Sulle configurazioni piane μ_3. (*)

(*Nota del dott.* VITTORIO MARTINETTI, *a Mantova.*)

In questa Nota mi propongo di far conoscere un metodo per dedurre tutte le forme possibili di Configurazioni μ_3, quando si conoscano tutte le Cfz. $(\mu-1)_3$. Applicherò in fine questo metodo per dedurre dalle note Cfz. 10_3 (**) tutte le Cfz. 11_3 che, io credo, non furono ancora indicate.

1. Coi numeri progressivi dall'1 al μ indicheremo i punti della Cfz. μ_3 e rappresenteremo la Cfz. stessa scrivendo in colonne successive i numeri rappresentanti le terne di punti in linea retta, come ad es.

1	1	1	2	
2	4	6	8	ecc.
3	5	7	9	

2. Condizione necessaria e sufficiente affinchè due notazioni diverse rappresentino la stessa forma di Cfz. μ_3 è che sia possibile operare sui numeri 1, 2,..., μ tale sostituzione da trasformare le colonne della seconda notazione in quelle della prima. Questo sarà il criterio, che seguiremo per riconoscere se due notazioni rappresentano o meno Cfz. della stessa forma.

Se due punti α, β della Cfz. si comportano in essa allo stesso modo deve

(*) Per le denominazioni e notazioni cfr. KANTOR S.: *Ueber die Configurationen* (3, 3) *mit den Indices* 8, 9, etc. Sitzb. der Wiener Akad. Jahrg. 1881. — REYE TH.: *Das Problem der Configurationen.* Acta Math., 1.

(**) KANTOR S.: *Die Configurationen* $(3, 3)_{10}$. Sitzb. der Wiener Akad. Jahrg. 1881.

essere possibile operare almeno una sostituzione sui numeri $1, 2, \ldots, \mu$ la quale sostituisca α a β senza alterare la notazione della Cfz. stessa.

Le sostituzioni aventi la proprietà di non alterare la notazione di una Cfz. formano un gruppo, che noi chiameremo relativo alla Cfz. considerata.

3. Disponendo i numeri $1, 2, \ldots, \mu$ in μ terne, in guisa, che ogni numero sia ripetuto tre volte, senza che lo sia più di una volta nella stessa terna, e senza che in due terne entri la medesima coppia di numeri, si ha precisamente la notazione di una forma possibile di Cfz. μ_3, la costruzione della quale conduce ad un problema di 2° grado. Infatti scriviamo le μ terne di numeri in colonne, come si è detto in principio, in guisa però che lo stesso numero appaia una volta sola in ciascuna linea (e ciò si può ottenere in varii modi), allora esisterà una sostituzione, composta di uno o più cicli, la quale trasforma ad es. la prima nella seconda linea. Se realmente i numeri $1, 2, 3, \ldots \mu$ rappresentano punti di una Cfz. μ_3, la cui notazione è quella da noi stabilita, allora il ciclo, od i cicli, della nominata sostituzione rappresentano un poligono semplice, od un sistema di poligoni, i cui vertici e lati sono i punti e le rette della Cfz.; questi lati passano sempre per un altro vertice, epperò la Cfz. sarebbe quella di un poligono, o sistema di poligoni, inscritto e circoscritto a sè medesimo.

Ora è facile vedere, che il problema di trovare un poligono, o sistema di poligoni, inscritto e circoscritto a sè medesimo è di 2° grado qualunque sia la legge colla quale i lati debbano passare per i vertici, quindi resta dimostrato il nostro asserto.

Perciò, essendo lo scopo nostro la ricerca di tutte le forme delle Cfz. μ_3, ci occuperemo soltanto della ricerca delle loro notazioni.

Per brevità introdurremo anche le seguenti denominazioni.

Due punti della Cfz. si diranno *congiunti* se per essi passa una retta della Cfz., *estranei* nel caso contrario.

Due rette della Cfz. si diranno *congiunte* se passano per uno stesso punto della Cfz.; *estranee* nel caso contrario.

Una retta della Cfz. si dirà *estranea, congiunta, bicongiunta,* o, *tricongiunta* ad un punto della Cfz. se essa contiene rispettivamente nessun punto congiunto al considerato, ovvero ne contiene 1, 2, o, 3.

4. Siano α e β due punti estranei di una Cfz. $(\mu-1)_3$ qualunque. Da α partono tre rette della Cfz. le quali non possono essere tutte contemporaneamente congiunte a quelle passanti per β, vi sono anzi almeno tre coppie di rette estranee passanti per α e β. Una di queste coppie sia $(\alpha\alpha_1\alpha_2)_1$, $(\beta\beta_1\beta_2)_1$.

Allora se nella notazione della Cfz. $(\mu - 1)_3$ considerata sostituiamo alle terne $\begin{matrix}\alpha\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}$, $\begin{matrix}\beta\\ \beta_1\\ \beta_2\end{matrix}$ le $\begin{matrix}\mu\\ \alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}$, $\begin{matrix}\mu\\ \beta_1\\ \beta_2\end{matrix}$ ed aggiungiamo la terna $\begin{matrix}\mu\\ \alpha\\ \beta\end{matrix}$ abbiamo manifestamente la notazione di una Cfz. μ_3. (*)

Se sopra tutte le Cfz. $(\mu - 1)_3$, per ogni coppia di punti estranei e per ogni coppia di rette estranee per essi, eseguiamo la detta operazione, otterremo una serie di Cfz. μ_3 (in generale non tutte diverse) che noi chiameremo *riducibili*, perocchè operando su di esse in senso inverso quella operazione colla quale furono dedotte, si riducono a Cfz. $(\mu - 1)_3$.

5. Le altre Cfz. μ_3 che non si possono dedurre in questo modo dalle $(\mu - 1)_3$ si chiameranno *irriducibili*.

È facile vedere quale condizione deve soddisfare una Cfz. irriducibile. Preso in essa un punto α qualunque ed una delle tre rette della Cfz. passanti per esso ad es. $\alpha\alpha_1\alpha_2$, è necessario che α_1 od α_2 sia almeno bicongiunto alle altre due rette per α, ovvero che una di queste sia bicongiunta tanto ad α_1 quanto ad α_2.

Come ora vedremo le Cfz. μ_3 irriducibili sono in generale una sola per ogni valore di μ, però possiamo dire che l'operazione indicata al n.° 4 ci dà il mezzo di scrivere, con estrema facilità, tutte le forme diverse di Cfz. μ_3 quando siano note le Cfz. $(\mu - 1)_3$.

Nelle applicazioni mostreremo poi come con opportune osservazioni sia possibile evitare che la stessa Cfz. μ_3 si presenti più volte, e sarà così resa notevolmente più semplice la ricerca delle Cfz. μ_3.

6. Cerchiamo ora quali siano le Cfz. irriducibili.

Supponiamo che una Cfz. sia irriducibile perchè ogni suo punto possiede una retta tricongiunta.

Non è pertanto possibile che *un punto possegga due rette tricongiunte le quali siano congiunte fra loro;* perocchè se dal punto 2 partissero le due rette $(2\,4\,6)_1$ $(2\,5\,7)_1$ tricongiunte ad 1 (**) dal punto 3 dovrebbero partire due rette contenenti i punti di una delle quattro coppie 4, 5; 4, 6; 5, 7; 6, 7 poichè 3 deve possedere una retta tricongiunta.

Ora per l'arbitrarietà della notazione possiamo supporre sempre che tali

(*) Dovendo indicare questa operazione scriveremo $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{bmatrix}$.

(**) In questa discussione supporremo sempre che le tre coppie di punti allineati con 1 siano 2, 3; 4, 5; 6, 7.

punti siano 4 e 5 (scambiando all'occorrenza 1 con 2) ed allora se si considera 6 e 7 si vede che la $(3\ 5)_1$ dovrebbe passare per 6 e la (3 4) per 7, la qual cosa evidentemente non può avvenire.

Vale poi anche la proprietà correlativa: *Una retta non può essere tricongiunta a due punti congiunti.*

Supponiamo che il punto 1 possegga per retta tricongiunta $(2, 4, 6)_1$ e che inoltre da 2, 4, e, 6 partano tre rette bicongiunte ad 1. Si potrà supporre, senza fare restrizioni, che la terza retta uscente da 2 sia la $(2, 5, 8)_1$. Allora, poichè 3 deve avere una retta tricongiunta e questa non può essere, per l'osservazione precedente, nè la $(1, 4, 5)_1$ nè la $(2, 4, 6)_1$, sarà 3 estraneo a 4 e quindi 4 congiunto a 7. Il punto 6 è poi congiunto a 3, perocchè se lo fosse invece a 5, non potrebbe 7 avere una retta tricongiunta. Dall'osservare poi che i punti 3, 5, 7 devono anche essi avere una retta tricongiunta, si trova che i punti stessi devono essere in linea retta. La retta tricongiunta ad 8 non potrebbe essere che la $(2, 4, 6)_1$ ovvero la $(3, 5, 7)_1$, in ogni caso è necessario che le $(3, 6)_1$, $(4, 7)_1$ passino per 8.

Dunque alle fatte ipotesi soddisfa unicamente la seguente Cfz. 8_3:

	1	1	1	2	2	3	3	4
Cfz. 8_3	2	4	6	4	5	5	6	7
	3	5	7	6	8	7	8	8

7. Dovremo ora supporre, che per uno almeno dei punti 2, 4, 6 della retta tricongiunta ad 1 passi una retta semplicemente congiunta ad 1, per es. supponiamo che da 2 parta la $(2, 8, 9)_1$.

