Alcune superficie di Guichard e le relative trasformazioni.

(Di Pasquale Calapso, *a Palermo.)*

In una elegante Nota pubblicata dal sig. Guichard nei *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (*), l'autore s'imbatte in una notevole classe di superficie, le cui linee di curvatura soddisfano ad una particolare condizione.

L'autore definisce la superficie generica N della classe sudetta mediante la seguente proprietà caratteristica:

« Il existe une surface N' ayant même image sphérique de ses lignes « de courbure que la surface N et telle que si r_1 et r_2 sont les rayons de « courbure principaux de N, r'_1 et r'_2 les rayons correspondantes de N', « on ait

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.}, \tag{1}$$

« la constante n'étant pas nulle. »

Nella presente Memoria ogni superficie che ammetta una superficie coniugata nella sudetta relazione, la chiameremo *una superficie di* Guichard e talora anche brevemente una superficie N.

Volendo assoggettare queste superficie ad uno studio particolare, conviene riferire la superficie generica N alle sue linee di curvatura.

Scrivendo le due forme quadratiche fondamentali

$$f = E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2$$

$$\varphi = D\,d\,u^2 + D\;\;d\,v^2,$$

e cercando la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza della super-

---

(*) *Sur les Surfaces isothermiques* [Comptes Rendus, vol. 130, pg. 159].

ficie N' nella relazione richiesta, si perviene alla condizione

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2=G\pm E.$$

Si è quindi condotti ad una classificazione delle superficie di Guichard secondo due tipi differenti definiti rispettivamente dalle relazioni:

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2=G-E, \tag{α}$$

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2=G+E. \tag{β}$$

Diremo *superficie di* Guichard *di prima specie* quelle definite dalla relazione (α); chiameremo *di seconda specie* le altre.

Tra le superficie di Guichard di prima specie conviene notare le superficie a curvatura costante positiva che costituiscono una importante soluzione particolare del problema; alle superficie di Guichard di seconda specie appartengono le superficie a curvatura costante negativa.

Fra le principali proprietà di queste superficie si ha che l'inversione per raggi vettori reciproci trasforma una superficie di Guichard in infinite nuove superficie di Guichard.

Ho trovato questa proposizione utilizzando gl'invarianti dell'inversione già da me osservati in una precedente Memoria (*).

Partendo da una superficie qualunque, sulla quale non si faccia alcuna ipotesi, di cui le due forme fondamentali siano

$$E\,d\,u^2+G\,d\,v^2$$
$$D\,d\,u^2+D''\,d\,v^2,$$

ed applicando l'inversione, si ha una nuova superficie con tre costanti arbitrarie. Siano le due forme di quest'ultima

$$E_1\,d\,u^2+G_1\,d\,v^2$$
$$D_1\,d\,u^2+D''_1\,d\,v^2.$$

Ho chiamato invariante dell'inversione una funzione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u},\dots\right)$$

(*) *Sulle superficie a linee di curvatura isoterme.* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XVII, p. 275.]

dei coefficienti E, G, D, D'' e delle loro derivate d'ordine qualunque, quando ha luogo identicamente la relazione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u},\dots\right)=\psi\left(E_1,\ G_1,\ D_1,\ D''_1,\ \frac{\partial E_1}{\partial u},\dots\right).$$

Ho riconosciuto che l'espressione

$$\frac{\left(\sqrt{G}\,\frac{D}{\sqrt{E}}-\sqrt{E}\,\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2}{G\pm E}$$

è un invariante nel senso sopra definito, donde ho dedotto il teorema enunciato.

Questo teorema conduce ad un metodo di trasformazione per le superficie N.

Chiamando trasformazione di Guichard il passaggio da una superficie N alla superficie coniugata N', possiamo dire che il sudetto metodo di trasformazione consiste nel comporre l'inversione colla trasformazione di Guichard.

Per le superficie N sussiste un secondo metodo di trasformazione il quale deriva da un teorema di Guichard, che stabilisce alcune relazioni tra le superficie N e le superficie isoterme.

Per enunciare il teorema di Guichard sotto una nuova forma, utile per il seguito della presente Memoria, conviene introdurre come incognita principale per la determinazione di una superficie N, di prima specie, la funzione Θ dei coefficienti del suo elemento lineare definita dalla formola

$$\operatorname{tgh}\Theta=\sqrt{\frac{E}{G}}\,.$$

La funzione Θ è caratterizzata dal fatto che le due equazioni differenziali nella funzione incognita W

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial u}&=\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\&\quad-\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u\,\partial v^2}-2\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}W,\\\frac{\partial W}{\partial v}&=-\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\&\quad+\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\,\partial v}-2\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}W\end{aligned}\right.$$

debbono ammettere una soluzione comune,

D'altra parte, sappiamo che la determinazione delle superficie isoterme dipende dall'equazione di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}(\Omega^2)=0 \qquad (\delta)$$

a cui deve soddisfare il suo invariante Ω (*).

Ciò posto, il teorema di Guichard che permette di trasformare una superficie N in infinite superficie isoterme, può enunciarsi nel modo seguente:

Se due funzioni Θ e W sono legate dalle relazioni (γ), il sistema di Riccati

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Omega}{\partial u}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,(\Omega^2+W)+i\frac{\partial \Theta}{\partial v}\Omega+\frac{1}{\sqrt{2}\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2},\\ i\frac{\partial \Omega}{\partial v}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega^2+W)+\frac{\partial \Theta}{\partial u}\Omega-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2},\end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

è illimitatamente integrabile. Si avrà dell'integrazione una funzione Ω con una costante arbitraria che sarà una soluzione dell'equazione (δ).

Volendo pervenire al secondo metodo di trasformazione per le superficie N è necessario procedere in certo modo alla inversione del teorema di Guichard; potremo così inversamente far derivare da una superficie isoterma infinite superficie N con tre costanti arbitrarie.

Frattanto le formole, che dànno l'invariante Θ della superficie N, supposti noti gl'invarianti Ω e J della superficie isoterma, sono:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}&=-i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\sqrt{2}\cosh\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v},\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\partial v}&=\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2+\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\ &\quad-i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\frac{1}{2}i\,\Omega^2\cosh 2\Theta-\frac{1}{2}i\,(J+m),\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}&=i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}-i\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Omega}{\partial v}-i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}-i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v},\end{aligned}\right\} \qquad (\tau)$$

m essendo una costante.

(*) Vedi formola (9) della mia citata Memoria. La medesima equazione di 4.° ordine, sotto forma diversa, fu stabilita precedentemente dal D.r Rothe nella sua tesi di laurea, che ora soltanto vengo a conoscere: *Untersuchungen über die Theorie der isothermen Flächen*, Inaugural-Dissertation, Berlin, 1897 [Vedi formola (D), pag. 23].

Le trasformazioni rappresentate analiticamente dalle formole (ε) e (τ) le chiameremo rispettivamente G, e G^{-1}.

Consideriamo altresì le trasformazioni analoghe che si deducono da (ε) e (τ) cambiando i in $-i$ e che indicheremo con $\overline{G}$ e $\overline{G}^{-1}$.

Veniamo alle nuove trasformazioni per le superficie di GUICHARD mediante la composizione di due trasformazioni G, $\overline{G}^{-1}$.

Limitando le considerazioni alle trasformazioni reali, potremo dedurre da una ben nota superficie N una nuova superficie N_1 con tre costanti arbitrarie.

Il passaggio dall'invariante Θ della superficie N all'invariante Θ_1 di N_1 è rappresentato analiticamente dal seguente sistema di equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \lambda \cosh \Theta_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \mu \operatorname{senh} \Theta_1 + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2} \operatorname{senh} \Theta (\lambda^2 - \mu^2 + 2W), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cosh \Theta \,.\, \lambda \mu, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh} \Theta \,.\, \lambda \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} \cosh \Theta (\lambda^2 - \mu^2 + 2W), \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{III})$$

nella funzione incognita Θ_1 e in due ausiliarie λ e μ.

È notevole che l'integrazione di questo sistema può compiersi mediante la successiva integrazione di due sistemi di RICCATI illimitatamente integrabili; ne discende la seguente proposizione:

Se si conosce una soluzione particolare del sistema (II), (III), si può compiere la trasformazione con sole quadrature; e in tale ipotesi l'applicazione della medesima trasformazione alle superficie trasformate richiederà soltanto successive quadrature.

Risultati analoghi sussistono per le superficie di GUICHARD di seconda specie.

La nuova forma sotto cui ho enunciato il teorema di GUICHARD, permette altresì di rappresentare la trasformazione di DARBOUX per le superficie isoterme, chiamata dal BIANCHI *una trasformazione* D_m (*), mediante il passaggio da una soluzione particolare della (δ) ad una nuova soluzione contenente quattro costanti arbitrarie.

Le formole relative si ottengono manifestamente componendo una trasformazione G^{-1} con una $\overline{G}$. Si avrà:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} = -i \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2} \cosh \Theta \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i \frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$
$$- i \sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} i\, \Omega^2 \cosh 2\Theta - \frac{1}{2} i (J + m),$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = i \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2} \operatorname{senh} \Theta \frac{\partial \Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\, \Omega \cosh \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i \frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = \frac{\partial \Omega}{\partial u} - i(\Omega_1 + \Omega)\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{senh} \Theta (\Omega_1^2 - \Omega^2),$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} = -\frac{\partial \Omega}{\partial v} + i(\Omega_1 - \Omega)\frac{\partial \Theta}{\partial u} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \Theta (\Omega_1^2 - \Omega^2).$$

Si può mettere questo sistema sotto forma reale in virtù dell'esistenza di una funzione ψ soddisfacente alle condizioni

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -i \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{senh} \Theta (\Omega_1 - \Omega),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = i \frac{\partial \Theta}{\partial u} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \Theta (\Omega_1 + \Omega).$$

Mediante l'introduzione della ψ, potremo rappresentare analiticamente la trasformazione sotto la forma seguente:

$$2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2\,\Omega\,\Omega_1) - (J + m),$$

$$2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 2\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},$$

$$2\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2\,\Omega\,\Omega_1) + (J + m),$$

(*) BIANCHI, *Il teorema di permutabilità per le trasformazioni di* DARBOUX *delle superficie isoterme.* [Atti della Reale Accademia dei Lincei, 1.° semestre, 1904, pag. 359.]

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = \frac{\partial \Omega}{\partial u} + (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \psi}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} = -\frac{\partial \Omega}{\partial v} + (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Intorno a questo sistema nelle funzioni incognite ψ, Ω_1, osserviamo che esso non differisce essenzialmente dal sistema (A) (B) nelle funzioni φ, Ω della mia citata Memoria che per lo scambio di J in $J+m$. Ne discende la proposizione:

Una trasformazione D_m equivale, a meno di movimenti, alla trasformazione C_m ad un parametro da me segnalata nella citata Memoria e rappresentata analiticamente dalla formola

$$J^{(1)} = J + m \qquad (m = \text{costante})$$

più una inversione ed una trasformazione di Christoffel (*).

§ I. — Condizione per le linee di curvatura di una superficie di Guichard.

Siano N e N due superficie coniugate colla relazione (1); e sia

$$d s'^2 = e\, d u^2 + g\, d v^2$$

la rappresentazione sferica delle loro linee di curvatura. I raggi principali di curvatura delle due superficie soddisfano alle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial u} &= (r_2 - r_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}, \\ \frac{\partial r_2}{\partial v} &= (r_1 - r_2) \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r'_1}{\partial u} &= (r'_2 - r'_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}, \\ \frac{\partial r'_2}{\partial v} &= (r'_1 - r'_2) \frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(*) È notevole per queste trasformazioni un *teorema di permutabilità* scoperto dal Bianchi; le formole relative sono state esposte dall'autore sotto la forma più elegante nella nota sopra citata.

