

Les dimensions d'un ensemble abstrait.

Par

MAURICE FRÉCHET à Poitiers (France).

L'introduction de la notion de puissance d'un ensemble a été d'une importance capitale pour la théorie des ensembles abstraits. Mais en fait les seuls types de puissances infinies qui interviennent dans les applications sont celle d'un ensemble dénombrable et celle du continu linéaire. Cela tient à ce que la définition de la puissance d'un ensemble comporte un si haut degré d'abstraction qu'elle ne fait intervenir en aucune façon les relations mutuelles des divers éléments de l'ensemble.

Il y avait donc lieu de chercher à établir une comparaison moins grossière des ensembles, une comparaison où l'on tienne compte de ces relations mutuelles sans préciser pour cela la nature des éléments afin de pouvoir l'appliquer encore aux ensembles abstraits. C'est à quoi l'on arrive en tenant compte de la continuité, et en introduisant la notion plus précise du nombre de dimensions d'un ensemble. Je consacrerai ce mémoire à l'étude des ensembles dont le nombre de dimensions est fini.

Pour arriver à une définition précise du nombre de dimensions d'un ensemble abstrait, je me limiterai, comme dans ma Thèse*) à la considération des ensembles faisant partie d'une classe (L).

Déf. I. Une classe (L) est une ^{ensemble} classe d'objets discernables où l'on suppose donnée une définition quelconque de la limite d'une suite infinie de ces objets ou éléments. Cette définition sera telle, seulement, que 1° si les éléments d'une suite infinie sont identiques à un même élément A, la suite converge vers A, 2° toute suite extraite d'une suite qui converge vers un élément A, converge aussi vers A.

*) M. Fréchet, Sur quelques points du Calcul Fonctionnel, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo t. 22, fasc. I, 1906. Le mémoire actuel a été rédigé de façon que le lecteur n'ait pas besoin de recourir à ma Thèse.

Les définitions ordinaires des ensembles fermés, dérivés, ... s'étendent aux classes (L). J'ajouterai encore celle-ci.

Déf. II. Etant donnés deux ensembles E_1, E_2 (appartenant chacun à une classe (L)), je dirai qu'ils sont l'image l'un de l'autre ou qu'ils sont homéomorphes*), s'il existe entre eux une correspondance biunivoque qui est bicontinue. Une correspondance biunivoque entre E_1 et E_2 est continue, si A_1, A_2, \dots étant une suite d'éléments de E_1 , convergeant vers un élément A appartenant aussi à E_1 , et B_1, B_2, \dots, B étant les éléments correspondants de E_2 , la suite B_1, B_2, \dots converge vers B (**). Elle est bicontinue quand cela a lieu aussi lorsqu'on permute E_1 et E_2 . Il résulte de cette définition ce fait qu'on pourrait être tenté d'oublier, c'est que l'image d'un ensemble fermé peut fort bien être un ensemble non fermé***).

Définition de la dimension.

Déf. III. Si deux ensembles sont tels que l'un d'eux G_1 puisse être considéré comme l'image de l'autre G_2 ou d'une partie de cet autre, nous dirons que le premier G_1 a un type de dimension inférieur ou égal à celui du second G_2 et nous écrirons $dG_1 \leq dG_2$, ou $dG_2 \geq dG_1$.

Déf. IV. Si l'on a à la fois $dG_1 \leq dG_2$ et $dG_2 \leq dG_1$, nous dirons que G_1 et G_2 ont même type de dimension et nous écrirons $dG_1 = dG_2$ ou $dG_2 = dG_1$.

Déf. V. Si l'on a $dG_1 \leq dG_2$ et s'il est certain que G_2 ne peut être considéré d'aucune manière comme homéomorphe de G_1 ou d'une partie de G_1 , nous dirons que le type de dimension de G_1 est inférieur (et non pas égal) à celui de G_2 et nous écrirons

$$dG_1 < dG_2 \quad \text{ou} \quad dG_2 > dG_1.$$

Déf. VI. Etant donnés deux ensembles G_1, G_2 appartenant chacun à une classe (L), nous appellerons $[[G_1, G_2]]$ un ensemble dont chaque élément est un couple (A, B) d'éléments, l'un A de G_1 , l'autre B de G_2 . Il sera entendu qu'une suite d'éléments (A_n, B_n) de $[[G_1, G_2]]$ converge vers (A, B) si A_n converge vers A dans G_1 en même temps que B_n converge vers B dans G_2 ; de sorte que $[[G_1, G_2]]$ fait aussi partie d'une classe (L).

*) Suivant une dénomination employée par M. Hadamard.

**) C'est la définition donnée par M. Baire dans son mémoire: Sur la représentation des fonctions discontinues, Acta Mathematica, t. 32, p. 136, définition limitée aux espaces à n dimensions, mais qui s'étend textuellement aux classes (L).

***) Ainsi une droite indéfinie est un ensemble fermé qui est l'image (par inversion) de l'ensemble non fermé constitué par tous les points d'un cercle autres que le pôle d'inversion.

Déf. VII. Etant donnés deux ensembles G_1, G_2 , nous appellerons somme de leurs types de dimension et nous dénoterons par $dG_1 + dG_2$, ou $dG_2 + dG_1$, le type de dimension de l'ensemble $[[G_1, G_2]]$ que nous venons de définir.

Remarques. — 1° Je ne m'occupe pas actuellement de la question de savoir si, étant donnés deux ensembles G_1, G_2 , on a nécessairement l'une des relations

$$dG_1 < dG_2, \quad dG_1 = dG_2, \quad dG_1 > dG_2.$$

Mais si l'une a lieu, c'est la seule (voir la note page 158).

2° On voit que les définitions précédentes sont complètement analogues à celles qui servent à comparer les puissances, sauf que l'on introduit dans la définition de l'homéomorphie l'invariance du passage à la limite. En particulier si $dE_1 = dE_2$, E_1 et E_2 ont même puissance.

On doit signaler toutefois une différence essentielle entre les deux théories. S'il suffit, en effet, que deux ensembles soient images l'un de l'autre pour qu'ils aient le même type de dimension, cette condition n'est pas nécessaire. Autrement dit, *il peut arriver que deux ensembles aient le même type de dimension et que chacun d'eux ne soit, d'aucune manière, homéomorphe de l'autre tout entier**. Prenons en effet par exemple deux ensembles G_1, G_2 de nombres réels x, x' définis par les relations suivantes:

$$\text{pour } G_1: 0 \leq x \leq 1; \quad \text{pour } G_2: x' > 2.$$

Ces deux ensembles ont le même type de dimension. En effet, la relation $x' = x + 3$ établit une homéomorphie de G_1 sur une partie de G_2 et la relation: $x = \frac{2x' - 1}{4(x' - 1)}$ établit une homéomorphie de G_2 sur une partie de G_1 .

Or si (comme rien ne nous en empêche) nous ne considérons dans le cas actuel comme suites convergentes de nombre réels que celles qui ont leurs limites finies, il sera impossible de considérer G_1 comme image (Déf. II) de G_2 tout entier. En effet, pour toute correspondance biunivoque entre G_1 et G_2 , on pourrait facilement former une suite d'éléments de G_1 convergeant vers un élément de G_1 et qui correspondent à une suite d'éléments de G_2 qui convergent vers $x' = 2$ (point n'appartenant pas à G_2) ou qui s'éloignent à l'infini (et n'ont par conséquent pas de limite).

3° Il est facile de voir que les propriétés essentielles des signes $>, =, <$ sont conservées ici. Par exemple, les deux inégalités

$$dG_1 > dG_2, \quad dG_2 > dG_3 \quad \text{entraînent} \quad dG_1 > dG_3.$$

En effet G_3 est homéomorphe d'une partie K de G_2 , et G_2 d'une partie H de G_1 . Dans cette seconde homéomorphie, K se trouve être l'image

*) Cf. pour le cas des puissances: Em. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Note I, p. 104.

d'une partie H_1 de G_1 , donc G_3 est l'image d'une partie H_1 de G_1 , d'où: $dG_1 \geq dG_3$. On n'a pas, d'ailleurs, $dG_1 = dG_3$ sans quoi G_1 serait homéomorphe d'une partie T de G_3 et dans l'homéomorphie de G_3 sur la partie K de G_2 , T serait l'image d'une partie K_1 de G_2 , donc G_1 étant l'image d'une partie K_1 de G_2 , on aurait $dG_1 \leq dG_2$ contrairement à l'hypothèse.

