

Die Theorie des Kappschen Vibrators.

Von

Hermann Dülf, München.

Einleitung: Die Drehstrommotoren weisen, besonders wenn sie nicht voll belastet sind, einen $\cos \varphi$ auf, welcher wesentlich kleiner als 1 ist; die nachteiligen Einflüsse eines schlechten Leistungsfaktors: unvollständige Ausnützung des Leitungsnetzes und der Generatoren der Zentrale sind bekannt. Aber nicht nur für den Erzeuger, sondern auch für den Verbraucher der elektrischen Energie kann ein schlechter Leistungsfaktor von Nachteil sein, wenn ihm z. B. bei Rationierung der elektrischen Antriebskraft nur eine bestimmte Strommenge zugeteilt ist: eine Verbesserung des $\cos \varphi$ der angeschlossenen Motoren ist für ihn gleichbedeutend mit der Zuweisung einer größeren Leistung.

Die Verbesserung des Leistungsfaktors einer ganzen Anlage läßt sich wie bekannt damit erreichen, daß man Synchronmotoren, welche übererregt werden und dadurch voreilenden Strom aufnehmen, auf das Netz schaltet; auch durch Verwendung von statischen Kondensatoren ist es möglich eine ähnliche Wirkung zu erzielen; die Erfahrungen der Praxis haben aber gezeigt¹⁾, daß die Phasenverbesserung durch Synchronmotoren und Kondensatoren nicht immer wirtschaftlich ist; man ist daher zu einer anderen Art der Verbesserung der Phasenverschiebung übergegangen, welche darin besteht, daß man den $\cos \varphi$ der eingeschalteten Motoren selbst verbessert und dadurch den Leistungsfaktor der Anlage günstiger gestaltet.

Wie aus dem Vektordiagramm²⁾ des Drehstrommotors, Bild 1, ersichtlich ist, kann eine Verbesserung des $\cos \varphi_1$ dadurch erreicht werden, daß der Rotorstrom J_2 einen Teil oder den ganzen Magnetisierungsstrom \dot{I}_{1m} aufbringt, d. h. daß I_2 ³⁾ gegenüber $s \cdot \dot{E}_{g2}$ voreilt; diese zeitliche Voreilung des Stromes I_2 läßt sich durch Einschaltung eines Apparates erzielen, welcher eine kapazitive Belastung für den sekundären Stromkreis bildet. Es gibt verschiedene Lösungen dieses Problems, so die von Leblanc⁴⁾, Walker⁵⁾, Scherbius⁶⁾, Kapp⁷⁾ angegebenen Konstruktionen (Phasenkompensatoren oder Phasenschieber).

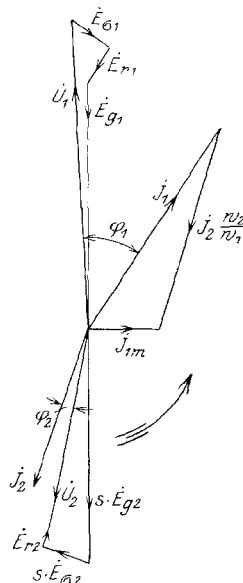


Bild 1.

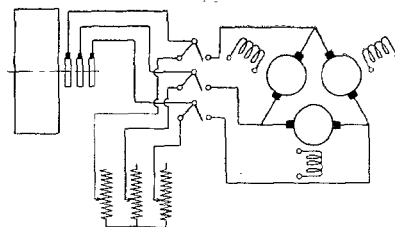


Bild 2.

¹⁾ Vgl. Kopp, ETZ. 1920 S. 772 ff.

²⁾ Vgl. Starkstromtechnik v. Rziha u. Seidener, Abschn. VII E.

³⁾ Der vektorielle Charakter der Wechselstromgrößen werde dadurch bezeichnet, daß man einen Punkt über den betreffenden Buchstaben setzt.

⁴⁾ Eclairage Electrique Bd. 20, 1899 S. 171.

⁵⁾ ETZ. 1909 S. 1260, ETZ. 1913 S. 832.

⁶⁾ ETZ. 1912 S. 1079, ETZ. 1913 S. 837, ETZ. 1915 S. 299.

⁷⁾ ETZ. 1912 S. 778, ETZ. 1913 S. 931, ETZ. 1914 S. 713 u. 981, ETZ. 1916 S. 625, ETZ. 1919 S. 405.

Im nachstehenden soll die genaue Theorie für den von Kapp erdachten Phasenkompensator, den sog. Vibrator, erbracht werden. Dieser Phasenkompensator, dessen grundsätzliche Schaltung sich aus Bild 2 ergibt, besteht bei Drehstrom aus drei Gleichstromankern, welche vom Rotorstrom des Asynchronmotors durchflossen werden; jeder der drei Anker schwingt in einem konstant erregten Gleichstromfeld, wodurch eine dem Läuferstrom zeitlich um $\frac{\pi}{2}$ voreilende EMK im Rotorkreis induziert wird.

I. Die im Phasenkompensator induzierten Spannungen nach Größe und Richtung.

1. Die EMK der Drehung \mathcal{E}_3 .

Es bezeichne am Vibrator:

R_3 cm den Ankerradius eines Vibratorankers,

L_3 cm die Ankereisenbreite eines Vibratorankers,

\mathfrak{H}_{3m} die mittlere Feldstärke im Luftraum,

\mathfrak{P}_3 die Kraftlinienzahl pro Pol,

$m_3 = P \cdot R_3$ das auf den Anker ausgeübte Drehmoment (Momentanwert),

m_{3max} den Maximalwert von m_3 ,

p_3 die Polpaarzahl pro Anker,

i_3 den Strom pro Anker (Momentanwert),

i_{3max} den Maximalwert von i_3 ,

$s_3 b_3$ die Leiterzahl pro Anker,

$2a_3$ die Zahl der parallelen Stromzweige pro Anker.

Beindet sich ein Leiter von der Länge L cm in einem Feld von der Stärke \mathfrak{H} Gauß und fließt durch den Leiter ein Strom i Amp., so ist die Kraft P der Ablenkung nach Biot-Savart:

$$P = i \cdot L \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{1}{g} \cdot 10^{-6} \text{ kg}$$

In Anwendung dieses Satzes ergibt sich für den Vibratoranker ein Moment m_3 von der Größe:

$$m_3 = P \cdot R_3 = \frac{i_3}{2a_3} L_3 \cdot s_3 \cdot b_3 \cdot \mathfrak{H}_{3m} \cdot \frac{1}{g} \cdot R_3 \cdot 10^{-8} \text{ mkg}$$

und nach Einführung der Beziehung:

$$\mathfrak{P}_3 = \frac{R_3 \pi}{p_3} \cdot L_3 \cdot \mathfrak{H}_{3m}$$

$$m_3 = \frac{p_3}{2g\pi} \cdot \frac{s_3 b_3}{a_3} \cdot \mathfrak{P}_3 \cdot i_3 \cdot 10^{-8} \text{ mkg.}$$

Setzt man in erster Annäherung die mechanische Reibung der Vibratoranker $= 0$ — eine Vernachlässigung, welche infolge der Verwendung von Kugellagern als zulässig erscheint, aber auch die Vernachlässigung der Bürstenreibung und Luftreibung einschließt — so besteht folgende Gleichung für die drehende bzw. oszillierende Bewegung:

$$m_3 = \Theta \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Theta \cdot \frac{du}{dt}$$

wenn Θ das Trägheitsmoment eines Vibratorankers und u dessen Winkelgeschwindigkeit, d. h. den in der Zeiteinheit zurückgelegten Winkel φ , bedeutet. Zwischen dem Augenblickswert m_3 und dem Maximalwert m_{3max} des Drehmoments besteht die Beziehung:

$$m_3 = m_{3max} \cdot \sin \omega t$$

dabei ist:

$$m_{3max} = \frac{p_3}{2\pi \cdot g} \cdot \frac{s_3 b_3}{a_3} \cdot \mathfrak{P}_3 \cdot i_{3max} \cdot 10^{-8}.$$

Auf Grund dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$u = \int \frac{m_3}{\Theta} dt = -\frac{m_{3\max}}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t.$$