Da queste si ricava:

$$r'_1 \frac{\partial r_1}{\partial u} + r_1 \frac{\partial r'_1}{\partial u} = (r_1 r'_2 + r_2 r'_1 - 2 r_1 r'_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}$$

e, denotando con $2c$ il valore della costante:

$$r'_1 \frac{\partial r_1}{\partial u} + r_1 \frac{\partial r'_1}{\partial u} = 2(c - r_1 r'_1) \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}.$$

Si deduce integrando

$$r_1 r'_1 = c - \frac{\psi(v)}{g},$$

in cui $\psi(v)$ denota una funzione arbitraria della sola v.

Analogamente

$$r_2 r'_2 = c - \frac{\varphi(u)}{e}$$

con $\varphi(u)$ funzione arbitraria della sola u.

Possiamo supporre senza ledere la generalità $c = 1$, e che per una opportuna scelta di parametri le funzioni $\varphi(u)$ e $\psi(v)$ si riducano all'unità positiva o negativa, escludendo per ora il caso in cui qualcuna di queste funzioni si annulla identicamente, caso che tratteremo a parte. Sicchè scriveremo

$$r_1 r'_1 = 1 - \frac{\varepsilon}{g} \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$r_2 r'_2 = 1 - \frac{\varepsilon'}{e} \qquad (\varepsilon' = \pm 1).$$

Sostituendo in (1) per r'_1 ed r'_2 i valori ricavati dalle formole precedenti, si ottiene dopo facili riduzioni

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{\varepsilon'}{e} r_1^2 + \frac{\varepsilon}{g} r_2^2.$$

Si osserva intanto che i valori $\varepsilon = \varepsilon' = -1$ non possono corrispondere ad una soluzione reale del problema; una almeno di queste costanti dovrà essere l'unità positiva. Ed allora possiamo supporre (scambiando se occorre u con v) $\varepsilon' = +1$, quindi avremo

$$(r_1 - r_2)^2 = \frac{1}{e} r_1^2 + \frac{\varepsilon}{g} r_2^2. \tag{4}$$

Ciò posto, introduciamo per una superficie N le due forme quadratiche fondamentali

$$f = E\,d\,u^2 + G\,d\,v^2,$$

$$\varphi = D\,d\,u^2 + D''\,d\,v^2.$$

Si dovrà avere:

$$r_1 = -\frac{G}{D''}, \qquad r_2 = -\frac{E}{D},$$

$$e = \frac{D^2}{E}, \qquad g = \frac{D''^2}{G},$$

e sostituendo nella (4):

$$\left(\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}\right)^2 = G + \varepsilon E,$$

che potremo scrivere

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G + \varepsilon E}.$$

In questa assumeremo per il radicale il valore positivo potendo cambiare se occorre D e D'' in $-D$ e $-D''$.

Siamo quindi condotti a classificare le superficie N secondo due tipi differenti, definiti rispettivamente dalle relazioni:

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G - E}, \tag{5}$$

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \sqrt{G + E}. \tag{6}$$

In ciò che segue è dimostrato che ad ognuna di queste relazioni corrisponde effettivamente una soluzione reale del problema; in altri termini:

Se le linee di curvatura di una superficie soddisfano alla condizione (5) o (6), esiste una nuova superficie avente la stessa immagine sferica delle linee di curvatura e legata alla prima dalla condizione (1).

Le linee di curvatura della nuova superficie soddisfano pure alla (5) o (6). Il passaggio da una superficie N alla sua coniugata N', diremo brevemente una trasformazione di Guichard.

Prima d'intraprendere lo studio delle superficie definite dalla relazione (5) o dalla (6), vogliamo esaminare il caso escluso in cui qualcuna delle funzioni $\varphi(u)$ o $\psi(v)$ sia identicamente nulla.

Supponiamo $\dot{\psi}(v)=0$; in tal caso avremo:

$$r_1 r'_1 = 1,$$

$$r_2 r'_2 = 1 - \frac{\varphi(u)}{e}.$$

Fra queste e la (1) eliminando r'_1 ed r'_2, otteniamo:

$$r_2 = r_1\left(1 - \frac{\sqrt{\varphi(u)}}{\sqrt{e}}\right),$$

donde derivando rispetto a v ed eliminando $\varphi(u)$, ricaviamo:

$$\frac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2)\frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v} + \frac{r_2}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v}.$$

Ciò posto, perchè sia soddisfatta la seconda delle (2) dovrà essere

$$\frac{\partial r_1}{\partial v} = 0,$$

cioè r_1 sarà funzione della sola u.

Ma ciò esprime, come si può facilmente dimostrare, la condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee di curvatura ($u=$ cost.) della superficie siano circoli.

Viceversa ogni superficie, per cui le linee di curvatura di un sistema sono circoli, dà un'effettiva soluzione del problema.

Infatti avremo in tale ipotesi:

$$r_1 = \psi(u),$$

ed integrando la seconda delle (2):

$$r_2 = \psi(u) + \frac{F(u)}{\sqrt{e}}.$$

D'altra parte potremo soddisfare alle (3), ponendo:

$$r'_1 = \frac{1}{\psi(u)}$$

$$r'_2 = \frac{1}{\psi(u)} - \frac{F(u)}{\psi(u)^2\sqrt{e}}.$$

In questo modo avremo

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = 2,$$

la quale dimostra la proposizione.

Su questa particolare soluzione del problema, che conduce ad una classe ben nota di superficie, non ci fermeremo più oltre.

§ II. — Le superficie di Guichard di prima specie (definite dalla relazione (5)).

Volendo fare uno studio completo delle superficie definite dalla relazione (5), conviene semplificare quest'ultima col porre

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta, \qquad \sqrt{G} = e^{\xi} \cosh \Theta. \tag{7}$$

Con questa nuova notazione, l'equazione di definizione diventa

$$\cosh \Theta \,.\, \frac{D}{\sqrt{E}} - \operatorname{senh} \Theta \,.\, \frac{D''}{\sqrt{G}} = 1.$$

Ed introducendo altresì una funzione H mediante la formola

$$- \operatorname{senh} \Theta \,.\, \frac{D}{\sqrt{E}} + \cosh \Theta \,.\, \frac{D''}{\sqrt{G}} = H$$

si ha:

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = \cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta, \qquad \frac{D''}{\sqrt{G}} = \operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta. \tag{8}$$

Denotiamo secondo il solito con x, y, z le coordinate di un punto mobile sulla superficie e con

$$(X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}, Z_1^{(0)}), \ (X_2^{(0)}, Y_2^{(0)}, Z_2^{(0)}), \ (X_3^{(0)}, Y_3^{(0)}, Z_3^{(0)})$$

i coseni di direzione dei tre spigoli del triedro principale, diretti rispettivamente:

1.° secondo la tangente alla linea $v = \text{cost.}$;
2.° secondo la tangente alla linea $u = \text{cost.}$;
3.° secondo la normale alla superficie.

Le funzioni $x, y, z, X_1^{(0)}, Y_1^{(0)}, Z_1^{(0)}, X_2^{(0)}, Y_2^{(0)}, Z_2^{(0)}, X_3^{(0)}, Y_3^{(0)}, Z_3^{(0)}$ debbono soddisfare al sistema di equazioni:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = e^{\xi} \operatorname{senh} \Theta \,.\, X_1^{(0)}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = e^{\xi} \cosh \Theta \,.\, X_2^{(0)}, \\
&\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial u} = -\left(\operatorname{tgh} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_2^{(0)} + (\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta)\, X_3^{(0)}, \\
&\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial v} = \left(\coth \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_2^{(0)},
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial u} = \left(\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_1^{(0)},\\
&\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial v} = -\left(\coth\Theta\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_1^{(0)} + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\, X_3^{(0)},\\
&\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} = -(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\, X_1^{(0)},\\
&\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} = -(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\, X_2^{(0)},
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

colle analoghe in y e z.

Come è noto, per la illimitata integrabilità di questo sistema sono necessarie e sufficienti le relazioni:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial u} = (H + \coth\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial H}{\partial v} = (H + \operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial v}\\
&\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} + \coth\Theta\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} - \frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u} +\\
&+\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v} + (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta) = 0).
\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Conviene porre questo sistema sotto altra forma che meglio si presti per ulteriori ricerche.

A tale scopo introduciamo una funzione ausiliaria W mediante la formola

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} + \frac{1}{2\operatorname{senh}^2\Theta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2\cosh^2\Theta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 + \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} +$$

$$+\coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\cosh 2\Theta\,(1 + H^2) + 2H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta + W = 0.$$

Potremo allora esprimere le derivate seconde della ξ per mezzo delle derivate d'ordine inferiore e di W, cioè

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2\Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 + \coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{senh}^2\Theta\,(1 + H^2) - H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + W\operatorname{senh}^2\Theta,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 + \operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial v} - \coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}$$

$$-\frac{1}{2}\cosh^2\Theta\,(1 + H^2) - H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta - \coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - W\cosh^2\Theta.$$

Inoltre dal sistema (10) eliminando la funzione H coll'imporre la condizione

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)=0,$$

si perviene all'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Al sistema (10) si può dunque sostituire il sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}\operatorname{tgh}^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}-\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\\
&\quad-\frac{1}{2}\operatorname{senh}^2\Theta\,(1+H^2)-H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta-\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+W\operatorname{senh}^2\Theta,\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}&=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v},\\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2}\coth^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2+\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}-\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\\
&\quad-\frac{1}{2}\cosh^2\Theta\,(1+H^2)-H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta-\coth\Theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-W\cosh^2\Theta,
\end{aligned}\right\}\quad(A)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u}&=(H+\coth\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial u},\\
\frac{\partial H}{\partial v}&=(H+\operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial \xi}{\partial v},
\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

Infine calcolando le condizioni d'integrabilità del sistema (A), (B) si trova che le funzioni W e Θ debbono soddisfare alle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u}&=\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\
&\quad-\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u\partial v^2}-2\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}W,\\
\frac{\partial W}{\partial v}&=-\frac{1}{\cosh^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}-\frac{1}{\operatorname{senh}^2\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}\\
&\quad+\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta}\frac{\partial^3\Theta}{\partial u^2\partial v}-2\coth\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}W\ (*).
\end{aligned}\right\}\quad(C)$$

(*) Considerando le equazioni (C) nella funzione incognita W, basterà determinare la Θ in modo che esse abbiano una sola soluzione comune.

Inversamente, se due funzioni Θ e W soddisfano al sistema (C), il sistema (A), (B) è illimitatamente integrabile; le funzioni ξ, H ricavate da esso e la funzione Θ soddisferanno al sistema (10), e allora si può determinare dalle (9) una superficie di cui l'elemento lineare è

$$d\,s^2 = e^{2\xi}(\operatorname{senh}^2\Theta \,.\, d\,u^2 + \cosh^2\Theta \,.\, d\,v^2)$$

e la rappresentazione sferica di Gauss è

$$d\,s'^2 = (\cosh\Theta + H \operatorname{senh}\Theta)^2\, d\,u^2 + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)^2\, d\,v^2.$$

I coefficienti delle due forme quadratiche soddisfano manifestamente alla relazione (5).

Dimostriamo ora che le superficie così ottenute dànno effettivamente una soluzione del problema.

