Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

I. Teil: Theorie der L-Formen.*)

Von

Otto Toeplitz in Göttingen.

Die vorliegende Arbeit enthält die Theorie einer speziellen Klasse von quadratischen und bilinearen Formen unendlichvieler Veränderlicher, nämlich derjenigen Formen, deren Koeffizientenschema den Typus

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdot \\ \cdot & c_{-1} & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot \\ \cdot & c_{-2} & c_{-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \cdot \\ \cdot & c_{-3} & c_{-2} & c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdot \\ \cdot & c_{-4} & c_{-3} & c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

hat, und die ich L-Formen nennen will, wegen ihrer engen Beziehung zu der Laurentschen Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

*) Die vorliegende Arbeit (mit Ausnahme von §§ 3—5) bildete bis auf geringfügige Abänderungen einen Teil meiner Habilitationsschrift, die Pfingsten 1907 der philos. Fakultät der Universität Göttingen vorgelegen hat, und deren Resultate vorher in der math. Gesellschaft zu Göttingen im Februar 1907 von mir vorgetragen und in den Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1907, S. 110—116 („Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen") abgedruckt worden waren.

Die vorliegende Arbeit setzt *nicht* die Kenntnis der neueren Arbeiten über die Theorie der unendlichvielen Veränderlichen (Hilberts Noten und die daran anschließenden Arbeiten) voraus, sondern sie benutzt *lediglich* die §§ 1—4, 6, 7 der Arbeit von E. Hellinger und O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, Math. Ann. 69, die hier zur Abkürzung als „Grundlagen" zitiert werden soll, und in der alles aus der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen Nötige unabhängig und in elementarer Form entwickelt ist. — Die §§ 4 und 5 dagegen setzen keine besonderen Vorkenntnisse voraus und können für sich allein gelesen werden.

Es sind drei Umstände, die mich ermutigen, eine solche spezielle Theorie hier ausführlich zu entwickeln und damit die Ausführung des allgemeinen Programms zu eröffnen, das — in Anknüpfung an Hilberts Theorie der orthogonalen Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen — in einer voraufgehenden Arbeit*) aufgestellt worden ist.

Einmal erscheinen diese L-Formen, die ich ursprünglich als erste und besonders einfache *Beispiele* für die eben genannte, von Hilbert entworfene Theorie der quadratischen Formen mit Streckenspektrum gebildet hatte, geeignet, die *Elemente dieser allgemeinen Theorie* abzugeben, d. h. *Normalformen*, auf die eine Neugestaltung der Hilbertschen Theorie jede quadratische Form voraussichtlich wird reduzieren können. Und auch für die Theorie der *unsymmetrischen* Bilinearformen von unendlichvielen Veränderlichen, d. h. für die Übertragung der sogenannten Elementarteilertheorie auf unendlichviele Veränderliche, dürften sie in ähnlichem Sinne als Normalformen in Betracht kommen.

Andererseits vermitteln die L-Formen, vermöge ihres engen Zusammenhanges mit den Laurentschen Reihen und deren Verhalten auf dem Einheitskreise, eine *neue Beziehung* zwischen der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen und der Theorie der Funktionen komplexen Arguments, der konformen Abbildung, der Fourierschen Reihen etc. — eine Beziehung, die man als eine *direkte* Anwendung der unendlichvielen Veränderlichen auf die Analysis bezeichnen kann, im Vergleich mit der *mittelbaren* Beziehung, die, um nur ein Beispiel zu nennen, Hilbert von den Randwertaufgaben der mathematischen Physik aus über die Integralgleichungen hinweg zu den unendlichvielen Veränderlichen geführt hat. Die Behandlung der Aufgabe, die reziproke**) und die inverse***) Funktion zu einer in Laurentscher Entwicklung gegebenen Funktion selbst nach Laurent zu entwickeln, die Angabe notwendiger und hinreichender Kriterien, um aus den Koeffizienten einer Fourierschen Reihe zu erkennen, ob die dargestellte Funktion nirgends negativ ist, endlich die Erweiterung dieser Kriterien zu einem „*Trägheitsgesetz der Fourierschen Reihen*" sollen einige erste Proben von dem Nutzen dieser neuen Beziehung geben, denen demnächst eine Reihe weiterer, ausgedehnterer folgen soll.

Drittens endlich scheint es mir zweckmäßiger, diese spezielle Theorie der L-Formen mit einfachen Hilfsmitteln, gewissermaßen als ein *einfaches, konkretes Beispiel* zu entwickeln, als statt ihrer eine Theorie von möglichster Allgemeinheit zu geben, wie es unter Benutzung der neuesten Hilfsmittel der Algebra möglich gewesen wäre. Im Grunde haben näm-

*) Vgl. Grundlagen § 8.

**) Vgl. die letzte Anmerkung zu § 1.

***) Vgl. § 7, Satz 12, Anmerkung.

lich die L-Formen nur den Charakter typischer Beispiele für eine *neue Beziehung zwischen der modernen Gruppen- und Elementarteilertheorie einerseits und der Theorie der Reihenentwicklungen allgemeiner Natur andererseits.* Gelangt man doch gerade zu den L-Formen, wenn man nach den Regeln der Theorie der hyperkomplexen Größen das Größensystem der Laurentreihen durch Bilinearformen von abzählbar-unendlichvielen Veränderlichen darstellt, oder wenn man nach dem Muster von Frobenius die Gruppenmatrix derjenigen unendlichen, diskontinuierlichen Gruppe von Permutationen abzählbar-unendlichvieler Elemente aufstellt, die aus den positiven und negativen Potenzen der Permutation

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

besteht. In dieser Bemerkung ist tatsächlich ein allgemeines Prinzip enthalten, um jeder Art von Reihenentwicklungen unter Beobachtung ihrer „Multiplikationstabelle" eine besondere Klasse von Matrizen oder Bilinearformen in derselben Weise zuzuordnen, wie hier den Laurentschen und trigonometrischen Reihen die L-Formen.

Es entspricht dem wechselseitigen Charakter solcher Beziehungen, daß man von ihnen eine doppelte *Darstellung* geben kann: man kann die bekannten Tatsachen der Funktionentheorie, insbesondere der Laurentschen Entwicklungen, die moderne Theorie der Fourierschen Reihen und der konformen Abbildung benutzen, um die algebraische Theorie der L-Formen mit ihrer Hilfe abzuleiten; man kann umgekehrt vom algebraischen Standpunkte aus eine Theorie der L-Formen entwickeln und aus ihr dann nachher die eben erwähnten und auch neue funktionentheoretische Sätze ableiten. Beides soll im folgenden geschehen, und zwar in zwei voneinander völlig independenten und auch unabhängig voneinander verständlichen Kapiteln, deren erstes (analytische Theorie der L-Formen) den zuerst erwähnten Standpunkt festhält, und deren zweites (arithmetische Theorie der L-Formen) demnächst zusammen mit dem Schluß des ersten Kapitels in einer Fortsetzung dieser Arbeit folgen soll.

Nachdem in den §§ 1—4 dieses ersten Kapitels der Zusammenhang zwischen dem Spektrum der L-Formen und dem Wertvorrat der zugehörigen analytischen Funktionen längs des Einheitskreises (§§ 1, 2) und der zugehörigen Fourierreihen (§ 3), endlich die Analogie mit den Eigenschaften der als Zyklanten bekannten Determinanten (§ 4) statuiert ist, wird die Theorie der L-Formen nach zwei Richtungen weiter verfolgt: im § 3 (Ende) und § 5 wird eine Übertragung des *Trägheitsgesetzes* der quadratischen Formen auf L-Formen begonnen und seine Bedeutung für die Theorie der Fourierschen Reihen betrachtet; in §§ 6—8 wird das *Hauptachsenproblem* der quadratischen Formen, das den Gegenstand der oben erwähnten allgemeinen Theorie von Hilbert bildet, und seine entsprechende Verallgemeinerung für unsymmetrische Formen, das Elementarteilerproblem oder, wie es hier heißen soll, das *„Ähnlichkeitsproblem“*, speziell für L-Formen, *mittels expliziter Formeln* direkt behandelt, unabhängig von den allgemeinen Hilbertschen Entwicklungen.

Erstes Kapitel.

Analytische Theorie der L-Formen.

§ 1.

Reguläre L-Formen und reguläre Laurentreihen.

Unter einer L-Form verstehe ich eine solche Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen $\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}x_p y_q$, bei der $c_{pq}=c_{p+h,q+h}$ ist für $h=-\infty$ bis $+\infty$ und deshalb gleich c_{q-p} gesetzt werden darf, also eine Bilinearform, deren Koeffizienten-Matrix, eine „L-Matrix“, folgendes Aussehen*) hat:

*) Im Gegensatz zu der Schreibweise der „Grundlagen“ werden hier die Veränderlichen nach beiden Richtungen unbegrenzt fortgesetzt; es ist dies eine unwesentliche Modifikation, und alle Betrachtungen gelten ohne weiteres auch in dieser Schreibweise. Geht diese doch aus der bisher üblichen einfach dadurch hervor, daß man den Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ die andere Anordnung

$$\cdots x_4, x_2, \boxed{x_1}, x_3, x_5, \cdots$$

erteilt und sie in dieser Reihenfolge von $-\infty$ bis $+\infty$ numeriert.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich unmittelbar, wann man eine Bilinearform der neuen Schreibweise beschränkt zu nennen hat. Denn der n^{te} Abschnitt $\sum_{p,q=1}^{n} c_{pq}x_p y_q$ der alten Schreibart geht bei der geschilderten Umnumerierung über in $\sum_{p,q=-\beta}^{\alpha} c_{pq}x_p y_q$, wo bei ungeradem n $\beta=\alpha=\frac{n-1}{2}$, bei geradem n dagegen $\beta=\alpha+1=\frac{n}{2}$ ist. Es wird aber offenbar gleichgültig sein, ob man *nur diese* Abschnitte der allseitig ausgedehnten Matrix in Betracht zieht, wenn man die Beschränktheit einer Bilinearform der neuen Schreibweise genau nach dem Muster von § 2 der „Grundlagen“ definiert, oder die *allgemeineren* Abschnitte, die man erhält, wenn man α und β keiner gegenseitigen Beschränkung unterwirft.

