1.

Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.

(Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.)

1.

Déjà dans un précédent mémoire, je me suis occupé très en détail des *fonctions complémentaires*, c'est-à-dire de ces quantités qu'il faut ajouter aux valeurs des différentielles à indices quelconques, pour les completter et les rendre aussi générales qu'elles peuvent l'être; et je suis parvenu à en déterminer la forme et la nature, en m'appuyant sur les propriétés singulières des fonctions exponentielles à exposants infiniment petits*). Je ne crois pas qu'on puisse élever d'objection solide contre l'analyse dont j'ai fait usage; ni qu'on doive espérer de découvrir dans la question présente un principe plus fécond ou plus approprié au sujet; mais comme la diversité des méthodes contribue beaucoup à éclaircir les points difficiles, et que le théorème des fonctions complémentaires est sans contredit le plus important que l'on rencontre dans le nouveau calcul, je pense faire plaisir à quelques lecteurs en y revenant encore, et en en déduisant la démonstration de considérations nouvelles, très différentes de celles qui m'ont guidé en premier lieu.

2.

La théorie des fonctions complémentaires est liée d'une manière inséparable à la théorie des fonctions dont les dérivées peuvent être prises égales à zéro et qui disparaissent en conséquence par les différenciations. Cette vérité est d'abord sensible dans le calcul ordinaire, car si l'on désigne par n un nombre entier >0, on sait que la fonction complémentaire ψ, relative à l'intégrale de l'ordre n ou à la dérivée de l'ordre $-n$, est de la forme:

$$\psi = B + Bx + Cx^2 + \ldots . + Kx^{n-1},$$

d'où l'on conclut en différenciant: $\frac{d^n \psi}{d x^n} = 0$. Ainsi la fonction complémentaire, relative à la dérivée de l'ordre $-n$, n'est autre chose que la fonc-

---

*) Voyez le XXIème cahier *du journal de l'Ecole polytechnique.*

tion ψ qui satisfait à l'équation:

$$\frac{d^n \psi}{d x^n} = 0,$$

ou celle qui s'évanouit après une différenciation de l'ordre n. Cette propriété des fonctions complémentaires n'est pas bornée au cas où le nombre n est entier positif, et n'est pas seulement un théorème qu'on doive vérifier *à posteriori*, ainsi que nous venons de le faire sur cet exemple: c'est une vérité primordiale presque évidente, qui s'applique à toutes les différentielles, quelque soit l'indice μ de différenciation.

Pour le montrer, supposons que μ soit une quantité quelconque, fractionnaire ou non, positive ou négative, réelle ou imaginaire; désignons par y une fonction de x, et par ψ la fonction complémentaire relative à l'indice μ, en sorte que si $\left(\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)$ représente une valeur particulière de $\frac{d^\mu y}{d x^\mu}$, la valeur générale puisse s'en déduire tout de suite en ajoutant le complément ψ. On aura d'après cela:

$$\frac{d^\mu y}{d x^\mu} = \left(\frac{d^\mu y}{d x^\mu}\right) + \psi.$$

Renversant actuellement les opérations qui ont été nécessaires pour différencier, c'est-à-dire intégrant par rapport au même indice μ, on devra retrouver y dans les deux membres de l'équation qui ont la même généralité: or le premier membre $\frac{d^\mu y}{d x^\mu}$ redonne évidemment y, et le second $y + \int^\mu \psi \, d x^\mu$; et comme ces deux résultats doivent être égaux, on en conclut:

$$\int^\mu \psi \, d x^\mu = 0 \quad \text{ou:} \quad \frac{d^{-\mu} \psi}{d x^{-\mu}} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer et ce qui établit le théorème suivant: *La dérivée à indice μ d'une fonction de x a pour fonction complémentaire la quantité ψ dont la dérivée à indice $-\mu$ peut être prise égale à zéro.*

Pour déterminer généralement la forme des fonctions complémentaires, il suffit donc de chercher les fonctions que la différenciation peut faire disparaître, ou, ce qui revient au même, il suffit de chercher l'intégrale de l'équation:

$$\frac{d^\mu \psi}{d x^\mu} = 0,$$

μ étant une quantité donnée quelconque.

3.

Mais cette recherche doit être précédée de quelques préliminaires où nous présenterons d'une manière plus concise et plus élégante que nous ne l'avons fait jusqu'ici, la formule qui sert à différencier à indices quelconques les puissances de x.

Soient n et μ deux fractions, à volonté positives ou négatives, réelles ou imaginaires. Il est évident que $\frac{1}{x^n}$ représentera une puissance quelconque de x, car nous n'excluons pas les valeurs entières de n. Cela posé, le problème préliminaire que nous devons résoudre consiste à calculer la dérivée:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{d x^\mu}.$$

Si nous supposons d'abord que n et $n+\mu$ soient des nombres réels positifs, ou du moins des nombres imaginaires dont la partie réelle soit positive, la question dont je parle ne présente aucune difficulté. En effet on a, en supposant, pour fixer les idées, $x>0$:

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x} . \alpha^{n-1} . d\alpha}{\Gamma(n)},$$