Ist n_3 der Momentanwert der Tourenzahl des Vibratorankers pro Minute, so besteht zwischen u und n_3 die Relation:

$$u = 2\pi \cdot \frac{n_3}{60}$$

und:

$$\frac{n_3}{60} = -\frac{1}{2\pi} \frac{m_{3\max}}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t.$$

Die durch die oszillierende Bewegung des Vibratorankers in diesem induzierte Spannung e_{d3} berechnet sich wie die in dem Anker einer Gleichstrommaschine induzierte EMK zu:

$$e_{d3} = \mathfrak{B}_3 p_3 \cdot \frac{s_3 b_3}{a_3} \cdot \frac{n_3}{60} \cdot 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Führt man die oben angegebenen Werte für $\frac{n_3}{60}$ und $m_{3\max}$ ein und setzt $\omega = 2\pi \cdot \nu_1$, so ist:

$$e_{d3} = -\mathfrak{B}_3^2 p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi^3 \cdot g \cdot \Theta} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot i_{3\max} \cdot 10^{-16} \cdot \cos \omega t.$$

Die Gleichung sagt aus, daß die e_{d3} gegenüber i_3 um $\frac{\pi}{2}$ zeitlich in der Phase verschoben ist, und zwar ergibt eine kurze Überlegung, daß die e_{d3} dem Strome i_3 um $\frac{\pi}{2}$ voreilt.

Geht man zu den Effektivwerten E_{d3} und I_3 über und kennzeichnet die Verteilung der Spannung \dot{E}_{d3} gegenüber dem Strome I_3 durch Hinzufügen des Faktors $-j = -\sqrt{-1}$, so ist:

$$\dot{E}_{d3} = -j \cdot \dot{I}_3 \cdot \mathfrak{B}_3^2 p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi^3 \cdot g \cdot \Theta} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16} \text{ Volt}$$

oder:

$$\dot{E}_{d3} = -j c_3 \dot{I}_3$$

dabei ist:

$$c_3 = \mathfrak{B}_3^2 \cdot p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi^3 \cdot g \cdot \Theta} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16}.$$

Führt man an Stelle des Trägheitsmoments Θ das Schwungmoment GD^2 ($m^2 kg$) ein, so ergibt sich für die Konstante:

$$c_3 = \mathfrak{B}_3^2 \cdot p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 GD^2} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16}.$$

Bisher haben wir mit der Größe $\omega = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi \nu_1$, also mit der Periodenzahl ν_1 , gerechnet; da aber die Periodenzahl des Rotorstromes $\nu_1 - \nu_2$ ist, so ist die tatsächlich induzierte Spannung nicht E_{d3} , sondern — wenn mit $\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = s$ die Schlüpfung bezeichnet wird —

$$\frac{1}{s} \cdot \dot{E}_{d3} = -j \cdot \frac{c_3}{s} \cdot \dot{I}_3 \text{ Volt.}$$

Außer dieser EMK der Drehung treten noch weitere EMKe auf.

2. Die EMK der Selbstinduktion E_{33} des Vibratorankers.

Ist \mathfrak{H}_x die Feldstärke im Luftraum an der Stelle x und ν_1 die Periodenzahl des zugeführten Wechselstromes, so ist die von der Kraftröhre

$$d\mathfrak{B}_x = L_3 \cdot dx \cdot \mathfrak{H}_x$$

induzierte EMK dE_{33} :

$$dE_{33} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \nu_1 \cdot d\mathfrak{B}_x \cdot w_x \cdot 2p_3 \cdot 10^{-8} \text{ Volt}$$

wenn w_x die mit der Krafttröhre $d\mathfrak{B}_x$ verketteten Windungen bezeichnet. Ist δ_3'' der reduzierte einseitige Luftraum des Vibrators in cm, so besteht zwischen der Feldstärke \mathfrak{H}_x und der Amperewindungszahl $I_3 \cdot w_x$ die Beziehung:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{I}{2\delta_3''} \cdot \frac{4\pi}{10} \cdot \sqrt{2} \cdot I_3 \cdot w_x$$

Für eine Gleichstromwicklung des Ankers gilt, wenn AS_3 die Ampereleiterzahl pro cm Ankerumfang ist:

$$I_3 \cdot w_x = AS_3 \cdot 2x = \frac{J_3}{2a_3} \cdot \frac{s_3 b_3}{2R_3 \pi} 2x$$

und bei Einführung des Wertes: $w_3 = \frac{s_3 b_3}{8a_3 p_3}$

$$I_3 \cdot w_x = I_3 \cdot w_3 \cdot \frac{4p_3 x}{R_3 \cdot \pi}$$

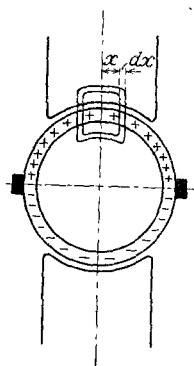


Bild 3.

Setzt man die Werte für $d\mathfrak{B}_x$, \mathfrak{H}_x und $I_3 w_x$ in die Gleichung für dE_{33} ein und bezeichnet man mit $tp_3 = \frac{R_3 \pi}{p_3}$ die Polteilung,

mit α_3 den Polbedeckungsfaktor des Vibrators, so ergibt sich:

$$E_{33} = \frac{128\pi^2}{10} \cdot \frac{I}{tp_3^2} \cdot p_3 \cdot \nu_1 \cdot \frac{L_3}{\delta_3''} \cdot I_3 \cdot w_3^2 \cdot 10^{-8} \int_0^{\frac{\alpha_3 tp_3}{2}} x^2 dx$$

und:

$$E_{33} = \frac{16\pi^3}{10} \cdot \frac{R_3 L_3}{\delta_3''} \cdot \nu_1 \cdot w_3^2 \cdot I_3 \cdot \frac{\alpha_3^3}{3} \cdot 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Führt man ein:

$$k_{33} = \frac{16\pi^3}{10} \cdot \frac{R_3 L_3}{\delta_3''} \cdot \nu_1 \cdot w_3^2 \cdot \frac{\alpha_3^3}{3} \cdot 10^{-8}$$

und schreibt die Gleichung für E_{33} als Vektorgleichung, so ist:

$$\dot{E}_{33} = j \cdot k_{33} \cdot \dot{I}_3 \text{ Volt.}$$

Hier bedeutet das Hinzufügen des Faktors $+j = \sqrt{-1}$ entsprechend der früheren Festsetzung eine Nacheilung des Spannung \dot{E}_{33} gegenüber dem Strom \dot{I}_3 um $\frac{\pi}{2}$.

3. Spannungsabfall durch den Ohmschen Widerstand und durch das Streufeld.

Infolge des Ohmschen Widerstandes des Vibratorankers und infolge des Streufeldes treten Spannungsabfälle ein, zu deren Kompensation folgende EMKe erforderlich sind:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{r3} &= -\dot{I}_3 r_3 \text{ Volt} \\ \dot{E}_{\sigma 3} &= jk_{\sigma 3} \cdot \dot{I}_3 \text{ „} \end{aligned}$$

dabei bedeutet r_3 den Ohmschen Widerstand des Vibratorankers [einschließlich Bürstenübergangswiderstand]; $k_{\sigma 3} = \sigma_3 \cdot k_{33}$ bezeichnet die Streureaktanz des Vibratorankers, der Streukoeffizient σ_3 kann annähernd durch die Beziehung bestimmt werden:

$$\sigma_3 = 2 \cdot \frac{\delta_3''}{R_3} \cdot p_3.$$

Dem Vibrator wird nun aber ein Strom zugeführt, welcher die Periodenzahl $\nu_1 - \nu_2$ hat; daher sind die EMKe, welche den Faktor ν_1 enthalten, noch mit $s = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}$ zu multiplizieren um die wirklich induzierten Spannungswerte zu erhalten, also:

$$\begin{aligned} s \cdot \dot{E}_{g3} &= j \cdot s \cdot k_{g3} \cdot \dot{I}_3 & \text{Volt} \\ s \cdot \dot{E}_{\sigma 3} &= j \cdot s \cdot k_{\sigma 3} \cdot \dot{I}_3 & ,, . \end{aligned}$$