Definition. Die Bilinearform $\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{pq}x_p y_q$ *heißt beschränkt, wenn im Sinne*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdot \\ \cdot & c_{-1} & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdot \\ \cdot & c_{-2} & c_{-1} & \boxed{c_0} & c_1 & c_2 & \cdot \\ \cdot & c_{-3} & c_{-2} & c_{-1} & c_0 & c_1 & \cdot \\ \cdot & c_{-4} & c_{-3} & c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\}.$$

Man kann neben dieser L-Form die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ betrachten; auf diese Weise gehört, rein formal, zu jeder L-Form eine Laurentreihe und zu jeder Laurentreihe eine L-Form. *Ist speziell diese Laurentreihe für*

$$\varrho < |z| < \sigma, \quad \textit{wo} \quad 0 < \varrho < 1 < \sigma \quad \textit{ist},$$

d. h. auf dem Einheitskreise und in einem ihn überdeckenden konzentrischen Kreisringe konvergent, so soll sie und auch die zugehörige L-Form „regulär“ heißen.

Satz 1. Eine reguläre L-Form ist stets beschränkt.

Der Beweis beruht darauf, daß man die L-Form, wie es ihre Struktur nahelegt, diagonalenweise summiert. Gemäß der Schwarzschen Ungleichung ist nämlich für alle x, y, für die $\sum_{(p)} |x_p|^2$, $\sum_{(p)} |y_p|^2$ *) konvergieren, und für irgend eine ganze Zahl n

$$\left|\sum_{(p)} x_p y_{p+n}\right|$$

absolut konvergent und

$$\leqq \sqrt{\sum_{(p)} |x_p|^2} \sqrt{\sum_{(p)} |y_p|^2}.$$

---

von § 2 der „Grundlagen“ die Abschnitte $\sum_{p,q=-\beta}^{+\alpha} c_{pq} x_p y_q$ *dem Betrage nach unter einer von α und β unabhängigen Grenze M bleiben.*

Nach Festlegung dieser Definition übertragen sich die Betrachtungen der „Grundlagen“ unmittelbar auf allseitige Matrizen.

Für L-Formen speziell vereinfacht sich die Betrachtung ihrer Abschnitte noch ganz besonders auf Grund ihrer besonderen Struktur: es genügt hier diejenigen Abschnitte zu betrachten, die sich vom Mittelelement nach rechts unten erstrecken, also diejenigen, bei denen $\beta = 0$ ist und nur α beliebig.

Satz. Die L-Form $\sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{q-p} x_p y_q$ *ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Bilinearform alter Schreibweise* $\sum_{p,q=1}^{\infty} c_{q-p} x_p y_q$ *es ist.*

*) In der vorliegenden Arbeit soll (p) die Summation von $-\infty$ bis $+\infty$ andeuten.

Ist nun $\sum\limits_{(n)} c_n z^n$ regulär, so konvergiert $\sum\limits_{(n)} c_n$ absolut; mithin konvergiert auch die Doppelreihe $\sum\limits_{(n)} c_n \Big(\sum\limits_{(p)} x_p y_{p+n}\Big)$ absolut, kann also beliebig umgeordnet werden, und es ist die zu dieser Laurentreihe gehörige L-Form

$$\Big|\sum_{(p,q)} c_{q-p} x_p y_q\Big| = \Big|\sum_{(p,n)} c_n x_p x_{p+n}\Big| \leqq \sum_{(n)} |c_n| \sqrt{\sum_{(p)} |x_p|^2} \sqrt{\sum_{(p)} |y_p|^2},$$

d. h. diese Form ist beschränkt.*)

Die Zuordnung zwischen L-Formen und Laurentreihen gewinnt ihr Interesse erst auf Grund von

*Satz 2. Der Summe zweier Laurentreihen entspricht die Summe der zugehörigen L-Formen; dem Produkt zweier regulären Laurentreihen entspricht das Produkt der zugehörigen L-Formen oder L-Matrizen, im Sinne des Kalküls mit beschränkten Matrizen.***)

Was das Produkt betrifft — für die Summe ist der Satz unmittelbar evident — so ist das Produkt zweier für $|z| = 1$ absolut konvergenten Laurentreihen $\sum\limits_{(\alpha)} a_\alpha z^\alpha$ und $\sum\limits_{(\beta)} b_\beta z^\beta$ gleich

$$\sum_{(\alpha,\beta)} a_\alpha b_\beta z^{\alpha+\beta} = \sum_{(r)} \Big(\sum_{(\beta)} a_{r-\beta} b_\beta\Big) z^r = \sum_{(r)} c_r z^r,$$

wo $c_r = \sum\limits_{(\beta)} a_{r-\beta} b_\beta$; andererseits hat das Produkt der zugehörigen L-Matrizen das Element

$$c_{pq} = \sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} = \sum_{(\alpha)} a_{\alpha-p} b_{q-\alpha},$$

oder, wenn man α durch den Summationsindex $\beta = q - \alpha$ ersetzt, wodurch die Summationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ lediglich miteinander vertauscht werden:

$$c_{pq} = \sum_{(\beta)} a_{q-p-\beta} b_\beta;$$

also ist c_{pq} nur von $q - p = r$ abhängig, und zwar gleich dem obigen c_r,

*) Sie ist sogar „absolut-beschränkt“ (vgl. Grundlagen § 5, 4. Bemerkung). In der Voranzeige in den Gött. Nachr. von 1907 war durchweg von absoluter Beschränktheit die Rede, und es wurde dafür unter Hinweis auf den Unterschied kurz der Name „beschränkt“ gebraucht. Die weitere Entwicklung der Theorie hat jedoch gezeigt, daß es zweckmäßiger ist, überall beschränkte, nicht absolut-beschränkte Formen zu betrachten.

**) Vgl. Grundlagen § 6.

d. h. die Matrix (c_{pq}) ist wiederum eine L-Matrix und entspricht dem Produkt der beiden gegebenen Laurentreihen $\sum a_\alpha z^\alpha$, $\sum b_\beta z^\beta$.

Zusatz. Da das Rechnen mit regulären Laurentreihen (eindeutigen analytischen Funktionen auf dem Einheitskreise) eine kommutative Multiplikation hat, folgt, daß die regulären L-Matrizen eine Klasse vertauschbarer Matrizen ($AB = BA$) *bilden.*

Satz 3. Die Einheitsmatrix $E = (e_{pq})$ *ist eine L-Matrix und die zugehörige Laurentreihe stellt die Funktion* $f(z) = 1$ *dar.*

Im Anschluß hieran sei noch bemerkt: Die zu einer L-Matrix L *transponierte**) Matrix L' ist wiederum eine L-Matrix und gehört zur Laurentreihe $\sum c_{-n} z^n$, wenn L zu $\sum c_n z^n$ gehört. Mit $\bar{L}$ ferner soll die L-Form bezeichnet werden, deren Koeffizienten die konjugiert-komplexen Größen der Koeffizienten von L sind.

Satz 4. Eine reguläre L-Form (reguläre L-Matrix) L hat dann und nur dann eine beschränkte Reziproke, wenn die durch die zugehörige Laurentreihe längs des Einheitskreises dargestellte eindeutige analytische Funktion $f(z)$ *auf dem Einheitskreise selbst den Wert* 0 *nirgends annimmt. Und zwar ist diese Reziproke stets eine eindeutige, zugleich vordere und hintere Reziproke und selbst eine reguläre L-Matrix.*

Die eine Hälfte der Behauptung ist unmittelbar einleuchtend: wenn $f(z)$ für $|z| = 1$ eindeutig und regulär ist und den Wert 0 nicht annimmt, so besitzt L eine eindeutige beschränkte Reziproke, die selbst eine reguläre L-Matrix ist. Denn dann ist $r(z) = \frac{1}{f(z)}$ ebenfalls als eine eindeutige, reguläre Funktion längs des Einheitskreises und in seiner beiderseitigen Umgebung definiert — würden sich nämlich die Nullstellen von $f(z)$ von innen oder außen gegen den Einheitskreis häufen, so läge auf diesem eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion $f(z)$ —, und es ist $f(z) \cdot r(z) = 1$. Nach Satz 2 und 3 ist also auch das Produkt der zugehörigen L-Matrizen gleich der Einheitsmatrix, in beiderlei Reihenfolge; damit ist das Vorhandensein einer beschränkten, zugleich vorderen und hinteren Reziproke erwiesen, die übrigens eine reguläre L-Matrix ist. Der erste Formalsatz**) über Reziproke ergibt dann, daß sie die einzige beschränkte Reziproke ist, sowohl vordere als auch hintere.

Es erübrigt, die andere Hälfte der Behauptung darzutun: wenn $f(z)$ für $|z| = 1$ irgendwo den Wert 0 annimmt, so hat die zugehörige L-Matrix weder eine vordere, noch eine hintere beschränkte Reziproke. Es genügt, diese Tatsache für den Fall zu erweisen, daß $f(1) = 0$ ist. Denn sei vor-

*) Vgl. Grundlagen, Schluß von § 6.