$\Gamma(n)$ étant, conformément à la notation de M. *Legendre*, l'intégrale eulérienne de seconde espéce:

$$\int_0^\infty e^{-\theta} . \theta^{n-1} . d\theta,$$

et on en conclut sans peine:

$$A. \quad \frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{d x^\mu} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n) x^{n+\mu}}.$$

Mais si l'un des deux nombres n, $n+\mu$ est <0, cette formule parait d'abord inadmissible à cause des quantités infinies qui s'y trouvent renfermées. Pour faire disparaître ces quantités infinies, nous avons eu recours ailleurs à des considérations assez délicates qui supposent le théorème des fonctions complémentaires. Comme notre objet présent est au contraire d'arriver à une démonstration nouvelle de ce théorème fondamental, en nous appuyant sur les propriétés de la différentielle $d^\mu \frac{1}{x^n}$, on voit que nous devons renverser l'ordre suivi dans notre premier mémoire, et donner, pour calculer cette différentielle, un moyen direct, indépendant de la notion des fonctions complémentaires. Or ce qui est très remarquable, c'est que non seulement la chose est possible, mais qu'elle est fort simple, en sorte qu'en suivant cette idée, nous avons découvert, pour arriver au but cherché, savoir à la valeur de $d^\mu \frac{1}{x^n}$, une route préférable à toute autre, même abstraction faite des motifs qui nous forcent à l'adopter ici. Le résultat auquel cette voie nous mène, et qui se déduirait également de nos recherches antérieures, consiste en ce que la formule (*A.*) est la formule générale pour la différenciation des puissances, en attachant à la lettre Γ une signification qui va être expliquée.

4.

Dans le XXI[ème] cahier *du journal de l'Ecole polytechnique*, nous avons donné les moyens de calculer $d^\mu \frac{1}{x^n}$ dans tous les cas possibles; mais nous avons négligé d'avertir que la formule (*A.*) peut être regardée comme en renferment la solution générale, pourvu que l'on altère un peu le sens naturel du signe Γ, conformément aux remarques faites par M. *Legendre* *), lorsqu'il a considéré les expressions $\Gamma(n)$, en supposant n un nombre négatif.

Il parait nécessaire d'entrer dans quelques détails à ce sujet, afin de fixer bien nettement le sens précis que nous attacherons désormais au signe Γ.

D'après l'équation conventionnelle:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\theta} \theta^{n-1} d\theta,$$

qui a servi à la définition de ces transcendantes, on voit que $\Gamma(n)$ est une quantité finie > 0 tant que n est positif, et que:

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \infty.$$

Si l'on donnait actuellement à n des valeurs négatives, il est évident que les valeurs correspondantes de $\Gamma(n)$ seraient toutes infinies. Pour éviter cet inconvénient qui obligerait à renoncer à l'emploi des fonctions $\Gamma(n)$ pour des valeurs de $n < 0$, on change la définition précédente, ou du moins on ne la conserve que pour $n > 0$, et lorsque n est nul ou négatif, on calcule la valeur de $\Gamma(n)$ au moyen de l'équation générale:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} = \frac{\Gamma(n+2)}{n(n+1)} = \dots,$$

que l'on établit tout de suite quand n est positif, et que l'on étend par une convention permise à des valeurs quelconques de n.

*) Dans ses *exercices de calcul intégral.*

Mais pour rendre plus sensibles à l'esprit ces conventions qui servent à définir les fonctions Γ, nous dirons que:

1°. Quand n est positif, on a:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n-1}.d\theta.$$

Cette valeur ne peut jamais être ni nulle ni infinie.

2°. Quand n est zéro ou est compris entre 0 et -1, on a:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^n.d\theta.$$

Ainsi $\Gamma(0)=\infty$; mais pour toutes les valeurs de n comprises entre 0 et -1, $\Gamma(n)$ ne peut être ni zéro ni l'infini.

3°. Quand n est égal à -1 ou compris entre -1 et -2, on a:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n(n+1)}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n+1}.d\theta,$$

ce qui donne $\Gamma(n)=-\infty$ pour $n=-1$, et seulement pour $n=-1$: il n'y a d'ailleurs entre -1 et -2 aucune valeur de n telle que l'on ait $\Gamma(n)=0$.

4°. Quand n est égal à -2 ou est compris entre -2 et -3, on a:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n+2}.d\theta,$$

valeur qui n'est jamais nulle, mais qui devient infinie pour $n=-2$.

Et ainsi de suite pour les autres valeurs de n.

Ce que nous venons de dire suffit pour établir d'une manière précise le sens du signe $\Gamma(n)$, lorsque n est un nombre réel: si n était imaginaire et $=p+q\sqrt{-1}$, nous avons à peine besoin d'ajouter que tout ce qui vient d'être expliqué relativement à n, devrait s'entendre, *mutatis mutandis*, de la partie réelle p, en sorte que:

1°. Si p est positif, on a:

$$\Gamma(p+q\sqrt{-1}) = \int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{p-1+q\sqrt{-1}}.d\theta,$$

expression qui n'est jamais infinie.