Allora la retta tricongiunta a 2 deve passare per 3, e potremo supporre che sia la $(3, 4, 8)_1$. 7 è estraneo a 2 e 4, perciò la retta tricongiunta a 7 sarà certamente la terza retta passante per 6, la quale allora non conterrà 3; essa passerà quindi per 5, giacchè la tricongiunta di 6 dovendo contenere 2 o 4 e non 3 è certamente $(1, 4, 5)_1$.

Allora 7 è congiunto a 5 ed al terzo punto sulla $(5, 6)_1$, il quale sarà quindi diverso da 8. La tricongiunta di 3 non può essere $(1, 4, 5)_1$, altrimenti 8 non avrebbe retta tricongiunta, ma sarà (2, 8, 9), ossia 3 e 9 sono congiunti. Allo stesso modo si vede che il punto 8 deve essere congiunto al punto 10 sulla $(3, 9)_1$; 9 ad 11 sulla $(8, 10)_1$, 10 a 12 sulla $(9, 11)_1$ e così di seguito.

Il punto sulla $(5, 6)_1$ deve essere congiunto a 7 ed al punto sulla $(5, 7)_1$, ecc.

Così si riconosce la possibilità di avere per ogni valore di $\mu \geq 9$ una Cfz. irriducibile di questa natura. La notazione della Cfz. generale di questo tipo è la seguente:

Cfz. μ_3

1	4	2	3	8	9	10	11	12	. . . .	$\mu-2$	$\mu-1$	μ	7	5	6
6	1	4	2	3	8	9	10	11	. . . .	$\mu-3$	$\mu-2$	$\mu-1$	μ	7	5
7	5	6	1	4	2	3	8	9	. . . .	$\mu-5$	$\mu-4$	$\mu-3$	$\mu-2$	$\mu-1$	μ

In particolare per $\mu = 9$, 10, 11 si avrebbe:

Cfz. 9_3

1	4	2	3	8	9	7	5	6
6	1	4	2	3	8	9	7	5
7	5	6	1	4	2	3	8	9

Cfz. 10_3

1	4	2	3	8	9	10	7	5	6
6	1	4	2	3	8	9	10	7	5
7	5	6	1	4	2	3	8	9	10

Cfz. 11_3

1	4	2	3	8	9	10	11	7	5	6
6	1	4	2	3	8	9	10	11	7	5
7	5	6	1	4	2	3	8	9	10	11

Se consideriamo i punti 1, 4, 2, 3, 8, 9, 10, 11,..., μ, 7, 5, 6 in questo ordine come vertici di un poligono, la notazione da noi stabilita ci dice, che i lati del poligono sono le μ rette della Cfz. stessa, e ciascuno di essi passa per un altro vertice del poligono; sicchè la Cfz. è costituita da questo poligono inscritto e circoscritto a sè stesso.

Ogni vertice è sempre congiunto coi due adiacenti e con quello che precede il vertice precedente al considerato, talchè la Cfz. ci si presenta come una successione di μ triangoli tale che ognuno ha col successivo (e l'ultimo col primo) due rette e due vertici in comune.

I punti della Cfz. si comportano poi allo stesso modo, giacchè è evidente che la sostituzione circolare

$$(1,\ 4,\ 2,\ 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11, \ldots, \mu,\ 7,\ 5,\ 6)$$

e le sue potenze appartengono al gruppo relativo alla Cfz. (v. n.° 2).

8. Potremo ora supporre che il punto 1 non abbia rette tricongiunte, e così si presentano tre casi:

1.° Per un punto congiunto ad 1 passa una sola retta bicongiunta ad 1;

2.° Per i punti congiunti ad 1 passano due rette bicongiunte ad 1 o nessuna.

3.° Per tutti i punti congiunti ad 1 passano due rette bicongiunte ad 1.

1.° Caso. Se per 2 passa una sola retta bicongiunta ad 1, supporremo $(2, 4, 8)_1$, 3 non può essere congiunto a 4, altrimenti per la irriducibilità lo dovrebbe essere anche a 5, ed allora la Cfz. non potrebbe essere irriducibile rispetto alla retta $(1, 6, 7)_1$.

3 e 5 devono essere congiunti. Dai punti 6 e 7 passano complessivamente al più tre rette bicongiunte ad 1, perciò supporremo che da 6 parta una retta contenente due punti estranei ad 1. Per la irriducibilità si vede poi che non può essere 6 congiunto a 3, epperò tre sono le ipotesi possibili:

a) Sono congiunti 6 e 4;

b) Sono congiunti 6 e 5;

c) 6 è estraneo a 4 ed a 5.

9. **a**) Il terzo punto sulla $(4\,6)_1$ sia 9, allora per la irriducibilità devono essere congiunte le coppie di punti 7, 5; 3, 8; 7, 9.

Se 3 e 7 sono congiunti potremo fare tre ipotesi:

$$\begin{cases}(3,\ 5,\ 8)_1\\(5,\ 7,\ 9)_1\end{cases}\qquad\begin{cases}(3,\ 5,\ 8)_1\\(3,\ 7,\ 9)_1\end{cases}\qquad\begin{cases}(3,\ 7,\ 8)_1\\(5,\ 7,\ 9)_1\end{cases}.$$

La seconda e la terza non sono però essenzialmente diverse, poichè colla sostituzione $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\1&6&7&4&5&2&3&9&8\end{pmatrix}$ si passa dall'una all'altra senza che il punto 1 e quelli ad esso congiunti cessino di soddisfare a tutte le ipotesi fatte sopra.

Nel primo caso diciamo 10 il terzo punto sulla $(3, 7)_1$ e consideriamo i punti 2, 6, 8 e 9; vediamo allora che la sola ipotesi $(2, 9, 10)_1$ $(6, 8, 10)_1$ rende la Cfz. irriducibile rispetto ad essi, perchè si trova dover essere 10 congiunto ai punti 2, 6, 8, 9.

Nasce così la

Cfz. 10_3

1	1	1	2	2	3	3	4	5	6
2	4	6	4	9	5	7	6	7	8
3	5	7	8	10	8	10	9	9	10

Nel secondo caso, chiamando 10 il terzo punto sulla $(5, 7)_1$ e considerando il punto 4 si deduce che 6 ed 8 devono essere congiunti; considerando 9 si trova che 10 deve essere congiunto a 9 e 6, perciò si avrà $(6, 8, 10)_1$, $(9, 10)_1$. Esaminando ora il punto 2 si riconosce che i punti 2, 9, 10 devono essere in linea retta, perciò da queste ipotesi nasce la

Cfz. 10_3

1	1	1	2	2	3	3	4	5	6
2	4	6	4	9	5	7	6	7	8
3	5	7	8	10	8	9	9	10	10

Se poi 3 e 7 sono estranei, perchè la Cfz. sia irriducibile rispetto a 4 è necessario che siano rette della Cfz. le $(2, 9)_1$ e $(5, 7, 9)_1$, ovvero $(3, 5, 8)_1$, $(6, 8)$, oppure $(2, 9)_1$, $(6, 8)_1$ o finalmente $(5, 8)_1$ e $(5, 9)_1$.

La prima e seconda ipotesi non sono essenzialmente diverse, perocchè colla sostituzione $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 5 & 2 & 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ una si cambia nell'altra, ed i punti 1, 2, e 9 continuano a soddisfare le condizioni da noi imposte.

Se si verificasse la seconda ipotesi, posto $(6, 8, 10)_1$ dovrebbe essere anche $(5, 7, 9)_1$, perchè se la Cfz. deve risultare irriducibile rispetto a 5 ed alla $(5, 7)_1$ è necessario che sulla $(5, 7)_1$ vi sia un altro punto congiunto a 4 e questo non può essere che 9. Ma se si considerano i punti 6 ed 8 si conclude che 10 deve essere congiunto a 2 e 9, e considerando 2 si vede che 3 e 10, ovvero 2 e 9 devono essere congiunti. Nel primo caso sarà $(3, 9, 10)_1$, sicchè la Cfz. è riducibile rispetto a 9; nel secondo sarà $(2, 9, 10)_1$ e perchè la Cfz. risultasse irriducibile rispetto a 3 e 7 dovrebbe essere 10 congiunto a questi punti, e ciò non è possibile, perchè 3 e 7 sono estranei e 10 è già allineato con due coppie di punti della Cfz.

Nella terza ipotesi, supponendo $(6, 8, \alpha)_1$ $(3, 8, \beta)$, saranno α e β diversi da 9, e quindi, affinchè la Cfz. risulti irriducibile rispetto ad 8, devono essere congiunte le coppie 2, α e 3, α [non potendo essere nella presente ipotesi $(3, 5, 8)_1$] quindi $(2, 9, \alpha)_1$, $(3, 5, \alpha)_1$; ma allora il punto 2 presenta un caso già considerato.

Finalmente se supponiamo 5, 8; 5, 9 coppie di punti congiunti, dovremo avere $(3, 5, 8)_1$ $(5, 7, 9)_1$ altrimenti, se fosse $(3, 5, 9)_1$ $(5, 7, 8)_1$, la Cfz. risulterebbe riducibile rispetto ad 8: supponendo poi $(2, 9)_1$, ovvero $(6, 8)_1$ rette della Cfz. saremmo condotti al caso precedente, quindi supponiamo $(2, 10, 11)_1$.

Considerando 2 si trova che 10 deve essere congiunto a 3 ed 8; si supponga $(3, 10, 12)_1$ $(8, 10, 13)_1$.

Considerando 11 si deduce che esso è congiunto a 12 e 13.

Considerando 12 si vede che 13 è ad esso congiunto.

Se si suppone $(11, 12, 14)_1$, $(12, 13, 15)_1$, $(11, 13, 16)_1$ si trova poi che deve essere $(14, 15, 16)_1$, e così di seguito.

