

## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 1.

---

1. *Eine Studie über Seifenblasen;  
von O. Dörge.<sup>1)</sup>*

---

## Erster Teil.

Das Wesen des Carnot'schen Kreisprocesses besteht bekanntlich darin, dass Wärme von einer höheren Temperatur auf eine niedrigere übergeführt wird unter gleichzeitiger Leistung eines bestimmten Quantum Arbeit. Dieses ist bei Innehaltung des Weges und der dabei in Betracht kommenden Temperaturen unabhängig von der arbeitenden Substanz, welche den Kreisprocess durchläuft. Der Weg selbst besteht aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten, die sich zu einer geschlossenen Curve aneinander reihen. — Ein ähnlicher Process lässt sich auf elektrischem Gebiete herstellen; nur tritt hier an Stelle der Wärme höherer und niedrigerer Temperatur elektrische Energie höherer und niedrigerer Spannung. Der durchlaufene Weg besteht aus Curven, die mit den Isothermen und Adiabaten in ihrem Wesen eine grosse Aehnlichkeit besitzen. Man denke sich eine Seifenblase, der man eine gewisse elektrische Ladung mitgetheilt hat. Infolge dessen werden auf alle Theile der Oberfläche normal zu dieser Zugkräfte wirken, die sich aus der ertheilten Ladung und der geometrischen Gestalt der Blase berechnen lassen und die bestrebt sind, die Fläche solange zu vergrössern, bis ihnen durch äussere Druckkräfte das Gegengewicht gehalten wird. Mit einer solchen Blase lässt sich nun folgender Kreisprocess ausführen:

I. Die Blase wird unendlich langsam ausgedehnt, während sie in Berührung mit einem Elektrizitätsbehälter von grosser Capacität ist. Das Potential des Behälters sei positiv und

---

1) Nach der Rostocker Inaugural-Dissertation des Verfassers.

gleich  $V_1$ . Dieses wird während des Processes wegen der grossen Capacität merklich constant bleiben.

II. Die Berührung wird aufgehoben und die Blase langsam weiter ausgedehnt, aber ohne Zufuhr elektrischer Energie, bis das Potential der Blase bis zu einem gewissen Werthe  $V_2$  gesunken ist.

III. Die Blase wird mit einem Elektricitätsbehälter sehr grosser Capacität vom Potential  $V_2$  in Berührung gebracht und comprimirt; und schliesslich wird

IV. diese Berührung wiederum aufgehoben, die Blase weiter comprimirt, bis der Anfangszustand wieder hergestellt ist.

Die Aehnlichkeit dieses Kreisprocesses mit dem Carnot'schen ist unverkennbar; die Curven in I. und III. entsprechen Isothermen, dort sind Wärmebehälter, hier Elektricitätsbehälter grosser Capacität; dort bleibt die Temperatur constant und wird Wärme zugeführt, hier bleibt das Potential constant unter Zuführung elektrischer Energie. Die Curven in II. und IV. entsprechen Adiabaten. Beim Carnot'schen Process wird keine Wärme, beim elektrischen Process keine elektrische Energie zugeführt, während die Ladung constant bleibt. Das Resultat ist in beiden Fällen sich ähnlich. In dem einen Falle ist Wärme von einer höheren auf eine niedrigere Temperatur gesunken, in dem anderen elektrische Energie von höherer Spannung auf niedrigere, während in beiden Fällen zugleich ein bestimmtes Quantum Arbeit gewonnen ist. In Bezug auf den arbeitenden Körper wollen wir einige vereinfachende Bedingungen treffen, und zwar soll:

1. der Ballon Kugelgestalt haben und ein Leiter sein, weil nur in diesem Falle der auf die Oberfläche wirkende Zug unabhängig von der Lage des Flächenstückes ist,

2. soll der Ballon keine Oberflächenspannung besitzen, und

3. soll kein Innendruck irgend eines Gases, sondern nur der elektrische Druck auf die Oberfläche wirken, dem durch einen Aussendruck das Gleichgewicht gehalten wird.

Welchen Einfluss diese Beschränkungen auf die praktische Ausführbarkeit des Processes haben, darauf soll an späterer Stelle eingegangen werden. Die erste der Bedingungen findet ihre mathematische Formulirung darin, dass die Capacität

gleich dem Radius des Ballons gesetzt wird, während die beiden anderen besagen, dass die von den elektrischen Zugkräften geleistete Arbeit gleich der äusseren gewonnenen Arbeit ist.