A tale scopo introduciamo due funzioni ξ_1, Θ_1 definite rispettivamente dalle formole

$$\left.\begin{aligned} e^{\xi_1} &= e^{-\xi}(1 - H^2), \\ \operatorname{senh}\Theta_1 &= \frac{-1}{1 - H^2}[\operatorname{senh}\Theta\,(1 + H^2) + 2\,H\cosh\Theta]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Avremo allora

$$\cosh\Theta_1 = \frac{1}{1 - H^2}[\cosh\Theta\,(1 + H^2) + 2\,H\operatorname{senh}\Theta]. \tag{12}$$

Dalla prima delle (11) derivando si ha:

$$\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,u} = -\frac{\partial\,\xi}{\partial\,u} - \frac{2\,H}{1 - H^2}\frac{\partial H}{\partial\,u}.$$

In questa sostituendo per $\frac{\partial\,\xi}{\partial\,u}$ il suo valore ricavato dalla prima del sistema (10) ed osservando le (11) e (12) si ricava:

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,u} = (H + \coth\Theta_1)\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,u}. \tag{13}$$

Analogamente:

$$\frac{\partial\,H}{\partial\,v} = (H + \operatorname{tgh}\Theta_1)\frac{\partial\,\xi_1}{\partial\,v}. \tag{14}$$

Inoltre dalle (11) e (12) si ricava:

$$\left.\begin{aligned}\cosh\Theta_1 + H \operatorname{senh}\Theta_1 &= \cosh\Theta + H \operatorname{senh}\Theta,\\ \operatorname{senh}\Theta_1 + H\cosh\Theta_1 &= -(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

E la terza delle (10), potendosi scrivere in forza delle (10) stesse:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\right] +\\ &+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta}\,\frac{\partial}{\partial v}(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\right] +\\ &+(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta) = 0,\end{aligned}$$

sarà soddisfatta altresì dalla funzione Θ_1.

Ed allora le funzioni ξ_1, Θ_1, H soddisferanno al sistema (10) e perciò esiste una nuova superficie le cui forme fondamentali prima e terza sono rispettivamente:

$$d s^2 = e^{2\xi_1}(\operatorname{senh}^2\Theta_1\, d u^2 + \cosh^2\Theta_1\, d v^2),$$

$$d s'^2 = (\cosh\Theta_1 + H\operatorname{senh}\Theta_1)^2\, d u^2 + (\operatorname{senh}\Theta_1 + H\cosh\Theta_1)\, d v^2.$$

In forza delle (15) questa nuova superficie ha lo stesso elemento lineare sferico della superficie primitiva; per i raggi di curvatura di esse si hanno le formole:

$$r_1 = \frac{e^{\xi}\cosh\Theta}{\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta}, \qquad r_2 = \frac{e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta}{\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta},$$

$$r'_1 = \frac{-e^{\xi_1}\cosh\Theta_1}{\operatorname{senh}\Theta_1 + H\cosh\Theta_1}, \qquad r'_2 = \frac{-e^{\xi_1}\operatorname{senh}\Theta_1}{\cosh\Theta_1 + H\operatorname{senh}\Theta_1}.$$

E da queste tenendo conto delle (11) e (12) si deduce

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = 2.$$

Infine notiamo che tra le due forme fondamentali della seconda superficie si ha la relazione identica

$$\cosh\Theta_1(\cosh\Theta_1 + H\operatorname{senh}\Theta_1) - \operatorname{senh}\Theta_1(\operatorname{senh}\Theta_1 + H\cosh\Theta_1) = 1,$$

ed è così stabilita la proposizione.

Come soluzione particolarmente interessante notiamo che le equazioni (C) rimangono soddisfatte, assumendo per Θ una soluzione della equazione

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\Theta \cosh\Theta = 0,$$

e per W la funzione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta \cosh\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \\ &= - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta \cosh\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In tal caso le superficie di GUICHARD si riducono in particolare alle superficie a curvatura costante positiva, e alle loro derivate mediante l'inversione.

§ III. — LE SUPERFICIE DI GUICHARD DI SECONDA SPECIE (DEFINITE DALLA RELAZIONE (6)).

Per trattare il problema in questa seconda ipotesi porremo

$$\sqrt{E} = e^{\xi} \operatorname{sen}\Theta, \quad \sqrt{G} = e^{\xi} \cos\Theta, \tag{7*}$$

e con questa notazione l'equazione di definizione diventa:

$$\cos\Theta \,.\, \frac{D}{\sqrt{E}} - \operatorname{sen}\Theta \frac{D''}{\sqrt{G}} = 1.$$

Ed introducendo altresì una funzione H mediante la formola

$$\operatorname{sen}\Theta \frac{D}{\sqrt{E}} + \cos\Theta \frac{D''}{\sqrt{G}} = H,$$

avremo

$$\frac{D}{\sqrt{E}} = \cos\Theta + H \operatorname{sen}\Theta, \quad \frac{D''}{\sqrt{G}} = - \operatorname{sen}\Theta + H \cos\Theta. \tag{8)*}$$

Con le solite notazioni siamo condotti al sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= e^{\xi} \operatorname{sen} \Theta\, X_1^{(0)} \\
\frac{\partial x}{\partial v} &= e^{\xi} \cos \Theta\, X_2^{(0)}
\end{aligned}\right. \\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial u} &= -\left(\operatorname{tg} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_2^{(0)} + (\cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta)\, X_3^{(0)} \\
\frac{\partial X_1^{(0)}}{\partial v} &= \left(\cot \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_2^{(0)}
\end{aligned}\right. \\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial u} &= \left(\operatorname{tg} \Theta \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\right) X_1^{(0)} \\
\frac{\partial X_2^{(0)}}{\partial v} &= -\left(\cot \Theta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \Theta}{\partial u}\right) X_1^{(0)} - (\operatorname{sen} \Theta - H \cos \Theta)\, X_3^{(0)}
\end{aligned}\right. \\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} &= -(\cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta)\, X_1^{(0)} \\
\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} &= (\operatorname{sen} \Theta - H \cos \Theta)\, X_2^{(0)}.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)^*$$

Per la illimitata integrabilità di questo sistema sono necessarie e sufficienti le relazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial u} = (H + \cot \Theta) \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = (H - \operatorname{tg} \Theta) \frac{\partial \xi}{\partial v} \\
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \cot \Theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} + \operatorname{tg} \Theta \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \\
&+ \frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial v} - (\cos \Theta + H \operatorname{sen} \Theta)(\operatorname{sen} \Theta - H \cos \Theta) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)^*$$

Introduciamo come precedentemente una funzione ausiliaria W definita da:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - \frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2 \cos^2 \Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \operatorname{tg} \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2}$$

$$- \cot \Theta \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\cos^2 \Theta - \operatorname{sen}^2 \Theta)(1 - H^2) + 2 H \operatorname{sen} \Theta \cos \Theta + W = 0$$

e con procedimento analogo a quello seguito nel paragrafo precedente sostituiamo alle $(10)^*$ un sistema risoluto rispetto alle derivate seconde della ξ e alle derivate prime della H. Avremo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 + \cot\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} - \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} \\
&\quad + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\Theta\,(1 - H^2) - H\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta + \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - W\operatorname{sen}^2\Theta \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} &= \frac{\partial \xi}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \cot\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} - \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\cot^2\Theta\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 - \operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + \cot\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} \\
&\quad + \frac{1}{2}\cos^2\Theta\,(1 - H^2) + H\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta - \cot\Theta\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + W\cos^2\Theta
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{A})^*$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \cot\Theta)\,\frac{\partial \xi}{\partial u} \\
\frac{\partial H}{\partial v} &= (H - \operatorname{tg}\Theta)\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\,.
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{B})^*$$

Infine calcolando le condizioni d'integrabilità del sistema (A)*, (B)* si trova che le funzioni W e Θ debbono soddisfare alle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial u} &= -\frac{1}{\cos^2\Theta}\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\Theta}\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} \\
&\quad + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\,\frac{\partial^3 \Theta}{\partial u\,\partial v^2} + 2\operatorname{tg}\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial u}\,W, \\
\frac{\partial W}{\partial v} &= \frac{1}{\cos^2\Theta}\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\Theta}\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} \\
&\quad + \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\,\frac{\partial^3 \Theta}{\partial u^2\,\partial v} - 2\cot\Theta\,\frac{\partial \Theta}{\partial v}\,W.
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{C})^*$$

Inversamente, se due funzioni Θ, W soddisfano al sistema (C)*, il sistema (A)*, (B)* è illimitatamente integrabile; le funzioni ξ, H ricavate da esso e la funzione Θ soddisfaranno al sistema (10)*, e allora si può determinare dalle (9)* una superficie di cui l'elemento lineare è

$$d\,s^2 = e^{2\xi}\,(\operatorname{sen}^2\Theta\,d\,u^2 + \cos^2\Theta\,d\,v^2)$$

e la rappresentazione sferica di Gauss è

$$d\,s'^2 = (\cos\Theta + H\operatorname{sen}\Theta)^2\,d\,u^2 + (\operatorname{sen}\Theta - H\cos\Theta)^2\,d\,v^2.$$

I coefficienti delle due forme quadratiche soddisfano manifestamente alla relazione (6).

Si dimostra come nel caso precedente che le superficie così ottenute dànno effettivamente una soluzione del problema; invero le formole che definiscono in questo caso la superficie coniugata sono:

$$\left.\begin{aligned} e^{\xi_1} &= e^{-\xi}(1 + H^2) \\ \operatorname{sen}\Theta_1 &= \frac{-1}{1+H^2}\left[\operatorname{sen}\Theta\,(1 - H^2) - 2\,H\cos\Theta\right], \end{aligned}\right\} \qquad (11)^*$$

Avremo allora

$$\cos\Theta_1 = \frac{1}{1+H^2}\left[\cos\Theta\,(1-H^2) + 2\,H\operatorname{sen}\Theta\right)$$

$$r_1 = \frac{e^{\xi}\cos\Theta}{\operatorname{sen}\Theta - H\cos\Theta}, \qquad r_2 = \frac{-e^{\xi}\operatorname{sen}\Theta}{\cos\Theta + H\operatorname{sen}\Theta}$$

$$r'_1 = \frac{e^{\xi_1}\cos\Theta_1}{\operatorname{sen}\Theta_1 - H\cos\Theta_1}, \qquad r'_2 = \frac{-e^{\xi_1}\operatorname{sen}\Theta_1}{\cos\Theta_1 + H\operatorname{sen}\Theta_1}$$

donde discende facilmente la proposizione.

Come soluzione particolarmente interessante notiamo che le equazioni $(C)^*$ rimangono soddisfatte, assumendo per Θ una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} + \operatorname{sen}\Theta\cos\Theta = 0,$$

e per W la funzione

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In tal caso le superficie di Guichard si riducono in particolare alle superficie a curvatura costante negativa, e alle loro derivate mediante l'inversione.

§ IV. — Gl'invarianti dell'inversione.

Allo studio delle classi di superficie sopra considerate siamo altresì condotti da una questione assai più generale di cui per ora tratteremo soltanto in quanto che possa interessare alla presente Memoria.

Riprendiamo per una superficie qualsiasi S, sulla quale non faremo alcuna ipotesi, le consuete notazioni. Siano x, y, z, le coordinate di un punto mobile su S, e siano

$$f = E\,d u^2 + G\,d v^2$$
$$\varphi = D\,d u^2 + D''\,d v^2$$

le due forme fondamentali della superficie riferita alle sue linee di curvatura.

Applicando alla superficie S l'inversione di potenza $= -1$, otterremo una superficie S_1 dipendente da tre costanti arbitrarie.

Siano

$$f_1 = E_1\,d u^2 + G_1\,d v^2$$
$$\varphi_1 = D_1\,d u^2 + D''_1\,d v^2$$

le due forme fondamentali di quest'ultima.

Chiameremo *invariante* una funzione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right)$$

dei coefficienti E, G, D, D'' e delle loro derivate d'ordine qualunque, quando ha luogo identicameute la relazione

$$\psi\left(E,\ G,\ D,\ D'',\ \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) = \psi\left(E_1,\ G_1,\ D_1,\ D''_1,\ \frac{\partial E_1}{\partial u}, \ldots\right).$$

Qui interessano particolarmente alcuni invarianti fondamentali che passiamo a costruire.