Nasce così una serie unica di Cfz. irriducibili di cui possiamo scrivere il tipo generale, essendo semplicissima la legge colla quale si debbono assumere gli allineamenti:

Cfz. $(10 \cdot n)_3$

1	5	4	10	10	10	14	15	16	14	14	15	16	20	20	20	24	25	26	24
2	3	8	2	3	8	11	12	13	15	17	18	19	17	18	19	21	22	23	25
3	8	2	11	12	13	12	13	11	16	18	19	17	21	22	23	22	23	21	26

. . . . ecc. . . . .

	$10(n-1)$	$10(n-1)$	$10(n-1)$	$10n-6$	$10n-5$	$10n-4$	$10n-6$	$10n-6$	$10n-5$	$10n-4$	$10n$	$10n$	$10n$	1	5	4	1
ecc.	ecc.	ecc.	ecc.	$10n-9$	$10n-8$	$10n-7$	$10n-5$	$10n-3$	$10n-2$	$10n-1$	$10n-3$	$10n-2$	$10n-1$	6	7	9	5
				$10n-8$	$10n-7$	$10n-9$	$10n-4$	$10n-2$	$10n-1$	$10n-3$	6	7	9	7	9	6	4

La disposizione da noi data alla notazione ci fa vedere subito una proprietà della Cfz.

Se consideriamo i $2n$ triangoli:

$$2, 3, 8;\;\; 11, 12, 13;\;\; 17, 18, 19,\;\; 21, 22, 23;\;\; 27, 28, 29;$$
$$31, 32, 33; \ldots\ldots;\;\; 10n-3,\; 10n-2,\; 10n-1;\;\; 6, 7, 9$$

noi vediamo che: I vertici ed i lati di questi costituiscono $6n$ punti e $6n$ rette della Cfz.:

Ogni triangolo è prospettivo al precedente ed al seguente (il primo all'ultimo);

I centri di prospettiva del 1° e 2°, 3° e 4°, 5° e 6°,... $(2n-1)^{\text{mo}}$ e $2n^{mo}$ sono n punti della Cfz.;

Gli assi di prospettiva delle n coppie di triangoli, 2° e 3°, 4° e 5°, 6° e 7°,..., $(2n-2)^{\text{mo}}$ e $(2n-1)^{\text{mo}}$, $2n^{mo}$ e 1° sono n rette della Cfz.;

Le $3n$ congiunti i vertici omologhi passanti per i detti centri di prospettiva sono le altre rette della Cfz.; mentre le intersezioni dei lati omologhi delle altre n coppie di triangoli prospettivi sono i rimanenti punti della Cfz.

Si vede adunque che queste Cfz. nascono dal considerare una serie di $2n$ triangoli ciclicamente prospettivi, insieme alternativamente ai centri ed agli assi di prospettiva delle $2n$ coppie di triangoli omologici.

La più semplice Cfz. di questa specie sarebbe una 20_3, ma però rientra in questo stesso tipo la notissima Cfz. 10_3 di due triangoli prospettivi insieme al centro ed all'asse di prospettiva, Cfz. che troveremo in seguito.

10. **b**) Siano congiunti 5 e 6. In tal caso deve essere 7 congiunto a 4 e lo supporremo congiunto anche a 3, altrimenti si ricadrebbe nel caso **a**) già considerato. Deve poi essere 3 congiunto ad 8, e sarà $(2, 9, 10)_1$ ovvero $(2, 10, 11)_1$.

Se è $(2, 9, 10)_1$ e contemporaneamente 3 e 9 sono congiunti, sicchè $(3, 5, 9)_1$ è una retta della Cfz., allora sarà $(3, 7, 8)_1$ e considerando il punto 5 si vede che sulla $(5, 6)_1$ non può esservi che 8, poichè deve tale punto essere congiunto a 4, non lo potendo essere ad 1, nè 6 a 3 o 9. Ora considerando 6 vediamo che i punti sulla terza retta non possono essere congiunti ad 1 nè ad 8, quindi uno di essi dovrà essere contemporaneamente congiunto a 5 e 7, ed allora questo punto non potrebbe essere che 9, ed invece 6 e 9 sono estranei.

Se poi 3 e 9 non sono congiunti, considerando 2 si trova che lo devono essere 3 ad 8 e 8 a 10, quindi 8 e 9 sono estranei ed allora 2 presenta il caso **a**).

Se è $(2, 10, 11)_1$ la terza retta per 2 allora, perchè la Cfz. sia irriducibile rispetto a 2, devono essere coppie di punti congiunti le tre seguenti: 3, 8; 3, 10; 8, 10.

Considerando 4 si vede che devono essere congiunti anche 5 ed 8 quindi sarà $(3, 5, 8)_1$, $(3, 7, 10)_1$.

Considerando 7, si conclude che 6 e 10 sono sopra una retta della Cfz., la quale è perciò la $(6, 8, 10)_1$, ma allora la Cfz. è riducibile rispetto a 6.

11. **c**) Se 6 è estraneo a 4 ed a 5 e sono $(6, 8, 10)_1$, $(6, 9, 11)_1$ le due rette per 6, dovrà essere necessariamente 7 congiunto a 3, a 4 o 5, ad 8 ed a 9.

α) Se 4 e 7 sono congiunti potremo supporre $(3, 7, 8)_1$, $(4, 7, 9)_1$ ed allora considerando 6 troviamo dover essere 8 e 9 congiunti, ovvero 8 ed 11, 9 e 10, in ogni caso i punti x, y sulle $(2, 4)_1$, $(3, 5)_1$ sono diversi da 8 e 9. Se fosse 9 estraneo a 5 oppure 2 ad 8, esaminando i punti 4 e 3 si vede che la Cfz. sarebbe riducibile, per la qual cosa siamo costretti a supporre $(2, 8, 11)_1$ $(5, 9, 10)_1$; ma anche questo è incompatibile colla irriducibilità, poichè y non potrebbe essere 10, epperò 3 e 10 sono estranei, sicchè rispetto al punto 8 la Cfz. sarebbe riducibile.

β) Se 5 e 7 sono congiunti sarà $(3, 7, 8)_1$ $(5, 7, 9)_1$, e per rendere irriducibile la Cfz. rispetto a 2 si deve supporre inoltre $(2, 4, 10)_1$, $(3, 5, 10)_1$. Se 8 e 9 non fossero congiunti, il punto 7 presenterebbe un caso già considerato; se sono congiunti e la $(8, 9)_1$ passa per 2 o 4 la Cfz. è riducibile; se la $(8, 9)_1$ passa per 10, allora 10 presenta un caso già considerato al n.° 9, e questo stesso avviene per 2, se irriducibile, quando 8 e 9 siano estranei a 2, 4 e 10. Da questa ipotesi non nasce adunque alcuna nuova Cfz.

12. *2.° Caso.* Per il punto 2 passano le due rette $(2, 8, 10)_1$, $(2, 9, 11)_1$ semplicemente congiunte ad 1, e per 3, 4, 5, 6, 7 passano o due rette bicongiunte o nessuna.

Per la irriducibilità si dovranno avere poi le due rette $(3, 4, 8)_1$, $(3, 6, 9)_1$ e per la nostra ipotesi dovremo supporre congiunti:

4 e 6 ovvero 4 e 7, 5 e 6, 5 e 7;
8 e 9 ovvero 8 ed 11, 9 e 10, 10 ed 11

in ogni caso 4 e 9 sono estranei.

Se 4 fosse congiunto a 7 allora 4 non avrebbe rette tricongiunte, e per 3 passerebbe una sola retta bicongiunta a 4 per la qual cosa il punto 4 presenterebbe un caso già studiato. Così avviene per 9 se esso è congiunto a 10; dunque dovrà essere 4 congiunto a 6 ed 8 a 9. Ma in tal caso la Cfz. è riducibile rispetto ai punti 5 e 7.

13. *3.° Caso.* Non ci resta che a supporre che per i punti congiunti ad 1 passino sempre due rette bicongiunte ad 1. Siccome tutti i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 non possono essere congiunti a due punti allineati con 1, così potremo supporre, che le due rette passanti ancora per 2 siano $(2, 4, 8)_1$, $(2, 6, 10)_1$. Dobbiamo poi supporre congiunti:

a) 4 e 6, 3 e 5, 3 e 7, 5 e 7; ovvero
b) 4 e 7, 3 e 5, 3 a 7, 5 e 6.

a) Se è 9 il terzo punto sulla $(4, 6)_1$ si vede che il punto 2 presenterebbe uno dei casi già contemplati, qualora non fossero congiunte le tre coppie di punti 3, 8; 3, 10; 8, 10. Considerando 4 e 6 si conclude allo stesso modo che debbono essere congiunte le coppie: 5, 8; 5, 9; 8, 9; 7, 9; 7, 10; 9, 10, per la qual cosa deve essere $(3, 5, 8)_1$, $(3, 7, 10)_1$, $(5, 7, 9)_1$, $(8, 9, 10)_1$ e nasce così la

Cfz. 10_3

1	5	4	10	10	10	1	5	4	1
2	3	8	2	3	8	6	7	9	4
3	8	2	6	7	9	7	9	6	5

la quale, come manifestamente appare dalla notazione, rientra nel tipo delle Cfz. $(10n)_3$ trovate al n.° 9.

b) Nel secondo caso deve 2 comportarsi nello stesso modo di 1, altrimenti 2 presenterebbe uno dei casi già studiati, perciò chiamando 8 e 9 i punti sulle $(2, 4)_1$ $(2, 6)_1$ le 4, 9; 3, 9; 3, 8; 6, 8 devono essere quattro coppie di punti congiunti. Ma allora deve essere $(5, 6, 8)_1$, $(3, 7, 8)_1$, $(3, 5, 9)_1$, $(4, 7, 9)_1$ e si ottiene la

Cfz. 9_3

1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	6	5	7	7	6
3	5	7	8	9	9	8	9	8

Così abbiamo esaurita la ricerca delle Cfz. irriducibili, e vediamo, che esiste una sola Cfz. irriducibile μ_3 (n.° 7) per ogni valore di μ, che non sia multiplo di 10 od inferiore ad 11. Per $\mu = 8$ vi è ancora una sola Cfz. irriducibile, ve n'hanno 2 per $\mu = 9$ e 4 per $\mu = 10$. Per ogni altro valore di μ multiplo di 10 si hanno due Cfz. irriducibili.

