

Ein Beitrag zur reellen Funktionentheorie.

Von Celestyn Burstin in Wien.

In dieser Arbeit habe ich einen neuen Konvergenzbegriff, der für gewisse Untersuchungen sich zweckmäßig erweist, eingeführt und habe ihn als quasiuniforme Konvergenz bezeichnet. Darunter verstehe ich folgendes: Es sei eine konvergente Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ gegeben, welche auf einer Menge P gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert. Die Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ heißt auf der Menge P quasiuniform konvergent, wenn zu jeder positiven Zahl ε und für jedes noch so kleine Intervall δ , das Punkte von P enthält, ein Intervall δ_1 , welches im Intervall δ enthalten ist und für welches $D(P, \delta_1) \neq 0$ ist, und eine natürliche Zahl ν^1) existiert, so daß:

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_1)$.

Die quasiuniforme Konvergenz verlangt weniger als die uniforme Konvergenz²) in einem bestimmten Punkte x' der Menge P . Die uniforme Konvergenz in einem Punkte x' einer Menge P besagt nämlich folgendes: Zu jeder positiven Zahl ε gibt es ein Intervall δ , das Punkte der Menge P enthält und den Punkt x' ganz im Innern enthält und eine natürliche Zahl ν von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta)$.

Wir wollen jetzt einen Satz beweisen, der für die späteren Untersuchungen von einer Wichtigkeit sein wird.

1. Satz: Ist eine konvergente Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ auf einer Menge P quasiuniform konvergent, so ist die Menge der Punkte, wo die Funktionenfolge in bezug auf P nicht uniform konvergiert, von der ersten Kategorie in bezug auf die Menge P .

¹) Es ist also die Zahl ν abhängig von der Zahl ε und von Mengen $D(P, \delta)$ und $D(P, \delta_1)$.

²) F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, p. 385.

Beweis: Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ eine stets fallende Folge von positiven Zahlen, welche gegen Null konvergieren. Ist eine Zahl ε gegeben, so gibt es in jedem Intervall δ , wo $D(P, \delta) \neq 0$ ist, ein Intervall δ_1 , wo $D(P, \delta_1) \neq 0$ ist, und eine natürliche Zahl ν von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\text{I})$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_1)$.

Bezeichnen wir jetzt mit \mathfrak{A}_1 die Menge der Punkte, für welche für irgend eine Umgebung $D(P, \delta_1)$ und für irgend eine Zahl ν_1 die Beziehung

$$|f_{\nu_1}(x) - f(x)| < \varepsilon_1 \quad (\text{I})$$

gilt und mit \mathfrak{B}_1 die Komplementärmenge der Menge \mathfrak{A}_1 in bezug auf die Menge P . Man sieht dann ohne weiteres, daß die Menge \mathfrak{B}_1 nirgendwo dicht in bezug auf die Menge P ist, denn wäre sie überall dicht in P , so wäre das im Widerspruch mit der vorausgesetzten quasiuniformen Konvergenz der Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$.

Allgemein bezeichnen wir mit \mathfrak{A}_n die Menge der Punkte, welche in \mathfrak{A}_{n-1} enthalten sind, und für welche für irgend eine Umgebung $D(P, \delta_n)$ und für irgend eine natürliche Zahl ν_n die Beziehung

$$|f_{\nu_n}(x) - f(x)| < \varepsilon_n \quad (\text{I})$$

gilt und mit \mathfrak{B}_n die Komplementärmenge der Menge \mathfrak{A}_n in bezug auf die Menge P . Jede Menge \mathfrak{B}_n ist nirgendwo dicht in P , also ist die Menge der Punkte, welche in mindestens einer von den Mengen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \dots$ enthalten sind und die wir mit \mathfrak{B} bezeichnen, von der ersten Kategorie in P . Die Komplementärmenge der Menge \mathfrak{B} in bezug auf die Menge P , welche wir mit \mathfrak{A} bezeichnen, ist nichts anderes als der Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$. Wir wollen jetzt zeigen, daß jeder Punkt der Menge \mathfrak{A} ein Punkt der uniformen Konvergenz ist. In der Tat, ist x' irgend ein Punkt der Menge \mathfrak{A} , so ist er ein Punkt von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$. Es gibt also zu jeder Zahl ε_n ein Intervall δ_n , das den Punkt x' ganz im Innern enthält und eine natürliche Zahl ν_n , so daß

$$|f_{\nu_n}(x) - f(x)| < \varepsilon_n \quad (\text{I})$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_n)$, d. h. der Punkt x' ist ein Punkt uniformer Konvergenz in bezug auf P , also ist die Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ höchstens in der Menge \mathfrak{B} in bezug auf P nicht uniform konvergent, w. z. b. w.