**) Grundlagen § 7.

erst η eine Stelle vom Betrage 1, für die $f(z)$ verschwindet, $f(\eta) = 0$, so bezeichne man mit Δ die Bilinearform $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta^n x_n y_n$, deren Koeffizientenmatrix also eine Diagonalmatrix mit den Diagonalgrößen η^n ist, mit Δ^{-1} die reziproke Form

$$\sum \eta^{-n} x_n y_n = \sum \bar{\eta}^n x_n y_n;$$

dann sind die Matrizen Δ und Δ^{-1}, wie man aus § 4 der „Grundlagen" (Definition beschränkter Formen mit komplexen Koeffizienten) unmittelbar entnimmt, beschränkt. Indem man sich nun, auf § 6 der „Grundlagen" gestützt, des Kalküls mit diesen beschränkten Matrizen bedient, bilde man:

$$M = \Delta^{-1} L \Delta = \Big(\sum_{\alpha,\beta} e_{p\alpha} \eta^{-p} \cdot c_{\beta-\alpha} e_{\beta q} \eta^q\Big) = (c_{q-p} \eta^{q-p}),$$

dann verschwindet die zugehörige Laurentreihe $g(z) = \sum c_n \eta^n z^n$ für $z = 1$, wenn $\sum c_n z^n$ für $z = \eta$ verschwindet. Außerdem ist $L = \Delta M \Delta^{-1}$; hat nun L eine beschränkte, etwa hintere Reziproke Λ, ist also $L\Lambda = E$, so ist $(\Delta^{-1} L \Delta)(\Delta^{-1} \Lambda \Delta) = \Delta^{-1} L \Lambda \Delta = \Delta^{-1} E \Delta = E$, d. h. $\mathsf{M} = \Delta^{-1} \Lambda \Delta$ ist eine beschränkte hintere Reziproke von M, und ähnlich folgt umgekehrt aus dem Vorhandensein einer beschränkten hinteren Reziproken M von M dasjenige einer solchen Λ von L; endlich verhält es sich analog mit den vorderen Reziproken, sodaß man sagen kann: L hat dann und nur dann eine vordere oder hintere beschränkte Reziproke, wenn M eine solche hat.

Ist nun $f(1) = 0$, also $\sum c_n z^n = 0$ an der Stelle $z = 1$, und bedeutet Überstreichen den Übergang zu den konjugiert-imaginären Größen, so bilde man die definite Hermitesche L-Form $H = L\bar{L}'$ und betrachte die zugehörige Laurentreihe

$$\sum h_n z^n = \left(\sum c_p z^p\right)\left(\sum \bar{c}_{-q} z^q\right) = \sum c_p \bar{c}_{-q} z^{p+q};$$

auch diese verschwindet dann für $z = 1$. Ich behaupte jetzt einerseits, daß die untere Grenze dieser positiv-definiten Hermiteschen Form $H = \sum h_{q-p} x_p \bar{x}_q$ Null ist. Betrachtet man nämlich die Form für folgendes Wertsystem ihrer Veränderlichen:

$$\cdots, x_{-1} = 0, \; x_0 = 0, \; x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \; x_{n+1} = 0, \cdots,$$

dessen konvergente Quadratsumme 1 ist, so erhält man als ihren Wert

$$h_0 \frac{n}{n} + (h_1 + h_{-1}) \frac{n-1}{n} + \cdots + (h_{n-1} + h_{-(n-1)}) \frac{1}{n},$$

d. h. das sog. arithmetische Mittel der Reihe $\sum h_n$, die den Wert der zu

H gehörigen L-Matrix für $z=1$ darstellt. Ist nun dieser Wert, wie vorausgesetzt, 0, so konvergiert bekanntlich auch die Reihe der arithmetischen Mittel und zwar gegen denselben Wert, d. h. ebenfalls gegen 0, und folglich kann man eine Serie von Wertsystemen von der Quadratsumme 1 angeben, längs deren die Form H sich dem Wert 0 nähert, d. h. H hat die untere Grenze, ja sogar das Minimum 0.

Andererseits behaupte ich*): wenn L eine beschränkte, etwa hintere Reziproke R besitzt, so ist die untere Grenze von $H=L\bar{L}'$ größer als Null, woraus dann endlich Satz 4 folgt. In der Tat ist, wenn $LR=E$,

$$\sum_{(p)} x_p\bar{y}_p=\sum_{(p,q,\alpha)} l_{p\alpha}r_{\alpha q}x_p\bar{y}_q=\sum_{(\alpha)}\Big(\sum_{(p)} l_{p\alpha}x_p\Big)\Big(\sum_{(q)} r_{\alpha q}\bar{y}_q\Big)^{**)}$$

und gemäß der Schwarzschen Ungleichung in ihrer Erweiterung auf komplexe Größen:

$$\Big\{\sum x_p\bar{y}_p\Big\}^2\leqq\sum_{\alpha}\Big(\sum_p l_{p\alpha}x_p\Big)\Big(\sum_q \bar{l}_{q\alpha}\bar{x}_q\Big)\cdot\sum_{\alpha}\Big(\sum_p r_{\alpha p}\bar{y}_p\Big)\Big(\sum_q \bar{r}_{\alpha q}y_q\Big).$$

Speziell für $y_p=x_p$ und solche Wertsysteme, für die $\sum x_p\bar{x}_p=1$ ist, steht linkerhand 1, rechterhand das Produkt des Wertes von $H(x,\bar{x})$ und des Wertes von $R'\bar{R}(\bar{x},x)$. Nun ist mit R auch $R'\bar{R}$ beschränkt und also für die betrachteten Wertsysteme unter einer oberen Grenze ϱ gelegen; demnach liegt der Wert von H für alle diese Wertsysteme über $\frac{1}{\varrho}$, d. h. die untere Grenze der Form H ist nicht 0, und wenn sie 0 ist, kann L keine beschränkte hintere Reziproke haben. — Die Betrachtung von $L'\bar{L}$ lehrt ebenso, daß L keine vordere beschränkte Reziproke haben kann.

Eine reguläre L-Matrix kann demnach nur dann eine beschränkte Reziproke haben, wenn die zugehörige Funktion $f(z)$ für $|z|=1$ nicht verschwindet, und da sie in diesem Falle eine eindeutige Reziproke hat, die eine reguläre L-Matrix ist, so folgt implizit aus dem ganzen Beweisverfahren, daß eine beschränkte Reziproke einer regulären L-Matrix selbst eine reguläre L-Matrix ist.***)†)

---

*) Der ganze Beweisgang ist dem allgemeinen Kriterium für das Vorhandensein einer beschränkten Reziproken (Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Nachr. der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Kl. 1907, S. 101—109) entnommen und nur gemäß den vorliegenden speziellen Verhältnissen vereinfacht.

**) Vgl. Grundlagen § 3, Korollar zum 1. Faltungssatz.

***) Bei L-Matrizen liegen bezüglich der Reziproken also nur die beiden der vier möglichen Fälle vor, die bei endlichen Matrizen vorkommen. Vgl. Grundlagen § 7, Ende.

†) Es ist darin die Lösung der Aufgabe enthalten, die reziproke Funktion $\frac{1}{f(z)}$ einer in Laurentscher Entwicklung gegebenen Funktion $f(z)$ selbst nach Laurent zu

Man kann den Inhalt dieser vier Sätze kurz resumieren:

Zusammenfassung: Das Rechnen mit regulären L-Matrizen vollzieht sich vollständig analog dem Rechnen mit den zugehörigen regulären Laurentreihen und den durch sie dargestellten, längs des Einheitskreises eindeutigen analytischen Funktionen.

§ 2.

Das Spektrum der regulären L-Formen.

Das Spektrum einer beschränkten Bilinearform*) C ist die Gesamtheit derjenigen Werte des komplexen Parameters λ, für die $C - \lambda E$ keine eindeutige, beschränkte Reziproke hat. Mit Hilfe der Sätze des § 1 ist es leicht, das Spektrum der regulären L-Formen zu beschreiben. Nach Satz 2 und 3 entspricht nämlich der L-Form $C - \lambda E$ die Funktion $f(z) - \lambda$, und nach Satz 4 hat $C - \lambda E$ dann und nur dann eine beschränkte Reziproke, wenn die zugehörige Laurentreihe $f(z) - \lambda$ für $|z| = 1$ nicht verschwindet. Das Spektrum der Form C ist demnach die Gesamtheit derjenigen Werte von λ, für die $f(z) - \lambda$ auf dem Einheitskreise verschwindet, d. h. es besteht aus der Gesamtheit derjenigen Werte von λ, die die Funktion $f(z)$ für $|z| = 1$ annimmt.

Satz 5. Das Spektrum einer regulären L-Matrix besteht aus der Gesamtheit der Werte, die die zugehörige analytische Funktion auf dem Einheitskreise annimmt.

Das Spektrum einer regulären L-Matrix ist demnach eine analytische Kurve in der Ebene der komplexen Veränderlichen λ. So geben also die regulären L-Formen, soweit sie reell und symmetrisch sind, besonders einfache Beispiele für die von Hilbert entdeckten quadratischen Formen mit einfachem und auch mehrfachem Streckenspektrum. Ist nämlich speziell die L-Matrix C symmetrisch, also die L-Form eine quadratische Form, oder ein wenig allgemeiner eine Hermitesche Form, d. h. $c_n = \bar{c}_{-n}$, so ist für jedes z, das den Betrag 1 hat und demnach gleich $\bar{z}^{-1}$ ist,

$$\sum_{(n)} c_n z^n = \sum_{(n)} \bar{c}_{-n} z^n = \sum_{(n)} \bar{c}_{-n} \bar{z}^{-n} = \sum_{(n)} \bar{c}_n \bar{z}^n = \overline{\sum_{(n)} c_n z^n},$$

und da eine Größe reell ist, wenn sie ihrer konjugiert-imaginären gleich ist, sind die Werte von $\sum c_n z^n$ für $|z| = 1$ reell, d. h. das Spektrum ist reell:

---

entwickeln: die Auflösungsformel meiner Note über die Jacobische Transformation (Gött. Nachr. 1907) oder die von E. Schmidt (Pal. Rend. 1908) ergeben diese Auflösung in Verbindung mit Satz 4 des Textes.