Cfz. 8_3, 9_3, e, 10_3.

14. Non vi possono essere Cfz. 8_3 riducibili, perciò per $\mu = 8$ abbiamo l'unica Cfz. 8_3 trovata al n.° 6.

La sostituzione circolare (1 2 4 5 8 7 3 6), e quindi anche le sue potenze, appartengono al gruppo relativo alla Cfz. e vediamo perciò che in essa tutti i punti e le rette si comportano ugualmente. Così anche con una di queste sostituzioni si può passare da una qualunque delle quattro coppie di punti estranei ad un'altra pure qualunque, perciò per ottenere coll'operazione indicata al n.° 4 le Cfz. 9_3 riducibili, basterà considerare una sola di queste coppie ad es. 5, 6.

Per questi punti passano tre coppie di rette estranee

$$\begin{matrix} 5 & 6 \\ 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} 5 & 6 \\ 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{matrix}$$

operando sulle quali non si otterrebbero però tre diverse Cfz. 9_3, perocchè vediamo, che colla sostituzione (1, 3, 2) (4, 7, 8) (5) (6), appartenente pure al gruppo relativo alla Cfz., si passa da una coppia all'altra, quindi siamo certi dell'esistenza di un'unica Cfz. 9_3 riducibile, la quale si ottiene operando ad es. colla $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ e che è rappresentata da:

Cfz. 9_3

1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	5	6	7	7	6
3	5	7	9	8	8	9	8	9

Le Cfz. 9_3 sono tre sole, due irriducibili trovate ai n.i 7 e 13 e questa riducibile. (*)

15. Il complesso dei punti estranei ad un punto insieme alle rette della Cfz. che li congiungono verrà chiamato il *resto* del punto. (**)

È chiaro che se due punti debbono comportarsi ugualmente nella Cfz. devono i loro resti presentare la stessa figura; e perchè due Cfz. siano identiche devono i loro punti avere resti rispettivamente della stessa forma.

Queste condizioni necessarie non sono però sufficienti, ed avremo più volte occasione di trovare punti collo stesso resto, ma che si comportano diversamente, ed anche Cfz. 11_3 essenzialmente diverse quantunque posseggano lo stesso numero di resti eguali.

16. Rispetto ai resti nella Cfz. 9_3 riducibile, che diremo la I Cfz. 9_3, i punti sono di due specie: 1, 8, 9 hanno per resto due punti estranei, mentre gli altri hanno per resto due punti congiunti. La sostituzione

$$(1,\ 8,\ 9)(2,\ 7,\ 5,\ 3,\ 4,\ 6)$$

appartenente al gruppo relativo alla Cfz. ci dice poi che i punti aventi resto della stessa forma si comportano allo stesso modo.

Le coppie di punti estranei sono pure di due sorta

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 8 & 9 & . & 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 8, & 9, & 1; & & 6, & 2, & 7, & 5, & 3, & 4 \end{array}$$

prendendo ad es. le 8, 9 e 5, 7 si vede, che per la prima passano due coppie

(*) S. Kantor: *Ueber die Cfz.* (3, 3) *mit den Indices* 8, 9, l. c.

(**) Questo complesso di punti e rette viene dal sig. Kantor chiamato *Restfigur; Die Cfz* $(3,\ 3)_{10}$, l. c.

di rette estranee di natura diversa $\begin{smallmatrix}8&9\\2&3\\5&7\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}8&9\\4&5\\7&6\end{smallmatrix}$ poichè la terza $\begin{smallmatrix}8&9\\3&2\\6&4\end{smallmatrix}$ si cangia nella prima per la sostituzione (1) (2, 3) (4, 7) (5, 6) (8) (9) appartenente al solito gruppo; per la seconda ne passano tre di specie diversa $\begin{smallmatrix}5&7\\2&1\\8&6\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}5&7\\6&4\\9&8\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}5&7\\2&3\\8&9\end{smallmatrix}$ giacchè la quarta $\begin{smallmatrix}5&7\\1&3\\4&9\end{smallmatrix}$ si cangia nella prima colla sostituzione:

$$(1)(2,\ 3)(4,\ 6)(5,\ 7)(8,\ 9).$$

Venendo alla Cfz. 9_3 irriducibile (II Cfz. 9_3) trovata al n.° 7, vediamo che i resti di tutti i suoi punti sono sempre due punti congiunti. Tanto i punti, quanto le rette, sono della medesima natura, come prova la sostituzione circolare (1, 2, 8, 7, 6, 4, 3, 9, 5) la quale appartiene al gruppo relativo alla Cfz. stessa, e dimostra anche che tutte le coppie di punti estranei si comportano allo stesso modo. Per la 4, 9 passano quattro coppie di rette estranee, cioè:

$$\begin{matrix}4&9\\1&2\\5&8\end{matrix},\qquad \begin{matrix}4&9\\1&3\\5&7\end{matrix},\qquad \begin{matrix}4&9\\2&3\\6&7\end{matrix},\qquad \begin{matrix}4&9\\3&5\\8&6\end{matrix}$$

e dalla disposizione delle coppie di punti congiunti su di esse risulta immediatamente che soltanto la prima e terza potrebbero essere convertibili una nell'altra, ma si vede poi che questo non è possibile.

Se consideriamo l'altra Cfz. 9_3 irriducibile (III Cfz. 9_3) (n.° 13) si trova che in essa i punti hanno tutti per resto due punti estranei e sono della stessa natura poichè le due sostituzioni

$$(1,\ 2,\ 6)(3,\ 9,\ 7)(4,\ 8,\ 5);\qquad (1,\ 2,\ 6,\ 8,\ 7,\ 4)(3,\ 9,\ 5)$$

appartengono al gruppo relativo alla Cfz. Tutte le coppie di punti estranei sono della stessa specie. Prendendo ad es. 8, 9 vediamo che tre sono le coppie di rette estranee passanti per essi:

$$\begin{matrix}8&9\\2&3\\4&5\end{matrix}\qquad \begin{matrix}8&9\\3&2\\7&6\end{matrix}\qquad \begin{matrix}8&9\\5&4\\6&7\end{matrix}$$

ma le sostituzioni

$$(1)(2)(3)(4,\ 6)(5,\ 7)(8,\ 9);\qquad (1)(2,\ 5)(3,\ 4)(6)(7)(8,\ 9),$$

del gruppo relativo alla Cfz., trasformano la prima nelle altre due, perciò operando sopra queste risulterebbe quella stessa Cfz. 10_3 che nasce dalla prima.

Così si presentano in tutto 10 coppie diverse di rette per dedurre colla nostra operazione tutte le Cfz. 10_3 riducibili.

Tali operazioni sono:

Nella Cfz. I: $1^a \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $2^a \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, $3^a \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, $4^a \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 4 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, $5^a \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$,

Nella Cfz. II: $6^a \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, $7^a \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, $8^a \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $9^a \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$,

Nella Cfz. III: $10^a \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.

17. Dalla 1^a nasce la I Cfz. 10_3 (v. tavola n.° 18) nella quale il gruppo relativo è costituito dalla sostituzione identica e dalla sola

$$(1)\,(2,\ 3)\,(4,\ 6)\,(5,\ 7)\,(8,\ 9)\,(10),$$

perciò i punti sono di sei specie diverse.

La Cfz. è irriducibile rispetto ai punti 2, 3, 5, 7, 8, 9, ma lo è rispetto ad 1 ed alla $(1,\ 2,\ 3)_1$ a 4 ed alla $(4,\ 7,\ 8)_1$ [epperò anche a 6 ed alla $(6,\ 5,\ 9)_1$] a 10 ed alla $(10,\ 8,\ 9)_1$. Quindi la Cfz. trovata può nascere ancora da due Cfz. 9_3 precisamente da quelle che si hanno riducendo la Cfz. 10_3 rispetto ad 1 e 4. Facendo la riduzione rispetto ad 1 ed operando la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 7 & 8 & 4 & 9 & 6 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene la stessa notazione da noi stabilita per la I Cfz. 9_3, sicchè eseguendo sulla I Cfz. 9_3 la 4^a operazione si ottiene di nuovo la I Cfz. 10_3.

Riducendo poi la Cfz. rispetto a 4 ed eseguendo la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 8 & 4 & 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

si vede che risulta la II Cfz. 9_3, epperò su di essa facendo l'operazione 7^a si ricade nella nostra Cfz. 10_3.

Dalla 2^a operazione risulta la II Cfz. 10_3 (v. n.° 18) nella quale vi sono i punti 1, 4, 5, 6, 7, 10 che hanno per resto tre punti in linea retta, e 2, 3, 8, 9 che hanno per resto tre punti, due a due congiunti, questi posseggono quindi una retta tricongiunta, epperò la Cfz. è irriducibile rispetto ad essi, invece è riducibile rispetto agli altri (che sono della stessa specie, poichè le due sostituzioni

$$(1,\ 4,\ 10,\ 6)\,(2,\ 9,\ 8,\ 3)\,(5,\ 7) \qquad (1,\ 5,\ 6)\,(2,\ 8,\ 3)\,(9)\,(4,\ 10,\ 7)$$

appartengono al gruppo relativo alla Cfz.) ma rispetto ad una sola retta per essi, talchè la nostra Cfz. non può nascere che dalla 2^a operazione.

