für alle $i \geqq i_n^{(\bar{t})}$

$$|t_i - t_i'| < \eta_n,$$

3) $i_{n+1}^{(\bar{t})} \geqq i_n^{(\bar{t})}$.

Wir bezeichnen dann das Parameterintervall $\left(t_{i_n^{(\bar{t})}} \cdots t'_{i_n^{(\bar{t})}}\right)$ mit $\tau_n^{(\bar{t})}$. Dann bestimmt die Gesamtheit dieser Intervalle, $\{\{\tau_n^{(\bar{t})}\}\}$, eine innere Grenzmenge T und wir haben zu zeigen, daß zu T nur unsere Parameter $\bar{t}$ gehören. Jeder Punkt $\mathfrak{t}$ von T muß für jedes n innerer Punkt mindestens eines Intervalls $\tau_n^{(\bar{t})}$ sein. Für jedes n gibt es also zu $\mathfrak{t}$ zwei Werte $\mathfrak{t}_n$ und $\mathfrak{t}_n'$, sodaß

$$\mathfrak{t}_n < \mathfrak{t} < \mathfrak{t}_n',$$

ferner

$$|\mathfrak{t}_n - \mathfrak{t}_n'| < \eta_n$$

und endlich

$$\sphericalangle (a;\, \overline{P(\mathfrak{t}_n),\, P(\mathfrak{t}_n')}) < \eta_n$$

ist. Also besitzen alle Punkte, deren Parameter T angehören, eine Grenzsekante der gegebenen Richtung a. q. e. d.

32. Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

Liegen die Kurvenpunkte, deren Grenzsekantenwinkel $\geqq \sigma > 0$ ist, in einem Kurvenbogen überall dicht, so gibt es dort eine Menge zweiter Kategorie) von Punkten, deren Grenzsekantenwinkel $> \sigma'$ ist, wobei $\sigma > \sigma'$ und σ' von σ beliebig wenig verschieden sei.*

Beweis: Man teile den vollen Winkel der möglichen Richtungen in endlich viele Teilwinkel $\varphi_k \leqq \frac{\sigma}{n}$, wobei n irgendeine positive ganze Zahl ist. Jeder Winkel, der durch Zusammenfassen aufeinander folgender Teilwinkel entsteht und der $> \frac{n-2}{n} \cdot \sigma$ und $\leqq \frac{n-1}{n} \cdot \sigma$ ist, soll mit ϑ bebezeichnet werden. Dann umschließt der Grenzsekantenwinkel $\sigma_i > \sigma$ jedes unserer Punkte $P(t_i)$ mindestens ein ϑ. Da nun, wenn eine überall dichte

---

*) Hier ist die Menge zweiter Kategorie zugleich Komplementärmenge einer Menge erster Kategorie.

Menge in eine endliche Anzahl von Teilmengen geteilt wird, mindestens eine dieser Teilmengen überall dicht ist, so muß es hier mindestens einen dieser Winkel ϑ (er heiße ϑ_n) geben, der gleichzeitig von den Grenzsekantenwinkeln der Punkte einer überall dichten Menge umfaßt wird. Nunmehr folgt nach dem vorigen Satz, daß es zu jeder in ϑ_n enthaltenen Richtung a_λ eine Menge zweiter Kategorie von Kurvenstellen gibt, für welche Grenzsekanten der Richtung a_λ vorhanden sind. Wählt man für a_λ speziell die beiden Schenkel a_1 und a_2 von ϑ_n, so muß es (da der gemeinsame Teil zweier Mengen zweiter Kategorie wieder eine Menge zweiter Kategorie ist) eine Menge zweiter Kategorie von Kurvenstellen geben, in deren Grenzsekantenwinkel die Richtungen a_1 und a_2 und deshalb auch ϑ_n enthalten sind. Bezeichnen wir die Größe des Winkels ϑ_n mit σ', so ist $\sigma > \sigma'$, wobei $(\sigma - \sigma') < \frac{2\sigma}{n}$ für hinreichend große n beliebig klein gemacht werden kann. q. e. d.

Es ist leicht zu sehen, daß die in vorstehendem Beweis benutzte, für die überall dicht liegenden Mengen geltende Tatsache sich auch auf die in sich dicht liegenden Mengen übertragen läßt; d. h.: zerlegt man eine in sich dichte Menge in eine endliche Anzahl von Teilmengen, so enthält mindestens eine von diesen Teilmengen einen in sich dichten Bestandteil.