4° D'après la définition de la somme (Déf. VII), on a toujours $dG_1 + dG_2 \geq dG_1$ et $dG_1 + dG_2 \geq dG_2$ quels que soient les ensembles G_1 et G_2 . Car G_1 par exemple est homéomorphe de l'ensemble de ceux des éléments (A, B) de $[[G_1, G_2]]$ où B est un élément quelconque mais fixe de G_2 . Nous verrons d'ailleurs (p. 155) des exemples de cas où l'on a

$$dG_1 + dG_2 = dG_1.$$

5° On a évidemment

$$(dG_1 + dG_2) + dG_3 = dG_1 + (dG_2 + dG_3).$$

Types de dimension des espaces géométriques. — Appelons R_n l'espace à n coordonnées, c'est à dire la classe dont chaque élément X est déterminé par n nombres réels finis x_1, x_2, \dots, x_n . La suite $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}, \dots$, aura par définition pour limite X si chaque coordonnée de $X^{(n)}$ converge vers la coordonnée de même rang de X , lorsque n croît indéfiniment. D'après cette définition, R_n est une classe (L) (Déf. I).

On voit immédiatement que l'on a $dR_n \leq dR_p$, si $n < p$, car R_n est l'image de l'ensemble des points de R_p dont les $p - n$ dernières coordonnées sont nulles.

D'autre part, on a aussi $dR_{n+p} = dR_n + dR_p$. En effet, R_n étant l'ensemble des suites de n coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n , R_p l'ensemble des suites de p coordonnées x_{n+1}, \dots, x_{n+p} , $[[R_n, R_p]]$ (Déf. VI) sera l'ensemble des suites de $n + p$ coordonnées $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+p}$, c'est à dire R_{n+p} . Comme d'ailleurs la définition de la limite sera la même dans $[[R_n, R_p]]$ et R_{n+p} , on aura bien

$$dR_{n+p} = d[[R_n, R_p]] = dR_n + dR_p \quad (\text{Déf. VII}).$$

Types de dimensions d'ensembles dénombrables.

Nous avons ainsi obtenu une infinité de types de dimension*) rangés suivant une suite non décroissante, à savoir

$$dR_1 \leq dR_2 \leq dR_3 \leq \dots \leq dR_n \dots$$

Mais il s'en faut de très loin que nous ayons épuisé ainsi tous les types possibles. Je vais maintenant montrer que l'on peut former explicitement une suite ordonnée de types de dimension inférieurs à dR_1 , tous distincts et formant un ensemble non dénombrable.

*) Nous étudierons plus loin la question de savoir s'ils sont tous distincts.

Il est facile de trouver le type de dimension qui est inférieur à tout autre. En effet, pour que la définition de la dimension d'un ensemble E ait un sens, nous devons supposer que l'ensemble E possède au moins une suite qui converge vers l'un de ses éléments.

Considérons alors un ensemble S_1 qui est uniquement formé d'une suite d'éléments de nature quelconque pris dans une classe (L) et qui convergent vers l'un des éléments de cette suite.*) Tout autre tel ensemble Σ_1 en est l'image (et a par conséquent même type de dimension); il suffit pour le voir de placer dans S_1 et Σ_1 l'élément limite à la première place puis, de faire correspondre les éléments de même rang. On a ainsi un type de dimension déterminé $dS_1 = \delta_1$. Tout ensemble non isolé qui n'est pas uniquement formé d'une suite convergeant vers l'un des éléments de cette suite est d'un type de dimension supérieur à δ_1 . Ainsi δ_1 est le plus petit des types de dimension.

Je vais maintenant faire correspondre à tout nombre α fini ou transfini un type de dimension déterminé $\delta_\alpha < dR_1$, de sorte que si $\beta < \alpha$ on ait $\delta_\beta < \delta_\alpha$.

Comme je veux que $\delta_\alpha < dR_1$, je pourrai supposer que δ_α soit le type de dimension d'un ensemble linéaire F_α . Formons donc F_α .

Nous prendrons pour F_1 , l'ensemble des points d'abscisses

$$1, \left(1 - \frac{1}{2}\right), \left(1 - \frac{1}{3}\right), \dots, \left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots$$

Supposons maintenant qu'on ait défini F_β pour $\beta < \alpha$ et définissons F_α . On pourra toujours (et d'une seule manière) écrire $\alpha = \gamma'\omega + n$, n étant l'un des nombres entiers positifs ou zéro, ω étant le premier nombre transfini et γ un nombre ordinal fini ou transfini quelconque, qui peut être nul. Nous supposerons que si on écrit d'une manière analogue, $\beta = \gamma'\omega + n'$, les ensembles $F_{\gamma'\omega + 1}$ sont formés de points de l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ pour $\beta < \alpha$. Alors si $n > 1$ nous prendrons pour F_α un ensemble formé par l'ensemble $F_{\gamma'\omega + 1}$ et par $n - 1$ autres ensembles obtenus en opérant une translation de l'intervalle $(0, 1)$ qui porte cet ensemble de façon à le placer successivement dans les intervalles $(1, 2)$, $(2, 3)$, \dots , $(n - 1, n)$. Si $n = 0$, on pourra écrire $\alpha = (\gamma - 1)\omega + \omega$ et l'ensemble F_α sera construit de la même manière en formant une infinité d'ensembles égaux à $F_{(\gamma - 1)\omega + 1}$ répartis dans $(0, 1)$, $(1, 2)$, \dots , $(n - 1, n)$, \dots . Enfin si $n = 1$ et $\alpha > 1$ c'est-à-dire $\gamma > 0$, l'ensemble F_α sera obtenu en opérant sur l'ensemble $F_{\gamma'\omega}$ la transformation: $x' = 1 - \frac{1}{4x}$ et en ajoutant le point $x' = 1$. De cette façon

*) On peut par exemple supposer que S_1 est formé des nombres $0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

$F_{\gamma\omega+1}$ sera lui aussi contenu dans $(\frac{1}{2}, 1)$ comme l'étaient les ensembles $F_{\gamma'\omega+1}$ pour $\gamma'\omega+1 < \alpha$.

Alors F_1 étant défini, on voit que F_α sera aussi défini quel que soit α et nous pourrons poser $\delta_\alpha = dF_\alpha$. On a bien d'abord $\delta_\alpha < dR_1$. Je dis que δ_α croît avec α .

En effet, nous voyons d'abord que si $\alpha = \gamma\omega + n$, avec $n > 0$, l'ensemble F_α a, jusqu'à l'ordre γ inclusivement, des dérivés ayant un nombre infini d'éléments distincts, tandis que le dérivé d'ordre $\gamma + 1$ est formé exactement de n points. De plus F_α est fermé quel que soit α . Si maintenant $n > 1$, on voit que $F_{\alpha-1}$ est une partie de F_α . Si $n = 0$, $F_{(\gamma-1)\omega+p}$ est une partie de $F_{\gamma\omega}$ quel que soit p . Si $n = 1$, $F_{\alpha-1}$ est homéomorphe par la transformation $x' = 1 - \frac{1}{4x}$ d'une partie de F_α (celle qu'on obtient en retranchant le point $x' = 1$). Donc quels que soient α et β , $\beta < \alpha$ entraîne $dF_\beta \leq dF_\alpha$. Mais le signe $=$ ne peut avoir lieu, sans quoi F_α serait homéomorphe d'une partie de F_β . Or il est évident, d'après la définition de l'homéomorphie, qu'alors cette partie de F_β devrait avoir un dérivé d'ordre $\gamma + 1$ formé de n points et des dérivés d'ordre $< \gamma$ ayant un nombre infini de points, ce qui est impossible si $\beta < \gamma\omega + n$.

Ainsi nous avons formé une première échelle de types de dimension croissant constamment. Comme ils correspondent aux nombres transfinis, il y a une infinité non dénombrable de pareils types.

Remarquons que les ensembles F_α ont un dérivé (d'ordre $\gamma + 2$) qui est nul. Donc ce sont des ensembles dénombrables et il est manifeste qu'ils ne sont denses dans aucun intervalle. Ils ne contiennent que des points d'abscisses rationnelles. Soit alors δ le type de dimension de l'ensemble C_1 des points d'abscisses rationnelles sur l'axe des x . Je dis que δ est supérieur à tous les δ_α . D'abord tous les F_α sont contenus dans C_1 , donc $\delta_\alpha \leq \delta$. De plus, si l'on avait $\delta_\alpha = \delta$, il faudrait que C_1 fût l'image de F_α ou d'une partie K de F_α . Comme tout élément de C_1 peut être considéré comme appartenant à tous les dérivés de C_1 , il en serait de même pour K et alors les dérivés de F_α d'un ordre quelconque ne devraient jamais être nuls contrairement à l'hypothèse.