Denotiamo con a, b, c le costanti del polo dell'inversione, e poniamo

$$\rho = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

Le formole della trasformazione sono:

$$x_1 = a - \frac{x-a}{\rho}, \quad y_1 = b - \frac{y-b}{\rho}, \quad z_1 = c - \frac{z-c}{\rho}. \tag{16}$$

Derivando queste si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{x-a}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial u}, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{x-a}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

con le analoghe in y e z, dalle quali si deducono facilmente le relazioni

$$E = \rho^2 E_1, \quad G = \rho^2 G_1. \tag{18}$$

Secondo la definizione superiore la funzione $\frac{E}{G}$ è un invariante dell'inversione.

Un secondo invariante l'otterremo nel modo seguente.

Esprimendo i coseni direttori della normale alla superficie trasformata per mezzo dei coseni direttori della normale alla superficie primitiva e delle funzioni x, y, z si ottengono con opportuni artifizi le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} X_3 &= -X_3^{(0)} + \frac{x-a}{\rho} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) \\ Y_3 &= -Y_3^{(0)} + \frac{y-b}{\rho} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) \\ Z_3 &= -Z_3^{(0)} + \frac{z-c}{\rho} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

D'altra parte derivando ancora le (17) e tenendo presenti le (17) stesse, si ricava:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{x-a}{\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}.$$

D'onde, osservando le (19)

$$\begin{aligned} X_3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = &\left[\frac{1}{\rho} X_3^{(0)} - \frac{x-a}{\rho^2} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a)\right] \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial u} X_3 \frac{\partial x_1}{\partial u} \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \left[\frac{x-a}{\rho} X_3^{(0)} - \frac{(x-a)^2}{\rho^2} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a)\right]. \end{aligned}$$

Sommando e riducendo:

$$\begin{aligned} \sum X_3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = &\frac{1}{\rho} \sum X_3^{(0)} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) \\ &- \frac{1}{\rho^2} \left[(x-a) \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + (y-b) \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + (z-c) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right] \sum 2 X_3^{(0)} (x-a). \end{aligned}$$

Intanto, avendosi

$$\rho = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

sarà:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial u} = \sum (x-a)\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = E + \sum (x-a)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

Dopo di che la precedente si può scrivere

$$D_1 = \frac{1}{\rho} D + \frac{1}{\rho^2} E \sum 2 X_3^{(0)} (x-a). \tag{20}$$

Sostituendo in forza delle (18) per ρ il rapporto $\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E_1}}$, la (20) diventa

$$\frac{D_1}{\sqrt{E_1}} = \frac{D}{\sqrt{E}} + \sqrt{E_1} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a). \tag{21}$$

In modo analogo si trova

$$\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}} = \frac{D''}{\sqrt{G}} + \sqrt{G_1} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a). \tag{22}$$

Moltiplicando la (21) per $\sqrt{G}$, la (22) per $\sqrt{E}$ ed osservando le (18) si ha:

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} + \rho\sqrt{E_1 G_1} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) = \rho\sqrt{G_1}\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}$$

$$\sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} + \rho\sqrt{E_1 G_1} \sum 2 X_3^{(0)} (x-a) = \rho\sqrt{E_1}\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}}.$$

Da queste sottraendo si ricava la relazione

$$\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}} = \rho\left(\sqrt{G_1}\frac{D_1}{\sqrt{E_1}} - \sqrt{E_1}\frac{D''_1}{\sqrt{G_1}}\right). \tag{23}$$

D'altra parte in forza delle (18)

$$\sqrt{G + \varepsilon E} = \rho\sqrt{G_1 + \varepsilon E_1} \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{24}$$

Dalla (23) e (24) si deduce che l'espressione

$$\frac{\sqrt{G}\frac{D}{\sqrt{E}} - \sqrt{E}\frac{D''}{\sqrt{G}}}{\sqrt{G + \varepsilon E}} \tag{25}$$

è un invariante dell'inversione.

Questo risultato permette di dedurre importanti conseguenze per la presente teoria.

Invero la proprietà invariantiva dell'espressione (25) mostra che applicando l'inversione ad una superficie di GUICHARD, si ottengono ∞^3 nuove superficie di GUICHARD.

Componendo l'inversione colla trasformazione di GUICHARD si ha un primo metodo di trasformazione per queste superficie.

§ V. — IL TEOREMA DI GUICHARD.

In questo paragrafo ci occuperemo in particolar modo delle superficie N di prima specie, per le quali adotteremo le notazioni introdotte al § II.

Per la teoria di queste superficie ha grande importanza un teorema del sig. GUICHARD, che può enunciarsi nel modo seguente:

Data una superficie N di prima specie, si può determinare una funzione φ delle variabili u e v, in modo che la superficie I definita dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + e^\varphi (X_1^{(0)} + i\,X_2^{(0)}) \\ y_1 &= y + e^\varphi (Y_1^{(0)} + i\,Y_2^{(0)}) \\ z_1 &= z + e^\varphi (Z_1^{(0)} + i\,Z_2^{(0)}) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

sia isoterma.

La determinazione della funzione φ dipende da un sistema di RICCATI illimitatamente integrabile.

L'autore viene così a dedurre ∞^1 superficie isoterme, riferite alle linee di curvatura, ciascuna delle quali si ottiene come luogo di un punto A_1 situato sulla tangente isotropa della superficie N.

Per ciò che segue è molto utile dimostrare direttamente questo teorema deducendolo dalle formole superiori.

A tale scopo deriviamo le (26) e sostituiamo alle derivate delle funzioni x, y, z, $X_1^{(0)}$, $Y_1^{(0)}$, $Z_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$, le loro espressioni ricavate dalle (9).

Otteniamo così:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \left[e^\xi \operatorname{senh}\Theta + e^\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \Theta}{\partial v} + i\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\right] X_1^{(0)} \\ &+ i\,e^\varphi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i\frac{\partial \Theta}{\partial v} + i\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) X_2^{(0)} + e^\varphi(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,X_3^{(0)}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x_1}{\partial v}=\left[e^{\xi}\cosh\Theta+e^{\varphi}\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)\right]X_2^{(0)}\\&-i\,e^{\varphi}\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)X_1^{(0)}+i\,e^{\varphi}(\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta)X_3^{(0)},\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

colle analoghe in y_1 e z_1.

Imponendo le condizioni

$$\Sigma\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2=\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2,$$

si trova che la funzione φ dovrà soddisfare al sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{senh}\Theta\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)-\cosh\Theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)+\cosh\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\\&-i\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v}-e^{\xi-\varphi}(\cosh\Theta+H\operatorname{senh}\Theta)(\operatorname{senh}\Theta+H\cosh\Theta)=0,\\&\cosh\Theta\left(i\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)-\operatorname{senh}\Theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)+\frac{\cosh^2\Theta}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}\\&-i\frac{\operatorname{senh}^2\Theta}{\cosh\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial v}-\cosh^2\Theta\operatorname{senh}(\varphi-\xi)-\operatorname{senh}^2\Theta\cosh(\varphi-\xi)\\&-\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}(H^2\cosh^2\Theta+H^2\operatorname{senh}^2\Theta+4H\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta)=0,\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

che si può scrivere

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}&=-\operatorname{senh}\Theta\cosh(\varphi-\xi)-i\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial\xi}{\partial v}\\&\qquad-\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}(H^2\operatorname{senh}\Theta+2H\cosh\Theta),\\i\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\Theta}{\partial u}&=\quad\cosh\Theta\operatorname{senh}(\varphi-\xi)-\coth\Theta\frac{\partial\xi}{\partial u}\\&\qquad+\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}(H^2\cosh\Theta+2H\operatorname{senh}\Theta).\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

Intorno a questo sistema osserviamo subito che esso è illimitatamente integrabile in forza delle equazioni (10) che supponiamo soddisfatte; inoltre, posto $\rho=e^{\varphi}$, esso assume la forma di Riccati.

Sostituendo nelle (27) per la derivata della φ le espressioni ricavate dalle (29), si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} = &\Big\{ e^{\xi} \operatorname{senh}\Theta - e^{\varphi}\Big[\operatorname{senh}\Theta \cosh(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} (H^2 \operatorname{senh}\Theta + 2 H \cosh\Theta)\Big]\Big\} X_1^{(0)} \\
&- i\, e^{\varphi}\Big[\operatorname{senh}\Theta \cosh(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} (H^2 \operatorname{senh}\Theta + 2 H \cosh\Theta)\Big] X_2^{(0)} \\
&\qquad + e^{\varphi} (\cosh\Theta + H \operatorname{senh}\Theta) X_3^{(0)}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} = &- i\, e^{\varphi}\Big[\cosh\Theta \operatorname{senh}(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} (H^2 \cosh\Theta + 2 H \operatorname{senh}\Theta)\Big] X_1^{(0)} \\
&+ \Big\{ e^{\xi} \cosh\Theta + e^{\varphi}\Big[\cosh\Theta \operatorname{senh}(\varphi - \xi) + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} (H^2 \cosh\Theta + 2 H \operatorname{senh}\Theta)\Big]\Big\} X_2^{(0)} \\
&\qquad + i\, e^{\varphi} (\operatorname{senh}\Theta + H \cosh\Theta) X_3^{(0)},
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

donde si ricava per l'elemento lineare della I

$$d s^2 = e^{2\varphi} (d u^2 + d v^2).$$

Ed ora dimostriamo che per una funzione φ ricavata dal sistema (29), le equazioni (26) dànno effettivamente una superficie isoterma riferita alle sue linee di curvatura.

A tale oggetto basterà mostrare che sulla superficie I le linee u e v sono coniugate.

Denotando con X_1, Y_1, Z_1, i coseni direttori della tangente ad una linea v e con X_2, Y_2, Z_2 i coseni direttori della tangente ad una linea u, si ha:

$$X_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad Y_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial y_1}{\partial u}, \quad Z_1 = e^{-\varphi} \frac{\partial z_1}{\partial u},$$

$$X_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial x_1}{\partial v}, \quad Y_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial y_1}{\partial v}, \quad Z_2 = e^{-\varphi} \frac{\partial z_1}{\partial v}.$$

E ponendo altresì per brevità

$$l = X_1^{(0)} + i\, X_2^{(0)}, \quad m = Y_1^{(0)} + i\, Y_2^{(0)}, \quad n = Z_1^{(0)} + i\, Z_2^{(0)},$$

avremo le relazioni

$$l\, X_1 + m\, Y_1 + n\, Z_1 = e^{-\varphi} \sum (X_1^{(0)} + i\, X_2^{(0)}) \frac{\partial x_1}{\partial u},$$

$$l\, X_2 + m\, Y_2 + n\, Z_2 = e^{-\varphi} \sum (X_1^{(0)} + i\, X_2^{(0)}) \frac{\partial x_1}{\partial v},$$

e sostituendo per le derivate delle funzioni x_1, y_1, z_1 le espressioni (30), scriveremo

$$\left. \begin{aligned} l\, X_1 + m\, Y_1 + n\, Z_1 &= e^{\xi-\varphi} \operatorname{senh} \Theta, \\ l\, X_2 + m\, Y_2 + n\, Z_2 &= i\, e^{\xi-\varphi} \cosh \Theta. \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

Per i coseni direttori della normale, che denoteremo con X_3, Y_3, Z_3, introdurremo una funzione ausiliaria Ψ che definiremo colla relazione

$$l\, X_3 + m\, Y_3 + n\, Z_3 = \Psi. \tag{32}$$

Per determinare la Ψ basta quadrare e sommare le (31) e (32); tenuto conto della relazione

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0,$$

avremo

$$\Psi = e^{\xi-\varphi}.$$

Dopo di che possiamo risolvere le (31) e (32) rispetto ad l, m, n; cioè

$$\left. \begin{aligned} l &= e^{\xi-\varphi} (X_1 \operatorname{senh} \Theta + i\, X_2 \cosh \Theta + X_3), \\ m &= e^{\xi-\varphi} (Y_1 \operatorname{senh} \Theta + i\, Y_2 \cosh \Theta + Y_3), \\ n &= e^{\xi-\varphi} (Z_1 \operatorname{senh} \Theta + i\, Z_2 \cosh \Theta + Z_3). \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

Da queste formole tenuto conto delle (30) possiamo facilmente ricavare i coseni direttori della normale; si ha dopo riduzione

$$\left. \begin{aligned} X_3 = &\left[\cosh (\varphi - \xi) - \frac{1}{2}\, e^{\varphi-\xi} H^2\right] X_1^{(0)} \\ &+ i \left[\operatorname{senh} (\varphi - \xi) - \frac{1}{2}\, e^{\varphi-\xi} H^2\right] X_2^{(0)} + H\, X_3^{(0)}\,. \end{aligned} \right\} \tag{34}$$

Ed ora derivando, e sostituendo per le derivate di $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, $X_3^{(0)}$, H, φ le loro espressioni ricavate dalle (9), (10), (29) perverremo in forza della (28) alle seguenti relazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_3}{\partial u}&=\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\cosh(\varphi-\xi)-\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2\right]e^{-\varphi}\frac{\partial x_1}{\partial u},\\ \frac{\partial X_3}{\partial v}&=\left[-i\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\operatorname{senh}(\varphi-\xi)-\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2\right]e^{-\varphi}\frac{\partial x_1}{\partial v},\end{aligned}\right\}\qquad(35)$$

colle analoghe in y e z.