2. Satz: Jede auf einer perfekten Menge konvergente Folge von in ihr stetigen Funktionen ist auf ihr quasiuniform konvergent.¹⁾

Beweis: Es sei Q eine perfekte Menge, in der die Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ konvergent ist und auf der jede dieser Funktionen stetig ist. Bezeichnen wir mit $A_{p\varepsilon}$ die Menge der Punkte, für welche:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{5} \varepsilon$$

ist, wenn $n \geq p$ ist.

Die Menge der Punkte A_ε , welche in mindestens einer der Mengen $A_{1\varepsilon}, A_{2\varepsilon}, \dots, A_{p\varepsilon}, \dots$ enthalten ist, fällt mit der Menge der Punkte Q zusammen (wegen der Konvergenz der Funktionenfolge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ in Q). Außerdem haben die Mengen $A_{1\varepsilon}, A_{2\varepsilon}, \dots, A_{p\varepsilon}, \dots$ die Eigenschaft:

$$A_{1\varepsilon} \subseteq A_{2\varepsilon} \subseteq \dots \subseteq A_{p\varepsilon} \subseteq \dots$$

Es folgt daraus unmittelbar, daß zu jedem Intervall δ , wo $D(P, \delta) \neq 0$ ist, ein anderes Intervall δ' (das ganz im Intervall δ enthalten ist) und eine natürliche Zahl ν existiert, von der Eigenschaft, daß $A_{\nu\varepsilon}$ in δ' überall von der zweiten Kategorie ist. Es sei jetzt x' irgend ein Punkt des Intervalls δ' , dann gibt es wegen der Konvergenz der Folge $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ eine bestimmte natürliche Zahl $p \geq \nu$ von der Eigenschaft, daß:

$$|f_p(x') - f(x')| < \frac{1}{5} \varepsilon \quad (1)$$

ist. Ist n eine beliebige natürliche Zahl, welche höchstens ν gleich ist, so läßt sich wegen der Stetigkeit von $f_p(x)$ und $f_n(x)$ ein Intervall δ_1 im Intervall δ' finden, so daß

$$|f_p(x') - f_p(x)| < \frac{1}{5} \varepsilon \quad (2)$$

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \frac{1}{5} \varepsilon \quad (3)$$

ist für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta_1)$. Ist außerdem x ein Punkt der Menge $A_{\nu\varepsilon}$ (und solche gibt es immer im Intervall δ_1 , da die

¹⁾ Der Beweis ist ganz analog dem Beweise, den Hausdorff für den Satz, daß die Menge der Punkte gleichmäßiger Konvergenz bei einer Folge von stetigen Funktionen überall dicht in bezug auf die Strecke $0-1$ ist, gegeben hat.

Menge $A_{\nu\varepsilon}$ im Intervall δ_1 überall von der zweiten Kategorie ist), so ist

$$|f_p(x) - f(x)| < \frac{1}{5} \varepsilon \quad (4)$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{5} \varepsilon. \quad (5)$$

Aus den Ungleichungen (1), (2), (3), (4), (5) folgt die Ungleichung

$$|f_n(x') - f(x')| < \varepsilon, \quad (6)$$

wo x' ein beliebiger Punkt der Menge $D(Q, \delta_1)$ ist.

Es gibt also zu jeder beliebigen Zahl ε und zu jedem Intervall δ , wo $D(Q, \delta) \neq 0$ ist, ein anderes Intervall δ_1 , wo $D(Q, \delta_1) \neq 0$ ist, eine natürliche Zahl n von der Eigenschaft, daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta_1)$. Dadurch ist der 2. Satz vollständig bewiesen.

3. Satz von Hausdorff¹⁾: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Grenzfunktion $\lim f_n(x) = f(x)$ im Punkte x' stetig in bezug auf Q ist, wenn alle Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots$ im Punkte x' in bezug auf Q stetig sind, ist die uniforme Konvergenz der Folge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ im Punkte x' in bezug auf die Menge Q .