Deshalb behält der vorstehende Satz und der Wortlaut seines Beweises volle Geltung, wenn man durchweg „überall dicht“ durch *„in sich dicht“* und gleichzeitig „Menge zweiter Kategorie“ durch *„innere Grenzmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums“* ersetzt.

33. Da ferner nach Nr. 26 die Spitzen und Ecken eine Menge erster Kategorie bilden, so folgt aus dem vorigen Satz weiter:

Liegen auf einem Kurvenbogen die Ecken der Größe $\varepsilon_i \leq \varepsilon < \pi$ überall dicht, so gibt es dort eine Menge zweiter Kategorie von gewöhnlichen, nicht vorn und hinten differenzierbaren Punkten, deren Grenzsekantenwinkel $> (\pi - \varepsilon - \eta)$ ist, wobei η eine beliebig kleine Größe darstellt.

Und:

Liegen auf einem Kurvenbogen die Spitzen überall dicht), so gibt es dort eine Menge zweiter Kategorie von gewöhnlichen, nicht vorn und hinten differenzierbaren Punkten, deren Grenzsekantenwinkel $> (\pi - \eta)$ ist, wobei η eine beliebig kleine Größe darstellt.*

Daraus folgt der Satz:

Bei einer durchweg vorn und hinten differenzierbaren Kurve können

---

*) Vgl. Enzyklopädie II A 1 (A. Pringsheim) S. 43 Fußnote 228, wo Beispiele für solche Kurvenbögen angegeben sind.

die Spitzen und die Ecken der Größe $\varepsilon_i \leqq \varepsilon < \pi$ *nirgends überall dicht liegen.**)

Die drei vorstehenden Sätze gelten *nicht mehr allgemein*, wenn man „überall dicht" durch *„in sich dicht"* und „Menge zweiter Kategorie" durch *„innere Grenzmenge von Mächtigkeit des Kontinuums"* ersetzt. Dies sieht man schon aus den Nr. 17 angegebenen Beispielen. Schließt man dagegen die Kurven vom Vielfachheitsgrad der Mächtigkeit des Kontinuums, welche mehr als abzählbar viele Ecken oder Spitzen enthalten, aus, so kann man diese Übertragung der drei vorstehenden Sätze auf die in sich dichten Mengen vornehmen. Dies ist also insbesondere *für alle Kurven von höchstens abzählbarem Vielfachheitsgrad* möglich.

Aus dem letzten Satz erhalten wir so:

Bei einer durchweg vorn und hinten differenzierbaren Kurve von höchstens abzählbarem Vielfachheitsgrad bilden die Spitzen und die Ecken der Größe $\varepsilon_i \leqq \varepsilon < \pi$ *eine separierte Menge.*

Aus dem am Anfang dieser Nummer Gesagten ergibt sich, daß man für *überall dichte* Mengen den Satz Nr. 32 noch in folgender Weise verschärfen kann**):

Liegen die Kurvenpunkte, deren Grenzsekantenwinkel $\geqq \sigma > 0$ ist, in einem Kurvenbogen überall dicht, so gibt es dort eine Menge zweiter Kategorie von *gewöhnlichen, nicht vorn und hinten differenzierbaren* Punkten, deren Grenzsekantenwinkel $> \sigma'$ ist, wobei $\sigma > \sigma'$ und σ' von σ beliebig wenig verschieden ist.

Es ist noch hervorzuheben, daß (was aus dem Beweis des Satzes Nr. 32 hervorgeht) *die Grenzsekantenwinkel aller Punkte der in den vorstehenden Sätzen* (Nr. 32 u. 33) *vorkommenden Mengen zweiter Kategorie bzw. inneren Grenzmengen der Mächtigkeit des Kontinuums, der Richtung nach, einen jedesmal festen Winkel der Größe* σ' *einschließen.*

Hieraus werden wir im nächsten Paragraphen, der von den *Kurven höchstens abzählbarer Klasse* handelt, weitere Folgerungen zu ziehen haben.

34. Mit Hilfe von Nr. 32 können wir ferner den folgenden Satz beweisen:

Die Menge der nichtdifferenzierbaren Kurvenpunkte ist endlich, abzählbar oder von Mächtigkeit des Kontinuums.