II. Das Vektordiagramm des Drehstrommotors mit Phasenkompensator.

Um das Problem nicht zu weitläufig zu gestalten, seien nachstehende Annahmen getroffen: Der Eisenwiderstand wird als unabhängig von den auftretenden Induktionen, also als konstant betrachtet, die Eisenverluste werden vernachlässigt, das erzeugte Feld ist daher in Phase mit dem Magnetisierungsstrom. Es bezeichne nun beim Drehstrommotor ¹⁾:

- I_m den Effektivwert des Magnetisierungsstromes einer Phase in Amp.,
- I_1, I_2 den Effektivwert des Stromes einer Phase der primären bzw. sekundären Wicklung in Amp.,
- w_1, w_2 die effektiven Windungszahlen für einen Pol und Phase der primären bzw. sekundären Wicklung,
- k_{11} die Reaktanz einer Phase der primären Wicklung bei ν_1 Perioden,
- k_{12} die Wechselreaktanz zwischen der primären und sekundären Wicklung bei ν_1 Perioden,
- k_{22} die Reaktanz einer Phase der sekundären Wicklung bei ν_1 Perioden,
- $k_{\sigma 1} = \sigma_1 \cdot k_{11}$ die Streureaktanz einer Phase der primären Wicklung bei ν_1 Perioden,
- $k_{\sigma 2} = \sigma_2 \cdot k_{22}$ die Streureaktanz einer Phase der sekundären Wicklung bei ν_1 Perioden,
- σ_1, σ_2 die Streukoeffizienten der primären bzw. der sekundären Wicklung,
- r_1, r_2 die Ohmschen Widerstände pro Phase der primären bzw. der sekundären Wicklung,
- U_1, U_2 den Effektivwert der primären bzw. sekundären Phasenspannung in Volt,
- E_{g1}, E_{g2} den Effektivwert der EMK in einer Phase, welche vom gemeinsamen Feld in der primären bzw. sekundären Wicklung induziert wird, in Volt,
- $E_{\sigma 1}, E_{\sigma 2}$ und E_{r1}, E_{r2} die EMKe, welche zur Kompensation der Spannungsabfälle infolge des Streufeldes und des Ohmschen Widerstandes der primären bzw. sekundären Wicklung erforderlich sind, in Volt.

Für den Drehstrommotor gelten folgende Gleichungen:

$$\dot{I}_m \cdot w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2 \quad (\text{I})$$

$$\dot{U}_1 + \dot{E}_{g1} + \dot{E}_{\sigma 1} + \dot{E}_{r1} = 0, \quad (\text{II})$$

$$\dot{U}_2 = s \cdot \dot{E}_{g2} + s \cdot \dot{E}_{\sigma 2} + \dot{E}_{r2} \quad (\text{III})$$

Auf Grund der Beziehungen:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{g1} &= j k_{11} \cdot \dot{I}_m & \dot{E}_{g2} &= j k_{12} \cdot \dot{I}_m \\ \dot{E}_{\sigma 1} &= j \cdot k_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 & \dot{E}_{\sigma 2} &= j \cdot k_{\sigma 2} \cdot \dot{I}_2 \\ \dot{E}_{r1} &= -r_1 \dot{I}_1 & \dot{E}_{r2} &= -r_2 \cdot \dot{I}_2 \end{aligned}$$

ergeben sich durch Einführung der entsprechenden Ströme:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + j k_{11} \cdot \dot{I}_m + j k_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 - r_1 \dot{I}_1 &= 0; \\ \dot{U}_2 &= j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_m + j \cdot s \cdot k_{\sigma 2} \cdot \dot{I}_2 - r_2 \dot{I}_2. \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. Starkstromtechnik Abschnitt VII/E.

Dem Vibrator wird die Klemmenspannung \dot{U}_3 zugeführt, welche den im Vibratoranker auftretenden EMKen das Gleichgewicht hält; damit ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$\dot{U}_3 + \frac{I}{s} \cdot \dot{E}_{d3} + s \cdot \dot{E}_{33} + s \cdot \dot{E}_{\sigma 3} + \dot{E}_{r3} = 0.$$

Faßt man die beiden EMKe $s \cdot \dot{E}_{33}$ und $s \cdot \dot{E}_{\sigma 3}$ zusammen zu:

$$s(\dot{E}_{33} + \dot{E}_{\sigma 3}) = s \cdot \dot{E}_3$$

oder

$$s \cdot \dot{E}_3 = j \cdot s \cdot \dot{I}_3 (k_{33} + k_{\sigma 3}) = j s \cdot k_3 \cdot \dot{I}_3$$

so ist

$$\dot{U}_3 + \frac{I}{s} \cdot \dot{E}_{d3} + s \cdot \dot{E}_3 + \dot{E}_{r3} = 0; \quad (IV)$$

und nach Einführung des Stromes \dot{J}_3 :

$$\dot{U}_3 - j \cdot \frac{I}{s} \cdot c_3 \dot{I}_3 + j \cdot s \cdot k_3 \dot{I}_3 - r_3 \dot{I}_3 = 0.$$

Um eine Beziehung zwischen \dot{U}_3 und \dot{U}_2 bzw. \dot{I}_3 und \dot{I}_2 herstellen zu können, müssen wir eine Annahme über die Schaltung der Rotorwicklung und der Vibratoranker treffen; es seien die Rotorwicklung und die drei Vibratoranker in Dreieck geschaltet, ein Fall, der häufig vorkommt; es ist dann

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_2 \quad \text{und} \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_2.$$

Aus Gleichung (III) und (IV) ergibt sich damit:

$$j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{1m} + j \cdot s \cdot k_{\sigma 2} \cdot \dot{I}_2 - r_2 \dot{I}_2 - j \cdot \frac{I}{s} \cdot c_3 \cdot \dot{I}_2 + j \cdot s \cdot k_3 \cdot \dot{I}_2 - r_3 \dot{I}_2 = 0.$$

oder:

$$j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{1m} - j \dot{I}_2 \left\{ \frac{c_3}{s} - s(k_3 + k_{\sigma 2}) \right\} - (r_2 + r_3) \cdot \dot{I}_2 = 0. \quad (V)$$

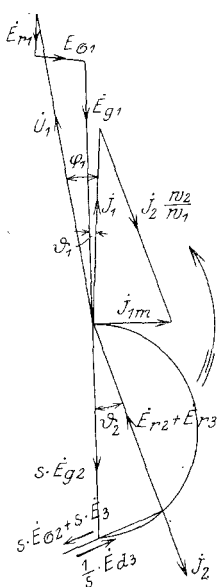


Bild 4.

Aus Gleichung (I), (II), (V) ergibt sich nunmehr das Vektordiagramm für den Drehstrommotor mit Vibrator. Bei der Konstruktion des Diagrammes für einen bestimmten Wert der Schlüpfung s geht man zweckmäßig von einem beliebig angenommenen Wert \dot{I}_2 aus und zeichnet das sekundäre Spannungsdiagramm; damit ist die Richtung von \dot{I}_2 festgelegt und nunmehr kann das Stromdiagramm und dann das primäre Spannungsdiagramm dargestellt werden. Als Schlußlinie zu \dot{E}_{g1} , $\dot{E}_{\sigma 1}$ und \dot{E}_{r1} wird der Vektor \dot{U}_1 der zugeführten Klemmenspannung gefunden; diese so gefundene Klemmenspannung \dot{U}_1 wird aber im allgemeinen nicht mit der gegebenen Netzspannung U_n übereinstimmen, da \dot{I}_2 ja willkürlich gewählt wurde. Es sind nun alle im Diagramm vorkommenden Größen der Netzspannung proportional; daher erübrigt es sich das Diagramm noch einmal zu zeichnen, man erhält ohne weiteres das wirkliche Vektordiagramm, wenn alle Werte mit $\frac{U_n}{U_1}$ multipliziert werden.

Liegt eine andere Schaltung des Rotors und des Vibrators vor als die oben angenommene, so läßt sich in entsprechender Weise auf Grund der Schaltung die Beziehung zwischen \dot{U}_3 und \dot{U}_2 bzw. \dot{I}_3 und \dot{I}_2 bestimmen, die Gleichung (V) aufstellen und das Diagramm entwerfen.