A. Die Bedingung ist notwendig. In der Tat, ist $f(x)$ im Punkte x' in bezug auf Q stetig, so gibt es wegen der Konvergenz der Folge eine natürliche Zahl ν von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x') - f(x')| < \frac{1}{3} \varepsilon \quad (1)$$

ist. Andererseits gibt es wegen der Stetigkeit von $f_\nu(x)$ und $f(x)$ im Punkte x' in bezug auf Q ein Intervall δ , das den Punkt x' ganz im Innern enthält, und die Eigenschaft besitzt, daß

$$|f_\nu(x') - f_\nu(x)| < \frac{1}{3} \varepsilon \quad (2)$$

$$|f(x') - f(x)| < \frac{1}{3} \varepsilon \quad (3)$$

¹⁾ F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, p. 315.

ist für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta)$. Aus den drei Ungleichungen folgt die Ungleichung:

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta)$. Es ist also die Folge $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_n(x)$, \dots im Punkte x in bezug auf die Menge Q uniform konvergent.

B. Die Bedingung ist hinreichend. Ist x' ein Punkt der uniformen Konvergenz in bezug auf Q , so gibt es für jedes $\frac{1}{3}\varepsilon$ ein Intervall δ' und eine natürliche Zahl ν von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (1)$$

ist für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta')$. Da insbesondere der Punkt x' in der Menge $D(Q, \delta')$ liegt, so ist auch

$$|f_\nu(x') - f(x')| < \frac{1}{3}\varepsilon. \quad (2)$$

Wegen der Stetigkeit von $f_\nu(x)$ in x' in bezug auf die Menge Q , so gibt es um x' ein Intervall δ , das ganz im Intervall δ' enthalten ist, von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x') - f_\nu(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (3)$$

ist für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta)$. Aus den drei Ungleichungen folgt die Ungleichung

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon$$

für alle Punkte der Menge $D(Q, \delta)$.

Es ist also die Funktion $f(x)$ im Punkte x' in bezug auf die Menge Q stetig.

4. Satz (Definition): Ist die Menge der Stetigkeitspunkte einer Funktion $f(x)$ in bezug auf eine perfekte Menge auf dieser überall dicht, so ist die Funktion $f(x)$ auf der perfekten Menge höchstens punktweise unstetig.

5. Satz von Baire: Jede Grenzfunktion in bezug auf P stetiger Funktionen ist auf jeder in P enthaltenen perfekten Menge höchstens punktweise unstetig.

Dieser Satz ist eine Folge der Sätze 1, 2, 3, 4. In der Tat, nach dem 2. Satze ist jede konvergente Folge stetiger Funktionen auf

jeder perfekten Menge quasiuniform konvergent. Nach dem 1. Satze ist aber eine konvergente Folge, welche quasiuniform konvergiert, nicht uniform konvergent höchstens in einer Menge erster Kategorie in bezug auf die Menge, in welcher sie quasiuniform konvergent ist. Nach dem 3. Satze ist aber eine Grenzfunktion stetiger Funktionen in allen Punkten stetig, wo die Folge uniform konvergiert, also überall höchstens mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie, es ist also die Grenzfunktion höchstens punktweise unstetig (nach dem 4. Satze).

6. Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Grenzfunktion von Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_n \dots$, welche höchstens der ersten Klasse sind, eine Funktion höchstens der ersten Klasse ist, ist die quasiuniforme Konvergenz auf jeder perfekten Menge.

A. Die Bedingung ist notwendig. In der Tat, es sei P irgend eine perfekte Menge, dann ist jede der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots$ und die Grenzfunktion $f(x)$ auf der Menge P höchstens punktweise unstetig. Ist also irgend eine positive Zahl $\frac{1}{3}\varepsilon$ gegeben, so ist die Menge der Punkte jeder Funktion $f_n(x)$ und der Grenzfunktion $f(x)$, wo $\sigma(f_n(x)) \geq \frac{1}{3}\varepsilon$ und $\sigma(f(x)) \geq \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, auf der perfekten Menge P nirgendwo dicht. Bezeichnen wir die Menge, wo $\sigma(f_n(x)) \geq \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, mit M_n , und analog die Menge, wo $\sigma(f(x)) \geq \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, mit M_0 , so ist die Menge aller Punkte, welche in mindestens einer der Mengen $M_0, M_1, \dots, M_n \dots$ vorkommen und die wir mit \overline{M} bezeichnen von der ersten Kategorie in P , also die Komplementärmenge der Menge \overline{M} in bezug auf P , die wir mit \underline{N} bezeichnen, von der zweiten Kategorie in P . Ist also x' irgend ein Punkt von \underline{N} , so ist $\sigma(f_n(x)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $\sigma(f(x)) < \frac{1}{3}\varepsilon$.