---

*) Der Satz gilt *nicht mehr* für die *Gesamtheit aller Ecken* (ohne Beschränkung der Größe), wie sich schon aus dem Riemannschen Beispiel einer nicht überall differenzierbaren Funktion ergibt. Daß selbst bei *konvexen* Funktionen die Gesamtmenge der Ecken überall dicht sein kann, haben J. L. W. V. Jensen, Acta Math. 30 (1906), S. 191 und F. Bernstein, Archiv Math. Ph. (3) 12 (1907), S. 285/6, durch Beispiele gezeigt.

**) Dagegen für *in sich dichte* Mengen entsprechend nur dann, wenn die Kurve höchstens abzählbar viele Ecken und Spitzen enthält, also wesentlich nur für die Kurven von höchstens *abzählbarem Vielfachheitsgrad.*

Beweis: Man nehme eine Folge von gegen Null abnehmenden positiven Größen

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \cdots > \sigma_n > \cdots.$$

Ist die Menge E_n der nicht differenzierbaren Stellen, deren Grenzsekantenwinkel $\geqq \sigma_n$ ist, für jedes n nirgends in sich dicht, so ist E_n für jedes n endlich oder abzählbar und daher die Menge E aller nicht differenzierbaren Stellen ebenfalls endlich oder abzählbar. Enthält dagegen E_n für irgendein n einen in sich dichten Bestandteil, so existiert nach Nr. 32 eine innere Grenzmenge der Mächtigkeit des Kontinuums von Stellen, deren Grenzsekantenwinkel $> \sigma_{n+1}$ ist. q. e. d.

Da nach Nr. 26 die vorn und hinten differenzierbaren Ecken eine höchstens abzählbare Menge bilden, so folgt aus dem Vorstehenden noch:

Die Menge der nicht vorn und hinten differenzierbaren Kurvenpunkte ist endlich, abzählbar, oder von Mächtigkeit des Kontinuums.

§ 4.

Klasse und Ordnung.

35. *Klasse und Ordnung sind immer endlich, abzählbar oder von Mächtigkeit des Kontinuums.*

Beweis: Nach Nr. 31 bilden die Kurvenstellen, von denen Grenzsekanten durch einen festen Punkt A gehen, eine innere Grenzmenge. Also ist die Klasse jedes Punktes A in bezug auf die Kurve endlich, abzählbar oder von Mächtigkeit des Kontinuums und dann gilt dasselbe auch für die Klasse der Kurve selbst.

Die Kurve hat mit jeder Geraden a (wie überhaupt mit jeder anderen Kurve) eine abgeschlossene Menge von Punkten gemein. Damit ist der Satz auch für die Ordnung erwiesen. q. e. d.

36. Aus Nr. 33 folgt, daß bei einer *Kurve von höchstens abzählbarer Klasse* die Kurvenpunkte, deren Grenzsekantenwinkel $\geqq \sigma > 0$ ist, *nirgends in sich dicht* liegen können. Also:

*Eine Kurve von höchstens abzählbarer Klasse besitzt höchstens abzählbar viele nichtdifferenzierbare Stellen und höchstens abzählbar viele Spitzen.**)

Die *gewöhnlichen differenzierbaren* Stellen bilden deshalb bei einer Kurve von höchstens abzählbarer Klasse eine *überall dichtliegende Menge zweiter Kategorie.*

*) Die Umkehrung des Satzes gilt *nicht*; wie die in Nr. 27 konstruierten Kurven $\varphi(t)$ und $\int \varphi(t)\,dt$ zeigen, gibt es n-fach differenzierbare Kurven, deren Klasse und Ordnung von Mächtigkeit des Kontinuums sind.

Jede Kurve von höchstens abzählbarer Klasse ist von höchstens abzählbarer Ordnung.

Beweis: Wir zeigen, daß bei jeder Kurve $\mathfrak{C}$, deren Ordnung von Mächtigkeit des Kontinuums ist, auch die Klasse von Mächtigkeit des Kontinuums ist. Bei einer solchen Kurve $\mathfrak{C}$ muß nämlich eine Gerade a existieren, die eine abgeschlossene Punktmenge Q von Mächtigkeit des Kontinuums mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat; dann wird aber a von $\mathfrak{C}$ in jedem Punkt der Ableitung Q' berührt. q. e. d.