Il est bon d'observer ici, parceque cette remarque nous sera utile plus bas, qu'il n'y a pas de valeurs de p et de q qui puissent rendre nulle cette expression de $\Gamma(p+q\sqrt{-1})$; et en effet il est clair qu'on a:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\alpha^{p-1+q\sqrt{-1}}.d\alpha = \frac{\Gamma(p+q\sqrt{-1})}{x^{p+q\sqrt{-1}}},$$

quelle que soit l'indéterminée x supposée >0: donc on aurait pour ces mêmes valeurs de p et q l'équation:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\alpha^{p-1+q\sqrt{-1}}.d\alpha = 0,$$

et parceque x est quelconque, cette dernière ne pourrait subsister qu'autant que l'on aurait:

$$\alpha^{p-1+q\sqrt{-1}} = 0,$$

depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$, ce qui est absurde.

2°. Si p est zéro, ou si p est compris entre 0 et -1, on a:

$$\Gamma(p+q\sqrt{-1}) = \frac{1}{p+q\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{p+q\sqrt{-1}}\,d\theta,$$

valeur qui ne peut jamais être ni nulle ni infinie, puisque q est différent de zéro.

3°. Si $p = -1$, ou est compris entre -1 et -2, on a cette valeur qui ne peut jamais être non plus ni nulle ni infinie:

$$\Gamma(p+q\sqrt{-1}) = \frac{1}{(p+q\sqrt{-1})(p+1+q\sqrt{-1})}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{p+1+q\sqrt{-1}}.d\theta,$$

et ainsi de suite.

De ces définitions on déduirait toutes les propriétés des fonctions Γ, mais cette recherche étant étrangère au sujet de notre mémoire, nous renverrons sur ce point à l'ouvrage de Mr. *Legendre*. Nous nous bornerons à en tirer cette conclusion importante que l'équation $\Gamma(n) = 0$ est impossible, et que toutes les racines de l'équation: $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$, sont $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, ... c'est-à-dire zéro ou un nombre entier négatif, pourvu toutefois que ce nombre ne soit pas infini. C'est là un corollaire tellement simple de ce qu'on vient de lire qu'il serait superflu de nous y arrêter.

5.

Ce qui précède une fois entendu, je dis que la formule (*A.*) est vraie, quels que soient n et $n+\mu$, pourvu qu'on attribue au signe Γ la signification dont nous venons de convenir.

En effet cette formule est déjà démontrée pour les valeurs de n et $n+\mu$ plus grandes que zéro, et nous allons faire voir:

1°. Qu'elle est encore vraie lorsque $n+\mu$ devient negatif, n restant positif.

2°. Qu'elle subsiste également lorsque n devient négatif, quelque soit $n+\mu$.

En établissant ces deux propositions, j'aurai démontré que la formule (*A.*) est exacte dans tous les cas où l'on attribue à l'exposant n et à l'indice μ des valeurs réelles: mais quand même ces nombres deviendraient de la forme $p+q\sqrt{-1}$, cela n'exigerait pas de considérations spéciales, puisqu'il suffirait de raisonner sur la partie réelle p de ces quantités, comme nous allons raisonner sur elles-mêmes, en les supposant réelles.

Le premier cas à examiner est celui où, n restant positif, $n+\mu$ devient négatif. Soit donc $n+\mu<0$ et, pour fixer les idées, >-1, c'est-à-dire soit $n+\mu$ compris entre 0 et -1: on aura $n+\mu+1>0$, et par conséquent:

$$\frac{d^{\mu+1}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu+1}}=\frac{(-1)^{\mu+1}\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n).x^{n+\mu+1}},$$

d'où l'on conclut en intégrant une fois:

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu+1)}{(n+\mu)\Gamma(n)x^{n+m}}.$$

Mais d'après nos conventions:

$$\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n+\mu}=\Gamma(n+\mu).$$

On a donc bien:

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}},$$

conformément à la formule (*A.*) et malgré la valeur négative de $n+\mu$.

Supposons ensuite que $n+\mu$ soit entre -1 et -2: donc $n+\mu+1$ sera entre 0 et -1, et d'après ce qui vient d'être prouvé, on aura:

$$\frac{d^{\mu+1}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu+1}}=\frac{(-1)^{\mu+1}\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n).x^{n+\mu+1}},$$

d'où l'on tirera, comme tout à l'heure, par l'intégration, une valeur de $d^{\mu}\frac{1}{x^n}$, conforme à celle que la formule (*A.*) fournirait.

On s'élevera de la même manière au cas où $n+\mu$ serait entre -2 et -3, ou entre -3 et -4.... et ainsi de suite; en sorte que la formule (*A.*) peut être considérée comme bien établie, quelque soit $n+\mu$, pourvu que n soit >0.

Maintenant si n devient négatif, supposons cet exposant renfermé entre les limites 0 et -1: donc $n+1$ sera entre 0 et 1, et l'on aura:

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^{n+1}}}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1)x^{n+\mu+1}},$$

d'où l'on déduit, en intégrant une fois:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu n\,\Gamma(n+\mu+1)}{(n+\mu)\Gamma(n+1)\,.\,x^{n+\mu}},$$

et parceque, d'après nos conventions, on trouve:

$$\frac{n\Gamma(n+\mu+1)}{(n+\mu)\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)},$$

il nous viendra définitivement:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\,x^{n+\mu}},$$

comme la formule (*A.*) le donnerait.