*) Vgl. Grundlagen § 8.

Satz 6. Das Spektrum einer Hermiteschen L-Form ist reell; speziell ist also das Spektrum einer reellen quadratischen L-Form reell, das einer reellen schiefsymmetrischen (alternierenden) L-Form rein imaginär.

Die von Hilbert gegebene Integraldarstellung der allgemeinen quadratischen Form mit Streckenspektrum und Hellingers genauere Zerspaltung derselben*) erscheint bei den regulären quadratischen L-Formen lediglich als eine andere Formulierung des Cauchyschen Integralsatzes. Fassen wir nämlich der Einfachheit halber zunächst den Fall ins Auge, daß $f(z)$, während z den Einheitskreis einmal beschreibt, die Strecke λ_1 bis λ_2 der Achse des Reellen einmal hin und zurück durchläuft, und bezeichnen wir mit $\varphi(\lambda)$ die zu $\lambda = f(e^{i\varphi})$ inverse Funktion, so ist das Cauchysche Integral

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\,\varphi'(\lambda)\cos n\varphi(\lambda)\,d\lambda,$$

und es wird also der Koeffizient der zu $f(z)$ gehörigen reellen quadratischen L-Form

$$c_{pq} = c_{q-p} = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\cos p\varphi\cos q\varphi\,d\varphi + \frac{1}{\pi}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\sin p\varphi\sin q\varphi\,d\varphi.$$

Setzen wir noch $\lambda = 1/\mu$, so erhalten wir die Hilbertsche Spektraldarstellung, gleich in der Hellingerschen Zerspaltung in zwei Teile, die dem doppelten Spektrum von λ_1 bis λ_2 entsprechen. Im allgemeinen Falle, daß $f(z)$ mehrfach auf der Achse des Reellen hin- und herläuft, während z einmal den Einheitskreis beschreibt, stellt sich von selbst dementsprechend eine Zerspaltung in eine Reihe einzelner Integrale heraus. So zeigt es sich, daß für reguläre reelle, symmetrische L-Matrizen die von Hellinger definierte Vielfachheit des Spektrums übereinstimmt mit der Vielfachheit im funktionentheoretischen Sinne, mit der $f(z)$ die einzelnen Werte λ auf dem Einheitskreise annimmt.

§ 3.

Reguläre L-Formen und reguläre Fourierreihen.

Sei $f(z) = \sum\limits_{(n)} c_n z^n = \sum\limits_{(n)} (a_n + ib_n) z^n$ eine für $|z| = 1$ reguläre Funktion und werde $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ gesetzt, so wird

*) wie Hellinger in seiner Dissertation (Göttingen 1907) S. 76—77 hinzufügt.

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{(n)} (a_n + i b_n)(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \\
&= \left\{ \sum_{(n)} (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi) \right\} + i \left\{ \sum_{(n)} (a_n \sin n\varphi + b_n \cos n\varphi) \right\} \\
&= \left\{ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + a_{-n}) \cos n\varphi - (b_n - b_{-n}) \sin n\varphi] \right\} \\
&\quad + i \left\{ b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - a_{-n}) \sin n\varphi + (b_n + b_{-n}) \cos n\varphi] \right\}.
\end{aligned}
$$

Man kann den hierin enthaltenen Zusammenhang zwischen Fourierreihen und L-Formen in doppelter Weise ausdrücken:

I. *Die Werte der Fourierreihe*

$$
(2)\qquad \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)
$$

sind identisch mit dem Realteile der Werte des Spektrums jeder L-Form, deren Koeffizienten $c_n = a_n + i b_n$ den folgenden Bedingungen genügen:

$$
a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0, \quad a_n + a_{-n} = \alpha_n, \quad b_n - b_{-n} = -\beta_n.
$$

Unter allen diesen L-Formen gibt es stets genau eine, die zugleich eine Hermitesche Form ist. Denn fügt man zu den eben angeführten Bedingungen diese neuen $c_n = \bar{c}_{-n}$, d. h.

$$
b_0 = 0, \quad a_n = a_{-n}, \quad b_n + b_{-n} = 0
$$

hinzu, so hat man eindeutig:

$$
c_0 = \frac{1}{2}\alpha_0, \quad a_n = \frac{1}{2}\alpha_n, \quad b_n = -\frac{1}{2}\beta_n, \quad \text{d. h.}
$$

II. *Der Wertevorrat der Fourierreihe* (2) *ist identisch mit dem* (*nach Satz 6 reellen*) *Spektrum der Hermiteschen L-Form mit den Koeffizienten*

$$
c_0 = \frac{1}{2}\alpha_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(\alpha_n - i\beta_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(\alpha_n + i\beta_n). —
$$

Man kann aus II ein Kriterium ableiten, um aus den Koeffizienten einer Fourierreihe zu erkennen, ob die zugehörige Funktion definit, d. h. im ganzen Intervall 0 bis 2π nur positiver Werte fähig ist. Denn nach II stimmen diese Werte überein mit dem Spektrum einer gewissen Hermiteschen L-Form, und damit tritt die Frage in Analogie zu der bekannten algebraischen Frage: *wie erkennt man aus den Koeffizienten einer quadratischen oder Hermiteschen Form von n Veränderlichen, ob diese definit ist?* Denn eine solche Form ist definit, wenn ihr „Spektrum", d. h. die Gesamtheit der Wurzeln ihrer Säkulargleichung, positiv ist. Auch eine beschränkte Hermitesche Form von unendlichvielen Veränderlichen ist dann und nur dann definit, wenn ihr Spektrum positiv ist*), und es handelt sich also darum, das bekannte algebraische Kriterium, daß die sukzessiven Hauptminoren (Abschnittsdeterminanten) positiv sein müssen, auf unendlichviele Veränderliche zu übertragen:

*Satz 7. Eine beschränkte Hermitesche Form, bei der keine Abschnittsdeterminante verschwindet, ist dann und nur dann definit, ihr Spektrum ist also**) *dann und nur dann positiv, wenn ihre Abschnittsdeterminanten sämtlich positiv sind.*

Denn nach dem analogen algebraischen Satz über Formen von n Veränderlichen ist diese Bedingung dafür charakteristisch, daß jeder Abschnitt der Form definit sei. Ist aber jeder Abschnitt der Form definit, so ist es auch die ganze Form, d. h. sie ist auch für nicht abbrechende Wertsysteme der Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots$ von konvergenter Quadratsumme nie negativ. Denn nach „Grundlagen" § 2, Satz 3 erscheinen die Werte einer beschränkten quadratischen Form als Limites von Werten der Abschnitte.

Auf die vorliegende L-Form angewandt, liefert Satz 7 das Ergebnis:

Satz 8. Die Fourierreihe (2) *ist dann und nur dann definit, d. h. negativer Werte nicht fähig, wenn die Determinanten*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 + i\beta_1 & \alpha_2 + i\beta_2 & \cdots & \alpha_{n-1} + i\beta_{n-1} \\ \alpha_1 - i\beta_1 & \alpha_0 & \alpha_1 + i\beta_1 & \cdots & \alpha_{n-2} + i\beta_{n-2} \\ \alpha_2 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\beta_1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-3} + i\beta_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n-1} - i\beta_{n-1} & \alpha_{n-2} - i\beta_{n-2} & \alpha_{n-3} - i\beta_{n-3} & \cdots & \alpha_0 \end{vmatrix}$$

*sämtlich positiv sind.***)

---

*) Dieser Satz findet sich explizit weder in den „Grundlagen" noch anderwärts ausgesprochen; er ist zuerst in meiner Arbeit „Die Jacobische Transformation . . .", Gött. Nachr. 1907, enthalten, und die eine Hälfte von ihm („wenn das Spektrum positiv ist, ist die Form definit") läßt sich wohl nicht einfacher beweisen als mittels der dort angegebenen, von E. Hellinger herrührenden Methode, die übrigens auch am Schluß des Beweises von Satz 4 der vorliegenden Arbeit (§ 1) auseinandergesetzt worden ist. Die andere Hälfte des Satzes („das Spektrum einer definiten Form ist positiv") kann man durch einen Kunstgriff von E. Hilb sehr einfach beweisen, indem man sich der sog. Neumannschen Methode bedient. Ist nämlich C definit, so ist $C - \lambda E$ für einen negativen Wert von λ nicht nur definit, sondern seine untere Grenze ist größer als $|\lambda|$, also > 0, für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \cdots$, deren Quadratsumme gleich 1 ist. Für eine solche Form beweist aber der Verf. (a. a. O. § 3) und Hilb (Ber. der phys.-med. Soc. in Erlangen, 40 (1908), S. 84; vgl. statt dessen etwa auch Fortschritte d. Math. 39, S. 407 f.), daß sie eine eindeutige beschränkte Reziproke besitzt, und folglich besitzt $C - \lambda E$ eine solche für jedes negative λ, d. h. das Spektrum von C ist positiv.

**) Der Fall, daß irgendwelche der Determinanten Δ_n verschwinden, ist dabei

Diese Sätze beziehen sich zunächst nur auf *reguläre* L-Formen, und infolgedessen nur auf die Fourierreihen solcher Funktionen, die im Intervall 0 bis 2π überall analytisch sind und sich an den Enden analytisch zusammenschließen. In den letzten Paragraphen dieses Kapitels werden sie sich bei der Behandlung der singulären L-Formen auf beliebige Funktionen ausdehnen lassen, die beschränkt und selbst nebst ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrabel sind; sie werden also insbesondere für alle stetigen oder auch nur abteilungsweise stetigen Funktionen gelten.*)

§ 4.