Die *Umkehrung* dieses Satzes gilt *nicht allgemein*. Wir geben das folgende Beispiel einer Kurve abzählbarer Ordnung mit einer nirgends dichten perfekten Menge nichtdifferenzierbarer Stellen, deren Klasse also nach dem vorhergehenden sicher von Mächtigkeit des Kontinuums ist. Man nehme einen Kreis $\mathfrak{K}$ und auf ihm eine nirgends dichte perfekte Punktmenge Q, die etwa in bekannter Weise durch fortgesetzte Dreiteilung entsteht. In jedem Intervall δ_i der von Q bestimmten Intervallmenge ziehe man die Sehne s_i und errichte über ihr (beispielsweise nach dem Äußern von $\mathfrak{K}$ hin) einen Halbkreis $\mathfrak{H}_i$. Dann bildet die Gesamtheit $\{\mathfrak{H}_i\}$ unter Hinzunahme der Punktmenge Q eine einfache Kurve $\mathfrak{C}$ von abzählbarer Ordnung (da alle Kurvenpunkte nur abzählbar vielen Kreisen angehören), die in den Punkten von Q nichtdifferenzierbar, also von nichtabzählbarer Klasse ist.

Der letzte Satz sagt zugleich aus:

Die Kurven höchstens abzählbarer Klasse sind von höchstens abzählbarem Vielfachheitsgrad.

Hieraus und nach Nr. 33 folgt dann:

Bei einer Kurve von höchstens abzählbarer Klasse bilden die Spitzen und die Ecken der Größe $\varepsilon_i \leqq \varepsilon < \pi$ eine separierte Menge.

Da bei einer Kurve von höchstens abzählbarer Klasse höchstens abzählbarviele nichtdifferenzierbare Stellen und Spitzen vorhanden sind, so erhält man nach Nr. 29:

*Bei einer Kurve von höchstens abzählbarer Klasse ist die Menge der eigentlichen mehrfachen Punkte höchstens abzählbar.**)

Aus gleichem Grunde folgt:

Bei einer Kurve von *höchstens abzählbarer Klasse* ist die Menge aller *unendlichvielfachen Punkte höchstens abzählbar.*

37. Sei irgend eine Richtung a vorgelegt. Enthält unsere Kurve $\mathfrak{C}$ von höchstens abzählbarer Klasse zu a parallele Strecken s_i, so ersetze

---

*) Die Menge der Selbstberührungspunkte kann hierbei noch von Mächtigkeit des Kontinuums sein; ein Beispiel hierfür bildet die in Nr. 29 über dem Kreisbogen k konstruierte Kurve.

man s_i durch ein möglichst einfaches Kurvenstück, das s_i in den Endpunkten berührt; dies kann man immer so machen, daß die dadurch entstehende Kurve $\mathfrak{C}'$ ebenfalls von höchstens abzählbarer Klasse ist. Dann folgt nach Nr. 31, daß die Kurvenstellen von $\mathfrak{C}'$, die zu a parallele Grenzsekanten besitzen, eine separierte Menge bilden, und daß deshalb $\mathfrak{C}'$ aus höchstens abzählbarvielen in bezug auf a monotonen Stücken und deren Häufungspunkten besteht. Letzteres gilt dann a fortiori von $\mathfrak{C}$. Also:

*Eine Kurve $\mathfrak{C}$ von höchstens abzählbarer Klasse besteht in bezug auf jede Richtung aus höchstens abzählbarvielen monotonen Stücken $\mathfrak{C}_i$ und deren Häufungspunkten.**)

Wir erhalten zugleich, daß die Klasse der Kurven mit überall dicht liegenden Maxima und Minima (wie z. B. die Köpckesche Kurve**)) und sogar die der Kurven mit nur in sich dichtliegenden Extremen immer von Mächtigkeit des Kontinuums ist.

38. Wir gehen nun speziell zu den *Kurven endlicher Klasse* über:

Jede Kurve endlicher Klasse ist auch von endlicher Ordnung.

Beweis: Wäre die Kurve $\mathfrak{C}$ von abzählbarer Ordnung, so gäbe es eine Gerade a, auf der eine unendliche Folge von Kurvenpunkten $\{P_i(t_i)\}$ liegen. Der Häufungspunkt $P_\omega(t_\omega)$ liege im Endlichen (wenn nicht, projiziere man das betr. Kurvenstück ins Endliche); dann muß es ein $i = i_0$ geben, derart daß der Kurventeil $(P_{i_0}(t_{i_0}) \cdots P_{i_0+p}(t_{i_0+p}) \cdots P_\omega(t_\omega))$ ganz im Endlichen liegt. Auf jedem Kurvenstück

$$(P_{i_0+p}(t_{i_0+p}) \cdots P_{i_0+p+1}(t_{i_0+p+1}))$$

muß deshalb mindestens eine Stelle liegen, die eine zu a parallele Grenzsekante besitzt. $\mathfrak{C}$ wäre also von unendlicher Klasse, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

Die Umkehrung gilt *nicht.* Ein einfaches Beispiel einer Kurve von $2k^{\text{ter}}$ Ordnung, aber abzählbar unendlicher Klasse hat J. Hjelmslev***) angegeben.