En continuant ainsi, il est évident qu'on prouvera l'exactitude de cette formule pour des valeurs de n comprises entre -1 et -2, ou entre -2 et -3, ..., c'est-à-dire pour des valeurs quelconques de n, ce qu'il fallait faire. Donc, en adoptant nos conventions relatives au signe Γ, les différentielles des puissances se trouvent par la formule générale (*A.*). Toutefois cette formule prend un numérateur infini et cesse de pouvoir être employée, lorsque $n+\mu=0$, ou lorsque $n+\mu$ est un nombre entier négatif $-r$, sans que la même chose ait lieu pour n, ce qui tient à ce que dans ce cas la dérivée dont on cherche la valeur, cesse d'être une fonction algébrique de x. Pour calculer $d^\mu \frac{1}{x^n}$, on observe alors que l'équation:

$$\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{(-1)^n\Gamma(n)}\cdot\frac{d^{n-1}\frac{1}{x}}{dx^{n-1}},$$

qui est une conséquence rigoureuse de nos principes *), donne, quand on prend la dérivée à indice μ des deux membres, et qu'on fait en outre $n+\mu=-r$:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = -\frac{1}{(-1)^n\Gamma(n)}\cdot\int^{r+1}\frac{dx^{r+1}}{x},$$

par où l'on voit que, dans le cas particulier où $n+\mu$ est égal à zéro ou à un nombre entier négatif, la valeur de $d^\mu \frac{1}{x^n}$ ne dépend que des intégrales ordinaires de $\frac{1}{x}$. Mais ce cas particulier, d'ailleurs très facile à

*) Pourvu que n ne soit ni zéro ni un entier négatif; mais si n et $n+\mu$ étaient tous deux nuls ou entiers négatifs, la formule (*A.*) ne serait plus en défaut.

traiter directement, n'empêche pas plus la formule (A.) d'être la formule générale propre à la question présente que la circonstance équivalente n'empêche la formule:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

d'être la formule générale pour l'intégration des puissances dans le calcul intégral ordinaire.

6.

Cette même formule (A.) qui donne les valeurs de $d^\mu \frac{1}{x^n}$ va nous faire connaître directement la forme des fonctions complémentaires; car nous avons dit que la recherche de ces fonctions dépend de la recherche des quantités dont la différentielle peut être prise égale à zéro, en sorte que toute la difficulté du problème est de trouver l'intégrale générale de l'équation:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx^\mu} = 0,$$

ce à quoi la formule (A.) permet d'arriver.

Pour le faire voir, je commence par exclure le cas ou μ serait un nombre entier positif ou négatif, lequel est connu par les éléments: ainsi μ est une fraction réelle ou une quantité imaginaire. Cela posé, je développe la fonction ψ en une série de la forme $\Sigma \frac{A_n}{x^n}$, c'est-à-dire en série procédant suivant les puissances quelconques de x, et j'en conclus:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Sigma \frac{A_n \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\, x^{n+\mu}}.$$

Cette valeur devant être nulle quel que soit x, on en tire, en égalant à zéro les coefficients de chaque puissance de x, l'équation suivante:

$$\frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} = 0,$$

à laquelle les exposants n doivent satisfaire, en sorte qu'elle servira à déterminer ces nombres. Mais comme on sait qu'il n'y a pas de valeur de n qui puisse rendre $\Gamma(n+\mu) = 0$, cette équation se réduit à:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = 0,$$

égalité satisfaite par les seules racines $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, $n = -3$, ... et en général $n =$ un nombre entier négatif quelconque, non infini. De plus, par hypothèse μ n'étant pas entier, il est clair que $n+\mu$ ne pourrait l'être que si n était une fraction. Donc les valeurs qui rendent $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$, donnent pour $\Gamma(n+\mu)$ une valeur finie et satisfont à:

$$\frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} = 0,$$

ce qui pourrait ne pas arriver si μ était un nombre entier *).

Ainsi, en excluant ce cas bien connu, on peut faire $n=0$, $n=-1$, $n=-3$, ... $n=-m$, m désignant un nombre entier quelconque >0; et il en résulte:

$$\psi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$

A_0, A_1, A_2, ... A_m étant des constantes arbitraires.

Donc les fonctions dont les différentielles à indices quelconques peuvent être prises égales à zéro sont les fonctions algébriques entières. Donc aussi les fonctions complémentaires de ces différentielles sont des fonctions algébriques entières, d'un degré indéterminé et à coefficients arbitraires: ce qui est précisément le théorème fondamental que nous avons établi ailleurs par le secours des fonctions exponentielles à exposants infiniment petits.

La méthode nouvelle dont nous venons de faire usage pour démontrer le même théorème est fondée sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances de la variable indépendante. Elle nous parait inférieure à celle de notre premier mémoire et pourrait donner lieu à quelques observations que nous supprimons pour abréger; elle est surtout moins directe et, si l'on peut s'exprimer ainsi, moins tirée des entrailles du sujet. Toutefois elle n'est pas à dédaigner. Le rapprochement des principes divers qui mènent à la même conclusion est surtout nécessaire quand il s'agit de questions primordiales.