III. Analytisch-graphische Behandlung des Problems.

Dieser Abschnitt ist naturgemäß der wichtigste und verfolgt als Ziel die Aufstellung einer Gleichung, aus welcher auf Grund einer bestimmten primären Spannung \dot{U}_1 und der Konstanten des Motors und des Vibrators das Verhalten der Maschine bei verschiedenen Betriebszuständen entnommen werden kann; wir gehen von den drei Grundgleichungen aus:

$$\dot{I}_{1m} \cdot w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2; \quad (I)$$

$$\dot{U}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_{1m} + jk_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 - r_1 \dot{I}_1 = 0. \quad (II)$$

$$j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{1m} - j \left\{ \frac{c_3}{s} - s(k_3 + k_{\sigma 2}) \right\} \cdot \dot{I}_2 - (r_2 + r_3) \dot{I}_2 = 0. \quad (V)$$

Entfernt man aus Gleichung (I) und (V) \dot{I}_{1m} , so erhält man nach einigen Umformungen die Beziehung zwischen \dot{I}_1 und \dot{I}_2 :

$$\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{c_3}{s^2 k_{22}} + \frac{k_3 + k_{\sigma 2}}{k_{22}} + j \frac{r_2 + r_3}{s \cdot k_{22}} \right\}. \quad (VI)$$

Aus Gleichung (I) und (II) ergibt sich:

$$\dot{U}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_1 + jk_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} - r_1 \dot{I}_1 = 0.$$

und, wenn $k_{11} + k_{\sigma 1} = k_1$ gesetzt wird:

$$\dot{U}_1 + jk_1 \cdot \dot{I}_1 + jk_{11} \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} - r_1 \dot{I}_1 = 0.$$

Vereinigt man diese Gleichung mit Gleichung (VI), so folgt nach einigen Umformungen:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j(r_2 + r_3)s + (k_2 + k_3)s^2}{-r_1 c_3 + jk_1 c_3 + (r_2 + r_3)k_1 s + j(r_2 + r_3)r_1 s + r_1(k_2 + k_3)s^2 - jk_{11}(k_2 + k_3)s^2 + jk_{11}k_{22}s^2}$$

Setzt man durch Einführung der Beziehung $\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}$:

$$-jk_1 k_2 s^2 + jk_{11} k_{22} s^2 = -jk_1 k_2 \cdot \sigma s^2$$

so folgt:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j(r_2 + r_3)s + (k_2 + k_3)s^2}{-r_1 c_3 + jk_1 c_3 + (r_2 + r_3)k_1 s + j(r_2 + r_3)r_1 s + r_1(k_2 + k_3)s^2 - jk_{11}(k_2 \sigma + k_3)s^2} \quad (VII)$$

Damit ist die gesuchte Abhängigkeit zwischen den primären Größen \dot{U}_1 und \dot{I}_1 gefunden und die Ortskurve aufgestellt für die Kaskade zwischen Induktionsmotor und Kompensator, für den Spezialfall der allgemeinen Kaskadenschaltung von Induktions- und Kommutatormotor.

Die durch Gleichung (VII) dargestellte Beziehung ist von der Form:

$$\dot{I} = \dot{U}_1 \cdot \frac{A_1 + jB_2 \lambda + C_1 \lambda^2}{D_1 + jD_2 + E_1 \lambda + jE_2 \lambda + F_1 \lambda^2 + jF_2 \lambda^2}$$

wobei $\lambda \equiv s$ einen variablen Parameter bedeutet. Eine Gleichung dieser Form ist eine Kurve 4. Ordnung bzw. eine sog. bizirkulare Quartik¹⁾; eine unmittelbare geometrische Konstruktion solcher Kurven ist im allgemeinen nicht möglich, dagegen läßt sich durch Zerlegung der Kurve eine ziemlich einfache graphische Darstellung geben. Die allgemeine Form einer bizirkularen Quartik ist gegeben durch:

$$\dot{I} = \dot{U} \cdot \frac{A + B\lambda + C\lambda^2}{D + E\lambda + F\lambda^2},$$

wenn λ ein variables Parameter von $+\infty$ bis $-\infty$ und A, B, C, D, E, F komplexe Zahlen von der Form $A = A_1 + jA_2$, $B = B_1 + jB_2$ usw. sind. Wir zerlegen nun diese Kurve 4. Ordnung in zwei Kreise K_1 und K_2 , und zwar so, daß durch geo-

¹⁾ Vgl. Bloch: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Zürich 1917, S. 73 ff.

metrische Addition entsprechender Vektoren dieser Kreise die Kurve 4. Ordnung entsteht.

Zum Zweck einer klaren Darstellung sei folgendes erwähnt: Multipliziert man einen Zeitvektor \dot{U} mit $a + b\lambda$, wobei a und b komplexe Zahlen von der Form:

$$a = a_1 + j a_2 \text{ und } b = b_1 + j b_2$$

und λ ein veränderlicher Parameter ist, so erhält man bei Abbildung dieser komplexen Größen auf der Gaußschen Zahlenebene für jeden Wert von λ einen neuen Zeitvektor \dot{I} , welcher gegenüber \dot{U} gedreht und verlängert bzw. verkürzt ist; der geometrische Ort der Endpunkte aller Vektoren bildet die sog. Ortskurve; in diesem Fall ist die Ortskurve eine Gerade¹⁾, es ist also $\dot{I} = \dot{U}(a + b\lambda)$ die Gleichung einer Geraden in der Gaußschen Zahlenebene. In gleicher Weise ist der geometrische Ort für die Endpunkte aller Vektoren \dot{I} von der Gleichung:

$$\dot{I} = \dot{U} \cdot \frac{a + b\lambda}{c + d\lambda}$$

ein Kreis von allgemeiner Lage²⁾; c und d sind dabei komplexe Zahlen von der Form $c = c_1 + j c_2$ und $d = d_1 + j d_2$. Die rechtwinkligen Koordinaten für den Mittelpunkt dieses Kreises und für die Punkte: $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ und $\lambda = 1$ lassen sich ableiten zu:

$$x_m = \frac{U}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} -a_1 a_2 \\ -d_2 d_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ -c_2 c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ d_1 d_2 \end{vmatrix}} \text{ und } y_m = \frac{U}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ d_1 d_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ d_1 d_2 \end{vmatrix}},$$

für $\lambda = 0$:

$$x_{\lambda 0} = U \cdot \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } y_{\lambda 0} = U \cdot \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{c_1^2 + c_2^2},$$

für $\lambda = \infty$:

$$x_{\lambda \infty} = U \cdot \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{d_1^2 + d_2^2} \text{ und } y_{\lambda \infty} = U \cdot \frac{b_1 d_1 + b_2 d_2}{d_1^2 + d_2^2},$$

für $\lambda = 1$:

$$x_{\lambda 1} = U \cdot \frac{(a_2 + b_2)(c_1 + d_1) - (a_1 + b_1)(c_2 + d_2)}{(c_1 + d_1)^2 + (c_2 + d_2)^2},$$

$$y_{\lambda 1} = U \cdot \frac{(a_1 + b_1)(c_1 + d_1) + (a_2 + b_2)(c_2 + d_2)}{(c_1 + d_1)^2 + (c_2 + d_2)^2},$$

Für die Zerlegung der bizirkularen Quartik in zwei Kreise setzen wir:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{A + B\lambda + C\lambda^2}{D + E\lambda + F\lambda^2} = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12}$$

$$\dot{I}_{11} = \dot{U}_1 \cdot \frac{a + b\lambda}{c + d\lambda} \text{ (Kreisgleichung } K_1)$$

und
$$\dot{I}_{12} = \dot{U}_1 \cdot \frac{f\lambda}{g + h\lambda} \text{ (Kreisgleichung } K_2)$$

a, b, c, d, f, g, h sind dabei komplexe Zahlen von der oben angegebenen Form; um einfache Beziehungen zu erhalten, formen wir die Gleichungen um und schreiben:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{A}{F} + \frac{B}{F}\lambda + \frac{C}{F}\lambda^2}{\frac{D}{F} + \frac{E}{F}\lambda + \lambda^2}$$

¹⁾ Vergl. Bloch a. a. O. Seite 41 ff.