Jede Kurve endlicher Ordnung und deshalb auch jede Kurve endlicher Klasse ist überall vorn und hinten differenzierbar.

Beweis: Jede solche Kurve ist von *endlichem Vielfachheitsgrad*; deshalb sind Strahlenpunkte ausgeschlossen. Gäbe es nun einen Punkt $P(t)$,

*) Nach Nr. 36 kann man diese monotonen Stücke $\mathfrak{C}_i$ immer so wählen, daß sie auch keine Spitzen mehr enthalten.

**) A. Köpcke, Math. Ann. 34, S. 161 und 35, S. 104. Die Köpckesche Kurve besitzt also eine überall dichte Menge zweiter Kategorie von Stellen, deren Tangenten parallel der x-Achse sind.

***) J. Hjelmslev, Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl. 1911, No. 5, S. 492.

der ein Schwingungsintervall $\zeta > 0$ der vorderen (bzw. hinteren) Halbtangenten besitzt, so würde jede innerhalb des $\sphericalangle \zeta$ verlaufende Gerade in der Nähe von P unendlich viele Punkte mit der Kurve gemein haben.

q. e. d.

Daraus folgt, daß die Kurven *endlicher Ordnung* höchstens *abzählbar viele eigentliche mehrfache Punkte, Spitzen und Ecken* besitzen, daß dabei die *Spitzen* und die *Ecken der Größe* $\varepsilon_i \leqq \varepsilon < \pi$ nirgends in sich dicht liegen.

Für die Kurven *endlicher Klasse* gilt, wie unmittelbar ersichtlich, noch schärfer, daß die *Spitzen* und die *Ecken der Größe* $\varepsilon_i \leqq \varepsilon < \pi$ nur in *endlicher* Anzahl vorhanden sein dürfen.

Ferner ist klar, daß die *Kurven endlicher Klasse in bezug auf jede Richtung abteilungsweise monoton* *) sind.

Für die Kurven *endlicher Ordnung* gilt dies *nicht* allgemein; sondern für sie läßt sich nur zeigen, daß sie in bezug auf jede Richtung aus höchstens *abzählbarvielen monotonen Stücken* und deren Häufungsstellen bestehen. Dies ist eine unmittelbare Folge eines Satzes von J. König**); (der von A. Schoenflies gegebene Beweis läßt sich von eindeutigen reellen stetigen Funktionen auf die Parameterkurven übertragen***); darnach ist nämlich eine Kurve, auf der Extreme überall dicht liegen, von unendlicher Ordnung.

39. Hierher gehören zwei Sätze von J. Hjelmslev. Der eine†) sagt aus, daß ein Kurvenbogen endlicher Ordnung, der nur aus gewöhnlichen differenzierbaren Punkten besteht, und der keine mehrfachen Punkte und keine Strecken besitzt††), sich aus höchstens abzählbarvielen konvexen Bögen und deren Häufungspunkten zusammensetzt. Der andere Satz†††) von J. Hjelmslev sagt aus, daß ein Kurvenbogen endlicher Klasse, der keine Strecken, keine mehrfachen Punkte und keine Ecken oder Spitzen

*) Die Kurve ist also rektifizierbar.

**) J. König, Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), S. 7; A. Schoenflies, Bericht über Mengenlehre I, Jahresb. d. Dtsch. Math. Ver. 8 (1899) S. 160.

***) Es ist hierbei nicht nötig, sich nur auf die eigentlichen Extrema zu beschränken. Da nämlich die Maxima überall dicht liegen, kann man, auch wenn uneigentliche Extrema vorliegen, die Maxima $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots$ immer so wählen, daß

$$f(\xi) > f(\xi_1) > f(\xi_2) > f(\xi_3) > \cdots$$

ist. Im übrigen hat man (wie in Nr. 25) bei der Übertragung auf die Parameterkurven die Bereiche $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \cdots$ mit Hilfe der t-Parameter zu messen.