Zyklanten.

Die Theorie der L-Formen steht in einer eigentümlichen Analogie zu den bekannten Eigenschaften der vielfach als Zyklanten bezeichneten Determinanten; und diese Analogie, die im vorliegenden Paragraphen auseinandergesetzt wird, gestattet im § 5, durch einen sehr primitiven Grenzübergang, den Satz 8 wesentlich zu vertiefen.

Es ist für diese Zwecke nur notwendig, entgegen vielfachem Usus die Zyklanten folgendermaßen

$$(1)\quad \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \cdots c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 \cdots c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 \cdots c_{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots c_0 \end{pmatrix} \quad \text{und nicht so:} \quad (2)\quad \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \cdots c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots c_0 \\ c_2 & c_3 & c_4 \cdots c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 \cdots c_{n-2} \end{pmatrix}$$

zu schreiben und außerdem — dabei wird dies erst wesentlich — nicht nur die Determinante der Matrix (1) zu betrachten, sondern die Matrix (1) selbst.

Die bekannte Haupteigenschaft der Zyklanten besagt, daß der Wert der Determinante von (1), unter $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ die n^{ten} Einheitswurzeln verstanden, gleich

zunächst ausgeschlossen Der Satz bleibt jedoch auch in diesem Falle richtig, und es bedarf lediglich *algebraischer* Betrachtungen, um die hier gegebene Herleitung auch auf diesen Fall mit auszudehnen. Andererseits folgt der Satz in der vollständigen Gestalt auch aus der Arbeit von Carathéodory (Math. Ann. 64) und den Untersuchungen, die Herr Carathéodory neuerdings an diese Arbeit angeknüpft hat und die er soeben in den Pal. Circ. Mat. Rend. veröffentlicht. Vgl. über diesen Zusammenhang die eben genannte Arbeit und die in Verbindung mit ihr erscheinende kurze Note des Verf. in den Pal. Circ. Mat. Rend.

*) Vgl. meine inzwischen erschienene Note „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen", Nachr. der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Gött., math.-phys. Kl., 1910, §§ 4 und 5, insbesondere auch die Anmerkung zu Satz 11 daselbst.

$$\prod_{h=1}^{n} (c_0 + c_1 \varepsilon_h + c_2 \varepsilon_h^2 + \cdots + c_{n-1} \varepsilon_h^{n-1})$$

ist. Diese Haupteigenschaft gestattet das Spektrum der Matrix (1) unter Adjunktion der n^{ten} Einheitswurzeln rational zu bestimmen. Ihr zufolge ist nämlich die charakteristische Determinante (Säkulargleichung, Fundamentalgleichung) der Matrix (1) gleich:

$$\prod_{h=1}^{n} (c_0 - \lambda + c_1 \varepsilon_h + \cdots + c_{n-1} \varepsilon_h^{n-1}),$$

also bereits in Linearfaktoren zerlegt; das Spektrum einer endlichen Matrix aber ist nichts anderes als die Gesamtheit der Wurzeln ihrer Fundamentalgleichung:

Das Spektrum der Zyklante (1) *ist die Gesamtheit der Werte, die das zugehörige Polynom* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_{n-1} z^{n-1}$$

für diejenigen n *Stellen des Einheitskreises annimmt, die den* n n^{ten} *Einheitswurzeln entsprechen.*

Damit ist das Analogon zu Satz 5 (§ 2) für Zyklanten gewonnen: anstelle der n^{ten} Einheitswurzeln stehen dort die sämtlichen Stellen des Einheitskreises, das ist der einzige Unterschied. Es wäre leicht, auch den Betrachtungen von § 1 hier ihr Analogon zu geben; da jedoch davon weiterhin kein Gebrauch gemacht wird, sollen die rein formalen, sehr einfachen Beweise unterdrückt werden, und es sollen nur die Tatsachen ausgesprochen werden, aus denen man übrigens die „Haupteigenschaft" der Zyklanten in ähnlicher Weise folgern kann, wie im § 2 der Satz 5 aus den Sätzen von § 1 unmittelbar hervorging:

Der Summe und dem Produkt zweier Zyklanten entsprechen Summe und Produkt der zugehörigen Polynome $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades; dabei hat man Polynome höheren als* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Grades modulo* $(z^n - 1)$ *zu reduzieren, d. h.* z^n *überall durch* 1 *zu ersetzen. Die* n*-reihige Einheitsform* E_n *ist eine spezielle Zyklante und* 1 *das zugehörige Polynom. Eine Zyklante hat dann und nur dann eine Reziproke, wenn das zugehörige Polynom für keine der* n^{ten} *Einheitswurzeln verschwindet; diese Reziproke ist stets selbst eine Zyklante.**)

---

*) In der Terminologie der Frobeniusschen Gruppentheorie ergeben sich die Zyklanten als die Gruppenmatrizen bezw. Gruppendeterminanten der zyklischen Gruppe n^{ter} Ordnung, wie die L-Formen aus dem Zyklus unendlich hoher Ordnung (vgl. die Einleitung) hervorgehen. Auch die oben ausgesprochenen Sätze ergeben sich aus diesem Zusammenhange.

Es liegt der Gedanke nahe, aus diesen und anderen Eigenschaften der Zyklanten durch Grenzübergang (zu $n=\infty$) Eigenschaften der L-Formen und somit der Fourierreihen und analytischen Funktionen zu gewinnen; indessen bietet sich da zuerst die Schwierigkeit dar, daß mit wachsendem n die Größen $c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots$, d. h. der Teil der Matrix unterhalb der Hauptdiagonale sich nicht ohne weiteres einer bestimmten Grenze nähert. Die folgende Bemerkung wird zeigen, wie man durch eine passende Modifikation doch einen derartigen Grenzübergang bewerkstelligen kann. Ist nämlich eine Laurentreihe $\sum c_\alpha z^\alpha$ und die zugehörige L-Form C gegeben und handelt es sich darum, dieselbe durch Polynome wachsenden Grades bezw. die zugehörigen Zyklanten wachsender Reihenzahl zu approximieren, so wird man sehr einfach etwa folgendermaßen vorgehen können: man nimmt $\sum\limits_{\alpha=-n}^{+n} c_\alpha z^\alpha$ und bildet die zugehörige Zyklante, d. h. genauer die zu $\sum\limits_{\alpha=-n}^{+n} c_\alpha z^\alpha + (z^{2n+1}-1)\sum\limits_{\alpha=-n}^{-1} c_\alpha z^\alpha$ gehörige, $(2n+1)$-reihige Zyklante C_n, indem man bedenkt, daß in der zu einer ν-reihigen Zyklante gehörigen Funktion z^ν stets durch 1 ersetzt werden darf. Diese Zyklante hat keine Besonderheit außer der, daß ihre Reihenzahl ungerade ist; indessen sind ihre Parameter statt mit $c_0, \cdots, c_{2n}$ mit $c_{-n}, \cdots, c_{+n}$ bezeichnet:

$$
(3)\qquad \begin{pmatrix}
c_0 & c_1 & \cdot\;\cdot & c_{n-1} & c_n & c_{-n} & \cdot\;\cdot & c_{-2} & c_{-1} \\
c_{-1} & c_0 & \cdot\;\cdot & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & \cdot\;\cdot & c_{-3} & c_{-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & \cdot\;\cdot & c_0 & c_1 & c_2 & \cdot\;\cdot & c_n & c_{-n} \\
c_{-n} & c_{-(n-1)} & \cdot\;\cdot & c_{-1} & \boxed{c_0} & c_1 & \cdot\;\cdot & c_{n-1} & c_n \\
c_n & c_{-n} & \cdot\;\cdot & c_{-2} & c_{-1} & c_0 & \cdot\;\cdot & c_{n-2} & c_{n-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\
c_2 & c_3 & \cdot\;\cdot & c_{-n} & c_{-(n-1)} & c_{-(n-2)} & \cdot\;\cdot & c_0 & c_1 \\
c_1 & c_2 & \cdot\;\cdot & c_n & c_{-n} & c_{-(n-1)} & \cdot\;\cdot & c_{-1} & c_0
\end{pmatrix}.
$$

C_{n+1} geht aus C_n dadurch hervor, daß C_n auf allen Seiten geändert wird, sodaß seine Reihenzahl sich um zwei Einheiten auf $2n+3=2(n+1)+1$ erhöht. Läßt man jetzt n unbegrenzt wachsen, so geht C_n in die L-Form C über, während das zugehörige Polynom oder vielmehr die von $-n$ bis $+n$ erstreckte Summe in die zu C gehörige Laurentreihe übergeht. — Es ist wesentlich, zu bemerken, daß C_n *nicht* mit dem $(2n+1)$-reihigen Abschnitt der Form C identisch ist.

§ 5.

Zum Trägheitsgesetz der Fourierschen Reihen.

Durch Satz 8 wird die Frage nahegelegt, ob nicht auch die weitergehenden Betrachtungen aus der Algebra der quadratischen und Hermiteschen Formen von n Veränderlichen, die an das sogenannte „Trägheitsgesetz" anknüpfen, eine Übertragung auf L-Formen und somit auf Fourierreihen zulassen, und welche analytischen Tatsachen dem Trägheitsgesetze dabei entsprechen. Bekanntlich betrachtet man die Reihe der Abschnittsdeterminanten

$$1, \; c_{11}, \; c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}, \; \cdots$$

und insbesondere die Anzahl f_n der Zeichenfolgen und die Anzahl w_n der Zeichenwechsel in dieser Serie; diese Anzahlen sind invariant gegenüber linearen, homogenen, *reellen* Transformationen der betrachteten Form — um nur von quadratischen Formen zu reden — und zwar bzw. gleich der Anzahl der positiven und der negativen Quadrate in der Darstellung der Form als Summe von Quadraten; daß diese Anzahlen von der Wahl dieser Darstellung unabhängig sind, ist der Inhalt des Trägheitsgesetzes. Es handelt sich jetzt darum, diese Theorie auf die n-reihige Zyklante anzuwenden und damit den am Ende von § 4 angedeuteten Grenzübergang zu vollziehen.

