

Die Korrektur beträgt also für die 2. Harmonische nur 1 %, für die 4. nur 3 %, für die 6. etwa 12 %, wobei noch kleine Ungenauigkeiten in der Zeichnung und harmonischen Analyse unterlaufen sein mögen. Daß diese Abweichungen praktisch belanglos sind, bedarf keiner Erörterung, und damit dürfte erwiesen sein, daß die analytische Theorie des unbelasteten Frequenztransformers mit sinusförmigem Erregerstrom über den Rahmen einer interessanten mathematischen Studie hinaus auch eine praktische Bedeutung besitzt.

Nichtsdestoweniger wird man die Frage aufwerfen: „Würde denn nun der Praxis neben dem idealen Nutzen, den jede neu gewonnene Erkenntnis in sich trägt, auch ein tatsächlicher Nutzen erwachsen, wenn sie den angegebenen Weg beschritte?“ Diese Frage kann niemand entscheiden als die Praxis selbst, d. h. die Männer, die Frequenztransformatoren berechnen, prüfen und installieren. Mir selbst ist hierzu keine Gelegenheit geboten, und so kann ich nur wünschen, die Praxis möchte an den gewonnenen Ergebnissen wenigstens nicht ohne Prüfung vorübergehen. Außerdem will ich aber in einer späteren Arbeit noch zeigen, wie man die Verhältnisse durch eine graphische Methode auch dann klären kann, wenn man auf die Erzeugung eines sinusförmigen Magnetisierungsstromes verzichten zu sollen glaubt.

## Erklärung der dielektrischen Nachwirkungsvorgänge auf Grund Maxwellscher Vorstellungen.

Von

Karl Willy Wagner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. **Beschreibende Darstellung der Nachwirkungsvorgänge.** In früheren Arbeiten<sup>1)</sup> habe ich eine Reihe von Beziehungen angegeben, mittels derer sich die dielektrischen Nachwirkungserscheinungen zahlenmäßig darstellen lassen. Da in der ersten Veröffentlichung gelegentlich auf gewisse molekulartheoretische Vorstellungen Bezug genommen worden ist, die Herr E. v. Schweidler zur Erklärung der dielektrischen Anomalien herangezogen hat<sup>2)</sup>, und da ich mich zum Teil der Ausdrucksweise angeschlossen habe, die in der grundlegenden Arbeit von Schweidlers benutzt wird, so ist nicht ohne weiteres ersichtlich, daß die von mir gegebenen Beziehungen die erwähnten molekularphysikalischen Vorstellungen nicht zur Voraussetzung haben. Diese Beziehungen lassen sich vielmehr, gemäß ihrem rein beschreibenden Charakter, auch mit anderen geeigneten Vorstellungen verbinden, die man zur Erklärung der Nachwirkungsvorgänge ersinnen mag.

Bekanntlich hat Maxwell in seinem berühmten Werk über Elektrizität und Magnetismus einen Weg zur Erklärung der dielektrischen Nachwirkung angedeutet<sup>3)</sup>, der vor vielen anderen Wegen, die zu demselben Ziele führen, den Vorteil besitzt, daß er den Boden der elementaren Maxwellschen Elektrodynamik nicht verläßt, also insbesondere von speziellen Vorstellungen über den Bau oder das Verhalten des Moleküls keinen Gebrauch macht. Maxwell will die dielektrische Nachwirkung auf Inhomogenitäten des Dielektrikums (bezüglich des Verhältnisses der Dielektrizitätskonstante zur Leitfähigkeit) zurückführen. Da sich aber Maxwell leider darauf beschränkt hat, die Anwendung dieses Gedankens nur skizzenhaft anzudeuten, und da die weitere Ausführung auf dem scheinbar nächstliegenden Wege unüberwindlichen mathematischen Schwierigkeiten begegnet, so hat die schöne Idee Maxwells unsere Einsicht in die dielektrischen Nachwirkungs-

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. (4), Bd. 40 (1913), S. 817—855; ETZ. 1913, S. 1279—1281.

<sup>2)</sup> Ann. d. Phys. (4), Bd. 24 (1907), S. 711.

<sup>3)</sup> J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität u. d. Magnetismus, Bd. 1, Art. 328—330. Berlin 1883.

erscheinungen bisher nicht in dem Maße zu fördern vermocht, wie sie dazu vielleicht berufen ist.

In der vorliegenden Abhandlung soll eine auf dem Maxwell'schen Grundgedanken beruhende Vorstellung von der Struktur unvollkommener Dielektrika entwickelt werden, welche die dielektrischen Nachwirkungerscheinungen der Berechnung zugänglich macht, und die unter plausibeln Voraussetzungen genau zu den Formeln und Beziehungen führt, die ich in der früheren Arbeit aufgestellt habe. Es wird daher nützlich sein, diese Beziehungen zunächst hier kurz wiederzugeben.

Wird im Zeitpunkt  $\tau$  in einem vorher während langer Zeit vor der Einwirkung elektrischer Felder geschützten Dielektrikum ein elektrisches Feld  $\mathfrak{E}$  erzeugt, so entsteht mit dem Felde zugleich eine ihm proportionale dielektrische Verschiebung  $\mathfrak{D}(\tau)$ . Wir setzen unter Benutzung absoluter elektromagnetischer Maßeinheiten

$$\mathfrak{D}(\tau) = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \mathfrak{E} \quad (1)$$

und definieren damit die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  des unvollkommenen Dielektrikums ( $c$  ist die bekannte, der Lichtgeschwindigkeit gleiche Konstante  $= 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec). Bleibt das Feld  $\mathfrak{E}$  weiter in der anfänglichen Stärke bestehen, so wächst die Verschiebung  $\mathfrak{D}$ , wie in Fig. 1 angedeutet, beständig weiter und strebt nach Ablauf langer Zeit einem Endwerte  $\mathfrak{D}(\infty)$  zu, der den Anfangswert  $\mathfrak{D}(\tau)$  um einen bestimmten Bruchteil  $k$  übersteigt:

$$\mathfrak{D}(\infty) = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} (1 + k) \mathfrak{E} \quad (2)$$

Die zu irgendeiner Zeit  $t$  bestehende Verschiebung  $\mathfrak{D}$  kann als Summe des konstanten Endwertes und einer zeitlich veränderlichen Größe  $\mathfrak{D}'$  dargestellt werden:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\infty) + \mathfrak{D}' \quad (3)$$

$\mathfrak{D}'$  ist im vorliegenden Falle negativ. Wir setzen für den betrachteten speziellen Fall gemäß der Fig. 1

$$\mathfrak{D}' = -\frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{4\pi c^2} \psi(t - \tau) \quad (4)$$

Die Funktion  $\psi$  nimmt mit wachsender Zeit  $t$  beständig ab und strebt für  $t = \infty$  dem Werte Null zu. Ihr Anfangswert ist nach Gl. (1) bis (3)

$$\psi(0) = k \quad (5)$$

Die Nachwirkung befolgt nach J. Hopkinson<sup>1)</sup> das **Superpositionsgesetz**. Das heißt, überlagert man dem Felde  $\mathfrak{E}$  zu irgendeiner Zeit  $\tau_1$  ein anderes Feld  $\mathfrak{E}_1$ , so erzeugt dieses eine Nachwirkung  $\mathfrak{D}'_1$ , die genau so verläuft, als ob das Feld  $\mathfrak{E}_1$  allein bestände,

$$\mathfrak{D}'_1 = -\frac{\varepsilon \mathfrak{E}_1}{4\pi c^2} \psi(t - \tau_1),$$

und die sich zu der ebenfalls ungestört verlaufenden Nachwirkung  $\mathfrak{D}'$  des ersten Feldes einfach addiert.

Dieses Prinzip führt zur Berechnung der Nachwirkung eines zeitlich beliebig veränderlichen Feldes. Eine im Zeitpunkt  $\tau$  eingetretene Veränderung des Feldes um den Betrag  $d\mathfrak{E}$  ergibt für irgendeinen späteren Zeitpunkt  $t$  einen Beitrag zur Nachwirkung von der Größe

$$d\mathfrak{D}' = -\frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \psi(t - \tau) d\mathfrak{E} \quad (6)$$

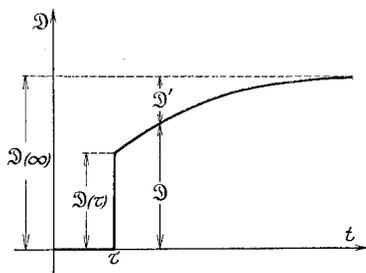


Fig. 1. Zeitlicher Anstieg der dielektrischen Verschiebung nach dem Anlegen des elektrischen Feldes.