†) J. Hjelmslev, a. a. O. S. 482, théorème 25.

††) Einen nur aus gewöhnlichen differenzierbaren Punkten bestehenden Kurvenbogen ohne mehrfache Punkte nennt J. Hjelmslev (a. a. O. S. 446/9) „arc ordinaire".

†††) a. a. O. S. 491, théorème 32.

enthält, überall stetig differenzierbar und von endlicher Ordnung ist, und deshalb sich aus höchstens abzählbarvielen konvexen Bögen und deren Häufungspunkten zusammensetzt; ferner, daß hier der Schnittpunkt benachbarter Tangenten immer ihren Berührungspunkten benachbart ist.

Nach dem Vorhergehenden gelten diese beiden Hjelmslevschen Sätze auch, wenn man mehrfache Punkte und Spitzen nicht ausschließt. Außerdem kann man nach Nr. 14 und 27 dem zweiten Hjelmslevschen Satz noch hinzufügen, daß die Wendepunkte alle regulär und in höchstens abzählbarer Menge vorhanden sind.

§ 5.

Dualisierbarkeit und dualisierbare Kurven.

40. Wir haben hier noch die *Möglichkeit dualer Übertragung* erhaltener Resultate zu besprechen. An vielen Stellen dieser Abhandlung hat es sich gezeigt, daß duale Übertragung nicht in vollem Umfang möglich ist, und bereits J. Hjelmslev*) hat hierauf hingewiesen.

Wir wollen nun die Bedingungen dafür aufsuchen, daß nach dem Dualitätsprinzip einer Kurve $\mathfrak{C}_1$ eine zweite Kurve $\mathfrak{C}_2$ und auch umgekehrt dieser Kurve $\mathfrak{C}_2$ die gegebene Kurve $\mathfrak{C}_1$ zugeordnet ist. $\mathfrak{C}_1$ muß natürlich stetig tangierbar sein, damit $\mathfrak{C}_2$ überhaupt eine stetige Kurve ist. Es entspricht dann dem Tangentengebilde $\mathfrak{C}_1$ die stetige Punktkurve $\mathfrak{C}_2$ und dem Punktgebilde $\mathfrak{C}_1$ eine stetige Geradenschar $\overline{\mathfrak{C}}_2$. Wenn $\overline{\mathfrak{C}}_2$ mit den Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ identisch ist, dann und nur dann entspricht der Punktkurve $\mathfrak{C}_2$ mit allen ihren Tangenten auch umgekehrt dual das gegebene Punkttangentengebilde $\mathfrak{C}_1$. Nun ist aber im allgemeinen $\overline{\mathfrak{C}}_2$ keineswegs mit den Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ identisch. Man weiß vielmehr allgemein nur, daß die Geraden von $\overline{\mathfrak{C}}_2$, abgesehen von einer nirgends dichten Menge, Tangenten $\mathfrak{C}_2$ sind**); für eine nicht tangierbare Stelle von $\mathfrak{C}_2$ ist die zugehörige Gerade von $\overline{\mathfrak{C}}_2$, wenn sie überhaupt Tangente ist, sicher nicht die einzige Tangente. Die stetige Geradenschar $\overline{\mathfrak{C}}_2$ ist demnach dann und nur dann mit der Gesamtheit der Tangenten von $\mathfrak{C}_2$ identisch, wenn $\mathfrak{C}_2$

*) a. a. O. S. 493/4.

**) Es ist nämlich jeder Punkt einer stetig tangierbaren Kurve, der nicht Häufungspunkt von Spitzen ist, (wie aus dem Beweis des vorletzten Satzes von Nr. 14 hervorgeht) Häufungspunkt der Schnittpunkte der zugehörigen Tangente mit ihren Nachbartangenten. Andererseits können nach dem Nr. 38 zitierten Königschen Satz die Spitzen bei einer stetig tangierbaren Kurve nirgends überall dicht liegen; denn sonst würde folgen, daß es überall dicht Stellen gibt, welche zu einer beliebigen Richtung c parallele Tangenten besitzen, was bei einer Kurve mit stetiger Tangente unmöglich ist.

selbst stetig tangierbar ist. Also ist *für die Dualisierbarkeit notwendig und hinreichend, daß* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$ *stetig tangierbar sind.*

Welche Bedingung ist damit der ursprünglichen Kurve $\mathfrak{C}_1$ auferlegt?