Hat der Ballon die Ladung  $Q$ , das Potential  $V$ , den Radius oder die Capacität  $r$ , so besteht offenbar die Relation:

$$(1) \quad Q = r \cdot V,$$

welche wir die Zustandsgleichung des Ballons nennen wollen. Diese Form ist indessen für unseren Zweck unbrauchbar, weil die geleistete Arbeit durch Integrale von der Form  $\int p dv$  dargestellt wird, wo  $p$  den Druck,  $v$  das Volumen des Ballons bezeichnen.

Die Feldstärke an der Oberfläche des Ballons ist:

$$K = \frac{Q}{r^2},$$

und der Zug auf die Flächeneinheit der Kugel:

$$(2) \quad p = \frac{1}{8\pi} K^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4},$$

falls das umgebende Medium die Dielektricitätsconstante 1 besitzt. Das dazu gehörige Volumen ist:

$$(3) \quad v = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

folglich:

$$(4) \quad (8\pi p)^3 \left( \frac{3v}{4\pi} \right)^2 = V^6.$$

Diese Form der Zustandsgleichung ist unserem Zweck entsprechend, denn sie giebt uns die den Processen I und III entsprechenden Curven, die den Isothermen entsprechen, falls wir darin  $V = V_1$  oder  $V_2$  setzen.

Weiter ergibt sich aus (3) und (4)

$$(5) \quad Q^6 = \left( \frac{3v}{4\pi} \right)^4 (8\pi p)^3,$$

die ebenfalls eine brauchbare Zustandsgleichung darstellt, da sie uns die Prozesse II und IV beschreibt, die den Adiabaten analog sind, wenn  $Q$  constant gesetzt wird.

Fig. 1 möge den Process, der den Gang  $abcd a$  gehe, illustrieren. Die auf die Zustände  $a, b, c, d$  bezüglichen Werte von  $p$  seien bezeichnet durch  $p_a, p_b, p_c, p_d$ , die entsprechenden Werte des Radius durch  $r_a, r_b, r_c, r_d$ .

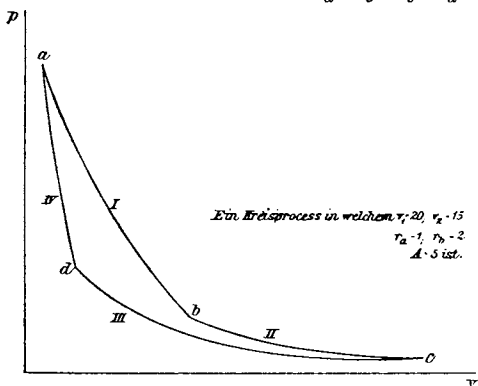


Fig. 1.

Wir betrachten so-  
dann den Process I, der  
durch die aus (4) fol-  
gende Gleichung

$$(4a) \quad (8\pi p)^3 \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^2 = V_1^6$$

charakterisirt ist.

Auf diesem Wege  
wird die Arbeit

$$A_I = \int_a^b p \cdot dv$$

geleistet.

$$(6) \quad A_I = \frac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_1^3 (p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2}).$$

Die elektrische Energie des Ballons war im Punkte  $a$

$$\sum_a = \frac{1}{2} Q_a V_1,$$

im Punkte  $b$  ist sie

$$\sum_b = \frac{1}{2} Q_b V_1,$$

falls  $Q_a$  und  $Q_b$  die Ladungen des Ballons in  $a$  und  $b$  be-  
zeichnen. Daraus folgt für die Zunahme der Energie beim  
Process I

$$\sum_b - \sum_a = \frac{1}{2} V_1 (Q_b - Q_a).$$

Drücken wir hier  $Q_a$  und  $Q_b$  mit Hülfe der Gleichungen  
(1) und (2) durch  $V_1, p_a$  und  $p_b$  aus, so ergibt sich:

$$(7) \quad Q_a^2 = \frac{V_1^4}{8\pi p_a}, \quad Q_b^2 = \frac{V_1^4}{8\pi p_b}$$

und schliesslich

$$(8) \quad \sum_b - \sum_a = \frac{1}{2} V_1^3 (8\pi)^{-1/2} (p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2}).$$

Durch Vergleichung der Formeln (6) und (8) ergibt sich,  
dass  $A_I = \sum_b - \sum_a$  ist, d. h. dass die vom Ballon geleistete  
Arbeit gleich seiner Energiezunahme ist, oder dass die dem  
Behälter mit dem Potential  $V_1$  entzogene Energie halb zur  
Arbeitsleistung, halb zur Erhöhung der elektrischen Energie  
des Ballons verwandt ist.