<sup>1)</sup> J. Hopkinson, Phil. Trans., Bd. 166 (1877), S. 489; Bd. 167 (1878), S. 599.

Die gesamte Nachwirkung im Zeitpunkt  $t$ , die von allen vorhergehenden Feldänderungen herrührt, wird demnach

$$\mathfrak{D}' = -\frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \psi(t-\tau) d\mathfrak{E} \quad (7)$$

Zur wirklichen Berechnung der Nachwirkungserscheinungen muß man die Funktion  $\psi$  kennen. Ihr Verlauf wird durch die in Fig. 1 gezeichnete Kurve veranschaulicht. Da sie mit wachsender Zeit beständig abnimmt, kann man sie stets durch eine Reihe von Exponentialfunktionen darstellen<sup>1)</sup>:

$$\psi(t) = \sum_n k_n e^{-\frac{t}{T_n}} \quad (8)$$

Wir bezeichnen die Größe  $k_n$  als den „Anfangswert“, die Größe  $T_n$  als die „Zeitkonstante“ des  $n$ ten Exponentialgliedes. Setzt man in Gl. (8) den Wert  $t = 0$  ein, so folgt mit Rücksicht auf Gl. (5), daß

$$\sum_n k_n = k \quad (9)$$

sein muß.

Mit Rücksicht auf den Ausdruck (8) ergibt sich aus (2) und (7) für ein Dielektrikum, in welchem vom Zeitpunkt  $t = 0$  ab ein konstantes Feld  $\mathfrak{E}_0$  aufrechterhalten wird, der folgende Verlauf der Verschiebung:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}_0}{4\pi c^2} \left[ 1 + \sum_n k_n \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_n}} \right) \right] \quad (10)$$

Für ein Wechselfeld mit der Kreisfrequenz  $\omega$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \omega t$$

erhält man aus Gl. (2), (3) und (7) für die Verschiebung den Ausdruck

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}_0}{4\pi c^2} \left[ \left( 1 + \sum_n \frac{k_n}{1 + \omega^2 T_n^2} \right) \sin \omega t - \sum_n \frac{k_n \omega T_n}{1 + \omega^2 T_n^2} \cos \omega t \right] \quad (11)$$

Hieraus folgt, daß

a) die von der Nachwirkung herrührende relative Kapazitätzunahme durch die Beziehung

$$\frac{\Delta C}{C} = \sum_n \frac{k_n}{1 + \omega^2 T_n^2} \quad (12)$$

dargestellt wird.

b) Für den Winkel  $\delta$ , um den die Verschiebung in ihrer Phase hinter dem Felde zurückbleibt, den sogenannten dielektrischen Verlustwinkel, erhält man aus Gl. (11) die Formel

$$\left( 1 + \frac{\Delta C}{C} \right) \operatorname{tg} \delta = \sum_n \frac{k_n \omega T_n}{1 + \omega^2 T_n^2} \quad (13)$$

In den vorstehenden Beziehungen haben wir ein Schema, in das jeder Nachwirkungsvorgang hineinpaßt, sofern er nur das Superpositionsgesetz befolgt. Auch die Wieder-

<sup>1)</sup> Dieser Ansatz hat die folgende physikalische Bedeutung: Man denkt sich die Nachwirkung aus  $n$  Gliedern bestehend. Jedes Glied hat die Eigenschaft, daß es dem Werte null, d. h. dem Gleichgewichtszustande, mit einer Geschwindigkeit zustrebt, die der jeweils noch vorhandenen Abweichung von diesem Zustande proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor, d. i. die Zeitkonstante  $T_n$ , ist aber für alle Glieder verschieden groß.

gabe von Beobachtungswerten kann grundsätzlich keinerlei Schwierigkeit bieten, da beliebig viele willkürliche Konstanten zur Verfügung stehen. Für die theoretische Beherrschung der Nachwirkung ist freilich damit vorläufig nicht viel gewonnen. Die Beobachtungstatsachen leiten jedoch darauf hin, daß die Funktion  $\psi$  keineswegs den verwaschenen Charakter besitzt, den ihr die rechte Seite von Gl. (8) mit ihren beliebig vielen unbestimmten Konstanten zu verleihen scheint. Sie hat vielmehr einen sehr charakteristischen Verlauf. Er besteht, wie früher ausgeführt worden ist<sup>1)</sup>, darin, daß sich die Zeitkonstanten  $T_n$  in ganz bestimmter Weise um einen ausgezeichneten Wert  $T_0$  gruppieren. Mit Rücksicht hierauf hat sich der Ausdruck

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} k(T_n) dT_n e^{-\frac{t}{T_n}} \quad (14)$$

ergeben, worin

$$k(T_n) dT_n = \frac{kb}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(b \ln \frac{T_n}{T_0}\right)^2} d \ln \frac{T_n}{T_0} \quad (15)$$

ist<sup>2)</sup>. Der Ausdruck genügt, wie leicht ersichtlich, der Gl. (5). Die Funktion  $\psi$  enthält außer  $T_0$  nur noch die eine Konstante  $b$ ; und eine genauere Betrachtung lehrt, daß diese allein die Form der Funktion  $\psi$  bestimmt. Denn die Konstante  $T_0$  kommt nur in der Verbindung  $\frac{t}{T_0}$  vor und ergibt daher lediglich den Zeitmaßstab.  $b$  ist eine reine Zahl; je größer sie ist, umso dichter liegen die Zeitkonstanten um den Wert  $T_0$  verteilt<sup>3)</sup>.

Führt man nun für  $k_n$  den Wert nach Gl. (15) in die Gleichungen (10), (12) und (13) ein und verwandelt die Summen in das Integral mit den Grenzen Null und unendlich, so erhält man wohlbestimmte Ausdrücke, deren Verlauf im wesentlichen nur von dem einen Parameter  $b$  bestimmt wird. Da sie in der früheren Arbeit bereits eingehend diskutiert worden sind, braucht hier nicht näher auf sie eingegangen zu werden.

**2. Maxwells geschichtetes Dielektrikum.** Bevor wir nun zeigen, wie sich die vorstehenden Beziehungen aus Maxwellschen Vorstellungen herleiten lassen, sollen diese

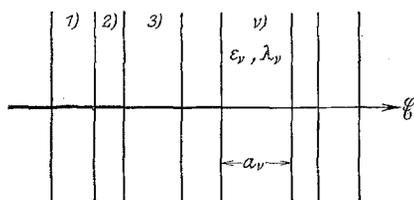


Fig. 2. Maxwells geschichtetes Dielektrikum.

kurz skizziert werden. Maxwell betrachtet ein Dielektrikum, das quer zur Richtung der Feldstärke  $\mathcal{E}$  geschichtet ist (Fig. 2). Innerhalb jeder Schicht ist der Stoff homogen; dagegen soll die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die Leitfähigkeit  $\lambda$  im allgemeinen von Schicht zu Schicht ihren Wert ändern.

Wenn wir die einer bestimmten, z. B. der  $v$ -ten Schicht angehörenden Werte durch den Index  $v$  kennzeichnen, so wird der in dieser Schicht fließende

$$\text{Leitungsstrom} = \lambda_v \mathcal{E}_v$$

$$\text{der Verschiebungsstrom} = \frac{\epsilon_v}{4\pi c^2} \frac{d\mathcal{E}_v}{dt}$$

$$\text{Folglich ist der Gesamtstrom } i = \lambda_v \mathcal{E}_v + \frac{\epsilon_v}{4\pi c^2} \frac{d\mathcal{E}_v}{dt} \quad (16)$$

Er hat in allen Schichten denselben Wert. Der Spannungsabfall in der  $v$ -ten Schicht ist gleich  $a_v \mathcal{E}_v$ , wenn wir mit  $a_v$  die Dicke dieser Schicht bezeichnen; folglich wird die Gesamtspannung

$$E = \sum_v a_v \mathcal{E}_v \quad (17)$$

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. (4), Bd. 40, § 4, S. 830—832.

<sup>2)</sup> Wir werden im 5. Abschnitte auf einem andern Wege zu demselben Ausdruck gelangen.

<sup>3)</sup> Vgl. die Fig. 5 auf S. 832 der Ann. d. Phys. (4), Bd. 40.

Der Beobachtung sind nur die Größen  $i$  und  $E$  unmittelbar zugänglich. Nach Gl. (16) und (17) ist die Beziehung zwischen  $i$  und  $E$  von der Reihenfolge der Schichten unabhängig; gleichartige Schichten darf man sich daher zu einer einzigen Schicht vereinigt denken, deren Dicke gleich der Summe der einzelnen Schichtstärken ist. Die Beobachtung kann jedenfalls über die Verteilung der einzelnen Schichten keinerlei Aufschluß geben.