Ist nämlich eine reelle quadratische oder Hermitesche L-Form C vorgelegt, d. h. ist

$$c_{-h} = \bar{c}_h,$$

so wird die am Ende von § 4 konstruierte $(2n+1)$-reihige approximierende Zyklante C_n eine Hermitesche, und somit wird das zugehörige Polynom

$$\begin{aligned} f_n(z) &= c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \bar{c}_n z^{n+1} + \cdots + \bar{c}_1 z^{2n} \\ &\equiv \bar{c}_n z^{-n} + \cdots + \bar{c}_1 z^{-1} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^{2n+1} \pmod{z^{2n+1}-1} \\ &= c_0 + (c_1 z + \bar{c}_1 \bar{z}) + \cdots + (c_n z^n + \bar{c}_n \bar{z}^n) \\ &= a_0 + a_1 \cos\varphi + \cdots + a_n \cos n\varphi + b_1 \sin\varphi + \cdots + b_n \sin n\varphi = f_n(\varphi), \end{aligned}$$

wenn $c_n = a_n + i b_n$, $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ gesetzt wird.

Der Hauptsatz von § 4 gestattet unmittelbar das Spektrum von C_n hinzuschreiben, das als Spektrum einer Hermiteschen Form von $2n+1$ Veränderlichen aus $2n+1$ reellen Werten besteht, nämlich

$$f(0), \; f\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right), \; f\left(2\,\frac{2\pi}{2n+1}\right), \; \cdots, \; f\left(2n\,\frac{2\pi}{2n+1}\right). \tag{4}$$

Nun ist das Spektrum die Gesamtheit der Wurzeln der Säkulargleichung der Form; transformiert man also die Form orthogonal*) auf eine Summe von Quadraten, so sind diese $2n+1$ Größen die Koeffizienten dieser Darstellung der Form als eine Summe von Quadraten, *und folglich ist gemäß der oben erwähnten algebraischen Theorie die Anzahl der positiven und der negativen unter den Größen* (4) *gleich der Zahl f'_n der Vorzeichenfolgen bezw. der Zahl w'_n der Vorzeichenwechsel in der Serie der $2n+2$ Abschnittsdeterminanten von C_n. ($f'_n + w'_n = 2n+1$.)*

Nun sind diese $2n+2$ Abschnittsdeterminanten von C_n nicht die $2n+2$ ersten Abschnittsdeterminanten der L-Form C; indessen die ersten $n+2$ unter ihnen sind genau die in Satz 8 hingeschriebenen, die weiteren n dagegen weichen von jenen ab.

Wird jetzt aber *die Voraussetzung gemacht, daß $f(\varphi)$ eine abbrechende Fourierreihe ist:*

$$(5)\qquad f(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + \cdots + a_p \cos p\varphi + b_1 \sin\varphi + \cdots + b_p \sin p\varphi,$$

so ersieht man aus dem Schema (3), daß auch von diesen weiteren n Abschnittsdeterminanten wegen der zahlreichen in das Schema eingehenden Nullen noch die meisten mit den entsprechenden von C übereinstimmen, sowie n die feste Gradzahl p übersteigt; und zwar werden nur die letzten p unter ihnen sich dieser Übereinstimmung entziehen; und mit wachsendem n kommen diese p letzten, da p eine feste Zahl ist, immer weniger in Betracht. *Daher ist das Verhältnis $f'_n : w'_n$ desto genauer gleich dem Verhältnis $f_{2n+1} : w_{2n+1}$ der charakteristischen Anzahlen des $(2n+1)^{\text{ten}}$ Abschnittes von C, je größer n ist.*

Nun ist andererseits wegen (4), sowie $n \geqq p$ geworden ist, $f_n(\varphi) = f(\varphi)$, und die Anzahlen der positiven und negativen unter den Werten

$$f_n\left(\frac{2\pi h}{2n+1}\right) = f\left(\frac{2\pi h}{2n+1}\right)$$

werden sich zwar selbst mit wachsendem n keinem Limes nähern; indessen das Verhältnis dieser beiden Zahlen nähert sich, wegen der Einteilung des Intervalles in *gleiche* Teile, dem Verhältnis der Gesamtlängen der Intervalle, in denen $f(\varphi)$ positiv, und derer, wo $f(\varphi)$ negativ ist. So kommt der Satz:

Satz 9. *Ist die Fourierreihe* (2) *aus Satz* 8 *eine abbrechende und ist f_n die Anzahl der Zeichenfolgen in der Serie der Determinanten* $1, \Delta_1, \cdots, \Delta_n$, *$w_n$ die Anzahl der Zeichenwechsel ($f_n + w_n = n$), so nähert sich mit*

---

*) Dabei ist zunächst an reelle quadratische Formen gedacht; bei der allgemeinen Hermiteschen Form hat man statt dessen „unitär-orthogonale" Transformationen zu betrachten, d. h. die Form nicht als Summe von Quadraten zueinander orthogonaler Linearformen darzustellen, sondern als Summe von Produkten konjugiert-imaginärer Linearformen $l_1 \bar{l}_1 + l_2 \bar{l}_2 + \cdots$, wo l_p zu $\bar{l}_q$ orthogonal ist.

wachsendem n das Verhältnis $f_n : w_n$ dem Verhältnis zwischen der Gesamtlänge der Intervalle, wo die durch die Reihe (2) dargestellte Funktion positiv ist, zu der Gesamtlänge derjenigen Intervalle, wo sie negativ ist;

$$f = \lim_{n=\infty}\left(2\pi\frac{f_n}{n}\right) \quad \textit{und} \quad w = \lim_{n=\infty}\left(2\pi\frac{w_n}{n}\right)$$

*existieren also und sind diese beiden Gesamtlängen selbst.**)

§ 6.

Das Ähnlichkeitsproblem.

Definition. Zwei beschränkte Matrizen A, B heißen ähnlich, wenn zwei andere beschränkte Matrizen U, V existieren, sodaß

$$AU = UB, \quad VA = BV, \quad UV = E, \quad VU = E,$$

also

$$U^{-1}AU = B, \quad V^{-1}BV = A$$

ist.

Sind A und B ähnlich, ist also $U^{-1}AU = B$ und $V^{-1}BV = A$, so ist für jedes λ

$$U^{-1}(A-\lambda E)U = U^{-1}AU - \lambda U^{-1}EU = B - \lambda E,$$
$$V^{-1}(B-\lambda E)V = V^{-1}BV - \lambda V^{-1}EV = A - \lambda E.$$

Besitzt nun die Form $A - \lambda E$ für irgend einen Wert von λ eine eindeutige beschränkte Reziproke R, so folgt durch Matrizenkalkül unmittelbar, daß auch $B - \lambda E$ in $U^{-1}RU$ für diesen Wert von λ eine solche besitzt — und umgekehrt, d. h. beide Formen haben dasselbe Spektrum.**) Auf L-Formen angewandt, bedeutet dies:

Satz 10. Sind zwei reguläre L-Formen ähnlich, so haben die zugehörigen analytischen Funktionen längs des Einheitskreises denselben Wertvorrat.

Es wird sich jetzt um die Umkehrung dieses Satzes handeln, d. h. um die Frage, inwieweit zwei reguläre L-Formen ähnlich sind, wenn die zugehörigen Funktionen auf dem Einheitskreise denselben Wertvorrat haben. Dabei soll zunächst (d. h. in den §§ 7 und 8) der Ausnahmefall ausgeschlossen

---

*) Wie bei Satz 8 ist hier durchweg vorausgesetzt, daß keine der Determinanten Δ_n verschwindet. Diese Einschränkung sowohl als auch die Beschränkung auf *abbrechende* Fourierreihen bedürfen zu ihrer Beseitigung einer und derselben algebraischen Betrachtung. Aber es scheint mir wesentlich, daß für diese Erweiterungen lediglich eine algebraische Betrachtung zu leisten übrig bleibt, wie überhaupt der hier gegebene Beweis von Satz 9 die Konvergenzbetrachtung wohl auf ihr äußerstes Minimum reduziert hat. Vgl. übrigens meine in der Anmerkung zu Satz 8 zitierte Note, die einen anderen umständlicheren, aber einen wesentlichen Punkt vielleicht genauer treffenden Beweis von Satz 9 enthält.

**) Vgl. auch Grundlagen § 8, Satz von der Invarianz des Spektrums.

werden, daß diese Funktionen ihren gesamten Wertvorrat oder Teile desselben auf dem Einheitskreise mehrfach annehmen. Für den Hauptbeweis in § 8 wird zuvor in § 7 das notwendige Material zusammengestellt, d. h. es werden diejenigen Matrizen, die als Transformierende (U, V etc.) bei dem Hauptbeweise gebraucht werden und die selbst keine L-Matrizen sind, betrachtet. Sie werden Ω-Matrizen genannt und besitzen für sich genommen auch ein gewisses Interesse; es soll jedoch hier nur das für § 8 Notwendige über sie zusammengestellt werden.

§ 7.

Die Ω-Matrizen und die eineindeutigen Abbildungen des Einheitskreises auf sich selbst.