Im II. Process wird eine Arbeit

$$A_{II} = \int_{p_b}^{p_c} p \cdot dv$$

geleistet, wo  $p$  und  $v$  infolge der Relation (5) durch die Bedingung verknüpft sind:

$$Q_b^s = \left(\frac{3}{4}\pi\right)^4 (8\pi p)^3.$$

$$(9) \quad A_{II} = -\frac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_1^3 p_b^{-3/4} (p_c^{1/4} - p_b^{1/4}),$$

Die Berechnung der Arbeit im III. Process ist der im ersten analog. Man erhält

$$(10) \quad A_{III} = \frac{1}{2} V_2^3 (8\pi)^{-1/2} (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}).$$

Die Arbeit im IV. Process schliesslich beträgt

$$(12) \quad A_{IV} = -\frac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_2^3 p_d^{-3/4} (p_a^{1/4} - p_d^{1/4}).$$

Betrachten wir jetzt das Resultat des Kreisprocesses. Laut der Definition von  $A_I$ ,  $A_{II}$ ,  $A_{III}$ ,  $A_{IV}$  haben wir die nach aussen hin geleistete Arbeit positiv, die von aussen am Ballon geleistete Arbeit negativ gerechnet. Die erstere beträgt

$$(13) \quad A_I + A_{II} = \frac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_1^3 \{p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2} - (p_c^{1/4} - p_b^{1/4}) p_d^{-3/4}\},$$

die letztere beträgt

$$(14) \quad A_{III} + A_{IV} = \frac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_2^3 \{p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2} - (p_a^{1/4} - p_d^{1/4}) p_d^{-3/4}\}.$$

Gewonnen ist die Arbeit:

$$A = \sum_I^{IV} A_n.$$

Dieser Ausdruck nimmt eine einfache Gestalt an, wenn man bedenkt, dass  $c$  sowohl auf der Curve  $bc$  als auch auf der Curve  $cd$ , und  $d$  sowohl auf dem Zweig  $cd$  als auch auf dem Zweig  $da$  liegt. Daraus ergeben sich die Hilfsbeziehungen

$$(15) \quad \frac{V_1^4}{V_2^4} = \frac{p_b}{p_c} = \frac{p_a}{p_d}.$$

Eliminiert man nun aus

$$A = \sum_I^{IV} A_n$$

mit Hülfe von (15)  $p_a$  und  $p_b$ , so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$(16) \quad A = (8\pi)^{-1/2} (V_1 V_2^2 - V_2^3) (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}),$$

ein Ausdruck, der positiv ist, weil  $p_c < p_d$ ,  $V_1 > V_2$  und  $V_1$  und  $V_2$  stets gleiches Vorzeichen haben müssen, wie bald gezeigt werden soll.

Wir hatten ferner für die aus der Quelle  $V_1$  entnommene elektrische Energie gefunden:

$$E_1 = (8\pi)^{-1/2} (p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2}) V_1^3,$$

woraus sich mit Hilfe der Gleichung

$$p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2} = V_1^{-2} V_2^2 (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}),$$

die aus (15) folgt, für  $E_1$  die bequemere Form

$$(17) \quad E_1 = (8\pi)^{-1/2} V_1 V_2^2 (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2})$$

gewinnen lässt.

$E_1$  ist positiv gerechnet, wie aus  $p_c < p_d$  folgt.

Für die von der Quelle  $V_2$  abgegebene Energie folgt:

$$(18) \quad E_2 = (8\pi)^{-1/2} V_2^3 (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}).$$

Dieser Ausdruck ist negativ. Der Behälter  $V_2$  hat also die Energie  $-E_2$  empfangen. Die Formel (18) können wir auch schreiben

$$(18a) \quad E_2 = -(8\pi)^{-1/2} (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}) V_2^3$$

und wir wollen von jetzt ab das negative  $E_2$  in (18a) mit  $E_2$  bezeichnen, also jetzt setzen:

$$(18b) \quad E_2 = (8\pi)^{-1/2} (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}) V_2^3.$$