Il est d'ailleurs facile de prouver que tout ensemble linéaire dénombrable N qui est dense dans au moins un intervalle (a_0, b_0) a le même type de dimension δ que C_1 . En effet N ne remplit pas tout l'intervalle (a_0, b_0) ; soient donc a, b deux points intérieurs à cet intervalle et n'appartenant pas à N , et soient N_1 l'ensemble des points de N entre a et b . N_1 est dénombrable et dense dans (a, b) . C'est l'image d'un ensemble linéaire N_0 dénombrable, dense sur toute une droite indéfinie, celui qu'on

obtient à partir de N_1 par la transformation $x' = L\left(\frac{x-a}{b-x}\right)$. Prouvons d'abord que $dN_0 = \delta$.

Pour cela rangeons, de façon quelconque, l'ensemble N_0 en une suite x_1, x_2, x_3, \dots et les nombres rationnels formant C_1 en une suite c_1, c_2, \dots . Nous allons les placer maintenant dans un ordre tel que la continuité soit conservée en même temps que l'ordre. Pour cela posons $y_1 = x_1$, $d_1 = c_1$, puis prenons pour y_2 dans la suite x_1, x_2, x_3, \dots le premier point qui se trouve à droite de x_1 et de même pour d_2 le premier point de la suite c_1, c_2, \dots qui est à droite de c_1 . Puis je prendrai pour y_3 le point x_i de plus petit indice à gauche de y_1 , pour y_4 le point x_i de plus petit indice à droite de y_2 , pour y_5 le point x_i de plus petit indice entre y_2 et y_1 et ainsi de suite. J'opérerai semblablement pour les c . Il est alors facile de voir que la suite y_1, y_2, \dots sera formée de points x_i tous distincts et contient tous les x_i . Il en sera de même pour les d relativement aux c . De plus si $y_j < y_k$, on aura de même $c_j < c_k$. Il en résulte immédiatement que la correspondance (y_i, d_i) que nous venons d'établir constitue une homéomorphie de C_1 sur N_0 et par suite sur N_1 , partie de N . Donc $dC_1 \leq dN$. Mais soit maintenant N_2 l'ensemble des points de N et de C_1 , c'est un ensemble dénombrable et partout dense comme N_0 ; la démonstration précédente prouve que $dC_1 = dN_2$; comme N est une partie de N_2 , on a donc $dC_1 \geq dN$. En définitive on a bien $dN = dC_1 = \delta$.

Ainsi tout ensemble linéaire dénombrable qui est dense dans au moins un intervalle a le même type de dimension δ que l'ensemble des points rationnels de la droite, et ce type est supérieur à tous les δ_α . De plus δ est le plus grand type de dimension des ensembles linéaires dénombrables. Il suffit, pour établir ce dernier point, de remarquer que si E est un ensemble linéaire dénombrable quelconque, en ajoutant à E l'ensemble des points de C_1 qui ne font pas partie de E , on obtient un ensemble linéaire dénombrable E_1 qui étant dense dans tout intervalle, a pour type de dimension δ . Comme E est une partie de E_1 , on aura donc $dE \leq \delta$.

On peut même prouver que δ est le plus grand type de dimension des ensembles dénombrables formés d'éléments de l'espace R_n à n coordonnées, quel que soit l'entier positif n . En effet, soit un tel ensemble dénombrable $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(p)}, \dots$ et soit $Y_\alpha^{(p)}$ le point dont les coordonnées respectives surpassent les coordonnées de même rang de $X^{(p)}$ d'un même nombre α . Quel que soit α , l'ensemble E_α des points

$$Y_\alpha^{(1)}, Y_\alpha^{(2)}, \dots, Y_\alpha^{(p)}, \dots$$

est l'image de l'ensemble E des points

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$$

Prenons alors pour α un nombre irrationnel tel que toutes les coordonnées de tous les points de E_α soient incommensurables. (Ceci est toujours possible; en effet dans le cas contraire tout nombre irrationnel serait de la forme $x_n^{(p)} - c_q$, $x_n^{(p)}$ étant l'une des coordonnées de l'un des points $X^{(p)}$ et c_q l'un des nombres rationnels c_1, c_2, \dots ; or l'ensemble des nombres $x_n^{(p)} - c_q$ qui dépendent chacun de 3 indices entiers est dénombrable, tandis que l'ensemble des nombres irrationnels ne l'est pas). Nous verrons plus loin (p. 154) que l'ensemble H_n des points de R_n dont toutes les coordonnées sont incommensurables est homéomorphe de l'ensemble H_1 obtenu pour $n=1$. Alors, α ayant été choisi de la façon indiquée, E_α sera une partie de H_1 et par conséquent E sera l'image d'un ensemble dénombrable de points de H_1 c'est à dire que dE sera inférieur ou égal au type de dimension d'un ensemble dénombrable linéaire et par conséquent $dE \leq \delta$. En particulier, l'ensemble C_n des points de R_n dont toutes les coordonnées sont rationnelles est d'un type de dimension égal à δ .

Limite des types de dimensions inférieurs à l'unité.

Tous les types de dimension considérés jusqu'à présent sont inférieurs à dR_1 (nous dirons simplement qu'ils sont inférieurs à 1). Car le plus grand d'entre eux δ est relatif à l'ensemble linéaire C_1 des nombres rationnels. δ est au plus égal à 1 puisque C_1 est une partie de l'espace linéaire R_1 ; il n'est pas égal à 1 puisque R_1 est d'une puissance supérieure à C_1 .

Mais nous n'avons pas encore épuisé la liste des types inférieurs à l'unité. En effet tous les ensembles F_α et C_1 sont dénombrables. Il est facile de voir que si le type de dimension d'un ensemble non dénombrable peut leur être comparé, il sera supérieur et non pas égal à δ . Si de plus cet ensemble est linéaire, ce type sera au plus égal à 1. On peut en trouver qui sont effectivement de types inférieurs à 1. Pour y arriver nous montrerons d'abord que: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire soit du même type de dimension que l'espace linéaire R_1 est que cet ensemble comprenne au moins tous les points d'un intervalle*. En effet observons que R_1 est l'image de tout ensemble J formé de tous les points d'un intervalle, limites exclues, la correspondance étant par exemple définie par: $x' = L\left(\frac{x-\alpha}{b-x}\right)$. La condition est donc suffisante. Elle est nécessaire, car si un ensemble linéaire E est tel que $dE = 1$, E comprend une partie E_1 homéomorphe de R_1 . Si E_1 ne comprenait aucun intervalle, son ensemble complémentaire serait dense partout et on pourrait trouver un point x n'appartenant pas à E_1 et tel qu'il y ait des

points de E_1 à sa droite et à sa gauche. Il diviserait donc E_1 en deux ensembles sans points communs et tels qu'aucun point limite de l'un n'appartienne à l'autre. Les deux ensembles correspondants de R_1 jouiraient de la même propriété. Et par suite la droite R_1 serait décomposée en deux ensembles fermés sans points communs ce qui est impossible.

Il en résulte que *tout ensemble linéaire qui ne remplit aucun intervalle est d'un type de dimension inférieur à 1. Tel est en particulier l'ensemble H_1 des points d'abscisses irrationnelles.* Le type de dimension de H_1 , Δ_1 , qui est ainsi inférieur à 1, est aussi supérieur à δ . En effet, il peut être comparé à δ , puisque H_1 comprend en particulier l'ensemble des points dont les abscisses sont de la forme $r + \sqrt{2}$ où r est un nombre rationnel, lequel ensemble est évidemment homéomorphe de C_1 et par conséquent d'un type de dimension égal à δ . On a donc

$$\Delta_1 = dH_1 \geq dC_1 = \delta$$

et comme H_1 est d'une puissance supérieure à C_1 , on a bien $\Delta_1 > \delta$ et non pas égal. Nous avons ainsi obtenu un type de dimension Δ_1 compris entre δ et 1. Il est facile de nommer toute une classe d'ensembles de dimension Δ_1 .

