

## 6.

## Bemerkungen über eine Stelle in Lagrange's *Traité de la résolution des équations numériques*, article IV. No. 79.

(Von dem Herrn Prof. Raabe zu Zürich,)

In den zwei ersten Nummern dieser Abtheilung IV. wird die Schwierigkeit bemerklich gemacht, aus den nach der Methode der Kettenbrüche erhaltenen transformirten Gleichungen jedesmal die zunächst liegenden ganzen Zahlen der Wurzeln derselben herauszufinden: namentlich, wenn die Wurzeln um weniger als Eins von einander abstehen. Es scheint (fährt der Verfasser fort) als müßte in diesem Falle auf jede der transformirten Gleichungen das allgemeine Verfahren (das Herstellen der Gleichung mit den Quadraten der Unterschiede der Wurzeln) besonders angewendet werden, um die einer jeden Wurzel zunächst liegende ganze Zahl herauszufinden. Diesem Uebelstande abzuhelfen, wird das in No. 79. enthaltene Verfahren vorgeschlagen, welches ich dem Inhalte nach hier folgen lasse.

Es seien  $\lambda$  und  $\Lambda$  Grenzwerte der gesuchten Wurzel der vorgelegten Gleichung in  $x$ , und durch successives Anwenden der Methode der Kettenbrüche zur nähern Bestimmung dieser Wurzel sei man auf die Gleichung

$$(a.) \quad x = \frac{\varrho t + \pi}{\varrho' t + \pi'}$$

geführt worden, wo  $\frac{\pi}{\pi'}$  und  $\frac{\varrho}{\varrho'}$  zwei auf einander folgende Näherungswerte von  $x$  sind und  $t$  die Unbekannte der letzten transformirten Gleichung vorstellt; dann kann man zu Grenzwerten für  $t$  auf folgendem Wege gelangen. Man hat aus Gleichung (a.)

$$(b.) \quad t = \frac{\pi' x - \pi}{\varrho - \varrho' x}$$

Da nun  $\lambda$  und  $\Lambda$  Grenzwerte von  $x$  sind, so müssen die Ausdrücke

$$\frac{\pi' \lambda - \pi}{\varrho - \varrho' \lambda} \quad \text{und} \quad \frac{\pi' \Lambda - \pi}{\varrho - \varrho' \Lambda}$$

Grenzwerte von  $t$  abgeben, Beträgt daher der Unterschied dieser Grenzwerte weniger als Eins, so hat man auch sogleich den verlangten ganzen Zahlenwerth von  $t$ ; u, s. w.

Eine Folgerung, wie die hier von *Lagrange*, scheint unserer ganzen Art zu denken völlig gemäß zu sein. Man wird kaum ein Bedenken tragen, in dem viel allgemeineren Falle, wenn aus der Gleichung

$$x = \Phi(t)$$

die Gleichung

$$t = \psi(x)$$

abgeleitet wäre, wo  $\Phi$  und  $\psi$  bekannte Functionen bezeichnen, eine der obigen analoge Folgerung zu machen. Gleichwohl ist diese Folgerung nur unter der Beschränkung zulässig, daß aus beiden Functionsformen  $\Phi$  und  $\psi$  ein gleicher Genauigkeitsgrad für die abhängigen Variablen erzielt werden kann.

Daß die Gleichungen (a.) und (b.) dieser Anforderung nicht entsprechen, soll in Folgendem dargethan werden.

Die ganzen Zahlen  $\rho, \rho', \pi, \pi'$  haben gleiche Zeichen. Man kann daher dieselben, wie die Größen  $t$  und  $x$ , mit positiven Zeichen voraussetzen. Ferner hat man, wenn

$$\frac{\rho}{\rho'} > x \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{\pi'} > x$$

vorausgesetzt wird, die Gleichung

$$\rho\pi' - \pi\rho' = 1.$$

Wird daher durch  $\Delta t$  der mögliche Fehler in  $t$ , und durch  $\Delta x$  der hieraus entspringende Fehler in  $x$  vorgestellt, so hat man, wenn in einer der Gleichungen (a.) oder (b.)  $t$  in  $t + \Delta t$  und  $x$  in  $x + \Delta x$  verwandelt wird, folgende Gleichung:

$$(c.) \quad \Delta x = \frac{\Delta t}{(\rho't + \pi')^2 - \rho'(\rho't + \pi')\Delta t}.$$

Aus dieser Gleichung sieht man, daß ein Fehler in der Annahme des Werthes von  $t$  einen viel kleinern Fehler in der Bestimmung von  $x$  erzeugt. Ja sogar, wenn der Fehler in  $t$ , also  $\Delta t > 1$  ist, wird man dennoch, nach dem was über die Beschaffenheit der Größen  $\rho, \rho', \pi, \pi', t$  festgesetzt ist, jedesmal  $\Delta x < 1$  haben.

Hieraus folgt aber auch umgekehrt: ein in  $x$  begangener Fehler, der sogar kleiner als die Einheit ist, kann einen Fehler in  $t$  hervorbringen, der die Einheit übertrifft.

Es bieten daher die oben gefolgerten zwei Grenzwerte für  $t$ , im Allgemeinen, keinen Anhaltspunct zur Bestimmung von  $t$  dar, und, wie aus dem eben Mitgetheilten erhellet, auch dann nicht, wenn gleich ihr Unter-

schied kleiner als die Einheit ist. Nur in dem Falle, wenn eine fehlerhafte Annahme für  $x$  einen Fehler in  $t$  erzeugt, der numerisch kleiner als die Einheit ist, wird diese Folgerung statthaft sein.

Um diesen Fall herzustellen, suche man aus der Gleichung (c.) den Werth von  $\Delta t$ . Man findet

$$\Delta t = \frac{(\rho' t + \pi')^2 \Delta x}{1 - \rho'(\rho' t + \pi') \Delta x}.$$

Damit nun  $\Delta t < 1$  sei, muß man die Ungleichheit haben:

$$(\rho' t + \pi')^2 \Delta x < 1 - \rho'(\rho' t + \pi') \Delta x$$

oder

$$(d.) \quad \Delta x < \frac{1}{(\rho' t + \pi')^2 + \rho'(\rho' t + \pi')}.$$

Ist man mit der Bestimmung einer Wurzel  $x$  nach der Methode der Kettenbrüche zur Gleichung (a.) gelangt, so ist der genaueste Werth von  $x$  der Bruch  $\frac{\rho}{\rho'}$ . Wenn daher

$$\frac{\rho}{\rho'} - x = \Delta x$$

angenommen wird, so hat man mit Zuziehung der Gleichung (a.)

$$\Delta x = \frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}.$$

Die von *Lagrange* durch  $\lambda$  und  $\Lambda$  angedeuteten Grenzwerthe von  $x$  liegen im Allgemeinen dem wahren Werthe von  $x$  nicht so nahe als der Bruch  $\frac{\rho}{\rho'}$ . Die aus denselben für  $x$  entspringenden Fehler sind daher größer, als der eben gefundene Bruch  $\frac{1}{\rho'(\rho' t + \pi')}$ ; und dieser Bruch ist wieder größer als der Bruch in der Ungleichheit (d.). Daher kann vom Statthaben der Ungleichheit (d.), bei der Annahme  $x = \lambda$  oder  $x = \Lambda$ , um so weniger die Rede sein.