Da queste finalmente si ha:

$$\sum\frac{\partial X_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\cosh(\varphi-\xi)-\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2\right]e^{-\varphi}\sum\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=0,$$

e così la proposizione è dimostrata completamente.

Questo teorema del sig. Guichard contiene una trasformazione, che permette di dedurre da una superficie N infinite superficie isoterme dipendenti da una costante arbitraria.

Tale trasformazione chiameremo d'ora innanzi una *trasformazione G.*

§ VI. — Espressione analitica della trasformazione G per mezzo degli invarianti.

Abbiamo sopra espressa analiticamente la trasformazione G per mezzo delle formole (29); ora interessa mettere il risultato sotto una nuova forma introducendo l'invariante Ω (*) della superficie trasformata.

Mostreremo così che la trasformazione G si può rappresentare mediante un sistema di Riccati nella funzione incognita Ω, nel quale i coefficienti sono formati soltanto colla funzione Θ e le sue derivate.

Il vantaggio della nuova rappresentazione per la trasformazione G consiste nel fatto che essa sotto la nuova forma si potrà applicare, oltre che alla superficie N da cui siamo partiti, a tutte le superficie derivate da N mediante l'inversione.

Per la questione che ci siamo proposti calcoliamo anzitutto dalle (35) i

(*) Vedi la mia nota, pag. 283.

coefficienti della seconda forma quadratica per la superficie I; cioè

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_3}{\partial u} = \left[\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \cosh(\varphi - \xi) - \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2 \right] e^{-\varphi},$$

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_3}{\partial v} = \left[- i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \operatorname{senh}(\varphi - \xi) - \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2 \right] e^{-\varphi}.$$

Indicheremo, secondo le notazioni della mia citata Memoria, le funzioni soprascritte rispettivamente con

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)\, e^{\varphi}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega)\, e^{\varphi},$$

ed avremo così:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega) &= - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \cosh(\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega) &= i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} - \operatorname{senh}(\varphi - \xi) + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

le quali possiamo scrivere risolute rispetto ad ω ed Ω, cioè

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\,\omega &= - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} - e^{\varphi-\xi}(1 - H^2), \\ \sqrt{2}\,\Omega &= - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} - i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v} - e^{\xi-\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Ciò posto, deriviamo la seconda di queste, avendo cura di sostituire per le derivate seconde della ξ e per le derivate prime della φ le loro espressioni date dalle (A) e dalle (29); potremo scrivere ordinando convenientemente il risultato nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u} = &- \frac{1}{2\operatorname{senh}\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{senh}\Theta}{2\cosh^2\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2} e^{2\xi-2\varphi}\operatorname{senh}\Theta \\ &- e^{\xi-\varphi}\frac{\partial \xi}{\partial u} - i\, e^{\xi-\varphi}\operatorname{tgh}\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{i}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} \\ &- i \frac{\partial \Theta}{\partial v}\left(e^{\xi-\varphi} + \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + i \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \\ &+ \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \operatorname{senh}\Theta \,.\, W, \end{aligned}$$

donde tenuto conto della seconda delle (37) si ricava:

$$\sqrt{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u} = -\operatorname{senh}\Theta \,.\, \Omega^2 + i\sqrt{2}\frac{\partial \Theta}{\partial v}\Omega + \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \operatorname{senh}\Theta \,.\, W.$$

Analogamente si trova:

$$\sqrt{2}\frac{\partial \Omega}{\partial v} = i\cosh\Theta \,.\, \Omega^2 - i\sqrt{2}\frac{\partial \Theta}{\partial u}\Omega + i\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} + i\cosh\Theta \,.\, W.$$

Perveniamo dunque al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,(\Omega^2 + W) + i\frac{\partial \Theta}{\partial v}\Omega + \frac{1}{\sqrt{2}\cosh\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2}, \\ i\frac{\partial \Omega}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega^2 + W) + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\Omega - \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2}. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Questo sistema ha la forma di RICCATI ed è illimitatamente integrabile in forza delle relazioni (C) per ipotesi verificate.

Esso dà la nuova rappresentazione analitica della trasformazione G e precisamente il passaggio dall'invariante Θ di una superficie N all'invariante Ω di una superficie isoterma.

Viceversa è sufficiente che una funzione Ω verifichi il sistema (38), perchè si possa assumere come invariante per una superficie isoterma.

Infatti in tale ipotesi definiamo una funzione φ colla formola

$$e^{\xi-\varphi} = -\sqrt{2}\,\Omega - \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} - i\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}. \quad (39)$$

Derivando e sostituendo per le derivate seconde della ξ e per le derivate prime di Ω le espressioni date dalle (A) e dalle (38), si ha:

$$\begin{aligned} e^{\xi-\varphi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = {} & \operatorname{senh}\Theta \,.\, \Omega^2 - \frac{1}{2\operatorname{senh}\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 \\ & - i\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\operatorname{senh}\Theta}{2\cosh^2\Theta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 \\ & - i\frac{\partial \Theta}{\partial v}\left(\sqrt{2}\,\Omega + \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + i\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) \\ & + \frac{1}{2}(H^2\operatorname{senh}\Theta + 2H\cosh\Theta) + \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta. \end{aligned}$$

Fra questa e la precedente eliminando Ω e semplificando, si ottiene la prima delle (29); in modo analogo si verifica che la funzione φ definita dalla (39) soddisfa altresì alla seconda delle (29), sicchè possiamo enunciare il risultato seguente:

Se una funzione Ω soddisfa al sistema (38), si ha dalla (39) in termini finiti una funzione φ che soddisfa al sistema (29); per una tale funzione φ le (26) definiscono una superficie isoterma riferita alle linee di curvatura, la quale ammette come invariante la funzione Ω da cui siamo partiti.

Dopo i risultati da me conseguiti nella citata Memoria possiamo affermare che la funzione Ω così ottenuta soddisfa all'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}(\Omega^2)=0, \tag{40}$$

ond'è che dal punto di vista analitico possiamo enunciare il teorema di Guichard sotto la forma seguente:

Se due funzioni Θ e W sono legate dalle relazioni (C), il sistema di Riccati (38) è illimitatamente integrabile; si avrà da esso una funzione Ω con una costante arbitraria, che soddisfarà all'equazione differenziale (40).

§ VII. — Inversione del teorema di Guichard. La trasformazione G^{-1}.

Per lo sviluppo della presente teoria importa invertire il teorema ora dimostrato, cioè:

Ogni superficie isoterma I può sempre considerarsi come derivata da una superficie N, mediante la costruzione indicata dal teorema di Guichard.

Per la dimostrazione adottiamo le notazioni da me adoperate nella citata Memoria.

Denotiamo con x_1, y_1, z_1 le coordinate di un punto mobile su I e con

$$(X_1,\ Y_1,\ Z_1)\quad (X_2,\ Y_2,\ Z_2)\quad (X_3,\ Y_3,\ Z_3)$$

i coseni di direzione dei tre spigoli del triedro principale. Si avrà:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial u}=e^{\varphi}X_1, && \frac{\partial x_1}{\partial v}=e^{\varphi}X_2,\\
&\frac{\partial X_1}{\partial u}=-\frac{\partial \varphi}{\partial v}X_2+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)X_3, && \frac{\partial X_1}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial u}X_2,
\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial X_2}{\partial v}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial u}X_1+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial u}&=\frac{\partial\varphi}{\partial v}X_1,\\ \frac{\partial X_3}{\partial u}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)X_1, & \frac{\partial X_3}{\partial v}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)X_2.\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

Per la illimitata integrabilità di questo sistema si dovranno avere le relazioni

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega)=(\omega-\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial v},\\ &\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega)=(\omega+\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial u},\\ &\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2)=0,\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

che supporremo soddisfatte.

Dopo le ricerche da me esposte nella citata Memoria sappiamo che il sistema (42) è equivalente al sistema completo

$$\left.\begin{aligned}&2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2-2\,\omega\,\Omega)-J,\\ &2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=2\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{2}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v},\\ &2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2+2\,\omega\,\Omega)+J,\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial u}&=\frac{\partial\Omega}{\partial u}+(\omega+\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial u},\\ \frac{\partial\omega}{\partial v}&=-\frac{\partial\Omega}{\partial v}+(\omega-\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial v},\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

nelle funzioni φ, ω; supposto Ω una soluzione dell'equazione differenziale (40) e J una funzione definita a meno di una costante dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial u}&=-2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial u}(\Omega^2),\\ \frac{\partial J}{\partial v}&=2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}(\Omega^2).\end{aligned}\right\}\tag{45}$$

Prendiamo la superficie I come superficie di partenza per una congruenza rettilinea, in cui la direzione del raggio sia espressa mediante le funzioni note X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3 ed un'ausiliaria Θ, dalle formole

$$\left.\begin{aligned} \rho\, l &= X_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, X_2 \cosh\Theta + X_3 \\ \rho\, m &= Y_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Y_2 \cosh\Theta + Y_3 \\ \rho\, n &= Z_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Z_2 \cosh\Theta + Z_3. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Per le coordinate di un punto qualunque sul raggio avremo

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 - e^{\xi}\,(X_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, X_2 \cosh\Theta + X_3) \\ y &= y_1 - e^{\xi}\,(Y_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Y_2 \cosh\Theta + Y_3) \\ z &= z_1 - e^{\xi}\,(Z_1 \operatorname{senh}\Theta + i\, Z_2 \cosh\Theta + Z_3)\,; \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

essendo ξ una funzione delle variabili u e v.

Dico che è possibile disporre delle funzioni Θ e ξ in guisa che il luogo descritto dal punto P sia una superficie N, che ammetta come tangente isotropa il raggio della congruenza.