²⁾ Vergl. Bloch a. a. O. Seite 45.

$$\dot{I}_{11} = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} \lambda}{\frac{c}{d} + \lambda} \quad \text{und} \quad \dot{I}_{12} = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{f}{h} \lambda}{\frac{g}{h} + \lambda}.$$

Bildet man die Summe $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12}$, so ist:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12} = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{a}{d} \cdot \frac{g}{h} + \lambda \left[\frac{a}{d} + \frac{b}{d} \cdot \frac{g}{h} + \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{h} \right] + \lambda^2 \left[\frac{b}{d} + \frac{f}{h} \right]}{\frac{c}{d} \cdot \frac{g}{h} + \lambda \left[\frac{c}{d} + \frac{g}{h} \right] + \lambda^2}.$$

Daraus resultieren 5 Bedingungsgleichungen, deren Lösung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} &= \frac{A(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF})}{2DF} \\ \frac{b}{d} &= \frac{(AF + CD)(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}) - 2BDF}{\pm 2DF \sqrt{E^2 - 4DF}} \\ \frac{c}{d} &= \frac{I}{2F} \cdot (E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}) \\ \frac{f}{h} &= \frac{-AF(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}) - C \dot{D}(E \mp \sqrt{E^2 - 4DF}) + 2BDF}{\pm 2DF \sqrt{E^2 - 4DF}} \\ \frac{g}{h} &= \frac{I}{2F} (E \mp \sqrt{E^2 - 4DF}). \end{aligned}$$

Setzt man:

$$r_2 + r_3 = r_{II}, \quad k_2 + k_3 = k_{II}, \quad k_2 \cdot \sigma + k_3 = k_{\sigma II} \quad \text{und} \quad \frac{k_{II\sigma}}{k_{II}} = \sigma_{II},$$

so erhält Gleichung (VII) mit dieser vereinfachten Bezeichnungsweise die Form:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j r_{II} s + k_{II} s^2}{-r_1 c_3 + j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s + j r_1 r_{II} s + r_1 k_{II} s^2 - j k_1 k_{\sigma II} s^2}$$

und es ergeben sich nachstehende Werte für die Konstanten A, B, C, D, E, F:

$$\begin{aligned} A &= -c_3; & B &= j r_{II}; & C &= k_{II}; \\ D &= -r_1 c_3 + j k_1 c_3; & E &= r_{II} k_1 + j r_1 r_{II}; & F &= r_1 k_{II} - j k_1 k_{\sigma II}. \end{aligned}$$

Das vorliegende Problem soll nun vorläufig unter der Voraussetzung, daß der Widerstand der Statorwicklung zu vernachlässigen sei, d. h. daß $r_1 = 0$ sei, gelöst werden; damit geht Gleichung (VII) über in:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j r_{II} s + k_{II} s^2}{j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s - j k_1 k_{\sigma II} \cdot s^2}$$

und die Konstanten werden:

$$\begin{aligned} A &= -c_3; & B &= j \cdot r_{II}; & C &= k_{II}; \\ D &= j k_1 c_3; & E &= r_{II} k_1; & F &= -j k_1 k_{\sigma II}. \end{aligned}$$

Führen wir noch ein:

$$\sqrt{E^2 - 4DF} = k_1 k_{II} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II}} = k_1 k_{II} \cdot w \quad \text{also:} \quad w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II}},$$

so lassen sich nach Einsetzen der Werte von $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{f}{h}$, $\frac{g}{h}$ in die Kreisgleichungen K_1 und K_2 die Konstanten a, b, c, d, f, g, h bestimmen; für diese Größen ergeben sich je zwei Werte, infolgedessen erhält man zwei Kreise K_1 und zwei Kreise K_2 ; es müssen nun diese Konstanten für $c_3 = 0$, $k_3 = 0$, $r_3 = 0$ in die des

Heylanddiagrammes für den normalen Drehstrommotor übergehen; dieses Diagramm ist bekanntlich die graphische Darstellung des analytischen Ausdrucks:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{j \cdot \frac{r_2}{k_2} + s}{k_1 \left(\frac{r_2}{k_2} - j \cdot \sigma \cdot s \right)},$$

wenn die Schlüpfung s als variabler Parameter betrachtet wird. Die Auswertung dieser Bedingung zeigt, daß nur je ein Kreis diesen Bedingungen entspricht, und liefert folgende Werte für die Kreiskonstanten:

$$\begin{aligned} a &\equiv a_1 = - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w + w^2 \right); \\ b &\equiv j b_2 = j \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} (1 - \sigma_{II}) + w (1 + \sigma_{II}) \right); \\ c &\equiv j c_2 = j \cdot k_1 \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w + w^2 \right); \\ d &\equiv h \equiv d_1 \equiv h_1 = 2 k_1 \sigma_{II} \cdot w; \\ f &\equiv j f_2 = -j (1 - \sigma_{II}) \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} - w \right); \\ g &\equiv j g_2 = j k_1 \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} w - w^2 \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Seite 8 angegebenen Gleichungen lassen sich die für die beiden Kreise erforderlichen Punkte in rechtwinkligen Koordinaten bestimmen; es ergeben sich als:

1. Mittelpunktskoordinaten der beiden Kreise:

$$x_{m1} = \frac{U_1}{2 k_1} \cdot \left(\frac{1 + 3 \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} + \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} \right); \quad y_{m1} = 0,$$

für den Kreis K_1 und entsprechend für den Kreis K_2 :

$$x_{m2} = - \frac{U_1}{2 k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} \left(\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} - 1 \right); \quad y_{m2} = 0.$$

Die Mittelpunkte der beiden Kreise liegen auf der x-Achse, und zwar liegt der Mittelpunkt von K_1 auf der positiven x-Achse, der Mittelpunkt von K_2 auf der negativen x-Achse.

2. Koordinaten der beiden Punkte P_{1u} und P_{2u} für unendliche Schlüpfung ($s = \infty$):

$$x_{1u} = \frac{U_1}{2 k_1} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_{II}}{\sigma_{II}} + \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} \right); \quad y_{1u} = 0.$$

$$x_{2u} = - \frac{U_1}{2 k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \left(\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} - 1 \right); \quad y_{2u} = 0.$$

3. Koordinaten der beiden synchronen Punkte P_{1s} und P_{2s} ($s = 0$):

$$x_{1s} = \frac{U_1}{k_1}; \quad y_{1s} = 0; \quad x_{2s} = 0; \quad y_{2s} = 0,$$

d. h. P_{1s} liegt auf der positiven x-Achse, P_{2s} fällt mit dem Ursprung zusammen.

4. Koordinaten der beiden Kurzschlußpunkte P_{1k} und P_{2k} ($s = 1$):

$$x_{1k} = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2 \frac{r_{II}}{k_{II}} \sigma_{II} (1 - \sigma_{II}) + 2 w \sigma_{II} (1 + \sigma_{II}) + w \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} + w \right)^2}{w \left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} + w \right)^2 + 4 \sigma_{II}^2 \right]},$$

$$y_{1k} = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{(1 - \sigma_{II}) \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} + w \right)^2}{w \left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} + w \right)^2 + 4 \sigma_{II}^2 \right]},$$

und

$$x_{2k} = - \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2 \sigma_{II} (1 - \sigma_{II}) \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} - w \right)}{w \left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} - w \right)^2 + 4 \sigma_{II}^2 \right]},$$

$$y_{2k} = - \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{(1 - \sigma_{II}) \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} - w \right)^2}{w \left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} - w \right)^2 + 4 \sigma_{II}^2 \right]}.$$

5. Radien R_1 und R_2 der beiden Kreise:

$$R_1 = \frac{U_1}{2 k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} \left[\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} + 1 \right] \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{U_1}{2 k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} \left[\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} - 1 \right].$$