Maxwell hat nun nachgewiesen, daß ein geschichtetes Dielektrikum dann Nachwirkung zeigt, wenn für mindestens zwei Schichten das Verhältnis  $\frac{\epsilon_v}{\lambda_v}$  einen verschiedenen Wert hat. Die vollständige Darstellung der Nachwirkungsvorgänge bei einem Dielektrikum aus einer größeren Zahl verschiedenartiger Schichten scheidet aber leider an mathematischen Schwierigkeiten. So ist z. B. schon die Berechnung des Ladestromes  $i$  für eine konstante Ladespannung  $E$  bisher nicht gelungen. Für einen sinusförmigen Wechselstrom läßt sich zwar für den periodisch gewordenen Zustand der zugehörige Ausdruck der Ladespannung angeben<sup>1)</sup>, doch gelangt man auf diesem Wege nur zu sehr verwickelten Beziehungen für die relative Kapazitätsänderung und den dielektrischen Verlustwinkel, die einen Vergleich mit der Beobachtung außerordentlich erschweren. Diese Schwierigkeiten ermutigen nicht dazu, den Maxwellschen Erklärungsversuch der Nachwirkungsvorgänge weiter zu verfolgen, besonders wenn man noch dabei berücksichtigt, daß die Annahme einer Schichtung der Inhomogenitäten quer zur Feldrichtung nur eine idealisierende ist, die mit der Wirklichkeit sicher nicht übereinstimmt. Dies hebt übrigens Maxwell selbst ausdrücklich hervor.

**3. Einfaches Modell eines Kondensators mit dielektrischer Nachwirkung.** Das Ziel dieser Untersuchung ist, im Verfolg Maxwellscher Ideen ein Bild von der Struktur eines mit Nachwirkung behafteten Dielektrikums zu geben. Die Einsicht in das physikalische Verhalten dieses Modells wird erleichtert, wenn wir zuvor das Verhalten eines einfachen Kondensatormodells betrachten.

Man denke sich einen Plattenkondensator, dessen Dielektrikum aus einer ebenen, nichtleitenden und rückstandsfreien Schicht von der Dicke  $A$  und der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  besteht. Die metallenen Elektrodenplatten sollen aber nur stellenweise auf der dielektrischen Schicht unmittelbar aufliegen; an den übrigen Stellen soll sich zwischen dieser Schicht und den Elektroden eine schlechtleitende Schicht von der Leitfähigkeit  $\lambda$  befinden. Ihre Dicke soll überall so gering sein, daß durch ihr Vorhandensein die Gleichförmigkeit des elektrischen Feldes in dem Dielektrikum nicht merklich gestört wird; im übrigen aber möge die Dicke der Schicht sich im allgemeinen von Ort zu Ort ändern. Den Raum zwischen den beiden Elektrodenplatten denken wir uns in lauter dünne Röhren aufgeteilt, deren Achsen auf den Elektrodenplatten senkrecht stehen. Von diesen Röhren enthält eine Anzahl nur nichtleitendes Dielektrikum, die übrigen enthalten außerdem eine darüber gelagerte Schicht leitender Substanz.

Wir betrachten zuerst die Röhren dieser letzten Art. Die Schichtdicke des leitenden Stoffes in der  $v$ -ten Röhre nennen wir  $a_v$ ;  $f_v$  sei ihr Querschnitt,  $i_v$  der Strom in dieser Röhre. Dann ist der Spannungsabfall in der leitenden Schicht gleich

$$e_1 = i_v \frac{a_v}{\lambda f_v} \quad (18)$$

In dem Dielektrikum setzt sich der Strom als Verschiebungsstrom fort; bedeutet  $\Phi_v$  den Verschiebungsfluß, so wird

$$i_v = \frac{d\Phi_v}{dt} \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Rowland, Scientific Papers, S. 297. Ein kleines rechnerisches Versehen in dieser Arbeit ist von F. W. Grover (Bull. of the Bur. of Standards, Washington 1911, Bd. 7, S. 519) berichtigt worden

Der auf das Dielektrikum entfallende Anteil der Gesamtspannung ist

$$e_2 = \frac{4 \pi c^2 A}{\epsilon f_\nu} \Phi_\nu \quad (20)$$

Aus Gl. (18) bis (20) erhält man für die Gesamtspannung an der Röhre, die Elektroden-  
spannung

$$E = e_1 + e_2,$$

den Ausdruck

$$E = \frac{a_\nu}{f_\nu \lambda} \frac{d\Phi_\nu}{dt} + \frac{4 \pi c^2 A}{\epsilon f_\nu} \Phi_\nu.$$

Dies kann auch in der Form

$$\frac{d\Phi_\nu}{dt} + \frac{1}{T_\nu} \Phi_\nu = E \frac{c_\nu}{T_\nu} \quad (21)$$

geschrieben werden, worin  $T_\nu$  die Zeitkonstante der Röhre

$$T_\nu = \frac{a_\nu}{A} \frac{\epsilon}{4 \pi c^2 \lambda} \quad (22)$$

und

$$c_\nu = \frac{\epsilon f_\nu}{4 \pi c^2 A} \quad (23)$$

ihre Kapazität bedeutet.

Die Gl. (21) kann allgemein integriert werden. Sei  $E$  eine von einem beliebigen Zeit-  
punkte  $t_1$  ab willkürlich gegebene Funktion der Zeit, und ist  $\Phi_\nu(t_1)$  der gegebene Anfangs-  
wert der Verschiebung, so folgt aus (21):

$$\Phi_\nu = \Phi_\nu(t_1) e^{-\frac{t-t_1}{T_\nu}} + \int_{\tau=t_1}^{\tau=t} E \frac{c_\nu}{T_\nu} e^{-\frac{t-\tau}{T_\nu}} d\tau.$$

$\tau$  ist die Integrationsvariable.

Denkt man sich den Zeitpunkt  $t_1$  sehr weit zurückliegend, so hat der Anfangszustand  
keinen Einfluß auf die Werte der Verschiebung in endlichen Zeiten; das erste Glied auf  
der rechten Seite der letzten Gleichung verschwindet, und man erhält:

$$\Phi_\nu = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} E \frac{c_\nu}{T_\nu} e^{-\frac{t-\tau}{T_\nu}} d\tau \quad (24)$$

Durch partielle Integration folgt hieraus

$$\Phi_\nu = E c_\nu - \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} c_\nu e^{-\frac{t-\tau}{T_\nu}} dE \quad (25)$$

Den Verschiebungsfluß durch sämtliche Röhren, in denen eine leitende Schicht enthalten  
ist, erhält man durch einfache Summation:

$$\sum_\nu \Phi_\nu = E \sum_\nu c_\nu - \int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} dE \sum_\nu c_\nu e^{-\frac{t-\tau}{T_\nu}}.$$

Addiert man hierzu noch den Verschiebungsfluß durch die Röhren mit rein dielektrischem  
Inhalt

$$\Phi_0 = C E,$$

wobei also  $C$  die Kapazität der Gesamtheit dieser Röhren bedeutet, so erhält man den  
gesamten Verschiebungsfluß  $\Phi$ :

$$\Phi = E C (1 + k) - C \int_{\tau = -\infty}^{\tau = t} dE \sum_{\nu} k_{\nu} e^{-\frac{t-\tau}{T_{\nu}}} \quad (26)$$

darin ist

$$k_{\nu} = \frac{c_{\nu}}{C} \quad (26a)$$

und

$$\sum_{\nu} k_{\nu} = k \quad (26b)$$

gesetzt.

Die Bedeutung der Gl. (26) erhellt aus folgender Betrachtung. Für den Fall, daß eine konstante Spannung  $E$  bereits seit sehr langer Zeit gewirkt hat ( $dE = 0$ ), reduziert sich Gl. (26) auf das erste Glied. Dieses stellt also den konstanten Endwert des Verschiebungsfusses bei der Gleichspannung  $E$  dar:

$$\Phi(\infty) = E C (1 + k) \quad (27)$$

Diese Gleichung entspricht der Gl. (2). Setzt man analog zu Gl. (3)

$$\Phi = \Phi(\infty) + \Phi',$$

so wird nach (26) und (27)

$$\Phi' = -C \int_{\tau = -\infty}^{\tau = t} dE \sum_{\nu} k_{\nu} e^{-\frac{t-\tau}{T_{\nu}}} \quad (28)$$

Diese Beziehung ist mit der Gl. (7) identisch, wenn darin für die Funktion  $\psi$  der Ausdruck (8) eingesetzt wird.