Tout ensemble linéaire E dont l'ensemble complémentaire N est un ensemble dénombrable qui est dense dans tout intervalle peut être considéré comme une image de l'ensemble H_1 des points d'abscisses irrationnelles.

En effet nous avons vu (p. 151) qu'un ensemble tel que N pouvait être considéré comme l'image de l'ensemble C_1 des points d'abscisses rationnelles, la correspondance étant faite de façon à conserver l'ordre relatif. Supposons fixée cette correspondance P ; nous pourrions alors établir ainsi la correspondance de E et de H_1 . Tout élément i de H_1 détermine une coupure dans C_1 ; c'est à dire qu'il divise C_1 en deux classes C_1' , C_1'' sans éléments communs, et tels que tout élément de C_1' soit à gauche de tout élément de C_1'' . Dans la correspondance P , à cette coupure de C_1 correspondra une coupure de N divisant N en deux classes N' , N'' sans éléments communs, et N' étant entièrement à gauche de N'' . Puisque N est dense partout, il y a un nombre x et un seul supérieur ou égal à tous ceux de N' , inférieur ou égal à tous ceux de N'' . Plus encore, x ne peut appartenir à N' ou N'' , sans quoi il y aurait dans C_1'' par exemple, un point à gauche de tous les autres ce qui n'est pas. Donc x appartient à E . Ainsi nous pouvons faire correspondre à tout point i de H_1 un point unique x de E . On voit facilement que la réciproque est vraie et que l'ordre relatif est conservé; d'où on déduit facilement que cette correspondance est bien une homéomorphie.

On peut même généraliser cette proposition. Prouvons d'abord cet

énoncé déjà utilisé: H_n est une image de H_1 . H_n est en effet l'ensemble des points (de l'espace R_n) dont les n coordonnées sont irrationnelles et par suite développables en fractions continues:

$$x_1 = b_0^{(1)} + \frac{1}{a_1^{(1)} + \frac{1}{a_2^{(1)} + \dots}}, \quad \dots, \quad x_n = b_0^{(n)} + \frac{1}{a_1^{(n)} + \frac{1}{a_2^{(n)} + \dots}}.$$

Dans ces expressions les a sont des nombres entiers > 0 , les b sont des entiers > 0 , < 0 ou $= 0$. Établissons une correspondance biunivoque quelconque entre les nombres entiers > 0 et les nombres entiers > 0 , < 0 ou $= 0$. On fera ainsi correspondre à $b_0^{(2)}, \dots, b_0^{(n)}$ les nombres entiers > 0 respectifs $a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(n)}$. Faisons maintenant correspondre*) au point I de coordonnées x_1, \dots, x_n , le point de l'espace linéaire R_i dont l'abscisse est:

$$i = b_0^{(1)} + \frac{1}{a_0^{(2)} + \frac{1}{a_0^{(3)} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_0^{(n)} + \frac{1}{a_1^{(1)} + \dots}}}}.$$

de sorte que les quotients incomplets soient successivement:

$$a_0^{(2)}, a_0^{(3)}, \dots, a_0^{(n)}, a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(n)}, a_2^{(1)}, \dots.$$

Il est facile de voir qu'on établit ainsi entre I et i une correspondance qui est biunivoque et bicontinue. Elle est bien bicontinue puisque si un nombre x tend vers un nombre y , les quotients incomplets de x sont identiques à ceux de y jusqu'à un certain rang qui croît indéfiniment quand $(x - y)$ tend vers zéro.

Il est maintenant bien facile de montrer que tout type de dimension inférieur à 1 est au plus égal à Δ_1 . En effet si un type de dimension est inférieur à 1, c'est celui d'un ensemble linéaire E qui ne remplit aucun intervalle comme nous l'avons prouvé plus haut. Il en résulte que l'ensemble complémentaire de E est dense dans tout intervalle. On peut donc quels que soient les entiers p et n de signes quelconques marquer dans l'intervalle $\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}$ un point $x_{n,p}$ n'appartenant pas à E . Soit E_1 l'ensemble des points de la droite indéfinie autres que les points $x_{n,p}$. L'ensemble E_1 contient E , d'où $dE \leq dE_1$; et son ensemble complémen-

*) J'utilise ici un procédé indiqué bien souvent; par exemple, Borel, loc. cit., p. 18, 19. Le résultat actuel est d'ailleurs aussi une conséquence immédiate de la remarque de M. Baire d'après laquelle H_n est, quel que soit n , une image de son espace G_0 .

taire est un ensemble dénombrable partout dense; d'après ce qui précède, E_1 est donc homéomorphe de H_1 . Autrement dit, on a

$$dE \leq dE_1 = dH_1 = \Delta_1,$$

ce qui prouve bien que $dE \leq \Delta_1$ *).

M. R. Baire a introduit récemment, dans le but de poursuivre ses profonds travaux sur les fonctions discontinues, la considération de ce qu'il appelle l'«espace à zéro dimension».***) Sans qu'il soit ici nécessaire de donner la définition de cet espace G_0 , il nous suffit de savoir que c'est une certaine classe (L) qui (d'après une démonstration de M. Baire lui-même***) peut être considérée (dans notre terminologie) comme homéomorphe de l'ensemble H_1 des points d'abscisses irrationnelles sur une droite indéfinie. Le type de dimension de l'espace G_0 est donc le même que celui de H_1 , soit Δ_1 . On voit qu'avec nos définitions ce type dG_0 est effectivement inférieur à 1 et joue un rôle important comme étant le plus grand des types de dimension inférieurs à 1.

On voit d'ailleurs aussi qu'en adoptant nos définitions, il ne serait pas naturel de conserver à G_0 le nom d'espace à zéro dimension et cela pour deux raisons. La première, c'est que nous avons formé effectivement une suite infinie de types de dimension δ_α inférieurs à celui de G_0 : $\delta_\alpha < \Delta_1$. La seconde, c'est qu'on n'a pas toujours, $dE + \Delta_1 = dE$ quel que soit l'ensemble E . (Je dis que ceci n'a pas toujours lieu, car cette égalité peut avoir lieu pour certains ensembles E . En effet, d'après la déf. VI, on voit immédiatement que

$$[[H_n, H_p]] \equiv H_{n+p}, \text{ et comme } dH_n = dH_1 = \Delta_1,$$

quelque soit n , on aura bien

$$dH_n + \Delta_1 = dH_n.$$

Mais une égalité analogue peut avoir lieu pour d'autres types; ainsi on a de même

$$[[C_n, C_p]] \equiv C_{n+p} \text{ et } dC_n = dC_1 = \delta$$

quelque soit n , d'où:

$$dC_n + \delta = dC_n$$

et pourtant $\delta < \Delta_1$). On peut avoir $dE + \Delta_1 > dE$, comme nous allons

*) Puisqu'un ensemble linéaire de dimension égale à un contient au moins tous les points d'un intervalle, sa mesure ne peut jamais être nulle. Mais un ensemble linéaire de dimension inférieure à un, n'est pas nécessairement de mesure nulle. Par exemple, l'ensemble des points d'abscisses irrationnelles entre 0 et 1 a même mesure que l'ensemble de tous les points entre 0 et 1, cependant le premier a le type de dimension Δ_1 , le second le type de dimension $dR_1 = 1$ et on a $\Delta_1 < 1$.