Infatti assoggettiamo anzitutto le funzioni incognite Θ e ξ alle relazioni (29) e (37), che scriveremo risolute rispetto alle derivate prime della Θ e della ξ, cioè:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \left[e^{\varphi-\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega + \Omega)\right]\cosh\Theta + e^{\varphi-\xi} H \operatorname{senh}\Theta \\ i\frac{\partial\Theta}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial u} &= -\left[e^{\varphi-\xi} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega - \Omega)\right]\operatorname{senh}\Theta - e^{\varphi-\xi} H \cosh\Theta \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial u} &= \operatorname{senh}\Theta\left[\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2 - \cosh(\varphi-\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\right] \\ i\frac{\partial\xi}{\partial v} &= -\cosh\Theta\left[\frac{1}{2}e^{\varphi-\xi}H^2 - \operatorname{senh}(\varphi-\xi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\right] \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

ed aggiungiamo a queste le relazioni (B) cioè:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= (H + \coth\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= (H + \operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Noi dimostreremo che il sistema (48), (49), (50) nelle funzioni incognite Θ, ξ, H è illimitatamente integrabile e che per due funzioni Θ e ξ da esso ricavate, le (47) dánno effettivamente una superficie N nelle condizioni volute, avente per prima e terza forma fondamentale

$$d\,s^2 = e^{2\xi}(\mathrm{senh}^2\,\Theta\,.\,d\,u^2 + \cosh^2\Theta\,.\,d\,v^2)$$

$$d\,s'^2 = (\cosh\Theta + H\,\mathrm{senh}\,\Theta)^2\,d\,u^2 + (\mathrm{senh}\,\Theta + H\cosh\Theta)^2\,d\,v^2.$$

A tale oggetto deriviamo la prima delle (48) rispetto a v ed eliminiamo per mezzo delle (48), (49), (50) le derivate prime delle funzioni incognite.

Posto per brevità

$$\begin{aligned} M = \frac{1}{2}\,i\,e^{\varphi-\xi}\cosh 2\Theta\,.(1+H^2) + \cosh\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{1}{2}\,i\,e^{\xi-\varphi} \\ + i\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\,\mathrm{senh}^2\,\Theta + i\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)\cosh^2\Theta \\ + \left[\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + i\cosh\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\,e^{\varphi-\xi}\,\mathrm{senh}\,2\,\Theta + i\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega\,\mathrm{senh}\,2\,\Theta\right]H, \end{aligned}$$

potremo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) = -i\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + e^{\varphi-\xi}\,M + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega) \\ + i\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\,(\omega+\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + i\,\mathrm{senh}^2\,\Theta\cdot\frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) = i\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + e^{\varphi-\xi}\,M + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,.(\omega-\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ + i\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega) + i\cosh^2\Theta\cdot\frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2)\,. \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right) = \\ = -i\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{2}(\omega^2-\Omega^2)\right] \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\left[\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega) - (\omega-\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] \\ - i\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\left[\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega) - (\omega+\Omega)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right], \end{aligned}$$

il secondo membro della quale è identicamente nullo in forza delle (42) per ipotesi verificate.

Analogamente si ha dalle (49), tenendo conto delle (48), (49), (50):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{\partial}{\partial v}(\omega+\Omega)-(\omega-\Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}$$

$$-i\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\left[\frac{\partial}{\partial u}(\omega-\Omega)-(\omega+\Omega)\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right],$$

e per le (42):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)=\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}+\coth\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}+\operatorname{tgh}\Theta\cdot\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

E finalmente, tenendo conto di quest' ultima, si verifica facilmemente l'identità

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right).$$

Dimostrata così la illimitata integrabilità del sistema (48), (40, (50), veniamo a dimostrare la seconda parte del teorema.

A tale scopo deriviamo le (47) sostituendo per le derivate prime delle funzioni X_i, Y_i, Z_i le loro espressioni ricavate dalle (41). Avremo

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}= & \; e^{\xi}\left[e^{\varphi-\xi}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)-\cosh\Theta\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}+i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)-\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]X_1 \\
& -i\,e^{\xi}\left[\operatorname{senh}\Theta\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}+i\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)+\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]X_2 \\
& -\; e^{\xi}\left[\frac{\partial \xi}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,.\,(\omega+\Omega)\right]X_3, \\
\frac{\partial x}{\partial v}= & \; i\,e^{\xi}\left[\cosh\Theta\left(i\frac{\partial \Theta}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)+i\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}\right]X_1 \\
& +\; e^{\xi}\left[e^{\varphi-\xi}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)-\operatorname{senh}\Theta\left(i\frac{\partial \Theta}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)-i\cosh\Theta\cdot\frac{\partial \xi}{\partial v}\right]X_2 \\
& -\; e^{\xi}\left[\frac{\partial \xi}{\partial v}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\omega-\Omega)\right]X_3.
\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Eliminando fra queste e le (48) e (49) le derivate prime della Θ e della ξ, otterremo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} = & -e^{\xi}\Big[\operatorname{senh}^2\Theta \operatorname{senh}(\varphi-\xi) + \\
& \qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} \operatorname{senh}\Theta\,(H^2 \operatorname{senh}\Theta + 2\,H\cosh\Theta)\Big] X_1 \\
& - i\,e^{\xi}\Big[\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta \operatorname{senh}(\varphi-\xi) + \\
& \qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} \operatorname{senh}\Theta\,(H^2\cosh\Theta + 2\,H \operatorname{senh}\Theta)\Big] X_2 \\
& - e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\left[\frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2 - \cosh(\varphi-\xi)\right] X_3 , \\
\frac{\partial x}{\partial v} = & -i\,e^{\xi}\Big[\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\cosh(\varphi-\xi) + \\
& \qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi}\cosh\Theta\,(H^2 \operatorname{senh}\Theta + 2\,H\cosh\Theta)\Big] X_1 \\
& + e^{\xi}\Big[\cosh^2\Theta\cosh(\varphi-\xi) + \\
& \qquad + \frac{1}{2} e^{\varphi-\xi}\cosh\Theta\,(H^2\cosh\Theta + 2\,H \operatorname{senh}\Theta)\Big] X_2 \\
& - i\,e^{\xi}\cosh\Theta\left[\frac{1}{2} e^{\varphi-\xi} H^2 - \operatorname{senh}(\varphi-\xi)\right] X_3 ,
\end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

colle analoghe in y e z.

Sotto questa forma si verificano facilmente le identità:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 &= e^{2\xi}\operatorname{senh}^2\Theta, \\
\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 &= e^{2\xi}\cosh^2\Theta, \\
\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (53)$$

$$\left.\begin{aligned}
\cosh\Theta\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + i \operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial x}{\partial v} &= e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\,.\,l, \\
\cosh\Theta\cdot\frac{\partial y}{\partial u} + i \operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial y}{\partial v} &= e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\,.\,m, \\
\cosh\Theta\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + i \operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial z}{\partial v} &= e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta\cosh\Theta\,.\,n.
\end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Le prime mostrano che la superficie (47) ha per elemento lineare

$$d\,s^2 = e^{2\xi}(\operatorname{senh}^2\Theta\,.\,d\,u^2 + \cosh^2\Theta\,.\,d\,v^2)\,; \tag{55}$$

le (54) mostrano che il raggio della congruenza è tangente isotropa della superficie, e così è dimostrata una prima parte del teorema.

Per dimostrare la seconda parte occorre anzitutto calcolare i coseni direttori della normale alla superficie (47); denotando questi con $X_3^{(0)}$, $Y_3^{(0)}$, $Z_3^{(0)}$ con opportuni artifizi si ottiene

$$X_3^{(0)} = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,X_1 + i\,(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,X_2 + H\,X_3$$
$$Y_3^{(0)} = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,Y_1 + i\,(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,Y_2 + H\,Y_3$$
$$Z_3^{(0)} = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\,Z_1 + i\,(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\,Z_2 + H\,Z_3.$$

Ed ora derivando e sostituendo per le derivate di X_i, Y_i, Z_i le loro espressioni ricavate dalle (41), avremo:

$$\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} = \left[(\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \operatorname{senh}\Theta\,\frac{\partial H}{\partial u} - H\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\omega + \Omega)\right]X_1$$
$$+\, i\left[(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \cosh\Theta\,\frac{\partial H}{\partial u}\right]X_2$$
$$+\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\omega + \Omega)\,(\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta) + \frac{\partial H}{\partial u}\right]X_3\,.$$

Ed in questa esprimendo in forza delle (48), (49), (50) le derivate della Θ e della H per mezzo delle funzioni ξ, Θ, H, si è condotti, tenendo presenti le (52), alla relazione

$$\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial u} = -\,\frac{\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta}{e^{\xi}\operatorname{senh}\Theta}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,.$$

Allo stesso modo si trova

$$\frac{\partial X_3^{(0)}}{\partial v} = -\,\frac{\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta}{e^{\xi}\cosh\Theta}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,.$$

Ne deriva per la rappresentazione sferica di Gauss la forma

$$d\,s'^2 = (\cosh\Theta + H\operatorname{senh}\Theta)^2\,d\,u^2 + (\operatorname{senh}\Theta + H\cosh\Theta)^2\,d\,v^2.$$

La quale insieme alla (55) mette in evidenza che la superficie definita dalle (47) è appunto una superficie N.

Questo teorema contiene una trasformazione, che in certo modo può chiamarsi inversa della trasformazione G; essa permette di dedurre da una superficie isoterma infinite superficie di GUICHARD dipendenti da tre costanti arbitrarie.

Tale trasformazione chiameremo d'ora innanzi una *trasformazione* G^{-1}.

§ VIII. — ESPRESSIONE ANALITICA DELLA TRASFORMAZIONE G^{-1} PER MEZZO DEGLI INVARIANTI.

Abbiamo sopra espressa analiticamente la trasformazione G^{-1} per mezzo del sistema completo (48), (49), (50); ora trasformeremo questo sistema in un altro equivalente in cui compariscono soltanto Θ ed Ω.

Dalla prima delle (48) derivando rispetto ad u ed ordinando opportunamente otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \left[e^{\varphi - \xi}(\cosh \Theta + H \operatorname{senh} \Theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh \Theta \,.\, (\omega + \Omega)\right] \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$
$$+ \left[e^{\varphi - \xi}(\operatorname{senh} \Theta + H \cosh \Theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{senh} \Theta \,.\, (\omega - \Omega)\right] \frac{\partial \Theta}{\partial u}$$
$$+ \sqrt{2} \cosh \Theta \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u},$$

che per le (48) stesse si può scrivere

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u} + i \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \left(i \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \frac{\partial \Theta}{\partial u}$$
$$+ \sqrt{2} \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} \cdot$$

Ed ora sostituendo per $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$ il suo valore dato dalla seconda delle (43) e semplificando avremo:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} = - i \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2} \cosh \Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\, \Omega \operatorname{senh} \Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} \cdot \quad (55)$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = i \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\ \operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\ \Omega \cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}.$$

Inoltre dalla prima delle (48) derivando ed eliminando dal risultato la H per mezzo delle (49) e (50), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = -i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$+ \sqrt{2}\ \Omega \operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \sqrt{2}\ \Omega \cosh\Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{e^{\varphi-\xi}}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$- i\sqrt{2}\ \Omega \cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i\sqrt{2}\ \Omega \operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{e^{\varphi-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u}.$$

Sommando colla precedente e tenendo conto della prima e terza delle (43):

$$2\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = -i(J + \omega\Omega) - i\sqrt{2}\ \Omega \cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \sqrt{2}\ \Omega \operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

$$+ i\sqrt{2}\ \Omega \operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \sqrt{2}\ \Omega \cosh\Theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2$$

$$+ i e^{\varphi-\xi}\left(\frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial u} + i\frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right).$$

Ed infine sostituendo per le derivate della φ e della ξ le espressioni ricavate dalle (48) e (49) e riducendo:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\ i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\ i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\ \Omega \operatorname{senh}\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v}$$

$$- i\sqrt{2}\ \Omega \cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\ i\,\Omega^2 \cosh 2\Theta - \frac{1}{2}\ i(J + 1).$$

Perveniamo dunque al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} = -i \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2}\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},\\
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v}\\
&\qquad - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} i\,\Omega^2 \cosh 2\Theta - \frac{1}{2} i (J+1),\\
&\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = i \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\frac{1}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v}.
\end{aligned}\right\}\quad (56)$$

Esso dà la nuova rappresentazione analitica della trasformazione G^{-1}, e precisamente il passaggio dall'invariante Ω di una superficie isoterma all'invariante Θ di una superficie di Guichard.