---

*) Si μ était un nombre entier positif, le quotient qu'on obtiendrait en divisant $\Gamma(n+\mu)$ par $\Gamma(n)$, serait $n(n+1)\ldots(n+\mu-1)$; et en l'égalant à zéro, on trouverait $n=0$, $n=-1 \ldots n=-(\mu-1)$: si au contraire μ était un nombre entier négatif $-r$, on ferait $n+\mu=k$, d'où $n=k-\mu=k+r$; le quotient de $\Gamma(n+\mu)$ par $\Gamma(n)$, c'est-à-dire le quotient de $\Gamma(k)$ par $\Gamma(k+r)$, serait une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le produit $K(K+1)\ldots(K+r-1)$, d'où il suit que ce quotient ne pourrait jamais être nul. Il est aisé de conclure de là que les dérivées à indices entiers positifs ont pour fonction complémentaire zéro, et que les dérivées à indices entiers négatifs, ou les intégrales ordinaires, ont pour fonction complémentaire une fonction algébrique entière, dont le degré est inférieur d'une unité à l'indice d'intégration; ainsi qu'on le sait par les éléments.

7.

La question de déterminer les fonctions complémentaires des différentielles à indices quelconques est une des plus difficiles de celles qu'il fallait résoudre pour établir les bases du nouveau calcul. La conclusion singulière à laquelle nous sommes arrivés dans nos premiers mémoires, conclusion que nous venons de confirmer, comme on l'a vu, par une analyse toute différente, n'est pas seulement une spéculation théorique élégante; c'est un principe dont on a besoin à chaque instant, et sans lequel il faudrait renoncer à faire usage des dérivées fractionnaires, puisque lui seul peut indiquer d'une manière précise l'étendue des résultats auxquels l'usage de ces dérivées conduit.

Pour fixer les idées, je vais choisir un exemple fort simple dans lequel il s'agit de déterminer une intégrale définie, à l'aide de la différenciation sous le signe $\int$ par rapport à un paramètre différent de la variable à laquelle l'intégration définie est relative. Je considère donc la formule connue:

$$1. \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax.dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

dans laquelle a est un nombre positif quelconque.

Si l'on désigne par h une quantité arbitraire >0, on pourra dans les deux membres de (1.) changer a en $a+h$, en $a+2h$, en $a+3h$ .... sans que cette équation cesse d'être vraie. Soit donc μ un nombre réel pris à volonté: représentons pour un moment $\cos ax$ par $F(a)$, et $\frac{\pi}{2}e^{-a}$ par $f(a)$: et posons:

$$P_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(F(a) - \frac{\mu}{1}F(a+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}F(a+2h) - \dots\right),$$

$$Q_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(f(a) - \frac{\mu}{1}f(a+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}f(a+2h) - \dots\right).$$

Ces deux séries sont convergentes, et il est aisé de démontrer que:

$$\int_0^\infty \frac{P_h\,dx}{1+x^2} = Q_h.$$

Faisant actuellement $h=0$, et observant que pour cette valeur *) P_h et

*) Voyez *le journal de l'école polytechnique* XXIème cahier page 107. C'est par le secours des formules données à l'endroit cité, que l'on parvient à connaître quand la différenciation à indices quelconques sous le signe $\int$ est permise; car elle ne l'est pas toujours. L'exemple que nous venons de traiter suffit pour indiquer la marche à suivre dans les cas semblables, et il ne serait pas difficile d'établir par des raisonnements du même genre les règles générales que la matière comporte.

Q_h se réduisent à:

$$P_0 = \frac{d^\mu \cos ax}{da^\mu}, \quad Q_0 = \frac{d^\mu\left(\frac{\pi}{2}e^{-a}\right)}{da^\mu},$$

il vient:

$$2. \quad \int_0 \frac{dx}{1+x^2} \cdot \frac{d^\mu \cos ax}{da^\mu} = \frac{\pi}{2}e^{-a} \cdot (-1)^\mu + \psi,$$

ψ étant une fonction complémentaire de la forme:

$$A + Ba + Ca^2 + \ldots + Ka^m.$$

L'équation (2.) n'est autre chose que l'équation (1.) dont on a différencié les deux membres par rapport au paramètre a. Maintenant comme le second membre de (1.) est une exponentielle à exposant négatif qui devient zéro pour $a = \infty$, on voit que $\cos ax$ doit être regardé comme la limite du produit:

$$e^{-na} \cdot \cos ax,$$

n étant une quantité infiniment petite > 0. On aura d'après cela:

$$\frac{d^\mu \cos ax}{da^\mu} = (-1)^\mu \cdot x^\mu \cdot \cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Substituant cette valeur dans (2.), il vient une égalité de la forme:

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) \cdot x^\mu dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a} + A + Ba + Ca^2 + \ldots + Ka^m.$$

Mais il reste à déterminer les constantes $A, B, C, \ldots K$, qui entrent dans l'équation (3.). A cet effet nous distinguerons plusieurs cas.