**) R. Baire, Sur la représentation des fonctions discontinues, Acta Mathematica, 32, p. 134.

***) Loc. cit., p. 137.

le montrer. Prenons en effet pour E l'espace linéaire R_1 ; et soit P l'ensemble $[[H_1, R_1]]$, c'est à dire l'ensemble des points du plan dont l'une des coordonnées $x = i$ est irrationnelle, l'autre y étant quelconque. On a évidemment $dP \geq dR_1 = 1$; je dis qu'on n'a pas $dP \leq dR_1$, c'est à dire que P ne peut être considéré comme l'image d'un ensemble linéaire L . En effet, s'il en était ainsi l'homéomorphie se traduirait par les relations:

$$i = f(X), \quad y = g(X), \quad X = F(i, y)$$

où (i, y) est un point de P , X un point de L . La fonction $F(i, y)$ serait une fonction continue de la variable y laquelle varie de $-\infty$ à $+\infty$. Cette fonction continue ne doit pas reprendre deux fois la même valeur X puisque la correspondance est biunivoque. Par conséquent si on se donne arbitrairement une valeur irrationnelle i_0 de i , la fonction $F(i_0, y)$ est une fonction continue de y qui est constamment croissante (ou constamment décroissante). En particulier le segment de droite

$$S_{i_0} \quad x = i_0, \quad 0 \leq y \leq 1$$

(par exemple), correspond à un segment de droite

$$T_{i_0} \quad F(i_0, 0) \leq X \leq F(i_0, 1) \quad \text{ou} \quad F(i_0, 1) \leq X \leq F(i_0, 0),$$

segment dont tous les points feraient partie de l'ensemble linéaire L . Si

$$i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$$

est une suite de nombres irrationnels qui convergent vers i_0 , à chacun des segments S_{i_n} correspondra un segment T_{i_n} faisant partie de L et le point $x = i_n, y = \frac{1}{2}$ qui fait partie de S_{i_n} et converge vers le point $x = i_0, y = \frac{1}{2}$ de S_{i_0} , correspondra à un point faisant partie de T_{i_n} qui devrait converger vers un certain point intérieur au sens strict à T_{i_0} . Or ceci est impossible puisque les segments T_i sont tous sur la même droite et sans point commun. Ainsi, il est bien absurde de supposer que $dP \leq dR_1$. On a donc

$$dR_1 < dP = d[[H_1, R_1]] = dH_1 + dR_1,$$

d'où:

$$\Delta_1 + dR_1 > dR_1.$$

D'ailleurs P étant une partie de R_2 on a: $dR_1 < dP \leq dR_2$, ce qui prouve en passant ce fait connu que $dR_1 < dR_2$ (et non pas seulement $dR_1 \leq dR_2$).

Il est utile de remarquer, par contre, que l'on a:

$$\Delta_1 + dR_1 < dR_2.$$

En effet on a d'abord $\Delta_1 + dR_1 \leq dR_2$, puisque l'ensemble P est une partie du plan tout entier R_2 . Mais, on n'a pas $dP \geq dR_2$, sans quoi R_2 serait applicable sur une partie P_1 de P . Or, tous les points de P_1 ne sont pas sur une même droite, ou alors on aurait $dR_2 \leq dR_1$.

et nous avons vu que c'est impossible. Il y a donc au moins deux points de P_1 d'abscisses différentes: i et i' . Si maintenant k est un nombre rationnel compris entre i et i' , on voit que l'on peut décomposer P_1 en deux parties U, U' dont les points ont des abscisses respectivement inférieures et supérieures à k . U et U' sont donc deux ensembles sans point commun, et tels qu'aucun point limite de l'un n'appartienne à l'autre. Ils correspondraient donc à deux ensembles de R_2 jouissant de la même propriété. De sorte que R_2 serait divisé en deux ensembles fermés sans points communs ce qui est impossible.

Types de dimension compris entre celui de la droite et celui du plan.

L'exemple précédent nous prouve qu'il y a des types de dimension compris entre dR_1 et dR_2 . En effet, soit E un ensemble linéaire non isolé qui ne remplit aucun intervalle et Q l'ensemble plan représenté par le symbole $[[E, R_1]]$ (Déf. VI). On pourra prouver, exactement comme dans le paragraphe précédent, que l'on a $dQ > dR_1$. D'autre part, on a comme nous l'avons vu

$$dE \leq \Delta_1 = dH_1.$$

Ceci veut dire que E est l'image d'une partie E_1 de H_1 . On aura évidemment:

$$dQ = d[[E, R_1]] = d[[E_1, R_1]] \leq d[[H_1, R_1]] < dR_2.$$

On voit donc que *quel que soit l'ensemble linéaire non isolé E ne remplissant aucun intervalle, l'ensemble plan $Q = [[E, R_1]]$, sera tel que:*

$$dR_1 < dQ < dR_2.$$

D'ailleurs les types de dimension qu'on obtient ainsi ne sont pas tous égaux. En effet supposons par exemple que E soit l'ensemble S , déjà considéré, des points d'abscisses

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

On voit qu'on a $dE = \delta_0 < \Delta_1 = dH_1$, donc comme précédemment

$$dQ = d[[E, R_1]] \leq d[[H_1, R_1]] = dP.$$

Je dis qu'on n'a pas $dQ \geq dP$. En effet, il faudrait pour cela que P fût l'image d'une partie Q_1 de Q . Or en recommençant un raisonnement déjà employé, on verrait facilement que chacune des droites D parallèles à Oy dont est composé l'ensemble plan P correspondrait dans Q_1 à un ensemble linéaire formé de tous les points intérieurs au sens strict à un segment S , limité ou non, situé sur l'une des droites de Q . L'ensemble des droites de P a la puissance de H_1 , c'est à dire du continu; il correspondrait ainsi à une infinité non dénombrable de segments n'empiétant pas les uns sur les autres et situés sur les droites de Q . Or sur une seule droite on ne peut placer qu'une infinité dénombrable de segments

n'empiétant pas; comme l'ensemble des droites de Q a la puissance de E c'est à dire est dénombrable, on arrive ainsi à une impossibilité. On a donc bien:

$$dR_1 < dQ < dP < dR_2.$$

Il est naturel de chercher maintenant comment se répartissent les types de dimension compris au sens strict entre dR_1 et dR_2 . Il est facile de citer un type qui n'est supérieur à aucun d'eux, c'est le type de dimension d'une circonférence γ^*). Il est manifeste qu'il est supérieur et non pas égal à dR_1 . D'autre part soit E un ensemble tel que $dE < d\gamma$, E sera l'image d'une partie E_1 de γ . Soit donc A un point de γ non dans E_1 et E_2 la figure inverse de E_1 par rapport à γ . On voit que $dE = dE_2$ et comme E_2 est un ensemble linéaire, on a bien $dE \leq dR_1$.

Nous allons maintenant former le type de dimension le plus grand de tous ceux qui sont inférieurs à dR_2 . Je dis que c'est celui de l'ensemble Δ_2 des points de R_2 dont les coordonnées ne sont pas toutes deux rationnelles. Pour le démontrer j'établirai deux lemmes.

1° La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E de points du plan R_2 soit à 2 dimensions (c'est à dire qu'il ait le même type de dimensions que R_2) est qu'il possède au moins tous les points d'un cercle. La condition est suffisante; car s'il contient par exemple les points du cercle $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ il contient aussi les points de l'ensemble E , défini par

$$|x-x_0| < \frac{r}{2}, \quad |y-y_0| < \frac{r}{2}$$

lequel correspond à R_2 par l'homéomorphie

$$x' = L \left(\frac{x-x_0 + \frac{r}{2}}{x_0 + \frac{r}{2} - x} \right), \quad y' = L \left(\frac{y-y_0 + \frac{r}{2}}{y_0 + \frac{r}{2} - y} \right).$$

Il en résulte que $dE = dR_2$.

La condition est aussi nécessaire. La démonstration en est plus longue, mais résulte par exemple des travaux de M. Lüroth, je n'ai donc pas à y revenir.

2° Tout ensemble plan dont l'ensemble complémentaire est un ensemble dénombrable dense dans tout le plan est homéomorphe de Δ_2 . Il est aussi

*) Cela ne veut pas dire que $d\gamma$ est inférieur ou égal à tout type de dimension supérieur à dR_1 . On peut même donner un exemple d'un autre ensemble plan F , tel que $dF > 1$ et que $d\gamma$ ne soit ni inférieur, ni égal, ni supérieur à dF . Il suffit de prendre pour F l'ensemble formé par le point de coordonnées $(0, 0)$ et par tous les segments

$$0 < x < 1, \quad y = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

simple d'établir la généralisation de ce théorème obtenue en introduisant l'ensemble Δ_n des points de R_n dont les coordonnées ne sont pas toutes rationnelles.

Tout ensemble F contenu dans R_n et qui est le complémentaire dans R_n d'un ensemble N dénombrable partout dense est homéomorphe de Δ_n .