Sotto la nuova forma si verificano assai facilmente le condizioni d'integrabilità che si riducono alle sole (45).

Viceversa è sufficiente che una funzione Θ verifichi il sistema (56), affinchè si possa assumere come invariante per una superficie di Guichard.

Possiamo dare due diverse dimostrazioni.

Una prima, ben semplice, si ha nel seguente modo.

Sommando la prima e la terza delle (56), si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} = \sqrt{2}\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

$$+ \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v},$$

che si può scrivere

$$\sqrt{2}\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} =$$

$$i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial v} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial u}.$$

Ciò posto, definiamo una funzione ausiliaria W colla formola

$$\sqrt{2}\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta\,(W + \Omega^2) = 0, \quad (57)$$

che per la precedente eguaglianza si può anche scrivere

$$i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-\sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\mathrm{senh}\,\Theta\cosh\Theta\,(W+\Omega^2)=0. \quad (58)$$

Scriviamo quest'ultima sotto la forma

$$\cosh^2\Theta\,.\,W=-i\sqrt{2}\cosh\Theta\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial v}-\coth\Theta\cdot\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}+$$
$$+\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial u}-\cosh^2\Theta\cdot\Omega^2.$$

Da cui derivando rispetto ad u ed eliminando dal secondo membro le derivate prime di Ω colle (57) e (58) e la derivata seconda di Ω colla terza delle (56), si ricava la prima delle (C).

Analogamente si ricava la seconda delle (C); ed allora per una funzione Θ ricavata dalle (56), le equazioni (C) ammettono la soluzione comune W definita dalle (57), il che è sufficiente per concludere che la funzione Θ si può assumere come invariante per una superficie di Guichard.

La stessa proprietà può anche dimostrarsi così.

Supposto Θ soluzione del sistema (56), definiamo due funzioni ξ, H mediante le formole:

$$\left.\begin{aligned} e^{\varphi-\xi} &= \cosh\Theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\mathrm{senh}\,\Theta\left(i\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega+\Omega)\cosh^2\Theta+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega-\Omega)\,\mathrm{senh}^2\,\Theta, \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{\varphi-\xi}H &= -\,\mathrm{senh}\,\Theta\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)-\cosh\Theta\left(i\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) \\ &\quad +\sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\cosh\Theta. \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Dico che la soluzione Θ e le due funzioni ξ ed H sopra definite costituiscono una soluzione del sistema (48), (49), (50).

Infatti le (48) sono soddisfatte in forza delle definizioni stesse delle funzioni ξ ed H.

Inoltre derivando la prima delle (59) rispetto ad u, e sostituendo per le derivate seconde di Θ e φ le loro espressioni date dalle (56) e (43) e per le derivate prime di ω le loro espressioni ricavate dalle (44), dopo riduzione si ha:

$$\left.\begin{aligned}2\frac{e^{\varphi-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}=&-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2-2i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial u}+2i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}-1\\&+\Omega^2\cosh 2\Theta-\frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2-2\,\omega\,\Omega);\end{aligned}\right\}\qquad(61)$$

che in forza delle (59) e (60) si può scrivere

$$\frac{2\,e^{\varphi-\xi}}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial\xi}{\partial u}=(e^{\varphi-\xi}H)^2-(e^{\varphi-\xi})^2-1-\sqrt{2}\,(\omega+\Omega)\,e^{\varphi-\xi}.$$

Da questa discende facilmente la prima delle (49); in modo analogo si dimostra che le funzioni ξ ed H verificano la seconda delle (49).

Analogamente derivando la (60) e similmente operando si ha:

$$\begin{aligned}2\frac{e^{\varphi-\xi}}{\cosh\Theta}\left(\frac{\partial H}{\partial u}-H\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)=&-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2-2i\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\\&+2i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\&+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}\Theta\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}-1\\&+\Omega^2\cosh 2\Theta-\frac{1}{2}(\Omega^2-\omega^2-2\,\omega\,\Omega).\end{aligned}$$

Da questa e dalla (61) deriva

$$\frac{\partial H}{\partial u}=(H+\coth\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial u}.$$

In modo analogo si dimostra che le funzioni ξ ed H verificano altresì l'equazione

$$\frac{\partial H}{\partial v}=(H+\operatorname{tgh}\Theta)\frac{\partial\xi}{\partial v}.$$

Da quanto precede risulta che assumendo come funzione Θ una soluzione del sistema (56), la Θ e le funzioni ξ ed H definite dalle (59) e (60) verificano il sistema (48), (49), (50), e ciò è sufficiente per concludere la proposizione.

§ IX. — Composizione di una trasformazione G con una $\overline{G}^{-1}$.

Lo scopo principale di quanto segue è di venire alle formole di trasformazione per le superficie di Guichard di prima e seconda specie, mediante le quali si possano dedurre da una ben nota superficie di Guichard infinite altre superficie della medesima specie.

Sarà utile considerare oltre alle trasformazioni G e G^{-1}, le trasformazioni che da esse si deducono cambiando i in $-i$, le quali denoteremo rispettivamente con $\overline{G}$, $\overline{G}^{-1}$.

Ciò posto, consideriamo una superficie N; applicando ad essa la trasformazione G otterremo infinite superficie I, ed infine applicando a queste la trasformazione $\overline{G}^{-1}$ otterremo infinite nuove superficie N_1.

Il passaggio da una superficie N ad una superficie N_1 diremo brevemente una *trasformazione T*.

Le formole relative che dànno il passaggio dall'invariante Θ della superficie N all'invariante Θ_1 della superficie N_1 sono manifestamente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u^2}=&\frac{\cosh\Theta_1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+i\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}-i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\&+\sqrt{2}\,\Omega\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)+i\sqrt{2}\,\Omega\frac{\partial\Theta}{\partial v}(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\\&-\Omega^2\operatorname{senh}\Omega(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)-W\operatorname{senh}\Theta(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta),\end{aligned}\right\}\quad(62)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u\,\partial v}=&-\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2\\&+\sqrt{2}\,\Omega\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}+i\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}-i\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\\&+\frac{1}{2}i\,\Omega^2(\cosh 2\Theta-\cosh 2\Theta_1),\end{aligned}\right\}\quad(63)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v^2}=&\frac{\operatorname{senh}\Theta_1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-i\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\&+i\sqrt{2}\,\Omega\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)+\sqrt{2}\,\Omega\frac{\partial\Theta}{\partial u}(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)\\&-\Omega^2\cosh\Theta(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)-W\cosh\Theta(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta).\end{aligned}\right\}\quad(64)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial u}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{senh}\Theta\,(\Omega^2+W)+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\Omega+\frac{1}{\sqrt{2}\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}\\ i\frac{\partial\Omega}{\partial v}&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,(\Omega^2+W)+\frac{\partial\Theta}{\partial u}\Omega-\frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}.\end{aligned}\right\}\tag{65}$$

Ora, volendo esprimere queste sotto forma reale, porremo

$$\sqrt{2}\,\Omega=\lambda+i\mu,$$

e le (62), (63), (64), (65) dànno per le funzioni incognite λ, μ, Θ_1 il sistema simultaneo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u^2}&=\frac{\cosh\Theta_1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}+\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\lambda\\ &-(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial v}\mu-\frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta\,(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\,(\lambda^2-\mu^2+2W),\end{aligned}\right\}\tag{66}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial u\,\partial v}&=-\frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}+\lambda\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)\\ &-\mu\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}\lambda\mu\,(\cosh2\Theta_1-\cosh2\Theta),\end{aligned}\right\}\tag{67}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial v^2}&=-\frac{\operatorname{senh}\Theta_1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}-\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)\mu\\ &+(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial u}\lambda-\frac{1}{2}\cosh\Theta\,(\operatorname{senh}\Theta_1-\operatorname{senh}\Theta)\,(\lambda^2-\mu^2+2W),\end{aligned}\right\}\tag{68}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}&=\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}-(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\lambda\frac{\partial\Theta}{\partial v}\\ &-\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\mu+\operatorname{senh}\Theta\,(\cosh\Theta_1+\cosh\Theta)\lambda\mu,\end{aligned}\right\}\tag{69}$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}\right)^2&=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2+2\lambda\left(\cosh\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u}-\cosh\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)\\ &+2\mu\left(\operatorname{senh}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v}+\operatorname{senh}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)\\ &-\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2)(\cosh2\Theta_1-\cosh2\Theta),\end{aligned}\right\}\tag{70}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + (\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta)\frac{\partial \Theta}{\partial u}\mu \\ &+ \left(\cosh\Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \cosh\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)\lambda - \cosh\Theta(\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta)\lambda\mu,\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \mu\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2}\operatorname{senh}\Theta(\lambda^2 - \mu^2 + 2W), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cosh\Theta\,\lambda\mu,\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh}\Theta\,\lambda\mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cosh\Theta(\lambda^2 - \mu^2 + 2W).\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

Dalle (69), (70), (71) risolvendo algebricamente rispetto alle incognite $\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}$, $\frac{\partial \Theta_1}{\partial v}$ si ha:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= -\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \lambda(\cosh\Theta_1 + \cosh\Theta), \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \mu(\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta).\end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Inoltre si verifica facilmente che in forza delle (72), (73), (74) sono anche soddisfatte le (66), (67), (68).

Se si cambia in (74) Θ_1 in $-\Theta_1 + \pi i$, si ha:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} = \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \lambda(\cosh\Theta_1 - \cosh\Theta),$$

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \frac{\partial \Theta}{\partial v} + \mu(\operatorname{senh}\Theta_1 - \operatorname{senh}\Theta),$$

o anche per le (72) e (73):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \lambda\cosh\Theta_1 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \mu\operatorname{senh}\Theta_1 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u}.\end{aligned}\right\} \quad (75)$$

§ X. — Le trasformazioni delle superficie di Guichard di prima specie.

Da quanto precede risulta che partendo da una superficie di Guichard ben nota cogli invarianti Θ, W, integrando il sistema completo

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \lambda \cosh \Theta_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= \mu \operatorname{senh} \Theta_1 + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial u}, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \mu \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{2} \operatorname{senh} \Theta (\lambda^2 - \mu^2 + 2W), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cosh \Theta \, \lambda \mu, \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \operatorname{senh} \Theta \, \lambda \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh} \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2} \cosh \Theta (\lambda^2 - \mu^2 + 2W), \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

nella funzione incognita Θ_1 e in due ausiliarie λ e μ, si deducono infinite nuove superficie di Guichard dipendenti da tre costanti arbitrarie.

Ciò per altro può verificarsi direttamente introducendo la funzione W_1 definita dalla formola

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} \operatorname{senh} \Theta_1 \cosh \Theta_1 (\lambda^2 - \mu^2 + 2W_1) - \lambda \operatorname{senh} \Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} + \mu \cosh \Theta_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{senh} \Theta \cosh \Theta (\lambda^2 - \mu^2 + 2W) - \lambda \operatorname{senh} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u} + \mu \cosh \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} \,. \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Infatti tra la funzione W_1 così definita e le funzioni λ, μ, Θ ricavate dall'integrazione del sistema (76), (77), (78) passano le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cosh \Theta_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial u^2} - \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \frac{1}{2} \operatorname{senh} \Theta_1 (\lambda^2 - \mu^2 + 2W_1), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} - \cosh \Theta_1 \, \lambda \mu, \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mu}{\partial u} &= \lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} - \operatorname{senh} \Theta_1 \lambda \mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{senh} \Theta_1} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial v^2} - \lambda \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} + \frac{1}{2} \cosh \Theta_1 (\lambda^2 - \mu^2 + 2 W_1).\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Donde, per essere

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right),$$

seguono per Θ_1 e W_1 le relazioni fondamentali (C).