Bei den bisher abgeleiteten Beziehungen war vorausgesetzt, daß

$$w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 - 4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II}}$$

reell ist; nun kann aber c_3 durch Änderung des Erregerstromes des Vibrators variiert werden; es ist daher möglich, daß für größere Werte von c_3 der obige Ausdruck für w imaginär wird; in diesem Falle setzen wir:

$$w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 - 4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II}} = j \cdot \sqrt{4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2} = j \cdot w_i;$$

also

$$w_i = \sqrt{4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2}.$$

Die Kreiskonstanten a, b, c, d, f, g, h nehmen damit unter Anwendung des gleichen Kriteriums wie oben (die Konstanten gehen für $c_3 = 0, k_3 = 0, r_3 = 0$ in die des Heylanddiagrammes für den normalen Drehstrommotor über) folgende Form an:

$$a' = - \left(w_i^2 + j \cdot \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i \right); \quad a_1' = - w_i^2; \quad a_2' = - \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i;$$

$$b' = - (1 + \sigma_{II}) \cdot w_i - j \frac{r_{II}}{k_{II}} (1 - \sigma_{II}); \quad b_1' = - (1 + \sigma_{II}) w_i; \quad b_2' = - \frac{r_{II}}{k_{II}} (1 - \sigma_{II});$$

$$c' = k_1 \left(- \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i + j \cdot w_i^2 \right); \quad c_1' = - \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot k_1 \cdot w_i; \quad c_2' = k_1 \cdot w_i^2;$$

$$d' = h' = j \cdot 2 k_1 \cdot \sigma_{II} \cdot w_i; \quad d_1' = h_1' = 0; \quad d_2' = h_2' = 2 k_1 \cdot \sigma_{II} w_i;$$

$$f' = - (1 - \sigma_{II}) \left(w_i - j \cdot \frac{r_{II}}{k_{II}} \right); \quad f_1' = - (1 - \sigma_{II}) \cdot w_i; \quad f_2' = (1 - \sigma_{II}) \frac{r_{II}}{k_{II}};$$

$$g' = k_1 \left(- \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i - j \cdot w_i^2 \right); \quad g_1' = - k_1 \cdot \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i; \quad g_2' = - k_1 \cdot w_i^2.$$

Damit ergeben sich in gleicher Weise wie früher mittels der Seite 8 gegebenen Beziehungen die Koordinaten der Kreismittelpunkte, der synchronen Punkte, der Punkte für Kurzschluß und für unendliche Schlüpfung; es sind:

1. Die beiden Kreismittelpunkte für die Kreise K_1' und K_2' :

$$\begin{aligned} x_{m1}' &= \frac{U_1}{k_1}; & y_{m1}' &= -\frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{c_3}{k_{II}} \cdot \sigma_{II}}{\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i}; \\ x_{m2}' &= 0; & y_{m2}' &= \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{c_3}{k_{II}} \cdot \sigma_{II}}{\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i}. \end{aligned}$$

2. Die beiden Punkte P_{1u}' und P_{2u}' für unendliche Schlüpfung ($s = \infty$):

$$\begin{aligned} x_{1u}' &= \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 + \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}}; & y_{1u}' &= -\frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w_i}; \\ x_{2u}' &= \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}}; & y_{2u}' &= \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2 \sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w_i}. \end{aligned}$$

3. Die beiden synchronen Punkte P_{1s}' und P_{2s}' ($s = 0$):

$$x_{1s}' = \frac{U_1}{k_1}; \quad y_{1s}' = 0; \quad x_{2s}' = 0; \quad y_{2s}' = 0.$$

4. Die beiden Kurzschlußpunkte P_{1k}' und P_{2k}' ($s = 1$):

$$x_{1k}' = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II} \cdot w_i + (1 + 3 \sigma_{II}) \cdot w_i^2 + 2 \sigma_{II} (1 + \sigma_{II}) \cdot w_i + (1 - \sigma_{II}) \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2}{w_i \left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 + (w_i + 2 \sigma_{II})^2 \right]};$$

$$y_{1k}' = -\frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2 \frac{r_{II}}{k_{II}} \sigma_{II} (1 - \sigma_{II})}{w_i \left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 + (w_i + 2 \sigma_{II})^2 \right]}$$

und

$$x_{2k}' = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2 \sigma_{II} (1 - \sigma_{II})}{w_i} \cdot \frac{w_i - 2 \frac{c_3}{k_{II}}}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 + (w_i - 2 \sigma_{II})^2};$$

$$y_{2k}' = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2 \sigma_{II} (1 - \sigma_{II})}{w_i} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 + (w_i - 2 \sigma_{II})^2}.$$

5. Die Radien R_1' und R_2' der beiden Kreise: Diese sind gleich groß und gleich der y-Ordinate der Kreismittelpunkt also:

$$R_1' = R_2' = |y_{m1}'| = |y_{m2}'| = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{c_3}{k_{II}} \cdot \sigma_{II}}{\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i}.$$

Die Kreispunkte P_{1k} und P_{2k} bzw. P_{1k}' und P_{2k}' können auch als Schnittpunkte des Kreises mit einer Geraden, welche mit der x-Achse den Winkel $90^\circ - \varphi_k$ einschließt, bestimmt werden; es ist dazu nur das Verhältnis $\operatorname{tg} (90^\circ - \varphi_k) = \frac{y_k}{x_k}$ zu bestimmen, so daß man die einzelnen Ordinatenwerte x_k , y_k nicht auszurechnen braucht.

IV. Konstruktion der Kurve 4. Ordnung.

Auf Grund der abgeleiteten Beziehungen gehen wir zur Konstruktion der Kurve 4. Ordnung über; die allgemeine Lage der beiden Kreise K_1 und K_2 ist in Bild 5 dargestellt; $Q_{1k} Q_{1s}$ ist die Schlüpfungsgerade für den Kreis K_1 , $Q_{2k} Q_{2s}$ ist die Schlüpfungsgerade für den Kreis K_2 . Nun läßt sich zu jedem Punkt P_1 mit der Schlüpfung s_1 des einen Kreises ein Punkt P_2 des anderen Kreises mit der gleichen Schlüpfung $s_2 = s_1$ finden; addiert man die den zusammengehörigen Punkten P_1 und P_2 entsprechenden Stromvektoren \dot{I}_{11} und \dot{I}_{12} geometrisch, so ergibt sich der Vektor \dot{I}_1 , dessen Endpunkt P ein Punkt der Kurve 4. Ordnung ist; in dieser Weise läßt sich durch geometrische Addition der Stromvektoren, welche zu gleichen Schlüpfungen gehören, in einfacher Art die gesuchte Ortskurve konstruieren; die sich ergebende Kurve ist eine Kardioide.

Der über der Abszissenachse gelegene Teil der Kurve gilt für den Motorbetrieb, der unter der x-Achse befindliche Teil für den Generatorbetrieb.

Wie aus den oben abgeleiteten Beziehungen hervorgeht, sind die Mittelpunktskoordinaten der beiden Kreise außer von der zugeführten Spannung U_1 und von den Konstanten der beiden Maschinen auch von der Größe $w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II}}$ abhängig; c_3 ist aber für einen und denselben Vibrator keine absolute Konstante — es ist:

$$c_3 = \mathfrak{B}_3^2 p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3} \right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 G D^2} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16} = \text{Konstante} \times \mathfrak{B}_3^2$$

— sondern hängt sehr stark von der Gleichstromerregung des Vibrators ab. Für $c_3 = 0$ nimmt w einen maximalen Wert $w_{\max} = \frac{r_{II}}{k_{II}}$ an, der Kreis K_2 verschwindet und wir erhalten als Ortskurve einen Kreis, welcher nur wenig von dem normalen Kreisdiagramm (Heylandkreis) des Drehstrommotors abweicht; der Unterschied besteht lediglich darin, daß an Stelle von r_2 und k_2 die Größen r_{II} und k_{II} treten; dieser Grenzfall $c_3 = 0$ ist verwirklicht, wenn der Vibrator zwar eingeschaltet ist, die Anker aber nicht schwingen. Wächst nunmehr c_3 von Null an, schwingen also die Vibratoranker, so wird w kleiner, die Mittelpunktskoordinaten und damit auch die Kreisradien der beiden Kreise K_1 und K_2 nehmen zu bis bei dem Wert: $c_3 = \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \cdot \frac{k_{II}}{4\sigma_{II}}$ der Wert von $w = w_{\min} = 0$ wird und die Radien der beiden Kreise $R_1 = R_2 = \infty$ werden. Die oben angegebene Konstruktion der Ortskurve aus den beiden Kreisen K_1 und K_2 ist natürlich in der Nähe dieses Wertes von c_3 nicht möglich, da der zu wählende Maßstab zu ungünstig würde.