Il suffit pour le démontrer de généraliser la méthode employée plus haut (p. 151 et 153). On prouve d'abord qu'on peut établir entre N et C_n une correspondance dans laquelle les signes des différences des coordonnées de même rang se conservent. Alors en considérant les points de F et de Δ_n comme limites des points de N et C_n respectivement, on établit entre F et Δ_n une correspondance biunivoque et bicontinue.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que si E est un ensemble quelconque tel que $dE < dR_2$, on a nécessairement $dE \leq d\Delta_2$. En effet, E est l'image d'une partie E_1 de R_2 . On aura $dE_1 = dE < dR_2$, donc E_1 ne contient aucun cercle tout entier. Son complémentaire est donc partout dense. Quels que soient les entiers p, p', q de signes quelconques on pourra trouver un point (x, y) non dans E , tel que

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}, \quad \frac{p'}{q} \leq y < \frac{p'+1}{q}.$$

Soit $M_{p,p',q}$ ce point. L'ensemble N de ces points est dénombrable, dense dans tout le plan, et c'est le complémentaire d'un ensemble E_2 dont E_1 fait partie. On aura $dE = dE_1 \leq dE_2$ et d'après le deuxième lemme $dE_2 = d\Delta_2$. D'où $dE \leq d\Delta_2$.

Un type de dimension infini.

Nous avons remarqué que l'on a

$$dR_1 \leq dR_2 \leq dR_3 \leq \dots \leq dR_n \leq \dots$$

Il est facile de donner des exemples de types de dimension supérieurs à tous ceux-ci.

Considérons par exemple la classe F des fonctions (continues ou non) d'une variable x dans l'intervalle $(0, 1)$. On pourra la considérer comme une classe (L) (déf. I) si l'on convient d'y considérer une suite d'éléments

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

comme convergeant vers l'élément $f(x)$ lorsque $f_n(x)$ tend uniformément vers $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Dans ces conditions, il est facile de voir que si l'on fait correspondre au point (x_1, x_2, \dots, x_n) de R_n le polynôme

$$x_n x^{n-1} + x_{n-1} x^{n-2} + \dots + x_2 x + x_1$$

on définit ainsi une correspondance biunivoque et bicontinue entre R_n et

l'ensemble des polynômes de degré $n - 1$. Par suite, R_n étant homéomorphe d'une partie de F ,

$$dR_n \leq dF$$

quel que soit n .

Il est d'ailleurs impossible que l'égalité ait lieu; sans quoi F serait homéomorphe d'une partie de R_n ; en particulier la puissance de F serait au plus égale à celle de R_n , c'est à dire à la puissance du continu; or on sait que ceci n'a pas lieu. On a donc bien

$$dF > dR_n$$

quel que soit n .

Les types de dimensions finis.

Il est maintenant légitime de donner un nom particulier aux types de dimension qui sont inférieurs ou égaux à un des types

$$dR_1, dR_2, \dots, dR_n, \dots$$

Nous les appellerons types de dimension *finis*. On doit s'attendre à ce que les ensembles dont le type de dimension est fini, jouissent de propriétés spéciales.

Pour arriver à en énoncer, je rappellerai deux définitions données dans ma Thèse et qui se trouveront utiles ici et plus loin.

Déf. VIII. Une classe (L) sera en outre une classe (E), si l'on peut faire correspondre à tout couple d'éléments A, B de la classe un nombre $(A, B) > 0$, appelé leur écart, et tel que 1° si A, B coïncident, $(A, B) = 0$ et réciproquement; 2° quels que soient les éléments A, B, C , on a

$$(A, C) \leq (A, B) + (B, C);$$

3° pour que A_n converge vers A , il faut par définition que le nombre (A_n, A) tende vers 0.

Déf. IX. Une classe (L) est séparable si l'on en peut extraire un ensemble dénombrable d'éléments dont elle forme tout entière l'ensemble dérivé.

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante.

Théorème. *Toute classe parfaite*) (L) (Déf. I) dont le type de dimension est fini est une classe (E) séparable (Déf. IX).*

En effet, par hypothèse, il existe un entier n tel que la classe soit homéomorphe de R_n ou d'une partie K de R_n (Déf. III). Alors, à deux

*) Un ensemble est parfait s'il est fermé et si tous ses éléments sont des éléments-limites.

éléments quelconques A, B de la classe, nous pouvons faire correspondre un nombre $(A, B) \geq 0$ en prenant pour ce nombre la distance

$$\sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2}$$

des deux points de R_n , (x_1, \dots, x_n) et (x'_1, \dots, x'_n) correspondant à A, B . D'après la définition de l'homéomorphie (Déf. II) et les propriétés de la distance dans R_n , ce nombre (A, B) satisfera aux conditions de la Déf. VIII, et par suite la classe sera une classe (E). On verra aussi facilement qu'elle est séparable. En effet la classe (L) étant supposée parfaite l'ensemble K correspondant est au moins dense en soi, c'est à dire que tout point de K est limite d'une suite de points de K distincts.

On sait (voir la note de la page 162) qu'un tel ensemble K d'éléments de R_n sera tout ou partie du dérivé d'un ensemble dénombrable formé avec certains éléments de K . Alors il en sera de même pour son image qui est la classe considérée.

La réciproque du théorème actuel n'est pas exacte.

Etant donnée l'importance pratique des classes (E) séparables (auxquelles j'ai pu étendre dans ma Thèse plusieurs propriétés des ensembles linéaires), il est utile de montrer, avant d'étudier séparément leurs types de dimensions que

l'on peut former effectivement une classe (E), (déf. VIII), dont le type de dimension est supérieur (et non pas égal) à celui de toute classe (E) séparable (déf. IX).

Déf. X. Cette classe que je dénoterai D est ainsi définie:

1° chacun de ses éléments, X , est déterminé par une suite infinie de nombres réels x_1, x_2, x_3, \dots bornés dans leur ensemble (les bornes pouvant varier avec X).

2° l'écart entre X et un autre élément Y de coordonnées y_1, y_2, \dots est la borne supérieure des quantités

$$|x_i - y_i| \quad i = 1, 2, \dots, n, \dots *)$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit de prouver que toute classe (E) séparable est l'image de D ou d'une partie de D , mais que l'inverse n'a pas lieu.

En effet, la classe séparable considérée est (Déf. IX) l'ensemble dérivé d'une suite S de ses éléments

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

Alors à tout élément A de cette classe faisons correspondre l'élément X de D dont les coordonnées sont:

$$x_1 = (A, A_1) - (A_1, A_0), \quad x_2 = (A, A_2) - (A_2, A_0), \dots, \quad x_n = (A, A_n) - (A_n, A_0), \dots$$

*) Cette définition satisfait bien aux conditions exigées dans la déf. VIII.

On aura (Déf. VIII):

$$|x_n| < (A, A_0),$$

les coordonnées de X sont donc bien bornées dans leur ensemble.

On voit ainsi qu'on établit une correspondance biunivoque entre la classe normale considérée et une partie K de l'espace D . Cette correspondance est bicontinue. En effet, si A, B sont deux éléments de la classe, X, Y les points correspondants de D , on aura:

$$\begin{aligned} |X, Y| &= \text{borne supérieure de } |x_n - y_n| \\ &= \text{borne supérieure de } |(A, A_n) - (B, A_n)| \leq (A, B). \end{aligned}$$

Mais d'autre part, B est limite d'une certaine suite extraite de la suite S :

$$(2) \quad B = \lim_{p \rightarrow \infty} A_{p_n}$$

d'où:

$$\lim |(A, A_{p_n}) - (B, A_{p_n})| = (A, B)$$

et par conséquent

$$\text{borne supérieure de } |(A, A_n) - (B, A_n)| \geq (A, B).$$

D'où en définitive:

$$(X, Y) = (A, B).$$

On voit que la correspondance que nous avons établie sera bien bicontinue et même elle réalisera une « application » puisque l'écart est conservé en valeur numérique. Au contraire, il est impossible de considérer D comme l'image d'une classe (E) séparable ou d'une de ses parties H . En effet, on peut d'abord démontrer facilement que H , partie d'un ensemble séparable (E), est tel que chacun de ses éléments appartienne à un certain ensemble dénombrable N de ses propres éléments ou à son dérivé N' .

Il suffit de faire correspondre à tout élément A_n de la suite S un élément A'_n de H tel qu'en appelant k_n la borne inférieure de l'écart de A_n avec chacun des éléments de H , on ait,

$$k_n \leq (A_n, A'_n) < k_n + \frac{1}{p_n}.$$

Car, si B est un élément de H , on peut écrire (2), d'où:

$$(A'_{p_n}, B) \leq (A'_{p_n}, A_{p_n}) + (A_{p_n}, B) \leq k_{p_n} + \frac{1}{p_n} + (A_{p_n}, B) \leq 2(A_{p_n}, B) + \frac{1}{p_n}.$$

La dernière somme tendant vers zéro, on voit que B est la limite de A'_{p_n} ; les éléments A'_1, A'_2, \dots n'étant d'ailleurs pas nécessairement distincts, on voit que B appartient soit à leur ensemble N , soit à leur dérivé N' .*).