Dalla 3^a operazione nasce la III Cfz. 10_3 (n.° 18). Appartiene al gruppo di questa la sostituzione $(1,\ 6,\ 5)\,(2,\ 8,\ 10)\,(3)\,(4,\ 7,\ 9)$, ed i punti sono di 4 specie

$$1,\ 6,\ 5; \qquad 2,\ 8,\ 10; \qquad 3; \qquad 4,\ 7,\ 9.$$

La Cfz. è riducibile soltanto rispetto a 2, 8, 10 quindi nessuna delle altre operazioni può dare questa stessa Cfz.

Dalla 5^a operazione risulta la IV Cfz. 10_3 (n.° 18), la quale nasce poi anche dalla 6^a, poichè la Cfz. è riducibile non solo rispetto ad 1 e 10, che sono della stessa specie, ma anche rispetto a 4, 6, 8, 9 che sono di specie diversa da 10, ma fra loro della stessa specie.

Eseguendo l'8^a operazione troviamo la V Cfz. 10_3 (n.° 18), la quale non può risultare altrimenti, che da questa operazione.

Finalmente la 9^a e 10^a operazione conducono alla stessa Cfz. 10_3 quella che chiamiamo VI Cfz. 10_3 (n.° 18). Così vediamo che le Cfz. riducibili sono sei solamente, e queste insieme alle quattro irriducibili trovate formano le 10 Cfz. 10_3 studiate dal sig. Kantor.

18. Nella tavola seguente sono segnate tutte le Cfz. 10_3, e le sostituzioni del loro gruppo, sufficienti per indicare la natura dei punti e delle coppie di punti estranei.

Le lettere maiuscole messe nella prima colonna sono quelle, che servono al sig. Kantor per indicare le Cfz. 10_3.

TAVOLA I.

	Cfz. 10_3										Sostituzioni relative alla Cfz.	Gruppi di punti della medesima specie	Gruppi di coppie (di punti estranei) della medesima specie
I	1	1	1	2	2	3	3	4	5	8		1; 2, 3; 4, 6;	$\frac{1}{8},\frac{1}{9};\ \frac{1}{10};\ \frac{2}{6},\frac{3}{4};\ \frac{2}{7},\frac{3}{5};\ \frac{4}{6};$
	2	4	6	4	5	6	7	7	6	9	(1) (2, 3) (4, 6) (5, 7) (8, 9) (10)		
H	3	5	7	9	10	8	10	8	9	10		5, 7; 8, 9; 10.	$\frac{2}{8},\frac{3}{9};\ \frac{5}{7};\ \frac{4}{10},\frac{6}{10};\ \frac{5}{8},\frac{7}{9}.$
II	1	1	1	2	2	3	3	4	5	8	(1, 4, 10, 6) (2, 9, 8, 3) (5, 7)	1, 4, 5, 6, 7, 10;	$\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{2}{6},\frac{2}{7},\frac{2}{10},\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{8},\frac{5}{9},\frac{6}{9},\frac{7}{8};$
	2	4	6	4	5	6	7	7	6	9	(1, 5) (2) (3, 8) (4) (6) (7, 10) (9)		
C	3	5	7	9	8	8	9	10	10	10	(1, 5, 6) (2, 8, 3) (9) (4, 10, 7)	2, 3, 8, 9.	$\frac{1}{10},\frac{4}{6},\frac{5}{7}.$
III	1	1	1	2	2	3	3	4	5	7		1, 6, 5; 2, 8, 10;	$\frac{1}{8},\frac{6}{10},\frac{2}{5};\ \frac{1}{9},\frac{4}{6},\frac{5}{7};\ \frac{1}{10},\frac{2}{6},\frac{5}{8};$
	2	4	6	4	8	6	5	7	6	9	(1, 6, 5) (2, 8, 10) (3) (4, 7, 9)		
E	3	5	7	9	10	8	10	8	9	10		4, 7, 9; 3.	$\frac{2}{7},\frac{8}{9},\frac{4}{10};\ \frac{3}{4},\frac{3}{7},\frac{3}{9}.$
IV	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5		1, 10; 2, 3, 5, 7;	$\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{4}{10},\frac{6}{10};\ \frac{2}{6},\frac{3}{4},\frac{5}{8},\frac{7}{9};$
	2	4	6	4	8	6	9	7	6	7	(1, 10) (2, 5, 3, 7) (4, 9, 6, 8)		
K	3	5	7	9	10	8	10	8	9	10	(1) (10) (2, 3) (4, 6) (5, 7) (8, 9)	4, 6, 8, 9.	$\frac{1}{10};\ \frac{2}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{7};\ \frac{4}{6},\frac{8}{9}.$
V	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	(1, 2) (3) (4, 8) (5, 9) (6) (7, 10)	1, 2, 7, 1; 3;	$\frac{1}{8},\frac{2}{4},\frac{4}{7},\frac{8}{10};\ \frac{1}{9},\frac{2}{5},\frac{7}{9},\frac{5}{10};$
	2	4	6	6	8	4	7	9	6	7			
D	3	5	7	10	9	8	10	10	9	8	(1, 7) (3) (4, 8) (5) (6) (2, 10) (9)	4, 8; 5, 9; 6.	$\frac{1}{10},\frac{2}{7};\ \frac{3}{5},\frac{3}{9};\ \frac{3}{6};\ \frac{4}{6},\frac{6}{8}.$

Segue Tavola I.

	Cfz. 10_3										Sostituzioni relative alla Cfz.	Gruppi di punti della medesima specie	Gruppi di coppie (di punti estranei) della medesima specie
VI	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	(1, 5, 4) (2, 7, 10) (3, 8, 9) (6)	1, 4 5; 2, 7 10;	$\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}$; $\frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{4}{8}$; $\frac{1}{10}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}$;
	2	4	6	4	8	7	8	9	7	6			
J	3	5	7	6	9	9	10	10	8	10		3, 8, 9; 6.	$\frac{2}{7}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}$; $\frac{3}{6}, \frac{6}{8}, \frac{6}{9}$.
VII	1	1	1	2	2	3	3	5	5	7	(1, 3, 10, 6) (2, 9, 5, 4, 8, 7)	tutti i punti sono	$\frac{1}{8}, \frac{3}{7}$; $\frac{10}{1}, \frac{6}{3}, \frac{2}{10}, \frac{9}{6}, \frac{5}{2}, \frac{4}{9}, \frac{8}{5}, \frac{7}{4}$;
	2	4	6	4	8	4	9	6	7	8			
A	3	5	7	6	9	8	10	10	9	10	(1, 9) (2, 7) (3, 5) (6, 8) (4, 10)	della stessa specie	$\frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{10}{4}, \frac{6}{8}, \frac{2}{7}$.
VIII	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	(1, 6, 8, 5, 9, 2) (3, 7, 10) (4)	1, 2, 5; 3, 7, 10;	$\frac{1}{8}, \frac{6}{5}, \frac{8}{9}, \frac{5}{2}, \frac{9}{1}, \frac{2}{6}$; $\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{10}{4}$;
	2	4	6	4	9	5	7	6	7	8			
G	3	5	7	8	10	8	10	9	9	10	(1) (2, 6) (3, 7) (4) (5) (8, 9) (10)	6, 8, 9; 4.	$\frac{1}{10}, \frac{6}{3}, \frac{8}{7}, \frac{5}{10}, \frac{9}{3}, \frac{2}{7}$.
IX	1	1	1	2	2	3	3	4	5	6	(1, 3, 5) (2, 8, 4) (6, 9, 10) (7)	1, 3, 5, 6, 9, 10;	$\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{9}{4}, \frac{10}{8}$; $\frac{1}{9}, \frac{3}{10}, \frac{5}{6}$;
	2	4	6	4	9	5	7	6	7	8			
F	3	5	7	8	10	8	9	9	10	10	(1, 10) (2) (3, 9) (4, 8) (5, 6) (7)	2, 4, 8; 7.	$\frac{1}{10}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}$; $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}$;
X	1	1	1	2	2	3	3	4	5	8	(1, 10, 4, 7, 8) (2, 6, 9, 5, 3)	tutti i punti sono	tutte le coppie di punti estranei
	2	4	6	4	6	5	7	6	7	9	(1) (2, 3) (4, 7) (5, 6) (8, 10) (9)		
B	3	5	7	8	10	8	10	9	9	10	(1, 10, 4, 3, 9) (2, 8, 5, 7, 6)	della stessa specie	sono della stessa specie

Cfz. 11_3.