Für den Fall, daß im Zeitpunkt  $t = 0$  plötzlich eine Gleichspannung  $E_0$  an den Kondensator angelegt wird, hat man in (26)

$$\begin{aligned} dE &= 0 \quad \text{für } \tau = -\infty \text{ bis } -0 \\ \int_{-0}^{+0} dE &= E_0 \quad \text{für } \tau = -0 \text{ bis } +0 \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad dE = 0 \quad \text{für } \tau = +0 \text{ bis } +\infty$$

einzusetzen. Man erhält mit Rücksicht auf (26b)

$$\Phi = C E_0 \left[ 1 + \sum_{\nu} k_{\nu} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_{\nu}}} \right) \right] \quad (29)$$

Dies entspricht der Gl. (10). Ebenso ergibt sich für eine Wechselspannung

$$E = E_0 \sin \omega t$$

aus (26) das Analogon zur Gl. (11), und daraus folgen genau die Ausdrücke (12) und (13) für die Abhängigkeit der Kapazität und des Verlustwinkels von der Wechselstromfrequenz.

Im vorstehenden ist nachgewiesen worden, daß unser Kondensatormodell dielektrische Nachwirkung zeigt, welche von den allgemeinen Beziehungen beherrscht wird, die im Abschnitt 1 angeführt worden sind. Dabei ist besonders bemerkenswert, daß es nur aus zwei der einfachsten Substanzen besteht, aus einem reinen Leiter und einem idealen, nichtleitenden Dielektrikum. Lediglich die vorausgesetzte besondere Anordnung dieser Stoffe verursacht das scheinbar so komplizierte Verhalten des Kondensators.

Bei dem Modell besitzen die in der Theorie im Abschnitt 1 auftretenden Konstanten eine einfache physikalische Bedeutung.  $T_{\nu}$  ist die Zeitkonstante einer Röhre, bei der die Schichtdicke der leitenden Substanz die Größe  $a_{\nu}$  hat (Gl. 22).  $k_{\nu}$  ist nach Gl. (26a) proportional der Röhrenkapazität und somit ein Maß dafür, wie stark die Röhren mit der speziellen Zeitkonstante  $T_{\nu}$  an dem dielektrischen Vorgange beteiligt sind. Wird z. B. die Unter-

teilung so vorgenommen, daß alle Röhren einen einheitlichen Querschnitt  $f$ , erhalten (Gl. 23), und faßt man alle Exponentialglieder mit derselben Zeitkonstante  $T_y$  zu einem einzigen zusammen, so mißt die Konstante  $k$ , die Anzahl aller Röhren mit dieser Zeitkonstante.

**4. Hypothetisches Bild von der Struktur eines Dielektrikums.** Das vorstehende einfache Kondensatormodell zeigt, daß es möglich ist, Kombinationen von Stoffen zu ersinnen, die als Ganzes das im Abschnitt 1 skizzierte Verhalten zeigen, ohne daß einer der benutzten Stoffe für sich dielektrische Nachwirkung hat. Verhältnisse wie die im Abschnitt 3 geschilderten kommen auch in der Praxis gelegentlich vor. Man braucht nur an Glimmerkondensatoren zu denken, deren Belegungen mit einem schlechtleitenden Klebstoff befestigt sind. Die Nachwirkung solcher Kondensatoren kann unter Umständen vielfach größer sein als die des reinen Glimmers.

Zur Erklärung der dielektrischen Nachwirkung, die alle festen Dielektrika in mehr oder minder hohem Maße auch dann zeigen, wenn leitende Oberflächenschichten vermieden sind, betrachten wir das folgende Modell eines unvollkommenen Dielektrikums.

Wir denken uns in einer nichtleitenden Grundsubstanz von der Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  kleine Kugeln verteilt, deren Dielektrizitätskonstante den nämlichen Wert  $\epsilon$  hat, und die außerdem eine gewisse Leitfähigkeit  $\lambda$  besitzen. Das Dielektrikum möge den Raum zwischen zwei ebenen parallelen Elektrodenplatten erfüllen. Bei Abwesenheit der leitenden Kugeln wäre das Feld homogen. Jede Kugel ruft eine gewisse Störung dieses Feldes hervor, die besonders innerhalb der Kugel und in ihrer näheren Umgebung ins Gewicht fällt, in großem Abstand von ihr aber unmerklich klein wird. Wenn nun angenommen wird, daß die einzelnen Kugeln genügend weit voneinander entfernt sind, so beeinflußt jede Kugel das Feld genau so, als ob die übrigen nicht vorhanden wären. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich das Verhalten unseres Dielektrikums in ähnlicher Weise untersuchen, wie dies Maxwell für den Fall eines homogenen Leiters getan hat, in den kleine Kugeln von anderer Leitfähigkeit eingestreut sind<sup>1)</sup>.

Wir stellen zunächst die Störung fest, die ein ursprünglich homogenes elektrisches Wechselfeld

$$\mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$$

( $\omega =$  Kreisfrequenz;  $j = \sqrt{-1}$ ) durch eine der Kugeln erfährt. Der Kugelradius sei  $R$ .

Die elektrische Feldstärke innerhalb der Kugel bezeichnen wir mit  $\mathfrak{F}$ , außerhalb mit  $\mathcal{E}$ . Da das Feld überall wirbelfrei ist, kann man

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\text{grad } \varphi \\ \mathfrak{F} &= -\text{grad } \psi\end{aligned}$$

ansetzen. Außerdem ist das Feld sowohl außerhalb wie innerhalb der Kugel quellenfrei:

$$\text{div } \mathcal{E} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{F} = 0.$$

Die Potentiale  $\varphi$  und  $\psi$  erfüllen daher die Differentialgleichungen

$$\Delta\varphi = 0$$

und

$$\Delta\psi = 0.$$

An der Oberfläche der Kugel muß das Feld die folgenden Grenzbedingungen erfüllen:

a) Wegen der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes darf die tangentielle Komponente beim Durchgang durch die Kugeloberfläche nirgends einen Sprung erleiden.

b) Da die elektrischen Stromlinien nirgends enden können, muß die Normalkomponente der Gesamtströmung beim Durchgang durch die Kugeloberfläche überall stetig sein.

<sup>1)</sup> „Lehrbuch der Elektrizität u. d. Magnetismus“, Bd. I, Art. 314.

Endlich muß das Feld in großem Abstände von der Kugel in das homogene Feld  $\mathfrak{E}_0$  übergehen.

Zur Lösung des durch diese Bedingungen gegebenen Problems ist es nützlich, Kugelkoordinaten mit dem Kugelzentrum als Anfangspunkt einzuführen. Die Achse des Koordinatensystems legen wir in die Richtung des Feldes  $\mathfrak{E}_0$ . Da das Feld um diese Achse offenbar symmetrisch verteilt ist, so hängt der Zustand in irgendeinem Punkte A nur von seinem Abstände r vom Koordinatenanfang und von der Poldistanz  $\vartheta$  ab (Fig. 3). Mit Rücksicht auf die axiale Symmetrie lautet die Differentialgleichung  $\Delta\varphi = 0$  in Kugelkoordinaten

$$r \frac{\partial^2 (r \varphi)}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right\} = 0$$

Darin ist

$$\mu = \cos \vartheta.$$

Eine entsprechende Gleichung gilt für  $\psi$ . Wir lösen die Gleichung in bekannter Weise<sup>1)</sup> durch den Ansatz

$$\varphi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right\} P_n(\mu) \quad (30)$$

Die  $A_n$  und  $B_n$  bedeuten willkürliche Konstanten. Die Kugelfunktion  $P_n(\mu)$  ist diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu} \right] + n(n+1) P_n = 0,$$

die für  $\mu = 0$  (das heißt am Äquator,  $\vartheta = 90^\circ$ ) endlich bleibt. Diese Lösung lautet, abgesehen von einem konstanten Faktor<sup>2)</sup>:

$$\text{für } n = 0 \quad P_0 = 1;$$

$$\text{für } n = 1 \quad P_1 = \mu = \cos \vartheta;$$

$$\text{für } n = 2 \quad P_2 = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\vartheta + 1);$$

$$\text{für } n = 3 \quad P_3 = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta).$$

.....