Wird $c_3 > \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \cdot \frac{k_{II}}{4\sigma_{II}}$, so geht w über in w_i ; nunmehr sind die für w_i abge-

leiteten Beziehungen zu verwenden und damit die Konstruktion der Kurve 4. Ordnung durchzuführen. Die allgemeine Lage der Kreise K_1' und K_2' in diesem Falle stellt Bild 6 dar; $Q_{1k}' Q_{1s}'$ ist die Schlüpfungsgerade des Kreises K_1' , $Q_{2k}' Q_{2s}'$ ist die Schlüpfungsgerade des Kreises K_2' ; addiert man geometrisch in gleicher Weise wie oben die zu den entsprechenden Punkten P_1' und P_2' gehörigen Stromvektoren \dot{I}_{11}' und \dot{I}_{12}' , so erhält man den Vektor \dot{I}_1' und damit einen Punkt der gesuchten Ortskurve. Nimmt c_3 noch größere Werte an, so nimmt auch w_i zu, denn

es ist: $w_i = \sqrt{4 \frac{c_3}{k_{II}} \sigma_{II} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2}$, mit zunehmendem w_i werden aber die Mittelpunktskoordinaten und damit die Kreisradien kleiner. Für den Grenzfall $c_3 = \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \frac{k_{II}}{4\sigma_{II}}$ wird auch $w_i = 0$ und die Kreismittelpunkte rücken in unendliche Entfernung.

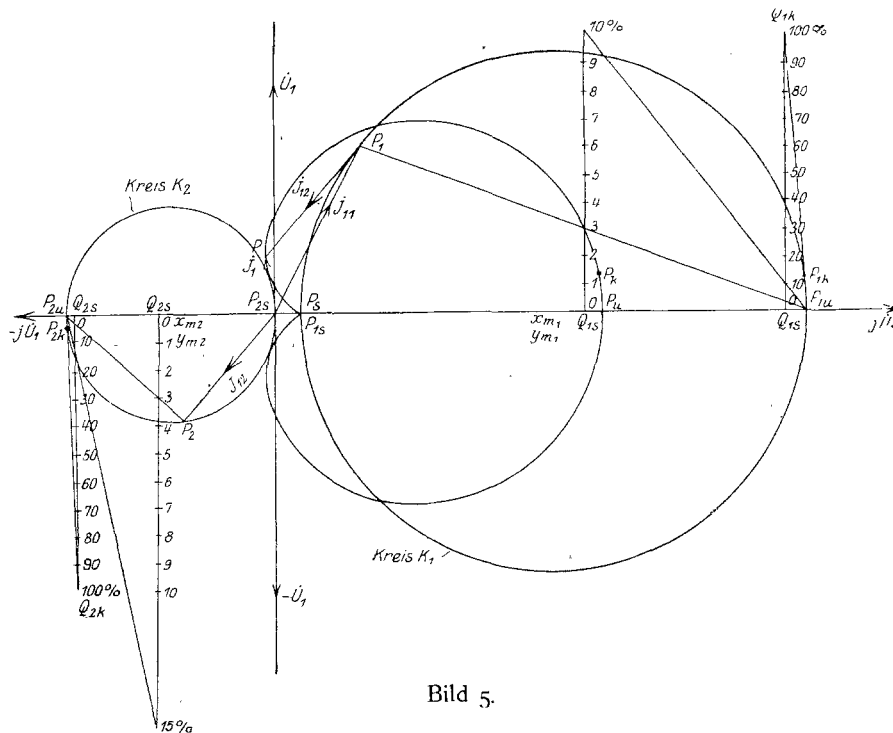


Bild 5.

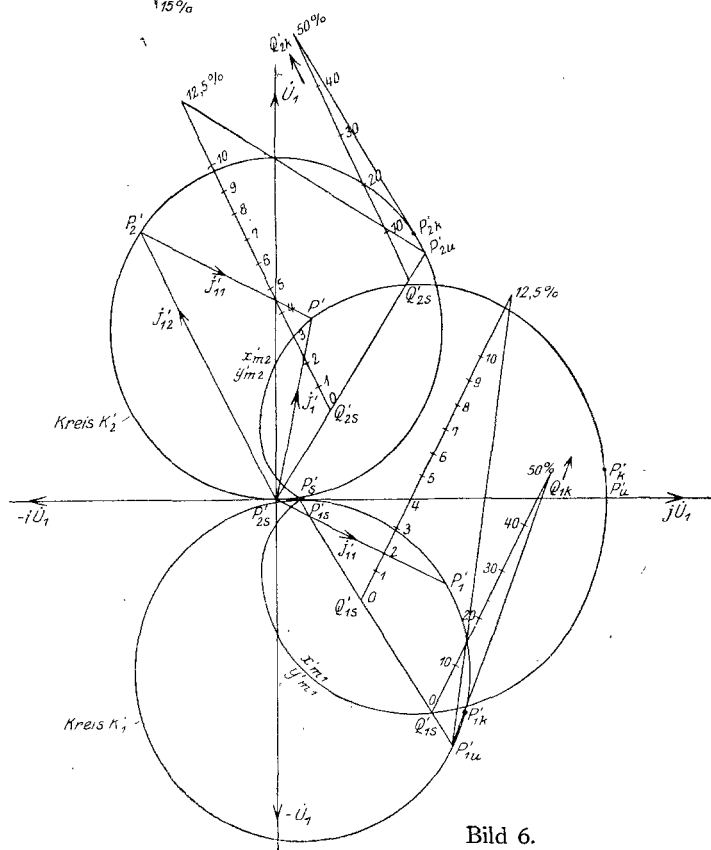


Bild 6.

Die Konstruktion der Kurve 4. Ordnung besteht also in allen Fällen im wesentlichen aus der Zeichnung von zwei Kreisen (ähnlich dem Heylandkreis des Drehstrommotors) mit den dazugehörigen Schlüpfungsgeraden.

V. Phasen-Über- und Unterkompensation.

Formen wir die Gleichung der Ortskurve, von der wir ausgegangen sind:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{c_3 + jr_{II}s + k_{II}s^2}{jk_1 c_3 + r_{II} k_1 s - jk_1 k_{II} s^2}$$

um in die Gleichung:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{k_1} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II})s^3 + j \left[\left(\frac{c_3}{k_{II}} \right)^2 + \left\{ \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 + \frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) \right\} s^2 + \sigma_{II}s^4 \right]}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 s^2 + \left(\frac{c_3}{k_{II}} - \sigma_{II}s^2 \right)^2},$$

so ergeben sich daraus die rechtwinkligen Koordinaten (x, y) eines beliebigen Punktes der Ortskurve:

$$x = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{\left(\frac{c_3}{k_{II}} \right)^2 - \left\{ \frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 \right\} s^2 + \sigma_{II}s^4}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 s^2 + \left(\frac{c_3}{k_{II}} - \sigma_{II}s^2 \right)^2}$$

$$y = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}) \cdot s^3}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 s^2 + \left(\frac{c_3}{k_{II}} - \sigma_{II}s^2 \right)^2}$$

damit läßt sich die Tangente des Phasenverschiebungswinkels φ_1 zwischen \dot{I}_1 und \dot{U}_1 angeben zu:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{c_3}{k_{II}} \right)^2 - \left\{ \frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 \right\} s^2 + \sigma_{II}s^4}{\frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}) \cdot s^3}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha s^4 - \beta s^2 + \gamma}{\delta \cdot s^3}$$

dabei bedeutet:

$$\alpha = \sigma_{II}; \quad \beta = \frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2; \quad \gamma = \left(\frac{c_3}{k_{II}} \right)^2; \quad \delta = \frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}).$$

Setzt man $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0$, also:

$$\alpha s^4 - \beta s^2 + \gamma = 0,$$

so liefert die Auflösung dieser Gleichung die Werte der Schlüpfung s, für welche völlige Phasenkompensation eintritt; es ist:

$$s = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}},$$

es können nun 3 Fälle eintreten:

1) $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ ist reell, also $\beta^2 > 4\alpha\gamma$; wir erhalten zwei Werte für die Schlüpfung s, für welche vollständige Phasenkompensation eintritt; die Ortskurve schneidet die Ordinatenachse in zwei Punkten, in S_1 und S_2 (vgl. Bild 7); in dem Teil der Kurve zwischen S_1 und S_2 tritt Überkompensation ein, d. h. der Strom \dot{I}_1 eilt der Spannung \dot{U}_1 zeitlich vor, der Drehstrommotor belastet in diesem Bereich das Netz kapazitiv.