*) J'ai démontré incidemment la proposition actuelle par une autre méthode moins directe dans ma Thèse, p. 27. Le raisonnement fait plus loin pour D prouve aussi que si H est en outre dense en soi, H appartient tout entier à N' seul.

Ceci étant, si D était l'image de H , l'ensemble N correspondrait à un certain ensemble dénombrable Q formé d'éléments de D . D est évidemment dense partout; chaque élément X de D est la limite d'une suite d'éléments distincts $Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots$. D'après la correspondance établie entre Q et N , $Z^{(n)}$ appartiendrait à Q ou à son dérivé Q' . Donc X appartiendrait certainement à Q' . Par suite D serait une classe séparable. Or ceci n'est pas exact: *L'espace D de la Déf. X n'est pas une classe séparable.*

Admettons en effet que l'on puisse former dans D un ensemble dénombrable Q , dont D soit le dérivé. Soit $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ la suite des points de Q .

Prenons d'autre part un nombre quelconque a compris entre 0 et 1, soit:

$$a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

sa notation décimale. Les nombres:

$$y_n = a_n + \frac{1}{2}$$

sont tous compris de $\frac{1}{2}$ à 9,5. Leur suite définit donc un point de l'espace D , soit $Y^{(a)}$, de coordonnées y_1, y_2, \dots . D'après l'hypothèse, à tout point $Y^{(a)}$ de D , on peut faire correspondre un point $X^{(pa)}$ de Q tel que

$$(Y^{(a)}, X^{(pa)}) < \frac{1}{3}$$

par exemple. Et par suite d'après la définition de l'écart dans (D) , les coordonnées $x_n^{(pa)}$ de $X^{(pa)}$, sont telles que:

$$\left| a_n + \frac{1}{2} - x_n^{(pa)} \right| < \frac{1}{3}$$

ou

$$a_n + \frac{1}{6} < x_n^{(pa)} < a_n + \frac{5}{6}.$$

Donc la partie entière de $x_n^{(pa)}$ est précisément égale à a_n .

Il en résulte que si on remplace a par un autre nombre

$$b = 0, b_1 b_2 \dots$$

de l'intervalle $(0, 1)$, le point $X^{(pb)}$ correspondant à b sera distinct du point $X^{(pa)}$. De sorte que l'on ferait ainsi correspondre à l'ensemble non dénombrable des nombres a formant le continu linéaire, un ensemble de même puissance formé d'éléments $X^{(pa)}$ distincts pris dans la suite dénombrable S .

Incidemment, il est bon de remarquer que le type de dimension de l'espace D est infini, puisqu'il est supérieur à celui de toute classe (E) séparable (p. 161) et par conséquent à celui de tout R_n .

Nous ne nous sommes occupés à peu près exclusivement que des types de dimension finis. Mais c'est surtout l'étude des types infinis qui est intéressante au point de vue des applications. Elle est même indispensable si l'on veut établir un rapprochement utile entre le Calcul Fonctionnel et la Théorie des Fonctions d'une infinité de variables. M. Hilbert a récemment attiré l'attention sur l'importance de cette dernière Théorie.*) Il rappelle la remarque que toute fonction continue étant déterminée par une infinité de variables, (ses constantes de Fourier par exemple**), tout élément dépendant de la forme d'une fonction continue dépend d'une infinité de variables. Mais pour qu'on puisse ensuite étudier parallèlement la continuité des fonctionnelles***) et celle des fonctions d'une infinité de variables, il faut encore avoir vu à quelle condition une correspondance entre l'espace fonctionnel et l'espace à une infinité de coordonnées est bicontinue. Et la question se pose différemment suivant qu'on adopte telle ou telle définition de la limite dans cet espace, soit la première définition adoptée par M. Hilbert dans l'étude des formes quadratiques infinies et rattachée par M. M. Riesz et Fischer à la notion de fonction sommable de M. Lebesgue†), soit la définition qu'il emploie pour les fonctions analytiques d'une infinité de variables et que j'avais déjà considérée dans ma Thèse, soit enfin celle de l'espace D défini plus haut (Déf. XII).

*) Je profite de l'occasion pour ajouter à la liste de travaux sur les fonctions d'une infinité de variables que cite M. Hilbert ceux de M. Le Roux: Recherches sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Math.* 5^e série, 1903, t. IX, p. 408—455), Les fonctions d'une infinité de variables indépendantes (*Nouvelles Annales*, 4^e série, t. IV, 1904, p. 448—458). Voir aussi ma Thèse p. 38—45 et les notes suivantes: M. Fréchet, Sur les fonctions d'une infinité de variables, *Comptes Rendus* du 27 Février 1905, Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées, *Nouvelles Annales* 4^e série, t. VIII, en deux parties, mars et juillet 1908.

**) Ou encore, les valeurs qu'elle prend en un ensemble de points dénombrable et partout dense, moyennant lesquelles non seulement la fonction est déterminée, mais peut être développée simplement en série de polynômes au moyen d'une formule remarquable de M. Borel.

***) C'est à dire des fonctions dont la variable n'est pas nécessairement un nombre, mais un élément quelconque. courbe, surface, fonction, ... Voir par exemple Hadamard, *Leçons sur le Calcul des Variations*, chez Hermann, 1909, p. 282.

†) M. Riesz a montré qu'avec cette définition, on obtenait une classe (E) normale et que par conséquent l'espace de M. Hilbert est de ceux auxquels s'appliquent tous les résultats de la Première Partie de ma Thèse, contrairement à ce que paraîtrait laisser entendre une remarque de M. Schoenflies dans son *Compte Rendu* si complet de la Théorie des ensembles. M. Schoenflies a d'ailleurs bien voulu me faire savoir qu'il entendait seulement attirer l'attention sur ce que le théorème de Bolzano ne peut s'énoncer sans modification pour l'espace de M. Hilbert.

Je réserve l'étude de ces questions importantes et d'autres connexes pour un Mémoire ultérieur.

Comparaison des types dR_n . Nous avons remarqué que

$$[[R_n, R_p]] \equiv R_{n+p}$$

et que

$$dR_1 < dR_2 \leq \dots \leq dR_n \dots$$

Ceci étant, deux cas seulement sont possibles.

1° Ou bien deux de ces types sont égaux:

$$dR_n = dR_{n+p}.$$

Mais dans ce cas, soit q un entier au plus égal à p , on a évidemment

$$dR_n \leq dR_{n+q} \leq dR_{n+p}$$

donc d'après l'hypothèse

$$dR_n = dR_{n+q} = dR_{n+p}.$$

Comme R_{n+q} sera homéomorphe d'une partie S de R_n , $[[R_{n+q}, R_p]]$ sera homéomorphe d'une partie

$$\Sigma \equiv [[S, R_p]]$$

de $[[R_n, R_p]]$. Or

$$R_{n+p+q} \equiv [[R_{n+q}, R_p]], \quad R_{n+p} \equiv [[R_n, R_p]].$$

Donc R_{n+p+q} sera homéomorphe d'une partie Σ de R_{n+p} et comme, d'autre part, R_{n+p} peut être considéré comme une partie de R_{n+p+q} , on aura bien

$$dR_{n+p} \equiv dR_{n+p+q}$$

quel que soit l'entier $q \leq p$. Il en résulte que:

$$dR_{n+p} = dR_{n+p+1} = \dots = dR_{n+2p}.$$

En recommençant le raisonnement, on verra que quel que soit l'entier positif k , on aura

$$dR_n = dR_{n+k}.$$

Ainsi donc: si deux des types dR_1, dR_2, \dots sont égaux, ces types sont tous égaux à partir d'un certain rang.

2°. Les types considérés sont tous distincts; alors ils vont toujours en croissant.

En résumé, ou bien on a:

$$dR_1 < dR_2 < \dots < dR_n = dR_{n+1} = \dots = dR_{n+k} = \dots,$$

ou bien

$$dR_1 < dR_2 < \dots < dR_n < dR_{n+1} < \dots < dR_{n+k} < \dots$$

On peut maintenant juger de l'importance qu'il y aurait à distinguer lequel des deux cas se présente réellement. Il est dès à présent très vraisemblable que c'est seulement le second cas qui correspond à la

réalité, et de nombreux essais ont été faits pour le prouver. Mais jusqu'ici aucune démonstration rigoureuse et complète n'en a été donnée.