Ist also irgend ein Intervall δ gegeben, so gibt es in diesem Intervall auf der Menge P einen Punkt x' , welcher der Menge \underline{N} angehört. Andererseits da die Folge von Funktionen konvergiert, so gibt es eine natürliche Zahl ν von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x') - f(x')| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (1)$$

ist. Da der Punkt x' der Menge \underline{N} angehört, so ist für ihn

$\sigma(f_\nu(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$ und $\sigma(f(x')) < \frac{1}{3}\varepsilon$, d. h. man kann ein Intervall δ_1 im Intervall δ finden von der Eigenschaft, daß

$$|f_\nu(x') - f_\nu(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (2)$$

$$|f(x') - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon \quad (3)$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_1)$.

Aus den drei Ungleichungen folgt die Ungleichung:

$$|f_\nu(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_1)$. Es ist also die Funktionenfolge quasiuniform konvergent.

B. Die Bedingung ist hinreichend. In der Tat, es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \dots$ eine stets abnehmende Folge von Zahlen, die gegen Null konvergieren. Nach dem ersten Satze ist die Menge der Punkte auf der Menge P , in der die Folge uniform konvergiert, von der zweiten Kategorie in P . Bezeichnen wir diese Menge mit \underline{Q} , so ist $\overline{C(\underline{Q})}$, d. i. die Komplementärmenge von \underline{Q} in bezug auf \overline{P} von der ersten Kategorie. Ist jetzt irgend eine Zahl, z. B. die Zahl $\frac{1}{3}\varepsilon$ gegeben, so ist die Menge der Punkte, wo $\sigma(f_n(x)) \geq \frac{1}{3}\varepsilon$ ist, nirgendwo dicht auf der perfekten Menge P .

Bezeichnen wir die Menge der Punkte, wo $\sigma(f_n(x)) \geq \frac{1}{3}\varepsilon_k$ ist, mit $\overline{M_n^{(k)}}$ und die Menge der Punkte, welche in mindestens einer der Mengen $\overline{M_1^{(k)}}, \overline{M_2^{(k)}}, \dots, \overline{M_n^{(k)}}, \dots$ enthalten sind, mit $\overline{M^{(k)}}$, so ist $\overline{M^{(k)}}$ von der ersten Kategorie in P . Andererseits bezeichnen wir die Menge aller Punkte, welche in mindestens einer der Menge $\underline{M^{(1)}}, \underline{M^{(2)}}, \dots, \underline{M^{(k)}}, \dots$ enthalten ist, mit \underline{M} , so ist \underline{M} auch von der ersten Kategorie in P , also die Komplementärmenge $\overline{C(\underline{M})} = \underline{N}$ von der zweiten Kategorie in P . Bezeichnen wir jetzt mit \underline{R} den Durchschnitt der Mengen \underline{Q} und \underline{N} , so ist die Menge \underline{R} auch überall von der zweiten Kategorie in P . Ist also x' irgend ein Punkt der Menge \underline{R} (also auch der Menge \underline{Q}), so ist x' ein Punkt der uniformen Konvergenz, es gibt also für die Zahl $\frac{1}{3}\varepsilon_k$ ein Intervall δ^k und eine natürliche Zahl ν_k von der Eigenschaft, daß

$$|f_{\nu_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon_k \quad (1)$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta^k)$. Da anderseits der Punkt x' ganz im Innern des Intervalls δ^k liegt, so ist auch

$$|f_{v_k}(x') - f(x')| < \frac{1}{3} \varepsilon_k. \quad (2)$$

Da aber der Punkt x' der Menge R , also auch der Komplementärmenge der Menge $M^{(k)}$ angehört, so gibt es um x' ein Intervall $\delta_1^{(k)}$, das ganz im Innern des Intervalls δ^k liegt von der Eigenschaft, daß

$$|f_{v_k}(x') - f_{v_k}(x)| < \frac{1}{3} \varepsilon_k \quad (3)$$

ist für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_1^k)$. Aus den drei Ungleichungen folgt die Ungleichung

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon_k$$

für alle Punkte der Menge $D(P, \delta_1^k)$.

Da diese letzte Ungleichung, wie man ohne weiteres einsehen kann, für jedes ε_k gilt, so folgt daraus, daß die Funktion $f(x)$ im Punkte x' auf der Menge P stetig. Da anderseits die Menge R von der zweiten Kategorie in P ist, so folgt daraus nach dem 4. Satze, daß die Funktion $f(x)$ auf der Menge P höchstens punktweise unstetig ist. Dadurch ist der Satz 6 vollständig bewiesen.