Sodann folgt aus (17) und (18b)

$$(19) \quad \frac{E_1}{V_1} = \frac{E_2}{V_2}.$$

Ferner wollen wir setzen

$$(20) \quad \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \zeta e.$$

Die bis hierher gewonnenen Resultate sollen jetzt discutirt und dazu in Parallele die Ergebnisse des Carnot'schen Kreisprocesses gestellt werden. In dem elektrischen Process, der in der Richtung  $abcd a$  verlief, ist eine bestimmte Menge elektrischer Energie von einem höheren Potential auf ein niedrigeres gesunken und zugleich eine gewisse Menge Arbeit gewonnen. Würden wir den Process rückwärts, d. h. in der Richtung  $adcb a$  laufen lassen, so würde ein Quantum elektri-

scher Energie von einem niedrigerem Potential auf ein höheres unter gleichzeitigem Aufwand eines bestimmten Quantums Arbeit gehoben. In dem Carnot'schen Kreisprocess sinkt Wärme von höherer auf niedrigere Temperatur, zugleich wird ein bestimmtes Quantum als äussere Arbeit nutzbar gemacht. In dem dazu inversen Process dagegen wird Wärme von niedrigerer Temperatur auf eine höhere gehoben, gleichzeitig aber von aussen Arbeit in den Process hineingesteckt.

Wenden wir uns nun zu der Formel (19), so ist deren Analogon in der Wärmetheorie

$$\frac{Q_1}{\vartheta_1} = \frac{Q_2}{\vartheta_2},$$

wenn  $Q_1$  die der Quelle mit der Temperatur  $\vartheta_1$ ,  $Q_2$  die der Quelle mit der Temperatur  $\vartheta_2$  entnommene Wärmemenge ist.

Aehnlich der Formel (20) ist

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1} = \zeta w.$$

$\zeta w$  ist der sogenannte ökonomische Coefficient, der uns anzeigt, welcher Bruchteil der aufgenommenen Wärmemenge  $Q_1$  als Arbeit hat nutzbar gemacht werden können. Der Maximalwerth von  $\zeta w$  ist 1; er tritt in dem idealen Falle ein, dass  $\vartheta_2$  die Temperatur des absoluten Nullpunktes ist. Der vorliegende Fall aus der Elektrizität weist ebenfalls einen ökonomischen Coefficienten auf, der durch

$$\zeta_e = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$$

definirt ist und angiebt, welcher Teil der dem oberen Behälter  $V_1$  entnommenen Energie  $E_1$  beim betrachteten Process in Form von äusserer Arbeit nutzbar gemacht ist. Der grösste Werth von  $\zeta_e$  ist auch hier 1 und wird dann erreicht, wenn  $V_2 = 0$  ist, ein Fall, der nicht realisirbar ist, da er bedeuten würde  $r = \infty$ . Dass  $V_2 < 0$  wäre und dadurch  $\zeta_e > 1$  würde, ist unmöglich; denn in  $b$  ist das Potential positiv, die Ladung des Ballons also ebenfalls positiv. Auf dem Wege  $bc$  wird keine Elektrizität zugeführt, folglich kann das Potential des Ballons nicht das Zeichen wechseln.

Construiren wir in der Wärmetheorie einen beliebigen reversiblen Kreisprocess, so lässt sich dieser nach Clausius zerlegen in Isothermen und Adiabaten und es ist  $\int dQ/\vartheta = 0$ .

Ebenso kann man einen beliebigen reversiblen Kreisprocess für den Ballon in Curen  $V = \text{const.}$  und  $Q = \text{const.}$  zerlegen und es folgt  $\int dE/V = 0$ , ein Resultat, dass auch ohne weiteres aus dem elektrischen Grundprincip folgt, dass Elektrizität unerschaffbar und unzerstörbar ist.

$2 \int dE/V$  bedeutet nämlich die an den Körper abgegebene Elektrizitätsmenge, diese aber muss beim Kreisprocess Null sein.

Zum Schluss dieser Untersuchung noch eine Bemerkung über den Transport elektrischer Energie. Clausius hat bekanntlich den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie die Fassung gegeben: „Wärme geht nicht von selbst von einer tieferen Temperatur auf eine höhere über.“

Bedienen wir uns der Bezeichnungsweise von C. Neumann, so können wir dem Satze die Form geben: „Ein Process vom Gesamteffect  $\Theta_1 \uparrow^q \Theta_2 \uparrow^{-q}$  ist unmöglich.“