M. Baire a récemment montré*) comment on pouvait réduire la solution du problème à une question d'Analysis situs dans l'espace R_n et il annonce son intention de publier la résolution de cette question, au moyen d'une méthode qu'il a brièvement indiquée.

Acceptant provisoirement la démonstration comme faite, voyons les conséquences qu'on en pourrait tirer.

Nous supposons donc établi que les dR_n sont tous distincts; alors on a nécessairement

$$dR_1 < dR_2 < dR_3 \dots < dR_n < \dots$$

et on a encore la formule

$$dR_{n+p} = dR_n + dR_p.$$

Une notation commode en accord avec ces propriétés consistera à désigner simplement par l'entier n le symbole dR_n . De sorte que conformément aux dénominations ordinaires, l'espace à n coordonnées sera un espace à n dimensions.

Parmi les conséquences que M. Baire tire de ses propositions, il faut citer la suivante: Soient dans l'espace R_n deux ensembles homéomorphes E et F , F étant un domaine sphérique à n dimensions. Il démontre qu'il y a des points de E qui sont chacun centre d'un domaine sphérique à n dimensions dont tous les points appartiennent à E . (Je rappelle qu'on nomme domaine sphérique à n dimensions de centre $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, le lieu des points (x_1, \dots, x_n) de R_n , tels que l'on ait

$$(1) \quad (x_1 - x_1^{(0)})^2 + \dots + (x_n - x_n^{(0)})^2 \leq \varrho^2,$$

ϱ nombre fixe > 0 .)

Dès lors la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E de points de R_n soit à n dimensions (c'est à dire qu'il ait le même type de dimension que R_n) est qu'il contienne au moins tous les points d'un domaine sphérique de R_n . Car s'il est à n dimensions, R_n est homéomorphe d'une partie E_1 de E et d'après le théorème rappelé E_1 contient au moins tous les points d'un domaine sphérique à n dimensions. Réciproquement si E contient les points d'un domaine sphérique tel que (1), il contient aussi les points de l'ensemble E_1 défini par:

$$|x_1 - x_1^{(0)}| < \frac{\varrho}{\sqrt{n}}, \dots, |x_n - x_n^{(0)}| < \frac{\varrho}{\sqrt{n}}$$

*) R. Baire, Sur la non applicabilité des continus à n et $n+p$ dimensions, Bulletin des Sc Math., 1908.

lequel dérive de R_n par l'homéomorphie

$$x_i' = L \left(\frac{x_i - x_i^{(0)} + \frac{\rho}{\sqrt{n}}}{x_i^{(0)} + \frac{\rho}{\sqrt{n}} - x_i} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Soit encore S_1 l'ensemble linéaire des points d'abscisses

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{p}, \dots,$$

$$Q_n \equiv [[S_1, R_{n-1}]], \quad K_n \equiv [[E, R_{n-1}]], \quad P_n \equiv [[H_1, R_{n-1}]],$$

où E est un ensemble linéaire non isolé, ne comprenant aucun intervalle. L'ensemble K_n , d'après la déf. VII peut être considéré comme formé de points à n coordonnées et par suite est une partie de R_n . On a ainsi évidemment:

$$n - 1 \leq dK_n \leq n.$$

Mais remarquons que si l'on avait $dK_n = n$, K_n devrait contenir au moins les points d'un domaine sphérique à n dimensions; ceci est au contraire impossible puisque l'une des coordonnées de K_n est l'abscisse d'un point de E lequel ne peut jamais prendre toutes les positions dans un intervalle si petit qu'il soit. Donc $dK_n < n$. De même on voit que si l'on avait $dK_n = n - 1$ l'ensemble K_n de R_n serait l'image d'une partie T de R_{n-1} . Or $K_n \equiv [[R_{n-1}, E]]$ est formé par l'ensemble des plans de l'espace à n dimensions

$$x_n = a$$

où a est une quelconque des abscisses des points de l'ensemble linéaire E . Le plan $x_n = a$ de R_n correspond dans l'homéomorphie précédente à un ensemble T_a , partie de T . Cette correspondance entre le plan et T_a est elle-même une homéomorphie. D'ailleurs ce plan de R_n est évidemment l'image de R_{n-1} . Donc T_a est une image de R_{n-1} et T_a faisant lui-même partie de R_{n-1} contiendra comme nous l'avons vu, un domaine sphérique à $n - 1$ dimensions Σ_a . D'ailleurs si $a \neq a'$, Σ_a et $T_{a'}$ sont évidemment sans points communs. Mais puisque E n'est pas isolé, on peut prendre dans E une suite de points distincts

$$a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}, \dots$$

tendant vers a . Les domaines

$$T_{a^{(1)}}, T_{a^{(2)}}, \dots, T_{a^{(n)}}, \dots$$

et Σ_a seront sans points communs et pourtant on pourra déterminer dans $T_{a^{(n)}}$ un point A_n qui tend vers le point A , centre de Σ_a . Il suffit de prendre pour A_n le point dont les $n - 1$ premières coordonnées sont respectivement égales à celles de A . Or il est manifeste que A_n restant constamment extérieur à Σ_a ne peut tendre vers un point A intérieur au sens strict à Σ_a . Ainsi on a également $dK_n > n - 1$.

Nous avons ainsi obtenu une infinité d'ensembles $K_n = [[E, R_{n-1}]]$ dont les types de dimension sont intermédiaires entre $n-1$ et n :

$$n-1 < dK_n < n.$$

D'ailleurs ces types de dimension ne sont pas tous égaux. Par exemple, en prenant pour E , soit S_1 , soit H_1 , on obtient Q_n ou P_n . Je dis que

$$dQ_n < dP_n.$$

En effet, on voit d'abord de suite, que l'on a $dQ_n \leq dP_n$, car $dS_1 \leq dH_1$. Mais on ne peut avoir $dQ_n \geq dP_n$. Sans quoi P_n serait homéomorphe d'une partie de Q_n , soit T . Or en recommençant le raisonnement précédent, on voit immédiatement qu'alors à chaque point a de H_1 on pourrait faire correspondre dans T un domaine sphérique Σ_a à $n-1$ dimensions situé sur l'un des plans de R_n dont est formé Q_n . Dans chacun de ces plans de R_n , on ne peut placer qu'un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines sphériques à $n-1$ dimensions sans point commun; et comme il n'y a qu'une infinité dénombrable de plans dans Q_n (autant qu'il y a de points dans S_1) cela donnerait en tout une infinité dénombrable de domaines sphériques correspondant biunivoquement aux points a de H_1 lesquels sont en infinité non dénombrable. Il y a bien contradiction; on a bien $dQ_n < dP_n$.

Enfin, il est facile de former effectivement le type de dimension le plus grand de tous ceux qui sont inférieurs à $n+1$. C'est celui de l'ensemble Δ_{n+1} des points de R_{n+1} dont les coordonnées ne sont pas toutes rationnelles; autrement dit le complémentaire de C_{n+1} .

On a bien d'abord $d\Delta_{n+1} < n+1$, puisque Δ_{n+1} ne contient évidemment aucun domaine sphérique de R_{n+1} . Il reste à montrer que si E_1 est un ensemble tel que $dE_1 < n+1$, on a nécessairement $dE_1 \leq d\Delta_{n+1}$. En effet, si $dE_1 < dR_{n+1}$, E_1 est l'image d'une partie E de R_{n+1} . Il suffit de montrer que $dE \leq d\Delta_{n+1}$.

L'ensemble E ne contient aucun domaine sphérique de R_{n+1} . Par conséquent son complémentaire dans R_{n+1} : C , est partout dense. Alors quels que soient les entiers q, p_1, \dots, p_{n+1} on pourra trouver un point (x_1, \dots, x_{n+1}) de C tel que:

$$\frac{p_i}{q} \leq x_i \leq \frac{p_i + 1}{q} \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Soit $X_{q, p_1, \dots, p_{n+1}}$ ce point. Quand on donne à q, p_1, \dots, p_{n+1} toutes les valeurs entières possibles, on obtient un ensemble N de tels points, ensemble qui est dénombrable, dense dans R_{n+1} et contenu dans C . Le complémentaire F de N contient E ; on a donc $dE \leq dF$ et, (page 159) $dF = d\Delta_{n+1}$ d'où $dE \leq d\Delta_{n+1}$.