2. $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = 0$ oder $\beta^2 = 4\alpha\gamma$ und $\beta = 2\sqrt{\alpha\gamma}$ (nur das positive Vorzeichen der Wurzel kommt in Betracht); in diesem Falle erhält man nur einen Wert für die Schlüpfung s (vgl. Bild 8), bei dem die Phasenkompensation erreicht wird; die Ortskurve berührt in dem Punkt S die Ordinatenachse, die Punkte S_1 und S_2 fallen also zusammen.

3. $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ ist imaginär, also $\beta^2 < 4\alpha\gamma$; es gibt keinen Wert der Schlüpfung s (vgl. Bild 9), für welchen völlige Phasenkompensation eintritt; die Ortskurve schneidet oder berührt die Ordinatenachse überhaupt nicht. Der Leistungsfaktor kann in diesem Falle daher nicht auf den Wert 1 gebracht werden, d. h. der Drehstrommotor belastet das Netz stets induktiv.

Es ist daher, um völlige Phasenkompensation zu erreichen, die Bedingung zu erfüllen:

$$\beta^2 \geq 4\alpha\gamma$$

oder, wenn wir die oben eingeführten Werte einsetzen:

$$(1 + \sigma_{II}) \cdot \frac{c_3}{k_{II}} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 \geq 2 \frac{c_3}{k_{II}} \cdot \sqrt{\sigma_{II}}$$

und:

$$c_3 \geq \frac{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \right)^2 \cdot k_{II}}{1 + \sigma_{II} - 2\sqrt{\sigma_{II}}},$$

d. h. der Vibrator ist so zu dimensionieren, daß c_3 diesen Wert durch entsprechende Einstellung der Gleichstromerregung annehmen kann.

Um aus der oben entwickelten Beziehung $\tan \varphi_1 = f(s)$ das Minimum für $\tan \varphi_1$ zu finden, setzt man:

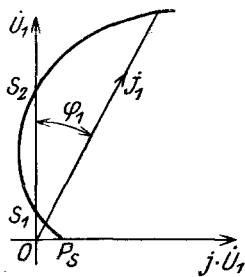


Bild 7.

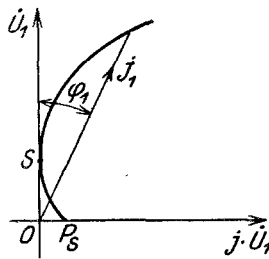


Bild 8.

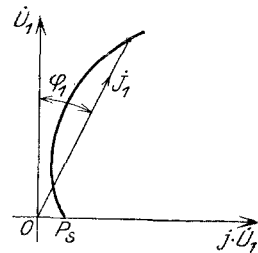


Bild 9.

$$\frac{d \tan \varphi_1}{ds} = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation liefert:

$$\alpha s^4 + \beta s^2 - 3\gamma = 0$$

und daraus:

$$s = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2 + 12\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}};$$

der aus dieser Beziehung gefundene Wert von s gibt an, bei welcher Schlüpfung jeweils die stärkste Phasenkompensation bzw. -überkompensation eintritt.

VI. Berücksichtigung des Statorwiderstandes.

Wir wollen jetzt die bisher gemachte Annahme, daß der Statorwiderstand vernachlässigt werden darf, daß also $r_1 = 0$ ist, fallen lassen und die Ortskurve 4. Ordnung für den Drehstrommotor mit Vibrator bei $r_1 \neq 0$ konstruieren; in diesem Falle ziehen wir die graphische Behandlung des Problems vor, da die Durchführung auf rein analytischem Wege ziemlich umständlich wäre.

Es bezeichne \dot{I}_1 den primären Strom für $r_1 = 0$ und \dot{I}_{1r} den primären Strom für $r_1 \neq 0$; Gleichung (VII) geht für $r_1 = 0$ in die Gleichung über:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + jr_{II}s + k_{II}s^2}{jk_1 c_3 + r_{II}k_1 s - jk_1 k_{oII}s^2}.$$

Setzt man:

$$\dot{I}_{1r} = (\dot{U}_1 - r_1 \cdot \dot{I}_{1r}) \cdot \frac{-c_3 + jr_{II}s + k_{II}s^2}{jk_1 c_3 + r_{II}k_1 s - jk_1 k_{oII}s^2}$$

und löst die Gleichung nach \dot{I}_{1r} auf, so erhält man:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + jr_{II}s + k_{II}s^2}{-r_1 c_3 + jk_1 c_3 + (r_{II} k_1 + jr_1 r_{II})s + (r_1 k_{II} - jk_1 k_{oII})s^2}$$

das ist aber nichts anderes als Gleichung (VII); wir können daher diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{1 + r_1 \cdot \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}} = \dot{I}_1 \cdot \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1}.$$

Diese Beziehung vermittelt uns die ganze graphische Konstruktion für die Berücksichtigung des Statorwiderstandes r_1 , wir führen ein:

$$\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1 = (\varepsilon + j \cdot \eta) \cdot \dot{U}_1$$

daher:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon + j \cdot \eta} = \dot{I}_1 \cdot \frac{\varepsilon - j \cdot \eta}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

oder:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{I}_1 \left[\frac{1}{\varepsilon^2 + \eta^2} - j \cdot \frac{\eta}{\varepsilon^2 + \eta^2} \right].$$

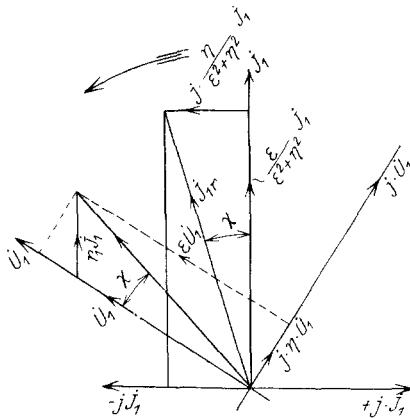


Bild 10.

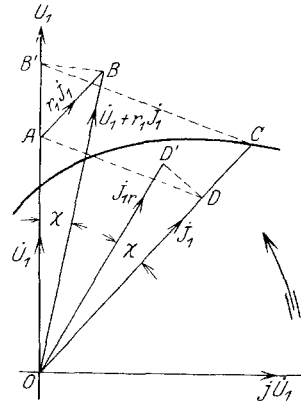


Bild 11.

Wird ein Zeitvektor mit einer komplexen Zahl multipliziert, so wird der Vektor gedreht und außerdem seine absolute Größe verändert; in unserem Falle wird der Vektor \dot{I}_1 um den Winkel $\chi = \arctan \frac{\eta}{\varepsilon}$ gedreht und $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}$ mal so groß. Der Winkel χ ist auch der Winkel, den die beiden Vektoren \dot{U}_1 und $\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1$ miteinander einschließen, die absolute Größe von $\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1$ beträgt:

$$|\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1| = |\dot{U}_1| \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}.$$

Daher ergibt sich folgende nach dem Gesagten ohne weiteres verständliche Konstruktion; man macht:

$$\begin{aligned} OA &= \dot{U}_1 \\ AB &= r_1 \cdot \dot{I}_1 \\ OC &= \dot{I}_1 \\ OB' &= OB = \dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1. \end{aligned}$$

Man verbindet B' mit C und zieht $AD \parallel B'C$; macht man noch $OD' = OD$, wobei $\angle D'OD = \angle AOB = \chi$ ist, so ist $OD' = \dot{I}_{1r}$ nach Größe und Richtung.

Wiederholt man die Konstruktion für verschiedene Werte von \dot{I}_1 und verbindet die Endpunkte der so erhaltenen Vektoren \dot{I}_{1r} , so ergibt sich damit die gesuchte Ortskurve des Drehstrommotors mit Vibrator unter Berücksichtigung des Statorwiderstandes r_1 .