SULLA FUNZIONE POTENZIALE DI UN ELLISSOIDE NON RIFERITO AI SUOI ASSI PRINCIPALI; DI ERNESTO PADOVA, ALLIEVO DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE IN PISA.

Indichiamo con Ox Oy Oz un sistema di coordinate ortogonali qualunque che ha l' origine nel centro dell' ellissoide, siano $(x\,y\,z)$ le coordinate di un punto qualunque riferito a questo sistema e siano $\xi\;\eta\;\zeta$ le coordinate del medesimo punto prese secondo gli assi principali dell' ellissoide.

L' equazione dell' ellissoide potrà sempre porsi sotto la forma.

$$(1)\qquad Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + 2\,T\,yz + 2\,T'xz + 2\,T''xy = 1$$

e proponiamoci di dedurre l' espressione della funzione potenziale dell' ellissoide sopra il punto interno $(x\;y\;z)$ ove si trova l' elemento dm (ammesso che tutti i punti dell' ellissoide si attraggano secondo la legge di Newton) dalla nota espressione della funzione potenziale riferita agli assi principali:

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left\{ 1 - \frac{\xi^2}{a^2+s} - \frac{\eta^2}{b^2+s} - \frac{\zeta^2}{c^2+s} \right\}$$

ove a b c sono i semi-assi dell' ellissoide e

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right)}\ (^*).$$

(*) Vedi « *La teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton ec.* » § VI. form. (17) del ch. Prof. Betti inserita in questo Giornale.

Riferiamo il nostro ellissoide ai suoi assi principali e cerchiamo le espressioni dei semi-assi; è noto dalla geometria analitica che siamo perciò condotti alla risoluzione dell' equazione di 3.° grado in λ

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} S-\lambda & T'' & T' \\ T'' & S'-\lambda & T \\ T' & T & S''-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

di cui le radici $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ essendo i coefficenti della (1) trasformata saranno l' inversa dei quadrati dei semi-assi ossia:

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{c^2}.$$

quindi si avrà l' identità

$$\begin{vmatrix} S-\lambda & T'' & T' \\ T'' & S'-\lambda & T \\ T' & T & S''-\lambda \end{vmatrix} = -\left(\lambda-\frac{1}{a^2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{b^2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{c^2}\right)$$

moltiplicando per s^3 questa equazione e facendo $\lambda = -\frac{1}{s}$ avremo:

$$\begin{vmatrix} Ss+1 & T''s & T's \\ T''s & S's+1 & Ts \\ T's & Ts & S''s+1 \end{vmatrix} = \left(1+\frac{s}{a^2}\right)\left(1+\frac{s}{b^2}\right)\left(1+\frac{s}{c^2}\right) = \Delta^2$$

Quindi Δ viene espresso per mezzo dei coefficienti noti della (1).

Ora indicando con α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ i coseni degli angoli che gli assi $\xi\ \eta\ \zeta$ fanno cogli assi $x\ y\ z$ avremo:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ \eta &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ \zeta &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned}$$

e sostituendo nell'equazione:

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$$

per $\xi\ \eta\ \zeta$ le loro espressioni in $x\ y\ z$ essa deve cangiarsi identicamente nella (1) per modo che possiamo esprimere i coefficienti S S' S'', T T' T'' per mezzo dei coseni e delle lunghezze dei semi-assi $a\ b\ c$, si ha:

$$S=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\alpha'^2}{b^2}+\frac{\alpha''^2}{c^2}\quad,\quad T=\frac{\beta\gamma}{a^2}+\frac{\beta'\gamma'}{b^2}+\frac{\gamma''\beta''}{c^2}$$

$$S'=\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\beta''^2}{c^2}\quad,\quad T'=\frac{\alpha\gamma}{a^2}+\frac{\alpha'\gamma'}{b^2}+\frac{\alpha''\gamma''}{c^2}$$

$$S''=\frac{\gamma^2}{a^2}+\frac{\gamma'^2}{b^2}+\frac{\gamma''^2}{c^2}\quad,\quad T''=\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}+\frac{\alpha''\beta''}{c^2}$$

per cui sostituendo per $\xi\ \eta\ \zeta$ i loro valori nella espressione di V otterremo ponendo in luogo delle funzioni simmetriche delle radici $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ i corrispondenti coefficienti dell' equazione (2).

$$\begin{aligned}V=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\Big\{1-\frac{1}{\Delta^2}\Big[&(x^2+y^2+z^2)\Big(s(SS'+S'S''+SS''-T^2-T'^2-T''^2)\\&+s^2G\Big)-x^2\Big(S-s(S'S''-T^2)\Big)-y^2\Big(S'-s(S''S-T'^2)\Big)\\&-z^2\Big(S''-s(SS'-T''^2)\Big)-2yzs(T'T''-TS)-2xzs(T''T-T'S'\\&-2xys(TT'-T''S'')+2Tyz+2T'xz+2T''xy\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

ove

$$G=\frac{1}{a^2b^2c^2}=\begin{vmatrix}S & T'' & T'\\ T'' & S' & T\\ T' & T & S''\end{vmatrix}$$

A quella espressione di V possiamo dare una forma più elegante trovata da Dirichlet quando si faccia:

$$F = S x^2 + S' y^2 + S'' z^2 + 2 T y z + 2 T' x z + 2 T'' x y$$

funzione che per i valori di $x\ y\ z$ relativi ad un punto interno deve essere < 1,

$$F' = (S' S'' - T^2) x^2 + (S S'' - T'^2) y^2 + (S S' - T''^2) z^2 + 2(T' T'' - T S) y z$$
$$+ 2(T T'' - T' S') x z + 2(T T' - T'' S'') x y = $$

$$\begin{vmatrix} S & T'' & T' & x \\ T'' & S' & T & y \\ T' & T & S'' & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix}$$

e finalmente ponendo:

$$\Delta^2 = G s^3 + G_1 s^2 + G_2 s + 1$$

sarà:

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \left[1 - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(s G_1 + s^2 G) + F - s F'}{\Delta^2} \right].$$

FINE DEL VOLUME XXIII-IV.