Wir können jetzt schon zeigen, daß für das hier vorliegende Problem von der Reihe Gl. (30) nur das zweite Glied ( $n = 1$ ) in Frage kommt. In großer Entfernung vom Kugelzentrum soll das Feld den konstanten Wert  $\mathfrak{E}_0$  annehmen. Das zugehörige Potential ist daher

$$\varphi = |\mathfrak{E}_0| x = |\mathfrak{E}_0| r \cos \vartheta = |\mathfrak{E}_0| r P_1(\mu), \quad (31)$$

wo x die Entfernung des Punktes A mit dem Potential  $\varphi$  von der Äquatorebene bedeutet (Fig. 3). Der Ausdruck (31) ist aber gerade der Wert, in den das zweite Glied ( $n = 1$ ) der Reihe (30) für großes r übergeht, sofern man

$$A_1 = |\mathfrak{E}_0| = E_0 \quad (32)$$

setzt.

Für das Potential  $\psi$  im Innern der Kugel hat man im allgemeinen Falle analog zu (30) den Ansatz:

$$\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right\} P_n(\mu)$$

<sup>1)</sup> Siehe z. B. A. R. Forsyth, Differentialgleichungen, 2. Aufl., § 262—263. Braunschweig 1912.

<sup>2)</sup> Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln, S. 79; Leipzig u. Berlin 1909.

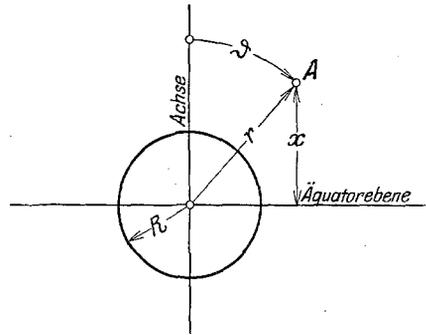


Fig. 3.

Damit aber im Kugelmittelpunkte das Potential  $\psi$  endlich bleibe, sind sämtliche  $b_n = 0$  zu setzen, und man erhält somit

$$\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n r^n P_n(\mu) \quad (33)$$

An der Kugeloberfläche sind die Grenzbedingungen zu beachten. Die Bedingung a) (S. 378 unten) erfordert, daß die tangentialen Feldkomponenten

$$\mathcal{E}_\vartheta = -\frac{r}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}$$

und

$$\mathcal{F}_\vartheta = -\frac{r}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}$$

an der Kugeloberfläche, das heißt für  $r = R$ , einander gleich sein, und zwar für jeden beliebigen Wert von  $\vartheta$  (bzw. von  $\mu$ ). Es muß also für  $r = R$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial \psi}{\partial \mu}$$

sein. Die Gleichungen (30) und (33) lehren, daß dies nur dann möglich ist, wenn für jeden Wert von  $n$  zwischen den Konstanten  $A$ ,  $B$  und  $a$  die Beziehung

$$A_n R^n + \frac{B_n}{R^{n+1}} = a_n R^n \quad (34)$$

erfüllt ist.

Die Grenzbedingung b) verlangt die Stetigkeit der radialen Strömungskomponenten für  $r = R$ . Wir wollen zunächst allgemein annehmen, daß die Leitfähigkeit  $\lambda$  und die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  sowohl innerhalb der Kugel wie außerhalb beliebige Werte haben. Wir bezeichnen sie für das Kugellinnere mit  $\lambda_1$  bzw.  $\epsilon_1$ , für den Außenraum mit  $\lambda_2$  bzw.  $\epsilon_2$ . Im Kugellinnern ist der Leitungsstrom gleich  $\lambda_1 \mathcal{F}$ ; der Verschiebungsstrom gleich

$$\frac{\epsilon_1}{4\pi c^2} \frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{\epsilon_1 j \omega}{4\pi c^2} \mathcal{F};$$

also die Gesamtströmung

$$i_1 = \left( \lambda_1 + \frac{\epsilon_1 j \omega}{4\pi c^2} \right) \mathcal{F} = \Lambda_1 \mathcal{F}.$$

Für den Außenraum gilt entsprechend

$$i_2 = \Lambda_2 \mathcal{E}$$

mit

$$\Lambda_2 = \lambda_2 + \frac{\epsilon_2 j \omega}{4\pi c^2}$$

Nach der Grenzbedingung b) soll für  $r = R$

$$(i_1)_r = (i_2)_r$$

oder

$$\Lambda_1 \mathcal{F}_r = \Lambda_2 \mathcal{E}_r$$

oder

$$\Lambda_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} = \Lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

sein. Mit Rücksicht auf Gl. (30) und (33) bedeutet dies, daß für jedes beliebige  $n$  die Beziehung

$$\Lambda_2 \left( n A_n R^{n-1} - (n+1) \frac{B_n}{R^{n+2}} \right) = \Lambda_1 n a_n R^{n-1} \quad (35)$$

gelten muß.

Nun ist bereits festgestellt worden, daß sämtliche  $A_n$  außer  $A_1$  den Wert Null haben müssen, wenn das Feld in großem Abstände von der Kugel in den Wert  $\mathfrak{E}_0$  übergehen soll. Setzt man aber in die Gleichungen (34) und (35) den Wert  $A_n = 0$  ein, so widersprechen sie sich, und der Widerspruch löst sich nur, wenn auch  $a_n = 0$  und  $B_n = 0$  gesetzt wird. Dies gilt für alle  $n$ , außer für  $n = 1$ , wo nach Gl. (32)  $A_1 = E_0$  einzusetzen ist. Tut man dies, so erhält man aus (34) und (35)

$$a_1 = E_0 \frac{3 \Lambda_2}{\Lambda_1 + 2 \Lambda_2} \text{ und } B_1 = E_0 R^3 \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2 \Lambda_2 + \Lambda_1}.$$

Für die Potentiale  $\varphi$  und  $\psi$  ergeben sich hiermit die Ausdrücke

$$\varphi = E_0 \left( r + \frac{R^3}{r^2} \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2 \Lambda_2 + \Lambda_1} \right) \cos \vartheta \quad (36)$$

und

$$\psi = E_0 r \frac{3 \Lambda_2}{2 \Lambda_2 + \Lambda_1} \cos \vartheta.$$

Nachdem wir in Gl. (36) den Ausdruck für das durch die Anwesenheit einer Kugel gestörte Potential im Außenraum gefunden haben, betrachten wir jetzt den Fall, daß eine beliebige Anzahl von solchen Kugeln in der Grundsubstanz eingebettet sei. Der gegenseitige Abstand dieser Kugeln soll im Vergleich zu ihrem Radius  $R$  so groß sein, daß die störende Wirkung jeder einzelnen Kugel dieselbe ist, als ob die übrigen Kugeln nicht vorhanden seien. Ein Beobachter, der von der Anwesenheit der Kugeln nichts weiß und der bei der Kreisfrequenz  $\omega$  Messungen an der Substanz anstellt, wird für diese eine scheinbare Dielektrizitätskonstante  $\epsilon'$  und eine scheinbare Leitfähigkeit  $\lambda'$  finden und der Substanz demgemäß einen komplexen Leitfähigkeitsoperator

$$\Lambda' = \lambda' + j \omega \frac{\epsilon'}{4 \pi c^2} \quad (37)$$

zuschreiben. Wir wollen nun die Größe  $\Lambda'$  unter der vorstehenden Voraussetzung berechnen und bedienen uns dazu der folgenden Überlegung<sup>1)</sup>.

Man denke sich aus dem zu betrachtenden Stoffe einen kugelförmigen Raum vom Radius  $R_0$  herausgeschnitten, der eine Anzahl  $m$  von den kleinen Kugeln enthalten möge. Der Raum außerhalb der Kugel  $R_0$  soll nur die Grundsubstanz — also keine kleinen Kugeln — enthalten. In diesem Raume gilt daher in genügend großem Abstände von der Kugel  $R_0$  für das Potential  $\varphi$  nach Gl. (36) der Ausdruck

$$\varphi = E_0 \left( r + \frac{m R^3}{r^2} \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2 \Lambda_2 + \Lambda_1} \right) \cos \vartheta,$$

worin für  $r$  nunmehr der Abstand von dem Mittelpunkt der Kugel  $R_0$  eingesetzt werden darf. An Stelle der Anzahl  $m$  der kleinen Kugeln, die in der großen Kugel enthalten sind, führt man besser das Verhältnis

$$P = \frac{m R^3}{R_0^3} \quad (38)$$

des Gesamtvolumens der kleinen Kugeln zu dem auf sie entfallenden Volumen der Grundsubstanz ein. Hiermit wird

$$\varphi = E_0 \left( r + \frac{P R_0^3}{r^2} \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2 \Lambda_2 + \Lambda_1} \right) \cos \vartheta. \quad (39a)$$

<sup>1)</sup> Maxwell, a. a. O., Art. 314.