19. Passiamo ora a trovare le Cfz. 11_3.

Considerando le coppie di rette non congiunte passanti per le coppie diverse di punti estranei, indicate nella tavola precedente, e tenendo sempre conto delle sostituzioni relative alle singole Cfz., si trovano le seguenti operazioni, tutte essenzialmente diverse che servono a dedurre le Cfz. 11_3 riducibili dalle Cfz. 10_3:

Nella I Cfz. 10_3; $1\begin{bmatrix}1&8\\2&4\\3&7\end{bmatrix}$, $2\begin{bmatrix}1&8\\4&3\\5&6\end{bmatrix}$, $3\begin{bmatrix}1&8\\2&9\\3&10\end{bmatrix}$, $4\begin{bmatrix}1&8\\4&9\\5&10\end{bmatrix}$, $5\begin{bmatrix}1&8\\6&9\\7&10\end{bmatrix}$,

$6\begin{bmatrix}1&10\\2&8\\3&9\end{bmatrix}$, $7\begin{bmatrix}1&10\\4&3\\5&7\end{bmatrix}$, $8\begin{bmatrix}1&10\\4&8\\5&9\end{bmatrix}$, $9\begin{bmatrix}2&6\\1&5\\3&9\end{bmatrix}$, $10\begin{bmatrix}2&6\\4&1\\9&7\end{bmatrix}$, $11\begin{bmatrix}2&6\\4&3\\9&8\end{bmatrix}$,

$12\begin{bmatrix}2&6\\5&1\\10&7\end{bmatrix}$, $13\begin{bmatrix}2&6\\5&3\\10&8\end{bmatrix}$, $14\begin{bmatrix}2&7\\1&4\\3&8\end{bmatrix}$, $15\begin{bmatrix}2&7\\4&1\\9&6\end{bmatrix}$, $16\begin{bmatrix}2&7\\4&3\\9&10\end{bmatrix}$, $17\begin{bmatrix}2&7\\5&1\\10&6\end{bmatrix}$,

$18\begin{bmatrix}2&7\\5&4\\10&8\end{bmatrix}$, $19\begin{bmatrix}2&8\\1&4\\3&7\end{bmatrix}$, $20\begin{bmatrix}2&8\\1&9\\3&10\end{bmatrix}$, $21\begin{bmatrix}2&8\\4&3\\9&6\end{bmatrix}$, $22\begin{bmatrix}2&8\\5&3\\10&6\end{bmatrix}$, $23\begin{bmatrix}2&8\\5&4\\10&7\end{bmatrix}$,

$24\begin{bmatrix}4&6\\1&3\\5&8\end{bmatrix}$, $25\begin{bmatrix}4&6\\2&3\\9&8\end{bmatrix}$, $26\begin{bmatrix}4&6\\7&5\\8&9\end{bmatrix}$, $27\begin{bmatrix}4&10\\1&3\\5&7\end{bmatrix}$, $28\begin{bmatrix}4&10\\5&8\\1&9\end{bmatrix}$, $29\begin{bmatrix}4&10\\2&3\\9&7\end{bmatrix}$,

$30\begin{bmatrix}4&10\\7&2\\8&5\end{bmatrix}$, $31\begin{bmatrix}5&7\\1&3\\4&10\end{bmatrix}$, $32\begin{bmatrix}5&7\\2&4\\10&8\end{bmatrix}$, $33\begin{bmatrix}5&7\\6&4\\9&8\end{bmatrix}$, $34\begin{bmatrix}5&8\\1&3\\4&6\end{bmatrix}$, $35\begin{bmatrix}5&8\\1&9\\4&10\end{bmatrix}$,

$36\begin{bmatrix}5&8\\2&3\\10&6\end{bmatrix}$, $37\begin{bmatrix}5&8\\2&4\\10&7\end{bmatrix}$, $38\begin{bmatrix}5&8\\6&4\\9&7\end{bmatrix}$.

Nella II Cfz. 10_3; $39\begin{bmatrix}5&7\\1&3\\4&9\end{bmatrix}$, $40\begin{bmatrix}5&7\\2&3\\8&9\end{bmatrix}$, $41\begin{bmatrix}6&9\\3&2\\8&4\end{bmatrix}$, $42\begin{bmatrix}6&9\\5&2\\10&4\end{bmatrix}$, $43\begin{bmatrix}6&9\\5&3\\10&7\end{bmatrix}$.

Nella III Cfz. 10_3; $44\begin{bmatrix}3&4\\1&7\\2&8\end{bmatrix}$, $45\begin{bmatrix}3&4\\6&1\\8&5\end{bmatrix}$, $46\begin{bmatrix}3&4\\6&2\\8&9\end{bmatrix}$, $47\begin{bmatrix}3&4\\5&2\\10&9\end{bmatrix}$, $48\begin{bmatrix}3&4\\5&7\\10&8\end{bmatrix}$,

$49\begin{bmatrix}2&5\\1&6\\3&9\end{bmatrix}$, $50\begin{bmatrix}2&5\\4&3\\9&10\end{bmatrix}$, $51\begin{bmatrix}2&5\\8&1\\10&4\end{bmatrix}$, $52\begin{bmatrix}2&5\\8&6\\10&9\end{bmatrix}$. $53\begin{bmatrix}5&7\\1&9\\4&10\end{bmatrix}$, $54\begin{bmatrix}5&7\\3&1\\10&6\end{bmatrix}$,

$55\begin{bmatrix}5&7\\3&4\\10&8\end{bmatrix}$, $56\begin{bmatrix}5&7\\6&4\\9&8\end{bmatrix}$, $57\begin{bmatrix}5&8\\1&2\\4&10\end{bmatrix}$, $58\begin{bmatrix}5&8\\1&3\\4&6\end{bmatrix}$. $59\begin{bmatrix}5&8\\3&4\\10&7\end{bmatrix}$, $60\begin{bmatrix}5&8\\6&2\\9&10\end{bmatrix}$,

$61\begin{bmatrix}5&8\\6&4\\9&7\end{bmatrix}$, $62\begin{bmatrix}8&9\\2&5\\10&6\end{bmatrix}$, $63\begin{bmatrix}8&9\\3&2\\6&4\end{bmatrix}$, $64\begin{bmatrix}8&9\\3&7\\6&10\end{bmatrix}$, $65\begin{bmatrix}8&9\\4&5\\7&6\end{bmatrix}$.

Nella IV Cfz. 10_3; 66 $\begin{bmatrix}1&10\\2&5\\3&7\end{bmatrix}$, 67 $\begin{bmatrix}1&10\\4&2\\5&8\end{bmatrix}$, 68 $\begin{bmatrix}4&10\\1&2\\5&8\end{bmatrix}$, 69 $\begin{bmatrix}4&10\\1&3\\5&9\end{bmatrix}$, 70 $\begin{bmatrix}4&10\\2&5\\9&7\end{bmatrix}$,

71 $\begin{bmatrix}4&10\\7&3\\8&9\end{bmatrix}$, 72 $\begin{bmatrix}7&9\\1&2\\6&4\end{bmatrix}$, 73 $\begin{bmatrix}7&9\\1&3\\6&10\end{bmatrix}$, 74 $\begin{bmatrix}7&9\\4&3\\8&10\end{bmatrix}$, 75 $\begin{bmatrix}7&9\\4&5\\8&6\end{bmatrix}$, 76 $\begin{bmatrix}7&9\\5&2\\10&4\end{bmatrix}$,

77 $\begin{bmatrix}3&5\\1&6\\2&9\end{bmatrix}$, 78 $\begin{bmatrix}3&5\\1&7\\2&10\end{bmatrix}$, 79 $\begin{bmatrix}3&5\\6&1\\8&4\end{bmatrix}$, 80 $\begin{bmatrix}3&5\\6&7\\8&10\end{bmatrix}$, 81 $\begin{bmatrix}3&5\\9&1\\10&4\end{bmatrix}$, 82 $\begin{bmatrix}8&9\\2&5\\10&6\end{bmatrix}$,

83 $\begin{bmatrix}8&9\\3&2\\6&4\end{bmatrix}$, 84 $\begin{bmatrix}8&9\\4&5\\7&6\end{bmatrix}$.

Nella V Cfz. 10_3; 85 $\begin{bmatrix}4&7\\1&3\\5&10\end{bmatrix}$, 86 $\begin{bmatrix}4&7\\3&1\\8&6\end{bmatrix}$, 87 $\begin{bmatrix}4&7\\9&1\\10&6\end{bmatrix}$, 88 $\begin{bmatrix}4&7\\9&5\\10&8\end{bmatrix}$, 89 $\begin{bmatrix}7&9\\1&2\\6&8\end{bmatrix}$,

90 $\begin{bmatrix}7&9\\1&4\\6&10\end{bmatrix}$, 91 $\begin{bmatrix}7&9\\3&2\\10&8\end{bmatrix}$, 92 $\begin{bmatrix}7&9\\3&5\\10&6\end{bmatrix}$, 93 $\begin{bmatrix}7&9\\5&4\\8&10\end{bmatrix}$, 94 $\begin{bmatrix}2&7\\8&3\\9&10\end{bmatrix}$, 95 $\begin{bmatrix}2&7\\6&5\\10&8\end{bmatrix}$,

96 $\begin{bmatrix}3&9\\4&5\\8&6\end{bmatrix}$, 97 $\begin{bmatrix}3&9\\7&2\\10&8\end{bmatrix}$, 98 $\begin{bmatrix}3&9\\7&5\\10&6\end{bmatrix}$, 99 $\begin{bmatrix}3&6\\4&2\\8&10\end{bmatrix}$, 100 $\begin{bmatrix}3&6\\4&5\\8&9\end{bmatrix}$, 101 $\begin{bmatrix}3&6\\7&5\\10&9\end{bmatrix}$,

102 $\begin{bmatrix}6&8\\2&3\\10&4\end{bmatrix}$, 103 $\begin{bmatrix}6&8\\2&5\\10&7\end{bmatrix}$, 104 $\begin{bmatrix}6&8\\5&3\\9&4\end{bmatrix}$.