$\omega(z) = \sum\limits_{(q)} \omega_q z^q$ sei eine Laurentreihe, die längs des Einheitskreises und in seiner beiderseitigen Nachbarschaft regulär ist und dort nirgends verschwindet; es sei ferner für $p = -\infty, \cdots, +\infty$

$$\{\omega(z)\}^p = \sum_{(q)} \omega_q^{(p)} z^q, \tag{1}$$

sodaß insbesondere $\omega_q^{(1)} = \omega_q$ ist, ferner $\omega_q^{(0)} = e_{0q}$, d. h. $= 0$ für $q \neq 0$, dagegen $= 1$ für $q = 0$. Dann bilde ich die Matrix $(\omega_q^{(p)})$ und nenne sie die zur Funktion $\omega(z)$ gehörige Ω-Matrix.

Definition. Eine Ω-Matrix ist eine Matrix von dem Typus

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \omega_{-2}^{(-1)} & \omega_{-1}^{(-1)} & \omega_0^{(-1)} & \omega_1^{(-1)} & \omega_2^{(-1)} & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \omega_{-2} & \omega_{-1} & \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdot \\ \cdot & \omega_{-2}^{(2)} & \omega_{-1}^{(2)} & \omega_0^{(2)} & \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

wo $\omega_q^{(p)}$ aus den $\omega_q^{(1)} = \omega_q$ vermöge (1) *gebildet ist.*

Es handelt sich zuerst darum, wie sich die Beschränktheit einer Ω-Matrix an der zugehörigen analytischen Funktion $\omega(z)$ äußert. Wegen der vorausgesetzten Regularität von $\omega(z)$ längs des Einheitskreises konvergiert $\sum \omega_q z^q$ speziell für $z = 1$, d. h. also $\sum \omega_q$, absolut, und ebenso $\sum \omega_q^{(p)}$ auch für $p = 2, 3, \cdots$. Da ferner $\omega(z)$ auf dem Einheitskreise keine Nullstelle haben soll, kann ein Gleiches auch für die negativen Werte von p behauptet werden. In der zugehörigen Matrix Ω konvergiert demnach die Summe der Elemente jeder einzelnen

Zeile absolut, und daher a fortiori die Quadratsumme der Elemente jeder Zeile; es ist daher gemäß der Schwarzschen Ungleichung gestattet, die Matrix $\Omega\overline{\Omega}' = L$ zu bilden. Wird jetzt weiter vorausgesetzt, daß $\omega(z)$ für $|z| = 1$ überall selbst den Betrag 1 habe, so behaupte ich zunächst, daß L eine L-Matrix ist. In der Tat folgt für alle z vom Betrage 1 aus der Bemerkung, daß für eine Größe η vom Betrage 1 stets $\eta\overline{\eta} = 1$, also $\overline{\eta} = \eta^{-1}$ ist,

$$\Big(\sum_{(n)} \omega_n^{(p)} z^n\Big)\Big(\sum_{(n)} \overline{\omega}_n^{(q)} z^{-n}\Big) = \{\omega(z)\}^p \{\overline{\omega(z)}\}^q$$
$$= \{\omega(z)\}^{p-q} \{\omega(z)\overline{\omega(z)}\}^q = \{\omega(z)\}^{p-q},$$

und durch Vergleichung der konstanten Glieder auf beiden Seiten

$$\sum_{(n)} \omega_n^{(p)} \overline{\omega}_n^{(q)} = \omega_0^{(p-q)} = \overline{\omega}_0^{(q-p)},$$

d. h. L ist tatsächlich eine L-Matrix, die mit den Größen $\omega_0^{(n)}$ der Mittelkolonne von Ω besetzt ist, und diese Größen sind paarweise konjugiert-imaginär, $\omega_0^{(-n)} = \overline{\omega}_0^{(n)}$. Und zwar ist L eine positiv-definite Hermitesche L-Form, weil sie die Gestalt $\Omega\overline{\Omega}'$ hat.

Es werde jetzt weiter vorausgesetzt, daß die Ableitung $\frac{d\omega}{dz}$ auf dem Einheitskreise keine Nullstelle besitze, also $\omega(z)$ keine „mehrfache Stelle". Es folgt daraus, daß $\omega(z)$ entweder auf der inneren, oder aber auf der äußeren Seite des Einheitskreises überall dem Betrage nach unter 1 gelegen ist; denn gesetzt es gebe auf einer und derselben Seite des Einheitskreises sowohl Stellen, wo der Betrag von $\omega(z)$ größer als 1 ist, als auch solche, wo dieser Betrag kleiner als 1 ist, so müßte es zwischen diesen beiden Klassen von Stellen einen Übergang, eine zum Einheitskreise transversal laufende Scheidelinie geben, längs deren $\omega(z)$ den Betrag 1 hat, also eine Stelle auf dem Einheitskreise, von der aus nach mindestens drei Richtungen Linienstücke ausgehen, auf denen $\omega(z)$ den Betrag 1 hat; das wäre aber eine mehrfache Stelle der Funktion $\omega(z)$. Sei nun $\mathfrak{C}$ ein solcher dem Einheitskreise benachbarter konzentrischer Kreis, auf dem $\omega(z)$ dem Betrage nach $\leqq M < 1$ ist, so ist gemäß dem Cauchyschen Integralsatz

$$\omega_0^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\{\omega(z)\}^n}{z}\, dz,$$

erstreckt über diesen Kreis $\mathfrak{C}$, und folglich

$$|\omega_0^{(n)}| \leqq \frac{1}{2\pi}\int \frac{M^n}{r}\, |dz| = M^n;$$

danach ist zunächst $\sum_{n=1}^{\infty} |\omega_0^{(n)}|$ konvergent; wegen $\omega_0^{(-n)} = \bar{\omega}_0^{(n)}$ folgt aber das Gleiche für $\sum_{n=-1}^{-\infty} |\omega_0^{(n)}|$; also ist $\sum_{(n)} |\omega_0^{(n)}|$ konvergent. Daraus folgt durch den beim Beweise von Satz 1 verwandten Schluß, daß L beschränkt ist (sogar absolut-beschränkt, was hier nicht interessiert); und daraus folgt schließlich, daß Ω beschränkt ist.*)

Satz 11. Ist $\omega(z)$ eine längs des Einheitskreises und in seiner beiderseitigen Umgebung eindeutige reguläre Funktion, die auf dem Einheitskreise selbst überall vom Betrage 1 *ist und deren Ableitung auf dem Einheitskreise nirgends verschwindet, so ist die zugehörige Ω-Matrix beschränkt.* —

Sind $\omega(z)$, $\sigma(z)$ zwei Funktionen, die beide den Voraussetzungen von Satz 11 genügen, so ist $\zeta(z) = \sigma\{\omega(z)\}$ wiederum eine Funktion, die diesen selben Voraussetzungen genügt. Sind Σ und Ω die zugehörigen Ω-Matrizen, so sind diese nach Satz 11 beschränkt, und es ist deshalb zufolge den Faltungssätzen $\Sigma\Omega = Z$, d. h. die Matrix $Z = \left(\sum_{(n)} \sigma_n^{(\alpha)} \omega_\beta^{(n)}\right)$ vorhanden und selbst beschränkt. Ich behaupte, Z ist selbst eine Ω-Matrix, und zwar die zu der Funktion $\zeta(z)$ gehörige.

Sieht man vorerst von Konvergenzbetrachtungen ab, so ist dies ohne weiteres evident. Denn es ist rein formal

$$[\zeta(z)]^\alpha = [\sigma\{\omega(z)\}]^\alpha = \left[\sum \sigma_n \{\omega(z)\}^n\right]^\alpha = \sum_{(n,\beta)} \sigma_n^{(\alpha)} \left(\sum \omega_\beta^{(n)} z^\beta\right)$$
$$= \sum_\beta \left(\sum_n \sigma_n^{(\alpha)} \omega_\beta^{(n)}\right) z^\beta;$$

d. h. Z ist die zu $\zeta(z)$ gehörige Ω-Matrix. Indessen, was die hierbei vorzunehmenden Umordnungen von Doppelreihen betrifft, so ist man hier nicht in der bequemen Lage, wie bei Satz 2, sich auf die Lehrbücher der Funktionentheorie berufen zu können; andererseits ist es nicht selbstverständlich, daß die hier auftretenden Doppelreihen absolut konvergieren; denn eine absolut-konvergente Reihe von absolut konvergenten Reihen braucht selbst nicht absolut zu konvergieren**). Es ist deshalb notwendig, den folgenden einfachen Hilfssatz einzuschalten:

---

*) Vgl. Grundlagen § 3.

**) Z. B. die Doppelreihe $(1-1)+(1-1)+\cdots$ ist eine Summe von lauter abbrechenden, also absolut konvergenten Reihen, und die Summe der Einzelsummen ist $0+0+\cdots$, also ebenfalls konvergent, während die Doppelreihe als solche nicht absolut konvergiert.

Hilfssatz aus der Theorie der Laurentreihen. Sind $\omega(z)$, $\sigma(z)$ zwei längs des Einheitskreises eindeutige, reguläre Funktionen, die auf dem Einheitskreise durchweg den Betrag 1 haben, so geht die Laurentreihe für $\zeta(z) = \sigma\{\omega(z)\}$ aus den Laurentreihen der beiden einzelnen Funktionen durch erlaubte Umordnung hervor.

Zum Beweise braucht man nur zu bemerken, daß $\Sigma\sigma_n$ nach Voraussetzung absolut konvergiert und daß daher

$$\sum \sigma_n \frac{\{\omega(z)\}^n}{z^{\beta+1}}$$

absolut und gleichmäßig für alle $|z| = 1$ konvergiert, da z und mit ihm $z^{\beta+1}$ sowohl als $\{\omega(z)\}^n$ vom Betrage 1 ist und den Grad der Konvergenz also gar nicht beeinflußt. Es ist daher erlaubt, diese Reihe gliedweise längs des Einheitskreises zu integrieren:

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sum\limits_{(n)} \sigma_n \{\omega(z)\}^n}{z^{\beta+1}}\, dz = \sum_{(n)} \sigma_n \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\{\omega(z)\}^n}{z^{\beta+1}}\, dz,$$

d. h.

$$\zeta_\beta = \sum \sigma_n\, \omega_\beta^{(n)}$$

ist der Koeffizient von z^β in der Laurentreihe für $\zeta(z)$.