Dopo ciò si può assumere come superficie di partenza la superficie generica cogli invarianti Θ_1 e W_1 e ripetere la trasformazione.

In quanto all'integrazione del sistema completo (76), (77), (78) è notevole che essa si compie integrando successivamente due sistemi del tipo di Riccati illimitatamente integrabili.

Invero possiamo sostituire le (77) e (78) con un sistema nella sola funzione incognita $\lambda + i\mu$ che ha manifestamente la forma di Riccati; inoltre le (76) assumono ancora esse la forma di Riccati, ponendo

$$\sigma = \operatorname{tgh} \frac{\Theta_1}{2}.$$

Ne segue che basta conoscere una soluzione particolare del sistema (77) e (78) per avere con sole quadrature l'integrale generale; e in tale ipotesi, conoscendo per il sistema (76) la soluzione particolare $\Theta_1 = \Theta$, potremo anche ricavare la Θ_1 con operazioni di sole quadrature.

Applicando poi la trasformazione T alle nuove superficie, cioè assumendo come funzioni di partenza Θ_1 e W_1, conosceremo per il sistema (77), (78) in forza delle relazioni (80), (81) la soluzione particolare λ e μ.

Concludendo: Se per due funzioni Θ e W si conosce una soluzione particolare del sistema (77) e (78), l'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione richiederà soltanto successive quadrature.

§ XI. — Composizione di una trasformazione G^{-1} con una $\overline{G}$.

Ora immaginiamo di partire da una superficie isoterma I; applicando ad essa la trasformazione G^{-1} avremo infinite superficie N, ed infine applicando a queste la trasformazione $\overline{G}$ otterremo infinite nuove superficie isoterme I_1.

Il passaggio da una superficie I ad una superficie I_1 diremo con Bianchi (*) una trasformazione D.

Le formole che dànno il passaggio dall'invariante Ω della superficie I all'invariante Ω_1 della superficie I_1 sono manifestamente

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} &= -i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \sqrt{2}\cosh\Theta\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{i}{\Omega}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial v},\\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial v} &= \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}i\left(\frac{\partial \Theta}{\partial v}\right)^2 + \sqrt{2}\,\Omega\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial u}\\
&\quad + \frac{1}{2}i\,\Omega^2(\cosh^2\Theta + \mathrm{senh}^2\Theta) - \frac{1}{2}i(J+1),\\
\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} &= i\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\mathrm{senh}\,\Theta\frac{\partial \Omega}{\partial v} - i\sqrt{2}\,\Omega\cosh\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{i}{\Omega}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\,\partial v},
\end{aligned}\right\}\quad(82)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} &= \frac{\partial \Omega}{\partial u} - i(\Omega_1 + \Omega)\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\,(\Omega_1^2 - \Omega^2),\\
\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial v} + i(\Omega_1 - \Omega)\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,.\,(\Omega_1^2 - \Omega^2).
\end{aligned}\right\}\quad(83)$$

Ora volendo esprimere queste sotto forma reale, osserveremo che per tre funzioni Ω, Θ, Ω_1 legate dalle relazioni precedenti sono coesistenti le equazioni nella funzione ausiliaria ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -i\frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{senh}\,\Theta\,.\,(\Omega_1 - \Omega),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = i\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}}\cosh\Theta\,.\,(\Omega_1 + \Omega).$$

(*) Vedi la Nota citata.

Fra queste e le (82), (83) eliminando la Θ, si perviene al seguente sistema completo:

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2\,\Omega\,\Omega_1) - (J+1), \\ 2\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} &= 2\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}, \\ 2\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2\,\Omega\,\Omega_1) + (J+1), \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Omega_1}{\partial u} &= \frac{\partial\Omega}{\partial u} + (\Omega_1 + \Omega)\frac{\partial\psi}{\partial u}, \\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial v} &= -\frac{\partial\Omega}{\partial v} + (\Omega_1 - \Omega)\frac{\partial\psi}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

che è l'espressione analitica della trasformazione D.

§ XII. — Le trasformazioni delle superficie isoterme.

Da quanto precede risulta che la trasformazione D per le superficie isoterme si riassume nel seguente teorema:

Se la funzione Ω è una soluzione dell'equazione differenziale (40), integrando il sistema completo (45), (84), (85) si avrà una nuova soluzione della stessa equazione contenente quattro costanti arbitrarie.

È notevole che il sistema (84), (85) nelle funzioni ψ, Ω_1 non differisce dal sistema (43), (44) nelle funzioni φ, ω che per lo scambio di J in $J+1$.

D'altra parte è noto, per la mia citata Memoria, che il passaggio da Ω ad ω definito dalle equazioni (43) e (44) equivale ad una inversione e ad una trasformazione di Christoffel; segue che una trasformazione D può eseguirsi a meno di movimenti mediante la trasformazione C_m ad un parametro sull'invariante J da me segnalata e rappresentata analiticamente dalla formola

$$J^{(1)} = J + m \qquad (m = \text{costante})$$

più una inversione ed una trasformazione di Christoffel.

Le trasformazioni delle superficie a curvatura costante, che il Bianchi ha dedotto dall'inversione dei teoremi di GUICHARD, rientrano nella trasformazione D.

Ciò risulta evidente mediante considerazioni sintetiche dirette; ma per altro può verificarsi analiticamente nel seguente modo.

Consideriamo una trasformazione di BIANCHI risoluta nelle due componenti immaginarie di BÄCKLUND mediante le formole:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\varphi}{\partial v}&=\operatorname{senh}\sigma\cosh\varphi\operatorname{senh}\Theta+\cosh\sigma\operatorname{senh}\varphi\cosh\Theta,\\ i\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}&=-\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\varphi\cosh\Theta-\cosh\sigma\cosh\varphi\operatorname{senh}\Theta,\end{aligned}\right\}\tag{86}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\psi}{\partial v}&=-\operatorname{senh}\sigma\cosh\psi\operatorname{senh}\Theta+\cosh\sigma\operatorname{senh}\psi\cosh\Theta,\\ i\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}&=\operatorname{senh}\sigma\operatorname{senh}\psi\cosh\Theta-\cosh\sigma\cosh\psi\operatorname{senh}\Theta.\end{aligned}\right\}\tag{87}$$

Dalle formole (86) per derivazione, introducendo le notazioni

$$\sqrt{2}\,\Omega=-e^{-\varphi},$$

$$J=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2},$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\Theta}{\partial u^2}&=-i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\sqrt{2}\cosh(\Theta-\sigma)\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}(\Theta-\sigma)\frac{\partial\Theta}{\partial u}+\frac{i}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v},\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial u\,\partial v}&=\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}i\left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2+\sqrt{2}\,\Omega\operatorname{senh}(\Theta-\sigma)\frac{\partial\Theta}{\partial v}-i\sqrt{2}\,\Omega\cosh(\Theta-\sigma)\frac{\partial\Theta}{\partial u}\\ &\quad+\frac{1}{2}i\,\Omega^2\left[\cosh^2(\Theta-\sigma)+\operatorname{senh}^2(\Theta-\sigma)\right]-\frac{1}{2}i(J+\cosh^2\sigma),\\ \frac{\partial^2\Theta}{\partial v^2}&=i\frac{\partial\Theta}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}-i\sqrt{2}\operatorname{senh}(\Theta-\sigma)\frac{\partial\Omega}{\partial v}-i\sqrt{2}\,\Omega\cosh(\Theta-\sigma)\frac{\partial\Theta}{\partial v}-\frac{i}{\Omega}\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}.\end{aligned}\right\}$$

Inoltre, ponendo $\sqrt{2}\,\Omega_1=e^{\psi}$, dalle (86), (87) si ricava:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Omega_1}{\partial u}&=\frac{\partial\Omega}{\partial u}-i(\Omega_1+\Omega)\frac{\partial\Theta}{\partial v}-\frac{1}{\sqrt{2}}(\Omega_1^2-\Omega^2)\operatorname{senh}(\Theta-\sigma),\\ \frac{\partial\Omega_1}{\partial v}&=-\frac{\partial\Omega}{\partial v}+i(\Omega_1-\Omega)\frac{\partial\Theta}{\partial u}-\frac{i}{\sqrt{2}}(\Omega_1^2-\Omega^2)\cosh(\Theta-\sigma).\end{aligned}\right\}\tag{89}$$

Infine dalle (88) e (89) introducendo la funzione ψ definita da

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -i \frac{\partial \Theta}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega_1 - \Omega) \operatorname{senh} (\Theta - \sigma),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \quad i \frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{2}} (\Omega_1 + \Omega) \cosh (\Theta - \sigma),$$

si ottiene il sistema:

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 - 2 \Omega \Omega_1) - (J + \cosh^2 \sigma),$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{2}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v},$$

$$2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2} (\Omega^2 - \Omega_1^2 + 2 \Omega \Omega_1) + (J + \cosh^2 \sigma),$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial u} = \quad \frac{\partial \Omega}{\partial u} + (\Omega_1 + \Omega) \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial v} = - \frac{\partial \Omega}{\partial v} + (\Omega_1 - \Omega) \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

il quale mette in rilievo la proprietà enunciata.

§ XIII. — Risultati relativi alle superficie di Guichard di seconda specie.

Abbiamo visto che la determinazione delle superficie di Guichard di seconda specie equivale alla seguente questione di analisi:

Determinare nel modo più generale due funzioni Θ e W legate fra loro dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} = & -\frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} \\ & + \frac{1}{\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial u \partial v^2} + 2 \operatorname{tg} \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial u} W, \\ \frac{\partial W}{\partial v} = & \quad \frac{1}{\cos^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} \\ & + \frac{1}{\operatorname{sen} \Theta \cos \Theta} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial u^2 \partial v} - 2 \cot \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial v} W. \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

Supposta nota una soluzione particolare del sistema (90), possiamo dedurre una nuova soluzione contenente tre costanti arbitrarie, integrando il sistema completo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_1}{\partial u} &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda \cos \Theta_1 , \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial v} &= -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial \mu}{\partial u} + \mu \operatorname{sen} \Theta_1 , \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= \frac{1}{\cos\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u^2} + \mu\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial v} &= \mu\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \cos\Theta\,\lambda\,\mu, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial u} &= -\lambda\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \operatorname{sen}\Theta\,\lambda\,\mu, \\ \frac{\partial \mu}{\partial v} &= \frac{1}{\operatorname{sen}\Theta}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial v^2} - \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{1}{2}\cos\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W), \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

e assumendo la funzione W_1 definita dalla formola

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\operatorname{sen}\Theta_1\cos\Theta_1\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W_1) - \lambda\operatorname{sen}\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial u} + \mu\cos\Theta_1\frac{\partial\Theta_1}{\partial v} = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}\Theta\cos\Theta\,(\lambda^2 - \mu^2 - 2W) - \lambda\operatorname{sen}\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial u} + \mu\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

L'integrazione del sistema (91), (92), (93) si può compiere mediante la successiva integrazione di due sistemi di Riccati illimitatamente integrabili.

Un ragionamento analogo a quello seguito per le superficie di Guichard di prima specie conduce al risultato seguente:

Se per due funzioni Θ e W legate dalle relazioni (90) si conosce una soluzione particolare del sistema (92), (93), l'applicazione successiva ed illimitata del metodo di trasformazione richiederà soltanto successive quadrature.