1°. Si μ est un nombre positif, ou du moins si la valeur de μ, supposée négative, est telle que le quarré μ^2 soit < 1, il est facile de s'assurer que l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) \cdot x^\mu dx}{1+x^2}$$

doit devenir zéro quand $a = \infty$; cas si l'on pose $ax = \theta$, on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) \cdot x^\mu dx}{1+x^2} = a^{1-\mu} \int_0^\infty \frac{\cos\left(\theta - \frac{\mu\pi}{2}\right) \cdot \theta^\mu d\theta}{a^2+\theta^2},$$

et le second membre de cette égalité devient évidemment zéro pour $a = \infty$, puisque l'on a $\mu > -1$ ou $1 - \mu < 2$. Donc il faut, dans cette hypothèse, poser $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, ... $K = 0$; et il reste:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) \cdot x^\mu dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

ce qui s'accorde avec une formule donnée par Mr. *Cauchy* dans ses *Exercices de mathématiques.*

2°. Si μ est une quantité négative égale à -1 ou comprise entre -1 et -2, l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right).x^\mu\,dx}{1+x^2}$$

devient infiniment grande avec a; mais en la divisant par a, il est clair que le quotient δ devient nul quand $a=\infty$. Or quand on divise par a les deux membres de l'équation (3.), elle prend la forme:

$$\delta = \frac{\pi e^{-a}}{2a} + \frac{A}{a} + B + Ca + \ldots + Ka^{m-1}.$$

Donc, puisque δ doit être zéro pour $a=\infty$, on a déjà:

$$B=0,\quad C=0,\quad \ldots,\quad K=0,$$

et il reste simplement:

$$\delta = \frac{\pi e^{-a}}{2a} + \frac{A}{a},$$

ou:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right).x^\mu\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a} + A.$$

Actuellement, pour déterminer A, qui reste encore inconnue, je pose $a=0$, et je trouve:

$$A = -\frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\mu\pi}{2}.x^\mu\,dx}{1+x^2},$$

d'où je conclus:

$$\int_0^\infty \frac{\left[\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right)-\cos\frac{\mu\pi}{2}\right].x^\mu\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}(e^{-a}-1).$$

Si l'on supposait μ égal à -2 ou compris entre -2 et -3, en opérant d'une manière analogue, on déterminerait facilement les constantes A, B, C, ... K, et il serait aisé de continuer ainsi pour toutes les autres valeurs de μ. Mais il est inutile de nous arrêter plus long-tems sur cet exemple: ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre, comment on doit tenir compte des fonctions complémentaires, quand on applique notre nouveau calcul à la théorie des intégrales définies.

8.

Le théorème des fonctions complémentaires fournit immédiatement l'intégrale de l'équation: $\frac{d^\mu\psi}{dx^\mu}=0$, qui est la plus simple qu'on puisse se proposer d'intégrer. La valeur la plus générale de ψ qui y satisfasse est de la forme:

$$\psi = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots + Kx^m.$$

Le nombre des constantes arbitraires que cette intégrale contient est indéterminé, ce qui établit une différence essentielle et bien remarquable entre les équations différentielles à indices fractionnaires et les équations différentielles ordinaires, puisque dans celles-ci l'intégrale complette ne peut contenir qu'un nombre de constantes égal à l'indice de différentiation le plus élevé qui s'y rencontre.

En combinant le théorème des fonctions complémentaires avec la formule générale qui sert à différencier les produits de deux facteurs, on parvient à trouver les intégrales complètes des équations différentielles à indices fractionnaires, quand elles sont linéaires et à coefficients constants avec un second membre variable quelconque. Et même quand les coefficients, au lieu d'être constants, sont des fractions algébriques rationnelles, ou parvient toujours, si non à intégrer les équations proposées, du moins à faire dépendre leur intégration de celle d'un système déterminé et connu d'équations différentielles ordinaires. Mais il suffit d'énoncer ici ces propositions qui méritent qu'on s'en occupe à part et avec étendue.

9.

Dans nos premières recherches sur le calcul des différentielles à indices quelconques, nous en avons donné une définition complète et générale fondée sur ce que toute fonction de x peut être mise sous la forme $\Sigma A_m e^{mx}$. Mais les résultats, que nous avons obtenus dans ce mémoire montrent que l'on pourrait arriver à une définition des différentielles à indices quelconques, en partant du développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances de la variable indépendante. Après ce que nous avons dit dans les pages qui précèdent, une telle définition s'offre d'elle-même. Soit y une fonction de x; développons cette fonction en une série de la forme:

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots\ldots$$

que, pour abréger, nous représenterons par $\Sigma \frac{A_n}{x^n}$, de sorte que:

$$y = \Sigma \frac{A_n}{x^n}.$$

Donnant ensuite au signe Γ la signification adoptée au No. 4., formons la quantité:

$$(-1)^\mu \Sigma \frac{A_n \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\, x^{n+\mu}},$$

et convenons d'appeler cette quantité dérivée de l'ordre μ et de la désigner par $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$. Il est évident que cette définition suffira pour établir la théorie des dérivées fractionnaires: le principe des fonctions complémentaires en sera une conséquence presque immédiate. Dans cette manière de procéder, la définition des différentielles à indices quelconques, donnée par nous dans nos premiers mémoires, deviendrait un véritable théorème qu'il faudrait démontrer, tandis que la formule:

$$(B.).\qquad \frac{d^\mu y}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Sigma \frac{A_n \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\, x^{n+\mu}}$$

serait considérée comme une définition. Nous avons cru devoir préférer la marche inverse et définir les dérivées à indices quelconques par le développement exponentiel, puis en déduire l'équation (*B.*) comme une simple conséquence. Ce n'est point ici le lieu d'entrer dans le détail des raisons très nombreuses qui nous ont porté à préférer notre définition à celle que fournit l'équation (*B.*); mais les personnes qui voudront approfondir l'étude des rapprochements que nous venons d'indiquer, verront que cette étude est loin d'être inutile.