Nella VI Cfz. 10_3; 105 $\begin{bmatrix}5&9\\1&2\\4&8\end{bmatrix}$, 106 $\begin{bmatrix}5&9\\1&3\\4&7\end{bmatrix}$, 107 $\begin{bmatrix}5&9\\7&4\\8&10\end{bmatrix}$, 108 $\begin{bmatrix}5&9\\6&2\\10&8\end{bmatrix}$, 109 $\begin{bmatrix}5&9\\6&3\\10&7\end{bmatrix}$,

110 $\begin{bmatrix}4&8\\1&2\\5&9\end{bmatrix}$, 111 $\begin{bmatrix}4&8\\1&3\\5&10\end{bmatrix}$, 112 $\begin{bmatrix}4&8\\2&3\\6&10\end{bmatrix}$, 113 $\begin{bmatrix}4&8\\2&5\\6&7\end{bmatrix}$, 114 $\begin{bmatrix}4&8\\9&5\\10&7\end{bmatrix}$, 115 $\begin{bmatrix}4&7\\1&3\\5&9\end{bmatrix}$;

116 $\begin{bmatrix}4&7\\2&3\\6&9\end{bmatrix}$, 117 $\begin{bmatrix}4&7\\2&5\\6&8\end{bmatrix}$, 118 $\begin{bmatrix}4&7\\9&1\\10&6\end{bmatrix}$, 119 $\begin{bmatrix}4&7\\9&5\\10&8\end{bmatrix}$, 120 $\begin{bmatrix}7&10\\1&3\\6&8\end{bmatrix}$; 121 $\begin{bmatrix}7&10\\1&4\\6&9\end{bmatrix}$;

122 $\begin{bmatrix}7&10\\3&5\\9&6\end{bmatrix}$ 123 $\begin{bmatrix}7&10\\5&4\\8&9\end{bmatrix}$, 124 $\begin{bmatrix}6&9\\1&2\\7&8\end{bmatrix}$, 125 $\begin{bmatrix}6&9\\1&4\\7&10\end{bmatrix}$; 126 $\begin{bmatrix}6&9\\2&3\\4&7\end{bmatrix}$, 127 $\begin{bmatrix}6&9\\5&2\\10&8\end{bmatrix}$,

128 $\begin{bmatrix}6&9\\5&3\\10&7\end{bmatrix}$.

Nella VII Cfz. 10_3; 129 $\begin{bmatrix}4&10\\1&3\\5&9\end{bmatrix}$, 130 $\begin{bmatrix}4&10\\2&3\\6&9\end{bmatrix}$, 131 $\begin{bmatrix}4&10\\2&7\\6&8\end{bmatrix}$, 132 $\begin{bmatrix}4&10\\3&5\\8&6\end{bmatrix}$, 133 $\begin{bmatrix}4&9\\1&2\\5&8\end{bmatrix}$,

134 $\begin{bmatrix}4&9\\1&3\\5&10\end{bmatrix}$, 135 $\begin{bmatrix}4&9\\2&3\\6&10\end{bmatrix}$, 136 $\begin{bmatrix}4&9\\2&5\\6&7\end{bmatrix}$, 137 $\begin{bmatrix}4&9\\3&5\\8&7\end{bmatrix}$.

Nell' VIII Cfz. 10_3; 138 $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$, 139 $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, 140 $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, 141 $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, 142 $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$,

143 $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, 144 $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 5 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$, 145 $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Nella IX Cfz. 10_3; 146 $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$, 147 $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$, 148 $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$, 149 $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, 150 $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$,

151 $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, 152 $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & 2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$, 153 $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$, 154 $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, 155 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$, 156 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$,

157 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$, 158 $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Nella X Cfz. 10_3; 159 $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$, 160 $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$.

20. Nelle Cfz. 11_3 i resti dei punti possono essere di sei specie, che noi indicheremo rispett.[e] con α, β, γ, δ, ε, ζ:

α. Il resto è costituito da tre punti in linea retta e da un quarto ad essi congiunto.

β. I quattro punti del resto sono a due a due congiunti da sei rette della Cfz.

γ. Due punti sono congiunti fra loro ed agli altri due (da cinque rette della Cfz.) e questi invece sono estranei fra loro.

δ. Ogni punto del resto è congiunto a due punti del resto stesso.

ε. Un punto del resto è estraneo a due altri i quali sono congiunti fra loro ed al quarto, senza essere allineati con esso.

ζ. Tre dei quattro punti sono in linea retta e questa è bicongiunta al quarto.

I punti aventi un resto della specie α, β, γ hanno certamente una retta tricongiunta (poichè le rette contenenti punti del loro resto sono meno di otto), quindi rispetto ad essi la Cfz. è certamente irriducibile.

Notiamo poi come essendo conosciuti i resti della Cfz. $(\mu-1)_3$ da cui si deduce colla $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$ una Cfz. μ_3 si possono scrivere con somma facilità i resti di tutti i punti in questa Cfz.

Il resto di un punto γ, diverso da α, α_1, α_2, β, β_1, β_2, μ, è costituito da μ e dai punti che formano il resto di γ nella Cfz. $(\mu-1)_3$.

Il resto di μ è formato da tutti i $\mu - 7$ punti che non appaiono nella operazione eseguita.

Il resto di α si ha togliendo β dal resto di α nella Cfz. $(\mu - 1)_3$ ed aggiungendo α_1 ed α_2; così per β.

In fine il resto di α_1, α_2, β_1, β_2 è formato dagli stessi punti che nella Cfz. $(\mu - 1)_3$ coll'aggiunta di α in α_1 ed α_2 e β in β_1 e β_2.

21. Eseguendo l'operazione 1 (n.° 19) noi troviamo la I Cfz. 11_3 (v. tavola seguente) nella quale i punti

1, 5, 9 hanno un resto della specie γ,
6, 7, 8, 10 della specie ε,
2, 3, 4, 11 della specie ζ.

Ma essi si comportano però tutti diversamente, poichè nessuna sostituzione, tolta l'identica, è capace di trasformare in sè stessa la notazione della Cfz.

Come già notammo rispetto ai punti γ la Cfz. non è riducibile, lo è però rispetto a 2 e $(2, 3, 11)_1$; 4 e $(4, 1, 5)_1$; 7 e $(7, 1, 6)_1$; 10 e $(10, 8, 9)_1$; e rispetto ad 11 e $(11, 1, 8)_1$; sicchè la nostra Cfz., oltre che dalla operazione 1, nasce da cinque altre, che si trovano essere le 28, 43, 50, 69, 80.

La operazione 2 dà la II Cfz. 11_3 nella quale

1, 3, 5, 9	hanno	un	resto	γ,
2, 6, 8	»	»	»	δ,
4, 7, 10, 11	»	»	»	ε.

La sostituzione (1, 9)(2, 6)(3, 5)(4, 7)(10, 11) appartiene al gruppo relativo alla Cfz. e prova che le coppie 1, 9; 2, 6; 3, 5; 4, 7; 10, 11 sono di punti della stessa specie, si vede poi che 1 e 3 non si comportano egualmente, come anche 2 e 4; 4 e 10, quindi i punti della Cfz. sono di sei specie diverse.

Questa Cfz. è riducibile rispetto a 2 e $(2, 1, 3)_1$ $\{$e quindi rispetto a 6 e $(6, 9, 5)_1\}$; 4 e $(4, 5, 11)_1$, $\{7$ e $(7, 3, 10)_1\}$; 10 e $(10, 3, 7)_1$, $\{11$ e $(11, 4, 5)_1\}$, ed infine rispetto a 10 e $(10, 8, 9)_1$, $\{11$ e $(11, 8, 1)_1\}$, però essa nasce da tre altre operazioni e queste sono le 35, 74, 146.

Così continuando si trovano 30 diverse Cfz. 11_3 riducibili, che sono segnate nella tavola seguente. In essa sono indicate anche le operazioni dalle quali nasce ogni Cfz., la natura dei resti dei loro punti, le varie specie di questi, e le sostituzioni del gruppo, sufficienti per determinare la natura dei punti stessi.

TAVOLA II.

	Operazioni dalle quali nasce la Cfz.	Cfz. 11_3											Natura dei resti dei punti											Gruppi di punti della stessa specie	Sostituzioni relative alla Cfz. 11_3
													1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
I	1, 28, 43, 50, 69, 80.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	5 6 9	8 9 10	1 8 11	2 3 11	4 7 11	γ	ζ	ζ	ζ	γ	ε	ε	ε	γ	ε	ζ	tutti i punti sono di specie diversa	
II	2, 35, 74, 146.	1 2 3	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	1 8 11	4 5 11	3 6 11	γ	δ	γ	ε	γ	δ	ε	δ	γ	ε	ε	1, 9; 2, 6; 3, 5; 4, 7; 8; 10, 11.	(1, 9) (2, 6) (3, 5) (4, 7) (8) (10, 11)
III	3, 8, 107, 122.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	1 8 11	2 3 11	9 10 11	γ	α	ζ	ε	γ	ε	γ	α	γ	γ	δ	tutti i punti sono di specie diversa	
IV	4, 100, 138.	1 2 3	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	1 8 11	4 5 11	9 10 11	γ	ε	α	ε	β	δ	γ	α	β	ε	ε	1, 7; 2, 4, 10, 11; 3, 8; 5; 6; 9.	(1, 7) (2, 4) (3, 8) (5) (6) (9) (10, 11), (1, 7) (2, 10) (3) (4, 11) (5) (6) (8) (9).
V	5, 7, 20, 98, 102, 113, 116, 133.	1 2 3	1 4 5	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	1 8 11	6 7 11	9 10 11	δ	α	ε	δ	γ	ε	γ	α	γ	ε	ε	tutti i punti sono di specie diversa	
VI	6, 24, 38, 53, 72.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	1 10 11	2 3 11	8 9 11	δ	ζ	ζ	ε	γ	ε	γ	ζ	ζ	γ	δ	1; 2, 3; 4, 6; 5, 7; 8, 9; 10; 11.	(1) (2, 3) (4, 6) (5, 7) (8, 9) (10) (11)
VII	9, 30, 119, 121, 137.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	8 9 10	2 6 11	1 3 11	5 9 11	ζ	γ	α	ε	α	γ	α	γ	α	ε	ζ	tutti i punti sono di specie diversa	
VIII	10, 37, 71, 76, 154.	1 2 3	1 4 5	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 6 11	4 9 11	1 7 11	ζ	ζ	ζ	γ	ε	ε	ζ	γ	ζ	ε	ε	1, 3; 2; 4, 8; 5, 6; 7; 9; 10, 11.	(1, 3) (2) (4, 8) (5, 6) (7) (9) (10, 11)

Segue Tavola II.