Hier sind  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  grosse Wärmebehälter von den Temperaturen  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_2$ ,  $\vartheta_1 > \vartheta_2$ ,  $q$  ist eine Wärmemenge, die von  $\Theta_1$  auf  $\Theta_2$  befördert gedacht wird. Setzen wir statt  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  zwei Quellen  $\sum_1$  und  $\sum_2$  elektrischer Energie von grosser Capacität und den Potentialen  $V_1$  und  $V_2$ , wo  $V_1 > V_2$  und  $E$  ein Quantum elektrischer Energie ist, so ist hier weder der Process vom Gesamteffect

$$\sum_1 \uparrow^E \sum_2 \uparrow^{-E}$$

noch der Process:

$$\sum_2 \uparrow^{-E} \sum_1 \uparrow^E$$

möglich, und zwar folgt dies wieder aus der Unerschaffbarkeit und Unzerstörbarkeit der Elektrizität. Es muss nach diesem Princip in beiden Processen nämlich

$$2 \frac{E}{V_1} - 2 \frac{E}{V_2} = 0$$

sein, was nur erfüllt ist, falls  $V_1 = V_2$  ist. In Worten: Ein Process, bei dem nur elektrische Energie von einem Behälter auf einen anderen übertragen wird, ist nur möglich, wenn die Potentiale beider Quellen gleich sind. Bei der Wärme dagegen ist der dem ersten Process entsprechende unmöglich, während das Analogon zum zweiten Process der natürliche Vorgang ist.



Zweiter Teil.

Am Anfang des ersten Teiles waren in Bezug auf den Kreisprocess einige beschränkende Annahmen gemacht, um den Fall möglichst einfach zu gestalten. Von diesen Bedingungen wollen wir jetzt nur noch die erste beibehalten. Die beiden anderen dagegen wollen wir fallen lassen und untersuchen, ob dadurch die etwaige praktische Ausführbarkeit des Processes beeinflusst wird.

Hierzu denken wir uns einen einfachen Apparat. In Fig. 2 sei  $A$  die Seifenblase an der engen Oeffnung eines Glasrohres,  $B$  ein Metallstab mit Kugel, wodurch die Verbindung der Blase mit den Elektrizitätsbehältern vermittelt wird,  $C$  ein dichtschiessender Stempel, den man mit Gewichtstücken belastet. Ausserhalb des Apparates sei Atmosphärendruck.

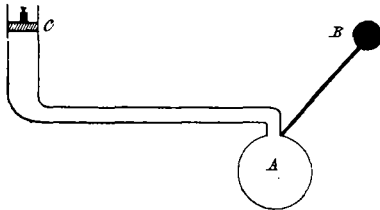


Fig. 2.

Die Menge der im Rohr und in der Blase eingeschlossenen Luft bleibt bei dem Process constant. Die Veränderungen, die mit derselben vorgenommen werden, seien isotherm. Auf die Luft im Apparat wirkt nun ein Druck, der sich zusammensetzt aus

1. dem Spannungsdruck  $a$  der Blase,
2. dem Atmosphärendruck  $b$ ,
3. dem elektrischen Oberflächendruck  $c$ .

Führt man den betreffenden Kreisprocess aus, so ist das Resultat das folgende:

1. die eingeschlossene Luft hat gleichen Druck und gleiches Volumen wie am Anfang;
2. die während des ganzen Processes von aussen zugeführte Wärme ist Null, da die Luft sich stets auf derselben Isotherme bewegt;
3. die vom Spannungsdruck geleistete Gesamtarbeit ist Null, weil die Beziehung zwischen Spannungsdruck und Volumen während des Processes dieselbe bleibt und derselbe Weg zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird;

4. dasselbe gilt von der von dem Atmosphärendruck geleisteten Arbeit;

5. nur die von den elektrischen Druckkräften geleistete Arbeit ist von Null verschieden, da hier der Hinweg ein anderer als der Rückweg ist. Die geleistete Arbeit wird geometrisch durch die vom Wege umschlossene Fläche repräsentirt. Sie ist den elektrischen Energiequellen entnommen und wird am Stempel *C* gewonnen, wie man leicht findet, falls man berücksichtigt, dass die von der eingeschlossenen Luft geleistete Arbeit Null ist. Diese letztere setzt sich aus der am Stempel und an der Oberfläche der Blase geleisteten Arbeit zusammen. Es ist daher:

$$\int p (dv_1 + dv_2) = 0,$$

wo wir unter  $dv_1$  die durch das Heben oder das Sinken des Stempels, unter  $dv_2$  die durch die Ausdehnung der Blase entstandene Volumenänderung verstehen. Ferner ist:

$$p = a + b - c,$$

folglich:

$$\int p \cdot dv_1 + \int (a + b) dv_2 - \int c dv_2 = 0.$$

Nun ist bewiesen, dass

$$\int (a + b) dv_2 = 0,$$

mithin ist:

$$\int p \cdot dv_1 = \int c dv_2.$$

Am Schluss des Processes wird also ein Gewicht sich auf höherem Niveau befinden wie am Anfang desselben. — Es sei noch darauf hingewiesen, dass bei grösserer Belastung des Stempels die Blase sich nicht etwa ausdehnt, sondern zusammenzieht.