Denkt man sich nunmehr die Kugel vom Radius  $R_0$  von einer Substanz mit dem Leitfähigkeitsoperator  $\Lambda'$  gleichförmig erfüllt, so würde das Potential nach Gl. (36) durch den Ausdruck

$$\varphi = E_0 \left( r + \frac{R_0^3}{r^2} \frac{\Lambda_2 - \Lambda'}{2\Lambda_2 + \Lambda'} \right) \cos \vartheta \quad (39b)$$

gegeben sein. Die Ausdrücke (39a) und (39b) werden einander gleich, wenn man

$$\Lambda' = \Lambda_2 \frac{2\Lambda_2 + \Lambda_1 - 2p(\Lambda_2 - \Lambda_1)}{2\Lambda_2 + \Lambda_1 + p(\Lambda_2 - \Lambda_1)}$$

setzt. Mit Rücksicht darauf, daß unsere Betrachtungen einen kleinen Wert des Volumenverhältnisses  $p$  notwendig voraussetzen müssen, kann der vorstehende Ausdruck vereinfacht werden zu

$$\Lambda' = \Lambda_2 \left( 1 - 3p \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{2\Lambda_2 + \Lambda_1} \right) \quad (40)$$

Dies gilt für beliebige Werte der Leitfähigkeitsoperatoren

$$\Lambda_1 = \lambda_1 + j\omega \frac{\varepsilon_1}{4\pi c^2}$$

und

$$\Lambda_2 = \lambda_2 + j\omega \frac{\varepsilon_2}{4\pi c^2}.$$

Unter der speziellen Voraussetzung

$$\lambda_2 = 0; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon; \quad \lambda_1 = \lambda$$

läßt sich der Ausdruck (40) noch weiter beträchtlich vereinfachen. Man erhält

$$\Lambda' = j\omega \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \left[ 1 + \frac{3p\lambda}{\lambda + j\omega \frac{3\varepsilon}{4\pi c^2}} \right]$$

oder, wenn man

$$T = \frac{3\varepsilon}{4\pi c^2 \lambda} \quad (41)$$

setzt,

$$\Lambda' = j\omega \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \left[ 1 + \frac{3p}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{3p\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right] \quad (42)$$

Der Operator  $\Lambda'$  vermittelt die Beziehung zwischen der Strömung  $i$  und der Feldstärke  $\mathcal{E}$  in dem zusammengesetzten Dielektrikum:

$$i = \Lambda' \mathcal{E}.$$

Die zu  $i$  gehörige dielektrische Verschiebung ist

$$\mathfrak{D} = \int i dt = \frac{i}{j\omega}.$$

Folglich lautet die Beziehung zwischen der Verschiebung und der Feldstärke:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon \mathcal{E}}{4\pi c^2} \left[ 1 + \frac{3p}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{3p\omega T}{1 + \omega^2 T^2} \right] \quad (43)$$

Dies ist nun wieder genau die im Abschnitt 1 abgeleitete Beziehung (11), wenn man diese auf ein Glied ( $n = 1$ ) beschränkt und in der komplex-symbolischen Form schreibt. Es ist bemerkenswert, daß die Zeitkonstante  $T$  nach Gl. (41) nur von den Stoffeigenschaften, nicht aber von der Teilchengröße abhängt.

Wir können nun noch einen Schritt weiter gehen und annehmen, daß in der Grundsubstanz nicht nur eine einzige Art von leitenden Kügelchen

enthalten sei, sondern  $n$  Arten, mit den verschiedenen Leitfähigkeiten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Die relativen räumlichen Dichten dieser verschiedenen Substanzen seien mit  $p_1, p_2, \dots, p_n$  bezeichnet. Halten wir nach wie vor an der Voraussetzung fest, daß die einzelnen Kügelchen genügend weit von einander entfernt sind, daß also jedes für sich das elektrische Feld so stört, als ob es allein vorhanden wäre, so können alle diese Störungsglieder einfach superponiert werden. Dann erhält man an Stelle von Gl. (43) die Beziehung

$$\mathfrak{D} = \frac{\epsilon \mathfrak{E}}{4 \pi c^2} \left[ \mathfrak{I} + \sum_n \frac{3 p_n}{\mathfrak{I} + \omega^2 T_n^2} - j \sum_n \frac{3 p_n \omega T_n}{\mathfrak{I} + \omega^2 T_n^2} \right] \quad (43a)$$

die inhaltlich mit der Gl. (11) völlig übereinstimmt. Hiervon ausgehend kann man unschwer zeigen, daß dieses Modell eines Dielektrikums auch alle übrigen allgemeinen Beziehungen [(Gl. (1) bis (13)] der Theorie im Abschnitte 1 erfüllt.

**5. Verteilungsgesetz der Zeitkonstanten.** Nach Gl. (41) hängen die Zeitkonstanten

$$T_n = \frac{3 \epsilon}{4 \pi c^2 \lambda_n}$$

unseres Modells nicht von der Größe der Teilchen, sondern nur von ihrer Leitfähigkeit  $\lambda_n$  ab. Wir wollen nun annehmen, daß die verschiedenen Werte von  $\lambda_n$  nicht durch verschiedene Art der Substanz der Teilchen bedingt sind, sondern daß sie vielmehr dadurch zustande kommen, daß eine bestimmte leitende Substanz in den einzelnen Teilchen dem dielektrischen Grundstoff in verschiedener Menge beigemischt sei. Die Größe  $p_n$  ist ein Maß dafür, wie häufig die Teilchen mit der Zeitkonstante  $T_n$  vorkommen, das heißt, mit einem gegebenen Mischungsverhältnis der dielektrischen Grundsubstanz mit dem leitenden Stoffe. Zu einer bestimmten Aussage hierüber gelangt man unter plausiblen Voraussetzungen durch die folgende Betrachtung.

Die leitende Substanz möge bei der Bildung des Dielektrikums das Bestreben gehabt haben, sich auf die einzelnen Kügelchen gleichförmig zu verteilen. Wäre die Verteilung wirklich in dieser Weise erfolgt, so hätten sämtliche Teilchen dieselbe Leitfähigkeit, und es gäbe demzufolge nur einen einzigen Wert  $T_0$  der Zeitkonstante. Dem Bestreben der leitenden Substanz nach gleichförmiger Verteilung sollen zahlreiche störende Umstände entgegengewirkt haben, wobei aber jede dieser Störungsquellen bald im Sinne der Anhäufung leitender Substanz und bald im entgegengesetzten Sinne gewirkt haben mag. Wir nehmen an, daß jede dieser Störungsursachen unabhängig von allen übrigen dahin gewirkt habe, die Menge des in einem Kügelchen niedergeschlagenen leitenden Stoffes in einem bestimmten ihr eigentümlichen Verhältnisse  $(1 + q)$  zu verändern. Es soll aber lediglich dem Zufall überlassen gewesen sein, ob die Veränderung in einer Vergrößerung oder einer Verringerung bestanden hat. Da die Zeitkonstante der Menge des leitenden Stoffes umgekehrt proportional ist, kann man auch sagen, daß die in Rede stehende Störungsquelle die Zeitkonstante im Verhältnis

$$(1 + q)^{\pm 1}$$

geändert hat. Kennzeichnet man die verschiedenen Störungsquellen durch beigesetzte Indizes, so erhält man demnach für den Wert der Zeitkonstante, der sich schließlich ergeben hat, den Ansatz

$$T_v = T_0 (1 + q_1)^{\pm 1} (1 + q_2)^{\pm 1} (1 + q_3)^{\pm 1} \dots$$

Durch Logarithmieren folgt hieraus

$$\ln T_v = \ln T_0 \pm \ln (1 + q_1) \pm \ln (1 + q_2) \pm \ln (1 + q_3) \pm \dots$$

Wir schreiben der Kürze wegen

$$\begin{aligned} \ln T_v &= z_v; \quad \ln T_0 = z_0 \\ \ln (1 + q_1) &= \delta_1; \quad \ln (1 + q_2) = \delta_2 \text{ usw.} \end{aligned}$$

und hiermit

$$z_\nu = z_0 \pm \delta_1 \pm \delta_2 \pm \delta_3 \pm \dots$$

Da nun die voneinander unabhängigen Störungsglieder  $\delta$  in großer Zahl vorhanden sind, und da jedes von ihnen ebensogut mit dem positiven wie mit dem negativen Vorzeichen auftreten kann, so folgt aus der letzten Gleichung nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß sich die Größen  $z_\nu$  derart um den Wert  $z_0$  scharen, daß ihre Anzahl innerhalb des Wertebereiches zwischen  $z_\nu$  und  $z_\nu + dz$  proportional

$$e^{-b^2 (z_\nu - z_0)^2} dz$$

ist. Die Konstante  $b$  mißt die Dichtigkeit der Verteilung der Größen  $z_\nu$  um den ausgezeichneten Wert  $z_0$ ; ihr Betrag hängt von der Stärke der Störungsquellen ab, und eine Betrachtung von allgemeinem Charakter, wie die soeben durchgeführte, kann naturgemäß darüber keinen Aufschluß geben.