Wir können sofort folgende Fälle angeben, in denen einer Kurve $\mathfrak{C}_1$ mit stetiger Tangente nicht wieder eine Kurve $\mathfrak{C}_2$ mit stetiger Tangente entsprechen kann.

Enthält $\mathfrak{C}_1$ eine Strecke s, so gehört das den Punkten von s dual zugeordnete Büschel von Tangenten zu einem einzigen Kurvenpunkt S von $\mathfrak{C}_2$. Also ist S eine Ecke von $\mathfrak{C}_2$. Ferner: Ist a die Tangente eines Kurvenpunktes P von $\mathfrak{C}_1$ und ist P nicht der einzige*) Häufungspunkt der Schnittpunkte Q_λ von a mit seinen Nachbartangenten, sondern erfüllen die Punkte Q_λ etwa eine Strecke s_a, so gibt es in dem entsprechenden Kurvenpunkt A von $\mathfrak{C}_2$ ein ganzes Büschel σ_A von Tangenten q_λ; A ist also hier ein nicht tangierbarer Punkt, dessen Tangenten den Winkel σ_A erfüllen.

Wir sehen also bereits: Damit der stetig tangierbaren Kurve $\mathfrak{C}_1$ dual eine stetig tangierbare Kurve $\mathfrak{C}_2$ entspricht, ist *notwendig,* 1) *daß* $\mathfrak{C}_1$ *keine Strecken enthält,* 2) *daß es auf keiner Tangente* a_t *von* $\mathfrak{C}_1$ *einen vom Berührungspunkt* P_t *verschiedenen Punkt* Q *gibt, gegen den sich die Schnittpunkte der Tangente* a_t *mit ihren Nachbartangenten häufen.*

Die Bedingung 2) enthält als wesentlichsten Bestandteil die Forderung, daß es auf keiner Tangente a_t von $\mathfrak{C}_1$ einen vom Berührungspunkt P_t verschiedenen Punkt Q gibt, von dem aus unendlich viele Tangenten an jedes noch so kleine P_t enthaltende Kurvenstück gehen. Diese Forderung wird mit der Bedingung 2) identisch, wenn $\mathfrak{C}_1$ keinen Häufungspunkt von Spitzen enthält, oder allgemeiner, wenn jeder Punkt P_t von $\mathfrak{C}_1$ ein Häufungspunkt der Schnittpunkte der zugehörigen Tangente a_t mit ihren Nachbartangenten ist.

Die beiden Bedingungen sind aber auch *hinreichend.* Denn der Tatsache, daß der Berührungspunkt P_t von a_t der einzige Häufungspunkt der Schnittpunkte von a_t mit seinen Nachbartangenten ist, entspricht dual, daß die Tangente p_t von A_t die einzige Häufungsgerade der Verbindungslinien von A_t mit seinen Nachbarpunkten ist. Also ist $\mathfrak{C}_2$ tangierbar. Dann folgt aber von selbst aus der Stetigkeit von $\mathfrak{C}_1$, daß die Tangente von $\mathfrak{C}_2$ *stetig* variiert.

Wir wollen deshalb jede stetig tangierbare Kurve, welche die beiden obigen Bedingungen 1) und 2) erfüllt, eine *dualisierbare Kurve* nennen.

Die am Schluß des vorigen Paragraphen betrachteten differenzierbaren

---

*) Vgl. hierzu die vorige Anmerkung. Wäre P überhaupt nicht Häufungspunkt der Q_λ, so wäre $\mathfrak{C}_2$ im entsprechenden Punkt sicher nicht *stetig* tangierbar.

und nirgendslinearen Kurven endlicher Klasse sind als Spezialfälle in der Gesamtheit der dualisierbaren Kurven enthalten.

41. Nach der zweiten Anmerkung von Nr. 40 folgt aus dem Nr. 38 zitierten Königschen Satz, daß die Spitzen bei einer dualisierbaren Kurve $\mathfrak{C}$ nirgends überall dicht liegen können*).

Da ferner nach Nr. 14 bei dualisierbaren Kurven die Wendepunkte, die nicht Häufungspunkte von Spitzen darstellen, regulär und dual zu den Spitzen sind, so ergibt das Vorige zugleich, daß hier die Wendepunkte nirgends überall dicht liegen.

Wir sehen also, daß $\mathfrak{C}$ aus abzählbarvielen Stücken $\overline{\mathfrak{C}}_\lambda$, die weder Spitzen noch Wendepunkte enthalten, und deren Häufungspunkten besteht.