Wendet man diesen Hilfssatz auf unsere beiden obigen Funktionen $\{\sigma(z)\}^\alpha$ und $\omega(z)$ an, so erkennt man, daß $\left(\sum\limits_{(n)} \sigma_n^{(\alpha)}\, \omega_\beta^{(n)}\right) = \left(\zeta_\beta^{(\alpha)}\right)$ die zu $\zeta(z)$ gehörige Ω-Matrix ist, q. e. d. Daher:

Satz 12. Sind $\omega(z)$, $\sigma(z)$ zwei Funktionen, die den Voraussetzungen von Satz 11 genügen, so genügt $\zeta(z) = \sigma\{\omega(z)\}$ eben diesen Voraussetzungen, und die zu ζ gehörige Ω-Matrix ist das Produkt der zu ω und σ gehörigen Ω-Matrizen, $\mathrm{Z} = \Sigma \cdot \Omega$.

Satz 13. Die Einheitsmatrix E ist eine Ω-Matrix und gehört zu der Funktion $\omega(z) \equiv 1$.

Die Voraussetzung von Satz 11 involviert nicht, daß $\omega(z)$ auf dem Einheitskreise jeden Wert vom Betrage 1 nur einmal annimmt. Die Funktion z^2 z. B. hat für $|z| = 1$ überall den Betrag 1, ihre Ableitung hat dort überall den Betrag 2, ist also von 0 wesentlich verschieden, und trotzdem nimmt z^2 jeden Wert vom Betrage 1 an zwei (diametral einander gegenüberliegenden) Stellen des Einheitskreises an. Es soll jetzt jedoch endlich die Voraussetzung hinzugefügt werden, daß $\omega(z)$ jeden Wert vom Betrag 1 höchstens einmal annimmt; daß sie *jeden* Wert vom Betrage 1 dann tatsächlich genau einmal annimmt, ist eine einfache Folge davon. $\omega(z)$ bedeutet alsdann eine eineindeutige, analytische Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst. Die zu $\omega(z)$ inverse Funktion $\sigma(z)$ ist genau von demselben Charakter. Seien Ω, Σ die zugehörigen Ω-Matrizen, so werden also nach Satz 11 beide beschränkt sein, und wegen Satz 12 wird ihr Produkt $\Omega\Sigma$ die zu $\omega\{\sigma(z)\}=1$ gehörige Ω-Matrix sein, d. h., nach Satz 13, die Einheitsmatrix; und ebenso wird $\Sigma\Omega = E$ sein:

Satz 14. Ist $\omega(z)$ eine längs des Einheitskreises und in seiner beiderseitigen Umgebung eindeutige analytische Funktion, die auf dem Einheitskreise überall vom Betrage 1 *ist und daselbst jeden Wert vom Betrage* 1 *höchstens einmal und folglich genau einmal annimmt, so besitzt die zugehörige Ω-Matrix eine eindeutige beschränkte Reziproke, und zwar ist diese selbst eine Ω-Matrix, und die zu ihr gehörige Funktion ist die zu $\omega(z)$ inverse Funktion.**)

Satz 14 involviert die Tatsache, daß für eine reguläre Ω-Matrix, die eine eindeutige beschränkte Reziproke hat, diese Reziproke selbst eine Ω-Matrix ist.**)

§ 8.

Die Ähnlichkeit regulärer L-Formen mit einfachem Spektrum.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen gestatten unmittelbar zu beweisen, daß jede den Voraussetzungen von Satz 14 genügende Funktion $\omega(z)$, bezw. die zu ihr gehörige L-Form ähnlich ist der zu $f(z)=z$ gehörigen L-Form, die selbst den Voraussetzungen von Satz 14 genügt. Es kann dies auch so formuliert werden:

Satz 15. Genügen zwei Funktionen den Voraussetzungen von Satz 14 so sind die zugehörigen L-Formen ähnlich.

Denn bedeute allgemein $[\varphi(z)]$ die zu $\varphi(z)$ gehörige L-Form, so ist

$$[z]\Omega = \Big(\sum_{(\alpha} e_{p,\alpha-1}\,\omega_q^{(\alpha)}\Big) = \big(\omega_q^{(p+1)}\big),$$

andererseits ist

$$\{\omega(z)\}^p\,\omega(z) = \{\omega(z)\}^{p+1},$$

woraus durch Vergleichung des beiderseitigen Koeffizienten von z^q hervorgeht

*) Dieser Satz in Verbindung mit der Auflösungsformel meiner Note über die Jacobische Transformation (Gött. Nachr. 1907) oder derjenigen von E. Schmidt (Rend. di Pal. 1908) enthält die Lösung der Aufgabe, die inverse Funktion von $\omega(z)$ in eine Laurentreihe zu entwickeln. Auch kann man diese Methode auf Fourierreihen von monoton wachsenden und daher eindeutig invertierbaren Funktionen $f(\varphi)$ übetragen, indem man $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\omega=\cos f+i\sin f$ setzt.

**) Die zu der Funktion z^n gehörige Ω-Matrix hat zwar eine beschränkte hintere Reziproke, nämlich $\overline{\Omega}'$, jedoch keine vordere.

$$\sum_{(\alpha)}' \omega_{\alpha}^{(p)} \omega_{q-\alpha}^{(1)} = \omega_q^{(p+1)},$$

wofür man schreiben kann

$$\Omega[\omega(z)] = \left(\omega_q^{(p-1)}\right),$$

sodaß endlich

$$[z]\Omega = \Omega[\omega(z)]$$

folgt; und da Ω nach Satz 14 eine eindeutige, beschränkte Reziproke Σ besitzt, sind $[z]$ und $[\omega(z)]$ damit als ähnlich erwiesen. Übrigens würde nach Analogie auch für die in Satz 14 auftretende inverse Funktion $\sigma(z)$ und die zugehörige Matrix Σ folgen

$$[\omega(z)]\Sigma = \Sigma[z],$$

während $\Sigma\Omega = \Omega\Sigma = E$ in Satz 14 enthalten ist.

Definition. λ heiße ein n-facher Spektrumswert der L-Form $L = [f(z)]$, wenn die zugehörige Funktion $f(z)$ den Wert λ auf dem Einheitskreise n Mal annimmt, unter Berücksichtigung der Vielfachheit, mit der dies an jeder einzelnen Stelle geschieht.

Auf Grund dieser Definition kann Satz 15 so formuliert werden: Zwei reguläre L-Formen, die den Einheitskreis selbst zum einfachen Spektrum haben, sind ähnlich.

Es ist leicht, hieraus die Lösung des Ähnlichkeitsproblems beliebiger L-Formen abzuleiten, wenn man nur den Ausnahmefall mehrfacher Spektren ausschließt. Sind nämlich $f(z) = \Sigma a_n z^n$, $g(z) = \Sigma b_n z^n$ irgend zwei längs des Einheitskreises reguläre, eineindeutige Funktionen, die daselbst genau dieselben Werte und jeden — von diskreten Werten abgesehen — nur einmal annehmen, lediglich in verschiedener Verteilung, aber nun nicht mehr notwendig Werte vom Betrage 1, so ordnet sich jeder Stelle z eine andere ω eindeutig zu, sodaß $f(z) = g(\omega)$ ist; so wird ω als eine analytische Funktion von z definiert, als eine eineindeutige Abbildung des Einheitskreises auf sich selbst, die allen Voraussetzungen von Satz 14 genügt. Ist Ω die zugehörige Ω-Matrix, so ist also

$$\Omega^{-1}[z]\Omega = [\omega(z)].$$

Satz 2 gestattet hieraus zu folgern, daß auch jede ganze rationale Verbindung $h([z])$ ähnlich ist zu $h([\omega(z)])$; denn wenn allgemein

$$W^{-1}A_1 W = B_1, \qquad W^{-1}A_2 W = B_2$$

ist, so ist auch

$$\begin{aligned} W^{-1}(A_1 + A_2)W &= W^{-1}A_1 W + W^{-1}A_2 W = B_1 + B_2, \\ W^{-1}A_1 A_2 W &= W^{-1}A_1 W W^{-1}A_2 W = B_1 B_2, \end{aligned}$$

und folglich ist auch für jede ganze rationale Verbindung $h(x) = \Sigma a_n x^n$

$$W^{-1}h(A_1)W = h(B_1);$$

und dies überträgt sich unmittelbar auch auf die absolut und gleichmäßig konvergente Funktion $\Sigma a_n z^n = f(z)$, auch wenn sie keine ganze rationale Funktion ist. So folgt, daß $[f(z)]$ ähnlich ist zu $[f\{\omega(z)\}]$; dieses ist aber gemäß der Konstruktion von $\omega(z)$ nichts anderes als $[g(z)]$.

*Satz 16 (Ähnlichkeitstheorem der regulären L-Formen). Zwei reguläre L-Formen, die das nämliche einfache Spektrum besitzen, sind ähnlich. Dabei wird ein Spektrum als einfach angesehen, wenn die einzelnen Spektrumswerte, abgesehen von einer endlichen Anzahl unter ihnen, einfach sind.**)

---

*) Das soll heißen, daß das Spektrum eine Kurve sein darf, die sich selbst durchdringt; nur darf sie nicht hin und her durchlaufen werden (wie es z. B. bei den zu reellen, symmetrischen L-Formen gehörigen Laurentreihen der Fall ist), oder mehrmals umlaufen werden (wie es z. B. bei der Funktion z^2 geschieht).