Einen Begriff von den Grössenverhältnissen bei einem derartigen Process sollen einige Zahlenbeispiele geben. Zu Grunde gelegt ist bei allen Angaben das C.G.S.-System. Wir wollen den Arbeitswert von zwei Kreisprocessen ermitteln und

betrachten als gegebene Grössen  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $r_a$  und  $r_b$ . Die zu gewinnende Arbeit ist nach (15) und (16) Teil I:

$$A = (8\pi)^{-1/2} (V_1^2 - V_2^2 V_1^2) (p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2}).$$

Es ist aber allgemein

$$p = \frac{1}{8\pi} \frac{V^2}{r^2},$$

also

$$A = \frac{V_1}{8\pi} (V_1 - V_2) (r_b - r_a).$$

Diese nebst den beiden anderen leicht ableitbaren Formeln

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_a}{r_b} = \frac{r_c}{r_d}$$

gestatten, die gewünschten Grössen bequem zu berechnen.

Die folgende Tabelle giebt die Resultate.

	$V_1$	$V_2$	$\frac{r_a}{p_a}$	$\frac{r_b}{p_b}$	$A$
I. Process	80	40	63,7	28	172
II. Process	30	10	120	13,3	47,8

Die Ausdehnung, die eine Seifenblase bei der Verbindung mit einem Elektricitätsbehälter vom Potential  $V$  erfährt, ist äusserst gering. Bezeichnet man den Radius der Blase vor der Ladung mit  $r$ , den äusseren Druck mit  $a$ , den inneren mit  $p_1$ , die Spannung mit  $T$ , so ist vor der Ladung

$$p_1 = a + \frac{4T}{r}.$$

Nach der Ladung ist, wenn  $p_2$  der innere Druck,  $x$  der Radius ist,

$$p_2 + \frac{1}{8\pi} \frac{V^2}{x^2} = w + \frac{4T}{x},$$

ferner ist

$$p_1 \frac{4}{3} \pi r^2 = p_2 \frac{4}{3} \pi x^3,$$

sodass schliesslich folgt

$$x^3 + \frac{4T}{a} x^2 - \frac{V^2}{8\pi a} x - \frac{r^3}{a} \left( a + \frac{4T}{r} \right) = 0.$$

Die Untersuchung dieser Gleichung ergibt, dass  $x$  nur dann von  $r$  sehr abweicht, wenn  $a$  und  $T$  klein,  $V$  gross ist.

Bei

$$V = 30 \text{ ES E}, \quad T = 0,045 \cdot 981 \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}},$$

$$r = 3 \text{ cm}, \quad a = 760 \text{ mm} \text{ Quecksilberdruck}$$

ist die Vergrößerung von  $r$ 

$$\delta = 0,0001 \text{ cm},$$

bei  $a = 0$ 

$$\delta_0 = 0,026 \text{ cm}.$$

Eine experimentelle Durchführung des Kreisprocesses war mir leider nicht möglich. Ich beschränkte mich deshalb bei meinen Versuchen schliesslich darauf, die Druckänderungen nachzuweisen, die durch die elektrische Ladung einer Seifen-

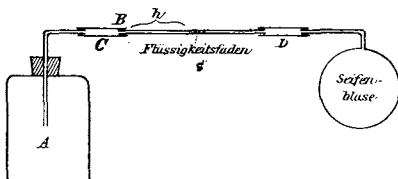


Fig. 3.

blase im Inneren derselben entstehen. Dazu bediente ich mich einer Vorrichtung, die, wie ich später erfuhr, dem v. Hefner-Alteneck'schen Variometer ähnlich ist.<sup>1)</sup> Ich will zunächst die Theorie der Methode entwickeln.

Es sei  $A$  eine Flasche mit eingesetztem Glasrohr (vgl. Fig. 3), mit dem eine Capillare verbunden ist, an welche wiederum ein Glasrohr anschliesst, das die Seifenblase trägt. Beide Räume, der des Ballons  $A$  und der Seifenblase sind durch einen Flüssigkeitsfaden gegeneinander abgesperrt. Wird die Blase geladen, so tritt innerhalb derselben eine Druckänderung ein, und infolge dessen eine Verschiebung des Fadens, bis der Druck in beiden Räumen wieder derselbe ist.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu prüfen, nehmen wir an, dass vor der Ladung der Druck  $p$ , nach der Ladung der Druck  $p + a$  herrscht. Die dadurch hervorgerufene Verdrückung  $x$  des Fadens ist zu berechnen. Ist  $v$  das Volumen von  $A$  und des Rohres bis  $B$ ,  $h$  die Entfernung des Fadens von  $B$ ,  $r$  der Radius der Capillare, so ist am Anfange des Versuches

$$p(v + \pi r^2 h) = c,$$

wo  $c$  eine Constante ist, am Ende

$$(p + a)(v + \pi r^2 h - \pi r^2 x) = c,$$

1) Verhändl. d. Phys. Gesellsch. zu Berlin p. 88. 1895; p. 33. 1898.