Wir zeigen nun zunächst:

Hilfssatz: Eine im Endlichen gelegene Kurve $\mathfrak{K}$ mit stetiger Tangente und ohne Spitzen zerfällt in endlich viele Teile $\mathfrak{K}_i$, die, für sich betrachtet, keine mehrfachen Punkte besitzen.

Beweis: Um jeden Punkt von $\mathfrak{K}$ kann man ein endliches Kurvenstück derart abgrenzen, daß die Variation der Tangenten innerhalb dieses Stückes unterhalb der (für alle Punkte festen) endlichen Winkelgröße $\vartheta \left(< \frac{\pi}{4}\right)$ bleibt. Nun teile man $\mathfrak{K}$ in aufeinanderfolgende Kurvenstücke $\mathfrak{K}_i$, in denen die Tangentenvariation $\leqq \vartheta$ ist, derart, daß dabei der Wert ϑ selbst jedesmal erreicht wird. Dann kann es nur *endlich* viele solche Kurvenstücke $\mathfrak{K}_i$ geben. Wären es nämlich unendlichviele, so hätten sie mindestens einen Häufungspunkt P auf der Kurve. Dann könnte man um P herum ein Intervall δ_P abgrenzen, in dem die Variation der Tangente $< \varepsilon < \vartheta$ ist. Es müßten aber gleichzeitig innerhalb δ_P beliebig viele Stücke $\mathfrak{K}_i$ vorhanden sein, in denen die Tangentenvariation $= \vartheta$ ist.

Jedes Stück $\mathfrak{K}_i$, für sich betrachtet, kann nun keinen mehrfachen Punkt D besitzen. Gäbe es nämlich einen solchen, so betrachte man zwei aufeinanderfolgende in D liegende Kurvenstellen $D(t_1)$ und $D(t_2)$; deren Tangenten seien $d(t_1)$ und $d(t_2)$, die höchstens einen Winkel $= \vartheta$ miteinander einschließen. Man nehme nun eine Gerade g, die etwa senkrecht zur Halbierungslinie des $\sphericalangle (d(t_1), d(t_2))$ steht. Dann würde das Kurvenstück $\delta = (D(t_1), \cdots, D(t_2))$ mindestens eine zu g parallele Tangente g_0 enthalten und es wäre im Widerspruch zur Voraussetzung die Tangentenvariation $> \frac{\pi}{4} > \vartheta$. Also enthält $\mathfrak{K}_i$ keinen mehrfachen Punkt. q. e. d.

---

*) Die in einer stetig tangierbaren Kurve etwa vorhandenen unendlich vielfachen Punkte müssen, wie leicht ersichtlich ist, Häufungspunkte von Spitzen sein. Daraus folgt schon, daß jede stetig tangierbare, also auch jede dualisierbare Kurve, etwa von einer nirgends dichten Menge abgesehen, stetig differenzierbar ist.

Wenden wir diesen Hilfssatz auf das Vorhergehende an, so ergibt sich, daß $\mathfrak{C}$ aus höchstens abzählbar vielen Stücken $\mathfrak{C}_i$, die weder Spitzen noch Wendepunkte noch mehrfache Punkte enthalten, und deren Häufungspunkten besteht. Derartige Kurvenstücke $\mathfrak{C}_i$ setzen sich aber nach einem Satze von A. F. Möbius*) aus endlich vielen *konvexen* Bögen zusammen. Wir haben also jetzt den folgenden Satz erhalten:

Satz: *Die dualisierbaren Kurven bestehen aus höchstens abzählbar vielen konvexen Bögen und deren Häufungsstellen.***)

---

*) A. F. Möbius, Leipz. Ber. 2 (1848), S. 179/182 = Ges. Werke II, S. 183/187; genauere Beweise dieses Möbiusschen Satzes bei A. Kneser, Math. Ann. 41 (1893), S. 353/362 und J. Hjelmslev, a. a. O. S. 473. Bei Möbius und Kneser ist der Satz unter etwas spezielleren Voraussetzungen über $\mathfrak{C}_i$ bewiesen, während Hjelmslev von $\mathfrak{C}_i$ nur Differenzierbarkeit fordert.

**) Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht; d. h. es gibt überall stetig differenzierbare Kurven, die aus abzählbar vielen konvexen Bögen und deren Grenzpunkten bestehen, ohne dualisierbar zu sein; Beispiel:

$$y = x^3 \sin \frac{1}{x}.$$