10.

Maintenant il sera aisé d'apprécier convenablement le peu de mots qu'*Euler* a écrits sur le calcul des dérivées fractionnaires dans les *commentaires de Petersbourg* *). Ce grand géomètre ne s'est occupé de cette matière qu'une seule fois, et sans y attacher aucune importance: aussi nous semble-t-il, que ses raisonnements ont quelque chose de vague et d'incomplet. Il n'a point donné de définition générale, et la formule à laquelle il arrive ne convient pas même à une puissance quelconque de x. S'il était parvenu à trouver les dérivées à indices fractionnaires d'une puissance quelconque de x, sans doute il lui aurait été facile de passer de ce cas particulier au cas d'une fonction quelconque, puisque le développement en serie de la forme $\Sigma \frac{A_n}{x^n}$ lui aurait présenté

*) Commentarii Acad. Petrop. tom. V. — An. (1730—1731) — Pag. 55.

pour cela une route directe et naturelle. Ainsi la difficulté principale consistait à trouver une formule semblable à notre formule (*A.*) du No. 3., et fournissant la valeur de $d^\mu \frac{1}{x^n}$ pour toutes les valeurs possibles de l'exposant n et de l'indice μ. Mais il ne parait pas qu'*Euler* ait atteint ce but, et peut-être n'y pouvait-on réussir que par l'emploi des fonctions Γ, en attribuant à cette lettre la signification que nous avons fait connaître au No. 4. et que Mr. *Legendre* a imaginée le premier.

11.

Au reste voici l'article d'*Euler*, tel qu'il se trouve dans la collection académique citée tout à l'heure, à la fin d'un mémoire ayant pour titre: *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.*

„§. 27. Coronidis loco adhuc aliquid, curiosum id quidem magis „quam utile, adjungam. Notum est per $d^n x$ intelligi differentiale ordinis „n ipsius x; et $d^n p$, si p denotet functionem quampiam ipsius x, pona„turque dx constans, esse homogeneum cum dx^n; semper autem, quando „n est numerus integer affirmativus, ratio quam habet $d^n p$ ad dx^n alge„braice potest exprimi, ut si $n = 2$ et $p = x^3$, erit $d^2(x^3)$ ad dx^2 ut $6x$ „ad 1. Queritur nunc si n sit numerus fractus, qualis tum futura sit ratio. „Difficultas in his casibus facile intelligitur, nam si n est numerus integer „affirmativus, d^n continuata differenciatione invenitur; talis autem via non „patet si n est numerus fractus. Sed tamen ope interpolationum, de qui„bus in hac dissertatione explicavi, rem expedire licet."

„§. 28. Sit invenienda ratio inter $d^n(z^e)$ et dz^n, posito dz con„stante, seu requiritur valor fractionis $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$. Videamus primo qui sint ejus „valores, si n est numerus integer, ut post modum generaliter illatio fieri „possit. Si $n = 1$, erit hujus valor $ez^{e-1} = \frac{1.2.3.\ldots.e}{1.2.3\ldots.(e-1)} z^{e-1}$; hoc modo „exprimo ut facilius postea ea quae tradita sunt huc referantur; si $n = 2$, „erit valor $e(e-1)z^{e-2} = \frac{1.2.3\ldots.e}{1.2.3\ldots.(e-2)} z^{e-2}$; si $n = 3$, habebitur

$$„\; e(e-1)(e-2)z^{e-3} = \frac{1.2.3\ldots.e}{1.2.3\ldots.(e-3)} z^{e-3}.$$

„Hinc generaliter infero, quicquid sit n, fore semper

„ $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1.2.3\ldots.e}{1.2.3\ldots.(e-n)} z^{e-n}$. Est autem per §. 14. $1.2.3\ldots.e =$

„$\int dx(-lx)^e$ et $1.2.3\ldots(e-n)=\int dx(-lx)^{e-n}$, quare habetur *):

$$„\frac{d^n(z^e)}{dz^n}=z^{e-n}.\frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}},$$

„vel:

$$d^n(z^e)=z^{e-n}.dz^n.\frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}}.$$

„Ponitur hic dz constans, et $\int dx(-lx)^e$ ut et $\int dx(-lx)^{e-n}$ ita debent „integrari, ut supra praeceptum est, et tum ponere oportet $x=1$."