falls wir so lange warten, bis sich etwaige Temperaturänderungen ausgeglichen haben und wir also berechtigt sind, den Vorgang als isotherm zu betrachten.

Daraus folgt

$$p(v + \pi r^2 h) = (p + a)(v + \pi r^2 h - \pi r^2 x),$$

$$x = \frac{a(v + \pi r^2 h)}{\pi r^2 (p + a)},$$

$x$  wird also um so grösser, je grösser  $v$  und je kleiner  $r$  ist.

Nehmen wir z. B.

$$v + \pi r^2 h = 2000 \text{ cm}^3; \quad p = 10^6 \frac{\text{Dyne}}{\text{cm}^2},$$

also etwa 1 Atm.,  $r = 0,05 \text{ cm}$ , so wird die Verrückung bei  $a = 1 \text{ Dyne/cm}^2$ :

$$x' = 0,25 \text{ cm}.$$

Der Apparat, der im wesentlichen in Fig. 3 skizziert ist, war derartig eingerichtet, dass ein Dreiweghahn die Verbindung einerseits zwischen Seifenblase, Capillare und Ballon, andererseits zwischen Seifenblase und dem Schlauch zum Anblasen ermöglichte.

Die Blase hing an einer Metallhalbkugel, in deren Kuppe ein feines Metallrohr endigte. Diese Kugel wurde isolirt von einer grösseren Metallhalbkugel umschlossen, sodass die Schnittflächen beider Kugeln in einer Ebene lagen. Die äussere Schutzkugel konnte durch Unterschieben einer zweiten Halbkugel zur Vollkugel ergänzt werden. Diese Anordnung ist zum Teil einer Arbeit von Waitz<sup>1)</sup> entnommen.

Wegen der hohen Empfindlichkeit des Apparates gegen Wärmewirkungen und Erschütterungen wurden die Messungen im Keller und zwar in späten Abendstunden ausgeführt. Der Ballon  $A$  stand in einem Wasserbade. Als Sperrfaden diente Alkohol. Die Wände der Capillare waren natürlich von derselben Flüssigkeit benetzt, damit die Länge des Fadens während eines Versuches merklich constant blieb. Um den Apparat zu prüfen, wurden einige Folgerungen aus der Theorie desselben zu bestätigen versucht.

Aus der Formel für die Verschiebung des Fadens ergibt sich für gleiches  $a$  und  $p$  und verschiedenes  $r$  die Beziehung

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

1) K. Waitz, Wied. Ann. 37. p. 330. 1889.

wo  $x_1$  die Verschiebung des Fadens in der Capillare mit dem Radius  $r_1$ ,  $x_2$  diejenige in der Capillare mit dem Radius  $r_2$  ist. Vorausgesetzt ist dabei, dass  $a$  gegen  $p$ ,  $\pi r^2 h$  gegen  $v$  vernachlässigt werden darf, was in der That gestattet ist. Der Radius der Seifenblase war  $R_1 = 2,02$  cm. Die folgende Tabelle giebt das Resultat:

$x_1$	0,50	0,55	0,55	0,58
$x_2$	1,10	1,00	1,20	1,10

Der Mittelwert von  $x_1$  ist demnach  $x_1 = 0,57$ , von  $x_2$   $x_2 = 1,10$ ,

$$\frac{x_2}{x_1} = 1,93.$$

$r_1^2/r_2^2$  wurde durch Calibriren der Capillaren mit Quecksilber aus zwei Messungen mit 2,03 und 2,06, im Mittel also zu 2,045 gefunden. Die Differenz ist:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{x_2}{x_1} = 0,115.$$

Also weicht  $x_2/x_1$  gegen  $r_1^2/r_2^2$  um  $5\frac{3}{4}$  Proc. ab.

Ein zweiter Versuch bezweckte die Prüfung des Gesetzes, dass der von einer Seifenblase nach Innen ausgeübte Druck  $4 T/R$  ist.