Der vorstehende Ausdruck besagt in anderer Schreibweise, daß die Zahl der Kügelchen, deren Zeitkonstante zwischen  $T_\nu$  und  $T_\nu \left(1 + d \ln \frac{T_\nu}{T_0}\right)$  liegt, proportional

$$e^{-\left(b \ln \frac{T_\nu}{T_0}\right)^2} d \ln \frac{T_\nu}{T_0}$$

ist. Andererseits ist die Zahl der Kügelchen mit einer bestimmten Zeitkonstante  $T_n$  proportional dem Volumenverhältnis  $p_n$ , das in die Gl. (43a) eingeht. Der dreifache Betrag  $3 p_n$  entspricht dem Anfangswert  $k_n$  in den Formeln des Abschnitts 1. Es ist daher auch

$$T_\nu \left(1 + d \ln \frac{T_\nu}{T_0}\right) \sum_{T_\nu} 3 p_\nu = k(T_\nu) dT_\nu = B e^{-\left(b \ln \frac{T_\nu}{T_0}\right)^2} d \ln \frac{T_\nu}{T_0}. \quad (44)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $B$  ist aus der Erwägung zu berechnen, daß die Summe sämtlicher Anfangswerte  $k(T_\nu)$  gleich der durch die Gl. (2) definierten Konstante  $k$  sein muß:

$$\int_0^\infty k(T_\nu) dT_\nu = k.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$B = \frac{k b}{\sqrt{\pi}} \quad (45)$$

In den Gleichungen (44) und (45) haben wir nun genau das im Abschnitte 1, Gleichung (15), aufgestellte Verteilungsgesetz für die Zeitkonstanten gefunden. Es gilt daher für das vorliegende Modell eines Dielektrikums auch der Ansatz (14) für die allgemeine Nachwirkungsfunktion  $\psi$ .

Wir wollen an dieser Stelle noch auf eine naheliegende Ergänzung des Modells hinweisen. Bisher ist angenommen worden, daß nur eine einzige Art von leitender Substanz sich in den kleinen Kügelchen in verschiedener Dichte niedergeschlagen habe. Wir erweitern diese Annahme dahin, daß es sich um mehrere, sagen wir  $m$ , verschiedene Arten von solchen Substanzen handeln soll. Die Störungsquellen, die die vorher betrachtete Verteilung der Zeitkonstanten hervorgebracht haben, werden im allgemeinen auf die verschiedenen Arten von leitender Substanz verschieden einwirken. Bei Abwesenheit aller die gleichförmige Verteilung störenden Ursachen hätte das Modell ebenso viele verschiedene Zeitkonstanten

$$T_{0m} = \frac{3 \varepsilon}{4 \pi c^2 \lambda_m},$$

als es verschiedene leitende Stoffe enthält. Die Störungsquellen bewirken, daß  $m$  Gruppen von unendlich vielen Zeitkonstanten auftreten, wobei die von je einem bestimmten leiten-

den Stoff herrührenden Zeitkonstanten sich in der vorher angegebenen Weise um den ausgezeichneten Wert  $T_{0m}$  scharen. Die Konstante  $b_m$ , welche die Dichtigkeit dieser Verteilung mißt, wird jedoch für die verschiedenen Stoffe im allgemeinen verschieden ausfallen, weil man, wie gesagt, nicht gut annehmen kann, daß die Störungsursachen auf die Verteilung aller dieser Stoffe in gleicher Weise einwirken.

Die Folge unserer Annahme, daß verschiedene leitende Substanzen in dem dielektrischen Grundstoff verteilt sein sollen, ist also kurz gesagt die, daß sich die Zeitkonstanten nunmehr um mehrere ausgezeichnete Werte gruppieren. Eine derartige Erweiterung des Modells wird durch die Beobachtungsergebnisse oft gefordert.

**6. Einfluß der Temperatur.** Der Einfluß der Temperatur auf die dielektrischen Nachwirkungsvorgänge läßt sich, wie in der früheren Arbeit gezeigt worden ist<sup>1)</sup>, durch die Aussage beschreiben, daß bei steigender Temperatur der ausgezeichnete Wert  $T_0$  stark abnimmt, daß dagegen die Konstante  $b$  entweder gar nicht oder nur in geringem Maße geändert wird.

Bei unserem Modell sind die Zeitkonstanten durch den Ausdruck (41)

$$T_v = \frac{3 \epsilon}{4 \pi c^2 \lambda_v}$$

gegeben. Da die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  nur wenig von der Temperatur abhängt, wird  $T_v$  merklich in demselben Maße wie die Leitfähigkeit  $\lambda_v$  von der Temperatur beeinflusst. Ein Blick auf die vorstehende Formel lehrt, daß es sehr schlecht leitende Substanz sein muß, die die praktisch wichtigsten Werte von  $T_v$  (zwischen etwa  $10^{-4}$  und  $10^{+4}$  Sekunden) hervorbringt. Diese Substanzen haben die Eigenschaft, daß ihre Leitfähigkeit mit steigender Temperatur sehr stark zunimmt<sup>2)</sup>. In dem nämlichen Maße müssen die Zeitkonstanten  $T_v$  abnehmen, und zwar, soweit sie von demselben Stoff herrühren, sämtlich in dem gleichen Verhältnisse. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß der ausgezeichnete Wert  $T_0$  mit steigender Temperatur abnimmt, während die Art der Verteilung der Zeitkonstanten um  $T_0$  (d. h. die Konstante  $b$ ) ungeändert bleibt. Man kann daher auch sagen, daß die Nachwirkung bei allen Temperaturen nach demselben zeitlichen Gesetze verläuft, sofern nur jedesmal der gleiche Bruchteil von  $T_0$  (z. B.  $T_0$  selbst) als Zeiteinheit gewählt wird (Temperaturgesetz der korrespondierenden Zustände).

Eine Abhängigkeit der Konstante  $b$  von der Temperatur kann dadurch verursacht werden, daß etwa die Verteilung der leitenden Substanz auf die einzelnen Kügelchen durch eine Veränderung der Temperatur ebenfalls geändert wird. Wenn man bedenkt, daß dielektrische Nachwirkung in stärkerem Grade nur bei festen Körpern vorkommt, deren Struktur bei einer Veränderung der Temperatur in den gewöhnlich vorkommenden Grenzen sich nur wenig ändert, so wird man zu dem Schluß geführt, daß der Wert von  $b$  im allgemeinen nicht stark von der Temperatur abhängen kann. Eine solche Abhängigkeit ließe sich übrigens auch aus anderen Ursachen erklären; wir wollen aber hierbei nicht länger verweilen, da über die Frage des Temperatureinflusses auf die Größe  $b$  noch nicht genügend Beobachtungen vorliegen.

Die ganze Gruppe von Zeitkonstanten, die zu dem ausgezeichneten Wert  $T_0$  gehört, hängt von der Temperatur in demselben Maße ab wie die Leitfähigkeit des zugehörigen Stoffes. Man wird daher erwarten müssen, daß eine andere Zeitkonstantengruppe, die von einem anderen Stoff herrührt, im allgemeinen in einem anderen Maße von der Temperatur beeinflusst wird. Mit anderen Worten heißt dies: die ausgezeichneten Werte  $T_{0m}$  der einzelnen Gruppen können in verschiedener Weise von der Temperatur abhängen.

Von Interesse ist auch die Frage, wie sich das vorliegende Modell eines Dielektrikums verhält, wenn es, etwa durch Temperatursteigerung, in den flüssigen Zustand übergeführt

<sup>1)</sup> Ann. d. Phys. (4), Bd. 40, S. 842—850.

<sup>2)</sup> Annähernd nach dem Gesetze  $\lambda = \lambda_0 e^{\alpha \theta}$ , worin  $\lambda_0$  und  $\alpha$  Konstanten sind und  $\theta$  die Temperatur bedeutet.

wird. Hierbei möge sich die leitende Substanz (durch Mischung, Auflösung oder dgl.) gleichförmig verteilen. Das Ganze stellt dann einfach einen Kondensator mit parallel geschaltetem Widerstand dar, dessen Verhalten unter den verschiedenen Versuchsbedingungen leicht zu übersehen ist. Die Nachwirkung ist verschwunden<sup>1)</sup>, und die Energieverluste im elektrischen Wechselfelde sind nunmehr unabhängig von der Frequenz. Letzteres hat in der Tat L. Pungs<sup>2)</sup> an allen von ihm untersuchten flüssigen und auch an einem geschmolzenen Dielektrikum gefunden, das im festen Zustande ausgeprägte Nachwirkung aufwies. Eigene Versuche, über die in anderem Zusammenhange berichtet werden wird, haben zu demselben Ergebnis geführt.