„§. 29. Non necesse est, quomodo verum eliciatur, ostendere; ap„parebit id ponendo loco n numerum integrum affirmativum quemcunque. „Quaeratur autem quid sit $d^{\frac{1}{2}}z$, si sit dz constans. Erit ergo $e=1$ et „$n=\frac{1}{2}$: habebitur itaque:

$$„d^{\frac{1}{2}}z=\frac{\int dx(-lx)}{\int dx\sqrt{(-lx)}}\sqrt{(z\,dz)}.$$

„Est autem $\int dx(-lx)=1$, et dicta area circuli A, cujus diameter est „1, erit $\int dx\sqrt{(-lx)}=\sqrt{A}$; unde $d^{\frac{1}{2}}z=\sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)}$. Proposita igitur sit „haec aequatio ad quampiam curvam: $y\,d^{\frac{1}{2}}z=z\sqrt{(dy)}$, ubi dz ponitur „constans, et quaeratur qualis ea sit curva. Cum sit $d^{\frac{1}{2}}z=\sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)}$, abibit „ea aequatio in hanc $y\sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)}=z\sqrt{(dy)}$, quae quadrata dat $\frac{y^2\,dx}{A}=z\,dy$; „unde invenitur: $\frac{1}{A}lz=C-\frac{1}{y}$, vel $ylz=CA.y-A$, quae est aequa„tio ad curvam quaesitam."

12.

Nous n'avons pas besoin de faire observer que nos idées sur le calcul des différentielles à indices quelconques diffèrent complètement de celles qu'*Euler* a exposées dans le passage qu'on vient de lire, soit qu'on adopte notre définition fondée sur le développement exponentiel des fonctions, soit que l'on fasse usage de la definition nouvelle indiquée au No. 9. laquelle est bien d'accord avec celle de nos premiers mémoires, puisqu'elle en est une conséquence. Ainsi, en supposant dz constant, *Euler* trouve:

$$d^{\frac{1}{2}}z=\sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)},$$

*) *Euler* désigne par lx le logarithme népérien de x; et les limites des intégrales sont $x=0$, $x=1$.

et nous trouverions au contraire $d^{\frac{1}{2}} z = 0$, ou mieux $d^{\frac{1}{2}} z = \psi\, d z^{\frac{1}{2}}$, ψ étant une fonction complémentaire $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots . + A_m z^m$, dont il faut tenir compte quand on prend la différentielle à indice $\frac{1}{2}$ d'une fonction. La dissemblance de nos principes se manifeste mieux encore, lorsque l'on cherche à intégrer l'équation:

$$(\alpha.) \quad y\, d^{\frac{1}{2}} z = z \sqrt{(d y)}.$$

D'abord cette équation cesserait en quelque sorte d'avoir un sens à nos yeux, si nous y regardions avec *Euler* dz comme constant. Prendre dz constant dans l'équation $(\alpha.)$, c'est pour nous comme si l'on prenait dz constant dans l'équation:

$$y\, d^2 z = z\, d y^2.$$

Quand on adopte une variable z pour variable indépendante, la différentielle première dz de cette quantité peut seule entrer dans les calculs, parcequ'au fond ces calculs s'appliquent aux dérivées de certaines fonctions inconnues de z, dont on cherche la valeur, et parceque ces dérivées, telles que seraient $\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{d z^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2 y}{d z^2}$, ... dépendent du rapport des différentielles $d^{\frac{1}{2}} y$, $d^2 y$, ... aux puissances de la différentielle dz, et non pas du rapport de $d^{\frac{1}{2}} y$, $d^2 y$, ... aux différentielles $d^{\frac{1}{2}} z$, $d^2 z$, ... d'un ordre différent du premier.

Maintenant si dans l'équation $(\alpha.)$ on choisit y pour variable indépendante, ce qui rend dy constant; et si, en raisonnant toujours d'après notre définition des différentielles, on demande l'intégrale de cette équation $(\alpha.)$, il faudra employer, pour l'obtenir, des considérations tout à fait différentes de celles d'*Euler*. Après avoir mis $(\alpha.)$ sous la forme:

$$y \frac{d^{\frac{1}{2}} z}{d y^{\frac{1}{2}}} = z,$$

et avoir désigné par A une constante arbitraire, on fera voir d'abord que l'on y satisfait en posant:

$$z = A\left(1 - 2\sqrt{-1} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y} . e^{-2\alpha\sqrt{-1}} . d\alpha\right).$$

En effet on déduit de là:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} z}{d y^{\frac{1}{2}}} = 2A \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y} . e^{-2\alpha\sqrt{-1}} . \alpha\, d\alpha,$$

ce qui, après une intégration par parties, donne:

$$y \frac{d^{\frac{1}{2}} z}{d y^{\frac{1}{2}}} = A\left(1 - 2\sqrt{-1} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 y} . e^{-2\alpha\sqrt{-1}} . d\alpha\right) = z.$$

Mais on peut trouver une intégrale incomparablement plus générale que celle là; car il est permis d'ajouter à la valeur précédente de z une fonction de la forme:

$$By + Cy^2 + \dots + Ky^m,$$

m étant un nombre entier positif quelconque, et A, B, C, ... K des constantes prises à volonté. En effet si l'on pose:

$$z = By + Cy^2 + \dots + Ky^m,$$

on voit que $\frac{d^{\frac{1}{2}} z}{dy^{\frac{1}{2}}}$ sera une fonction algébrique entière à coefficients arbitraires, laquelle étant multipliée par y pourra toujours être prise égale à z. Ainsi on satisfait à (α.) en posant:

$$z = A\left(1 - 2\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y} . e^{-2\alpha\sqrt{-1}} . d\alpha\right) + By + Cy^2 + \dots + Ky^m,$$

ce qui n'est point d'accord avec le résultat du No. 11.