7. Satz: Jede Funktion $f(x)$ der Baireschen Menge E hat die Eigenschaft $m'(\sigma(f)) = 0$ ¹⁾ auf jeder perfekten Menge. (Haupttheorem von Baire.)

Beweis: Die Bairesche E -Menge hat folgende Eigenschaften:

1. Sie enthält alle stetigen Funktionen, 2. sie ist abgeschlossen, d. h. gehören die Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ der Menge E an und ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, so ist auch $f(x)$ eine Funktion der E -Menge, 3. soll die Menge E die kleinste Menge von dieser Eigenschaft sein. Aus der Definition der E -Menge folgt unmittelbar, daß der Satz 7 bewiesen sein wird, wenn wir zeigen, daß aus $m'(\sigma(f_k)) = 0$ für $k = 1, 2, \dots, n, \dots$; $m'(\sigma(f)) = 0$ folgt, für jede perfekte Menge, wenn $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ist, da jede stetige Funktion $F(x)$ die Eigenschaft $m'(\sigma(F)) = 0$ besitzt. Es sei also eine perfekte Menge P gegeben, wo $m'(\sigma(f_k)) = 0$ ist, für $k = 1, 2, \dots, m, \dots$. Die Funktion

¹⁾ $m'(\sigma(f)) = 0$, d. i. die Funktion $f(x)$ ist nach Ausschließen einer Menge erster Kategorie T in bezug auf P in der Restmenge $P - T$ stetig.

$f_n(x)$ wird also nach Ausschließen einer Menge erster Kategorie G_n , auf der Menge $P - G_n$ stetig sein. Bezeichnen wir mit \bar{G} die Menge aller Punkte, welche in mindestens einer von den Mengen $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, \dots$ vorkommen, so ist die Menge \bar{G} von der ersten Kategorie in P . Die Menge $P - \bar{G} = S$, ist also überall von der zweiten Kategorie in P und hat die Eigenschaft, daß auf ihr alle Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ stetig sind.

Nach dem 2. Satze ist die Funktionenfolge $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ auf der Menge S quasiuniform konvergent. Nach dem 1. Satze ist also die Folge $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ auf einer Menge Q , welche in bezug auf P (also auch in bezug auf T) von der zweiten Kategorie ist, uniform konvergent. Nach dem 3. Satze ist also die Grenzfunktion $f(x)$ stetig in allen Punkten der Menge Q in bezug auf die Menge Q und da die Menge Q von der zweiten Kategorie ist und die Komplementärmenge von der ersten Kategorie, so hat die Funktion $f(x)$ die Eigenschaft $m'(\sigma(f)) = 0$ auf der perfekten Menge P . Dadurch ist das Haupttheorem von Baire bewiesen.

Aus dem Haupttheorem folgt eine merkwürdige Eigenschaft der Funktionen der E -Menge: In jeder perfekten Menge P gibt es eine perfekte Menge P_1 , auf der $f(x)$ stetig ist.¹⁾

8. Satz: Ist eine konvergente Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, welche höchstens der α^{ten} Klasse angehören, in jedem Punkte auf der Strecke $0-1$ uniform konvergent, so ist die Grenzfunktion $\lim_{n=\infty} f_n(x)$ auch eine Funktion, welche höchstens der α^{ten} Klasse angehört.

Beweis: Für die Funktionen der 0^{ten} Klasse haben wir den Satz bereits bewiesen. Wir beweisen also jetzt noch den Satz für $\alpha \geq 1$. Nach der Voraussetzung gilt es, für jeden Punkt x' ein Intervall δ von der Eigenschaft, daß

$$|f_{n_1}(x) - f(x)| < \varepsilon_1$$

ist für alle Punkte des Intervalles δ , das x' ganz im Innern enthält. Nach dem Borelschen Satze kann man eine endliche Anzahl von Intervallen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, herausgreifen, welche die Eigenschaft haben, daß alle Punkte des Intervalls im Innern dieser Intervalle liegen. Es seien $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_n}(x)$ die Funktionen, für welche

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| < \varepsilon_1$$

¹⁾ Jede Menge zweiter Kategorie, deren Komplementärmenge in bezug auf P erster Kategorie ist, enthält einen perfekten Bestandteil.