**7. Schlußbemerkungen und Zusammenfassung.** In dieser Untersuchung sind wir von einer Reihe von Gesetzmäßigkeiten ausgegangen, welche die Erscheinung der dielektrischen Nachwirkung beherrschen. Diese Beziehungen, die in einer früheren Arbeit eingehender begründet worden sind, eignen sich wohl zur rechnerischen Darstellung der Nachwirkungsvorgänge, lassen aber die Frage nach den zugrunde liegenden physikalischen Erscheinungen offen. Eine Reihe namhafter Autoren hat geglaubt, die Erklärung der dielektrischen Nachwirkung in besonderen Vorgängen innerhalb des Moleküls suchen zu sollen. Jedoch hat bereits Maxwell gezeigt, daß man ohne solche Annahmen auskommt. Er hat darauf hingewiesen, daß ein aus parallelen ebenen Schichten bestehendes Dielektrikum Rückstandserscheinungen aufweist, wenn es von einem elektrischen Felde quer zur Schichtung durchsetzt wird, sofern das Verhältnis der Dielektrizitätskonstante zur Leitfähigkeit nicht für alle Schichten den gleichen Wert hat. Dabei wird ausdrücklich vorausgesetzt, daß keine der Schichten, für sich allein betrachtet, dielektrische Nachwirkung haben soll. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, daß man die dielektrische Nachwirkung nicht notwendig als eine neue physikalische Erscheinung aufzufassen braucht, und daß es insbesondere auch möglich sein muß, im Rahmen der Maxwellschen Vorstellungen ein Modell eines Dielektrikums mit Nachwirkung zu ersinnen, dessen Verhalten von den eingangs erwähnten Gesetzmäßigkeiten beherrscht wird.

Das ursprüngliche Maxwellsche Schichtenmodell ist dazu trotz seiner scheinbaren Einfachheit nicht recht geeignet. Man muß eine große Zahl von verschiedenartigen Schichten annehmen, wenn das Verhalten des Modells gewissen Beobachtungstatsachen nicht widersprechen soll. Bei großer Schichtenzahl scheidet aber die vollständige Durchführung der Theorie an mathematischen Schwierigkeiten. Insbesondere scheint es nicht möglich zu sein, die genannten allgemeinen Beziehungen an dem Modell abzuleiten.

Diese lassen sich dagegen, wie im Abschnitt 3 gezeigt worden ist, an einem etwas abgeänderten, sehr einfachen Schichtenmodell gewinnen. Es besteht aus einer ebenen Schicht eines nichtleitenden vollkommenen Dielektrikums, über die ein schlechter Leiter in einer Schicht von sehr geringer, aber von Ort zu Ort veränderlicher Dicke gelagert ist. Stellenweise mag diese zweite Schicht überhaupt fehlen. Wird das Ganze zwischen metallene Elektrodenplatten eingeschlossen, so entsteht ein Kondensator, der die typischen Nachwirkungerscheinungen besitzt.

Es ist nicht zu verkennen, daß Fälle vorkommen, in denen die dielektrische Nachwirkung auf derartigen Ursachen beruht. Indessen tritt diese Erscheinung bei den meisten festen Dielektriken auch dann auf, wenn leitende Oberflächenschichten vermieden sind. Man hat also hier im Sinne Maxwells die Inhomogenitäten in der Struktur des Dielektrikums selbst zu suchen. Ein Modell eines solchen Dielektrikums haben wir im Abschnitt 4 angegeben und daran anschließend die Theorie seines Verhaltens vollständig durchgeführt. Das Modell besteht in seiner einfachsten Form aus einer nichtleitenden Grundsubstanz, in der leitende Kügelchen regellos verteilt sind.

Zuerst wird untersucht, welche Störung ein gleichförmiges elektrisches Wechselfeld

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. die Beobachtungen E. v. Schweidlers an flüssigen Dielektriken; Ann. d. Phys. (4), Bd. 24, S. 711.

<sup>2)</sup> Arch. f. Elektrot., Bd. I (1912), S. 329.

in einer beliebigen homogenen Substanz dadurch erfährt, daß eine Kugel aus einem beliebigen andern Stoffe in das Feld gebracht wird. Hat man statt der einen Kugel deren beliebig viele, und sind ihre Abstände voneinander genügend groß im Vergleich zu ihren Abmessungen, so darf man die von den einzelnen Kugeln herrührenden Zusatzfelder einfach superponieren. Man kann alsdann die scheinbaren Änderungen berechnen, welche die Dielektrizitätskonstante und die Leitfähigkeit des Grundstoffs durch die Anwesenheit der Kugeln erfährt. Sie hängen lediglich von den Eigenschaften des Grundstoffs und der eingebetteten Substanz und von der Menge der letzteren ab; dagegen stellen sie sich als unabhängig von der Größe der eingebetteten Kügelchen heraus. Besonders einfache Beziehungen erhält man für den Fall, daß die Dielektrizitätskonstante überall denselben Wert hat, und daß die Grundsubstanz selbst nichtleitend ist. Es zeigt sich, daß das Verhalten des Modells alsdann den früher aufgestellten Formeln folgt, und zwar erhält man den allgemeinen Fall, wenn man den einzelnen Kügelchen beliebige, verschiedene Werte der Leitfähigkeit beilegt.

Durch besondere Überlegungen, die von plausiblen Annahmen über die Verteilung der leitenden Substanz ausgehen, läßt sich auch das seinerzeit aufgestellte Verteilungsgesetz für die Zeitkonstanten des Nachwirkungsvorganges gewinnen.

Endlich wird gezeigt, wie dieselben Annahmen auch zu dem Ergebnis führen, daß das Modell von der Temperatur genau in der Weise beeinflußt wird, die bei wirklichen Stoffen mit dielektrischer Nachwirkung beobachtet worden ist.

Angesichts der Einfachheit des Modells ist es jedenfalls bemerkenswert, wie getreu es alle wesentlichen Züge der Nachwirkungsvorgänge wiedergibt. Inwieweit bei den wirklichen Dielektriken dieselben Verhältnisse vorliegen wie bei dem Modell, das muß jedoch dahingestellt bleiben.

Eine wichtige Voraussetzung unserer Überlegungen ist die Annahme der Kugelgestalt der Teilchen gewesen. Sie mußte gemacht werden, um die mathematischen Betrachtungen durchführen zu können. Es scheint indessen, daß diese Annahme nicht in der Natur des Problems wesentlich begründet ist, so daß eine andere Annahme über die Form der Teilchen in der Hauptsache zu demselben Ergebnis geführt hätte. Darauf deutet erstens der Umstand, daß die Teilchengröße in den Endformeln nicht vorkommt, und außerdem die Tatsache, daß zur Herleitung dieser Formeln nur das elektrische Feld in großem Abstand von den kleinen Kugeln benutzt worden ist; hier hängt aber die Verteilung des Störungfeldes nicht von der Teilchenform ab.

Als das Hauptergebnis dieser Untersuchung ist der Nachweis zu betrachten, daß man die dielektrische Nachwirkung nicht als eine neue physikalische Erscheinung aufzufassen braucht, die aus dem Rahmen der elementaren Theorie des elektrischen Feldes herausfällt, sondern daß sich vielmehr ihre allgemeinen Gesetze aus Maxwell'schen Vorstellungen vollständig herleiten lassen.

## Über zusätzliche Verluste durch Stromverdrängung in Gleichstrommaschinen.

Von

L. Fleischmann.

1. Aufstellung der Formel für die Kupferverluste infolge Stromverdrängung bei rechteckiger Form der Wechselstromkurve. Die kürzlich erschienene Abhandlung von Rogowski über zusätzliche Kupferverluste<sup>1)</sup> in Wechselstrommaschinen war die Veranlassung zu der hier folgenden Untersuchung. Auf den ersten Blick könnte es erscheinen als ob eine Stromverdrängung in Gleichstrommaschinen nicht auftreten könnte,

<sup>1)</sup> Archiv für Elektrotechnik II, S. 81. Ich habe mich in der Bezeichnungsweise der physikalischen Größen jener Arbeit angeschlossen.