	Operazioni dalle quali nasce la Cfz.	Cfz. 11_3											Natura dei resti dei punti 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Gruppi di punti della stessa specie	Sostituzioni relative alla Cfz. 11_3
IX	11, 36, 63, 64, 95, 106, 145, 157, 158.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 5 10	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 6 11	4 9 11	3 8 11	ζ	ζ	ζ	ε	ζ	ε	δ	β	ζ	δ	δ	tutti i punti sono di specie diversa	
X	12, 16, 23, 44, 51, 67, 78, 89, 90, 109.	1 2 3	1 4 5	2 4 9	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 6 11	5 10 11	1 7 11	ζ	ε	ε	δ	ε	ε	ζ	γ	ζ	ε	ε	id.	
XI	13, 18, 47, 52, 92, 103, 117.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 9	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 6 11	5 10 11	3 8 11	ζ	ε	ζ	ε	ε	ε	δ	γ	ε	γ	ε	id.	
XII	14, 29, 87, 91, 129.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	5 6 9	8 9 10	2 7 11	1 3 11	4 8 11	ζ	ζ	α	ζ	γ	ε	γ	δ	α	ε	ζ	1, 2; 3, 9; 4, 11; 5, 7; 6, 10; 8.	(1, 2) (3, 9) (4, 11) (5, 7) (6, 10) (8)
XIII	15, 32, 49, 58, 93, 128, 143, 149, 152.	1 2 3	1 4 5	2 5 10	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 7 11	4 9 11	1 6 11	ζ	γ	ζ	ε	ε	ε	ζ	γ	ζ	ζ	ε	tutti i punti sono di specie diversa	
XIV	17, 57, 68, 97, 126.	1 2 3	1 4 5	2 4 9	3 6 8	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 7 11	5 10 11	1 6 11	ζ	δ	ε	δ	γ	ε	ζ	γ	δ	ε	ε	1, 7; 2; 3, 11; 4; 5, 8; 6, 10; 9.	(1, 7) (2) (3, 11) (4) (5, 8) (6, 10) (9)
XV	19, 27, 42, 70, 114, 120.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	5 6 9	8 9 10	2 8 11	1 3 11	4 7 11	α	α	α	ζ	γ	ε	γ	ζ	α	ε	ζ	tutti i punti sono di specie diversa	
XVI	21, 31, 56, 111, 127, 131, 151.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 5 10	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 8 11	4 9 11	3 6 11	ζ	δ	γ	ε	δ	ε	δ	γ	ζ	δ	δ	1, 9; 2, 10; 3, 8; 4, 6; 5; 7, 11.	(1, 9) (2, 10) (3, 8) (4, 6) (5) (7, 11)

Segue Tavola II.

	Operazioni dalle quali nasce la Cfz.	Cfz. II_3											Natura dei resti dei punti											Gruppi di punti della stessa specie	Sostituzioni relative alla Cfz. II_3
													1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
XVII	22, 48, 77, 86, 110.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 9	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	2 8 11	5 10 11	3 6 11	ζ	δ	γ	ζ	δ	ε	δ	γ	ε	ε	ε	1, 4; 2, 7; 3, 8; 5; 6, 9; 10, 11.	(1, 4) (2, 7) (3, 8) (5) (6, 9) (10, 11)
XVIII	25, 33, 83, 85, 123.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 5 10	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	4 6 11	2 9 11	3 8 11	ζ	ζ	ζ	γ	ζ	γ	ζ	γ	γ	ζ	δ	1; 2, 3; 4, 6; 5, 7; 8, 9; 10; 11.	(1) (2, 3) (4, 6) (5, 7) (8, 9) (10) (11)
XIX	26.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 6 8	3 7 10	8 9 10	4 6 11	7 8 11	5 9 11	ζ	α	α	α	α	α	α	α	α	ζ	ζ	1, 10, 11; 5, 7; 2, 8, 4, 3, 9, 6.	(1, 10, 11) (2, 8, 4, 3, 9, 6) (5, 7)
XX	34, 55, 61, 75, 82, 115, 125, 130, 134, 142.	1 2 3	1 6 7	2 4 9	2 5 10	3 7 10	4 7 8	5 6 9	8 9 10	5 8 11	1 4 11	3 6 11	α	δ	γ	δ	γ	δ	ε	ζ	γ	ζ	ε	tutti i punti sono di specie diverse	
XXI	39, 41, 54, 65, 155, 160.	1 2 3	1 6 7	2 4 9	2 5 8	3 6 8	4 7 10	5 6 10	8 9 10	5 7 11	1 4 11	3 9 11	ζ	ε	ζ	ζ	δ	ζ	β	α	ζ	ζ	ε	1, 4; 2; 3, 9; 5: 6, 10; 7; 8; 11.	(1, 4) (2) (3, 9) (5) (6, 10) (7) (8) (11)
XXII	40, 84, 159.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 9	3 6 8	4 7 10	5 6 10	8 9 10	5 7 11	2 8 11	3 9 11	ζ	α	α	ζ	β	ζ	β	α	α	ζ	δ	1, 4, 6, 10; 5, 7; 2, 3, 8, 9; 11.	(1, 6, 10, 4) (2, 3, 8, 9) (5, 7) (11)
XXIII	45, 79, 104, 141, 147.	1 2 3	1 6 7	2 4 9	2 8 10	3 5 10	4 7 8	5 6 9	7 9 10	3 4 11	6 8 11	1 5 11	δ	ε	γ	ε	ζ	γ	ε	ε	ε	ε	ζ	1; 2; 3; 4, 10; 5, 11; 6; 7; 8, 9.	(1) (2) (3) (4, 10) (5, 11) (6) (7) (8, 9)
XXIV	46, 60, 81, 108, 112, 148.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 8 10	3 5 10	4 7 8	5 6 9	7 9 10	3 4 11	6 8 11	2 9 11	δ	δ	γ	ε	ε	ε	ε	ε	ε	δ	δ	1; 2; 3; 4, 5; 6, 7; 8, 9; 10, 11.	(1) (2) (3) (4, 5) (6, 7) (8, 9) (10, 11)

Segue Tavola II.

	Operazioni dalle quali nasce la Cfz.	Cfz. 11_3											Natura dei resti dei punti 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Gruppi di punti della stessa specie	Sostituzioni relative alla Cfz. 11_3
XXV	59, 105, 124, 135, 151, 153.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 8 10	3 6 8	5 6 9	7 9 10	5 8 11	3 10 11	4 7 11	ε	δ	γ	ζ	ε	δ	ε	γ	ε	ζ	δ	1, 5; 2, 11; 3, 8; 4; 6; 7, 9; 10.	(1, 5) (2, 11) (3, 8) (4) (6) (7, 9) (10)
XXVI	62, 73, 101, 139, 156.	1 2 3	1 4 5	 6 7	2 4 9	3 6 8	3 5 10	4 7 8	7 9 10	8 9 11	2 10 11	5 6 11	ζ	ε	ε	δ	ε	ζ	δ	δ	β	δ	ε	1, 6; 2, 11; 3, 5; 4, 8; 7; 9; 10.	(1, 6) (2, 11) (3, 5) (4, 8) (7) (9) (10)
XXVII	66, 118, 136.	1 4 5	1 6 7	2 4 9	2 8 10	3 6 8	3 9 10	4 7 8	5 6 9	1 10 11	2 3 11	5 7 11	γ	α	α	ε	α	ε	α	ε	ε	γ	δ	1, 10; 2, 3, 5, 7; 4, 6, 8, 9; 11.	(1, 10) (2, 5, 3, 7) (4, 9, 6, 8) (11)
XXVIII	88, 94, 144.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 6 10	2 8 9	3 4 8	3 7 10	5 6 9	4 7 11	9 10 11	5 8 11	ζ	ζ	ζ	α	ζ	ζ	ζ	ζ	β	ζ	ζ	1, 3, 7; 2, 6, 10; 4; 5, 8, 11; 9.	(1, 3, 7) (2, 10, 6) (4) (5, 8, 11) (9)
XXIX	96, 99, 140.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 6 10	2 8 9	3 7 10	4 9 10	5 7 8	3 9 11	4 8 11	5 6 11	ε	ε	ε	δ	β	ε	ε	δ	α	ε	δ	1, 6, 7; 2, 3, 10; 4, 8, 11; 5; 9.	(1, 6, 7) (2, 10, 3) (4, 11, 8) (5) (9)
XXX	132.	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 6	2 8 9	3 9 10	5 7 9	7 8 10	4 10 11	3 8 11	5 6 11	γ	δ	γ	γ	γ	α	δ	α	γ	γ	δ	1, 3, 4, 5, 9, 10; 2, 7, 11; 6, 8.	(1, 5, 4) (2, 7, 11) (3, 9, 10) (6) (8) (1, 3) (2) (7, 11) (6, 8) (5, 10) (4, 9)
XXXI	irriducibile	1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 6	2 8 9	3 4 8	3 9 10	5 6 11	5 7 10	7 9 11	8 10 11	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	α	tutti i punti sono della stessa specie	(1, 4, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 7, 5, 6)

L'ultima Cfz. 11_3 è quella irriducibile trovata al n.° 7, essa è la sola che possegga punti della medesima natura ed è quindi la più uniforme delle Cfz. 11_3. Ma in seguito tornerò sopra questo argomento per studiare più particolarmente le singole Cfz. 11_3, per ora noto solamente come le Cfz. VIII e XIII; XI e XXIII; XIV, XVII e XXV, sebbene abbiano rispett.^{e} lo stesso numero di resti uguali, siano essenzialmente diverse. Il concetto quindi dei resti non è sufficiente per stabilire l'uguaglianza delle Cfz. tuttavia esso è sempre un valido aiuto per decidere della natura dei punti e per la ricerca delle sostituzioni del gruppo relativo alla Cfz.

Palermo, aprile 1886.