Setzt man dieses Gesetz als richtig voraus, so folgt:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\beta}{\alpha},$$

wenn  $R_1$  und  $R_2$  die Radien der Seifenblasen,  $\beta$  und  $\alpha$  die dazugehörigen Verschiebungen des Fadens sind und  $\pi r_2^2 \beta$  und  $\pi r_2^2 \alpha$  gegen  $v$  vernachlässigt werden darf. Als Capillare wurde die mit dem Radius  $r_2$  benutzt. Es war also

$$\beta = x_2 = 1,1.$$

Für  $\alpha$  ergab sich:

$$0,60, \quad 0,55, \quad 0,55, \quad 0,65;$$

im Mittel  $\alpha = 0,575$ , folglich:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1,913.$$

Ferner war

$$R_2 = 4,02, \quad R_1 = 2,02,$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 1,99, \quad \frac{R_2}{R_1} - \frac{\beta}{\alpha} = 0,077.$$

Die Abweichung von  $\beta/\alpha$  gegen  $R_2/R_1$  beträgt demnach  $3\frac{3}{4}$  Proc.

Die Versuche mit geladenen Seifenblasen blieben leider nur qualitativ. Es konnte constatirt werden, dass der Faden bei der Ladung der Blase sich in der nach der Theorie bestimmten Richtung verschiebt, bei der Entladung wieder zurückgeht. Auf eine Messung von elektrischen Potentialen hoffe ich später noch einmal zurückzukommen.

Gegen die angestellten Messungen lässt sich ein Einwand erheben. Es ist nämlich stillschweigend angenommen, dass der Radius der Seifenblase constant bleibt, wenn man ihre Verbindung mit dem Ballon  $A$  herstellt. Dies ist indessen nicht der Fall. Die Blase wird ihre Gestalt vielmehr verändern, sie wird ein Calotte über der Metallhalbkugel werden mit grösserem Radius als diese. Wollte man den so entstehenden Fehler berechnen, so würde man auf rechnerische Schwierigkeiten stossen, die man durch eine Ueberlegung umgehen kann. Die durch die Verschiebung des Fadens und die Gestaltänderung der Blase entstehende Volumenänderung in dem Teile  $D$  des Apparates muss nämlich positiv sein, weil nach dem Druckausgleich zwischen  $C$  und  $D$  der Druck in  $D$  gesunken ist. Da aber die Volumenänderung der Blase negativ ist, so kann sie, absolut genommen, nicht grösser sein als die Volumenänderung durch Verschiebung des Fadens. Diese letztere aber giebt der Versuch. In einer unserer Messungen mit der Capillare vom Radius  $r_1$  und der Metallkugel vom Radius  $R_1$  beträgt sie 0,01762. Durch Probiren ergibt sich, dass der Radius der Calotte weniger als 0,0001 grösser ist, als der Radius der Blase vor dem Druckausgleich, sodass es zulässig sein dürfte,

$$\frac{4 T}{1,01} = \frac{4 T}{1,0101}$$

zu setzen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate sind folgende:

1. Die beim Kreisprocess gewonnene Arbeit war

$$\frac{V_1}{8\pi} (V_1 - V_2) (r_b - r_a).$$

2. Die zwischen den Energiemengen, welche den Quellen entzogen waren, bestehende Beziehung ist:

$$\frac{E_1}{V_1} - \frac{E_2}{V_2} = 0.$$

3. Es ist kein Process möglich, der nur in einer Ueberführung elektrischer Energie von einem Potential auf ein anderes besteht.

4. Die durch die Ladung einer Seifenblase entstehenden Volumenänderungen sind sehr klein und hängen vom Anfangsdruck, Flächenspannung und Ladungspotential ab.

5. Das Verhältniß der Querschnitte von zwei Capillaren wurde bis auf  $5\frac{3}{4}$  Proc., das Gesetz

$$p = \frac{4}{r} T$$

bis auf  $3\frac{3}{4}$  Proc. Abweichung bestimmt.

6. Versuche mit geladenen Seifenblasen blieben nur qualitativ.

7. Die durch Verschiebung des Fadens entstehende Gestaltänderung der Blase ist im allgemeinen zu vernachlässigen.

Wie ich nach Beendigung dieser Arbeit erfahren habe, sind bereits von anderer Seite Betrachtungen angestellt, die denen im ersten Teile ähnlich sind. Ich weise auf den Abschnitt „Conformität und Unterschiede der Energien“ in Mach's „Principien der Wärmelehre“ hin.

Zum Schluss sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Wachsmuth, für das rege Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Rostock, Physikal. Institut, 1899.

(Eingegangen 9. October 1899.)