ist, für alle Punkte des Intervalls δ_k , wo $k = 1, 2, \dots, n$ ist. Wir bilden jetzt eine Funktion $F_{n_i}(x)$ folgendermaßen:

$$F_{n_i}(x) = f_{v_i}(x) \text{ im Intervall } \delta_i$$

$$F_{n_i}(x) = f_{v_k}(x)$$

in Teilen des Intervalls, die ganz außerhalb der Intervalle $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}$ liegen. Es ist also $F_{n_i}(x)$ als eine endliche Summe von Funktionen höchstens der α^{ten} Klasse ($\alpha \geq 1$) auch höchstens der α^{ten} Klasse und hat die Eigenschaft

$$|F_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon_1$$

ist für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$. Nimmt man jetzt irgend eine fallende Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \dots$, die gegen Null konvergieren, so gibt es für jede Zahl ε_m eine Funktion $F_{n_m}(x)$ höchstens der α^{ten} Klasse, welche die Eigenschaft hat, daß

$$|F_{n_m}(x) - f(x)| < \varepsilon_m$$

ist für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$.

Die Folge der Funktionen $F_{n_1}(x), F_{n_2}(x), \dots, F_{n_m}(x), \dots$ ist, wie man ohne weiteres einsehen kann, gleichmäßig konvergent, also ist nach einem Satze, den Baire bewiesen hat,¹⁾ die Grenzfunktion $f(x)$ höchstens der α^{ten} Klasse, w. z. b. w.

Aus dem 8. Satze folgt unmittelbar, daß die Quasikonvergenz von Arzelà die hinreichende Bedingung dafür ist, daß eine konvergente Folge von Funktionen, welche höchstens der α^{ten} Klasse sind, gegen eine Funktion konvergieren, welche auch höchstens der α^{ten} Klasse angehört. In der Tat, folgt eine dem 8. Satze,²⁾ daß zu jeder noch so kleinen Zahl ε eine endliche Anzahl von natürlichen Zahlen n_1, n_2, \dots, n_m angehört, so daß

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| < \varepsilon$$

ist, für alle Punkte des Intervalls $\overline{0-1}$, wo n_k eine von der natürlichen Zahlen n_1, n_2, \dots, n_m ist.³⁾

Man sieht ohne weiteres, daß die Quasikonvergenz keine notwendige Bedingung dafür ist, daß $\lim f_n(x) = f(x)$ der α^{ten} Klasse ist, wenn alle Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ der α^{ten} Klasse ist.

¹⁾ Acta mathematica: Sur la représentation des fonctions discontinues. Bd. 30, Seite 5—6.

²⁾ Wenn man den Borelschen Satz anwendet.

³⁾ Man kann leicht beweisen, daß die quasiuniforme Konvergenz eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß eine konvergente Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, welche höchstens von der α^{ten} Klasse sind, und wo $\alpha \geq 1$ ist, gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, welche auch höchstens von der α^{ten} Klasse ist.

In der Tat, es sei $A_1, A_2, \dots A_n \dots$ irgend eine abzählbare Menge von abzählbaren überall dichten Mengen auf der Strecke $\overline{0-1}$, welche die Eigenschaft haben, daß $D(A_i, A_k) = 0$ ist, wenn $k \neq i$ ist. Wir definieren jetzt eine Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x) \dots$ wo $f_n(x)$ folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 \text{ für alle Punkte der Menge } A_1 + A_2 + \dots A_n = \mathfrak{A}_n \\ f_n(x) &= 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \text{ Komplementärmenge } C(\mathfrak{A}_n). \end{aligned}$$

Alle diese Funktionen sind Funktionen der 2. Klasse, ihre Grenzfunktion $f(x) = \lim f_n(x)$ ist auch eine Funktion der 2. Klasse, da sie überall höchstens mit Ausnahme der abzählbaren Menge $A_1 + A_2 + \dots A_n + \dots$ gleich Null ist. Die Funktionenfolge ist, wie man unmittelbar einsehen kann, nicht quasikonvergent. Man sieht auch an diesem Beispiel, daß nicht einmal die quasiuniforme Konvergenz eine notwendige Bedingung für die Funktionen der 2. Klasse ist.

Alle in dieser Arbeit bewiesenen Sätze gelten auch für Funktionen von mehreren Variablen und für Funktionen, welche im vollständigen Raume¹⁾ definiert sind. Die Beweise werden auf dieselbe Weise geführt.

¹⁾ F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, p. 315.