Über ein Analogon der Wronskischen Determinante bei Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

Hängen m hinreichend oft differentiierbare Funktionen

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x) \tag{1}$$

nur von einer Variabel x ab, so besteht bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Unabhängigkeit des Funktionensystems (1) im allgemeinen darin, daß die Wronskische Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_m' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & \cdots & f_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

nicht identisch verschwindet. Es scheint aber noch nicht bemerkt worden zu sein, daß auch im Falle, wo die Funktionen (1) von mehreren Variablen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

abhängen, ganz analoge Determinanten gebildet werden können, in denen noch gewisse Unbestimmten vorkommen, und die dann für das Funktionensystem (1) dieselbe Bedeutung besitzen, wie die Wronskische Determinante für den Fall einer Variabel. Für den Fall einer Variabel gehen auch unsere Determinanten direkt in die Wronskische über.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ n ganze nicht negative von einander verschiedene Zahlen und man setze allgemein $x_k = u_{\alpha_k}$. Ist i eine von den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ verschiedene ganze nicht negative Zahl, so soll unter u_i eine neue Unbestimmte verstanden werden, so daß wir unendlich viele Variabeln haben

$$u_0, u_1, \ldots$$

von denen n, abgesehen von der Reihenfolge, mit $x_1, \ldots, x_n$ übereinstimmen. Wir betrachten nun den Differentiationsprozeß

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + u_4 \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots = \frac{\partial}{\partial u_0} + \sum_{i=1}^{i=\infty} u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i},$$

wo natürlich bei der Anwendung auf bestimmte Funktionen stets nur endlich viele Glieder in Betracht kommen. Ersetzen wir in den Funktionen $f(x)$ die Variabeln x_k durch die entsprechenden Variabeln u_{α_k} und bezeichnen die so entstehenden Funktionen durch $f_i(u)$, so lautet unsere Determinante

$$\Delta(f_i(u)) = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) & \ldots & f_m(u) \\ \Pi f_1(u) & \Pi f_2(u) & & \Pi f_m(u) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Pi^{m-1} f_1(u) & \Pi^{m-1} f_2(u) & \ldots & \Pi^{m-1} f_m(u) \end{vmatrix}$$

Es besteht nun der Satz, daß für die Existenz einer identischen linearen Relation mit konstanten Koeffizienten zwischen den Funktionen (1) das identische Verschwinden der obigen Determinante in allen u_k *notwendig* und, für den Fall analytischer Funktionen, auch *hinreichend* ist. Für nicht analytische Funktionen bedarf der Satz, ebenso wie im Falle einer Variabel für die Wronskische Determinante, noch weiterer Präzisierung.

Alle Unbestimmten u_i, die nicht in den Funktionen $f_i(u)$ vorkommen, kommen in der Determinante $\Delta(f_i(u))$ ganz rational vor. Entwickelt man nach Potenzprodukten dieser Unbestimmten, so zerfällt die Bedingung des identischen Verschwindens von $\Delta(f_i(u))$ in mehrere Bedingungen, die sich auf die in $f(u)$ vorkommenden u_i, d. h., auf die Variabeln x_i beziehen. Es ist jedoch bequemer, mit der Determinante $\Delta(f_i(u))$ in der unentwickelten Form zu operieren, da sich dann die ergänzenden Bedingungen im Falle nicht analytischer Funktionen besonders prägnant aussprechen lassen.

Wählt man die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ auf verschiedene Weisen aus, so entstehen dabei unendlich viele verschiedene Determinanten $\Delta(f_i(u))$. Doch es ergeben sich dabei, wie man sofort einsieht, nur endlich viele verschiedene Systeme von Bedingungsgleichungen in den ursprünglichen Variabeln $x_1, \ldots, x_n$. Betrachten wir z. B. ein System von zwei Funktionen f_1, f_2. Hängen sie von zwei Variabeln x_1, x_2 ab, so sei etwa $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$. Dann entsteht

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots; \quad \Delta(f_i(u)) = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_0} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_0} \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \\ \frac{\partial f_1(u)}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2(u)}{\partial u_1} \end{vmatrix}.$$

Wir erhalten daher als Bedingungsgleichungen

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. die Wronskischen Determinanten in bezug auf x_1 bzw. x_2 müssen verschwinden. Und auf diese Bedingungen kommt man bei jeder Wahl der Zahlen α_1, α_2.

Nehmen wir an, daß die Funktionen f_1, f_2 von drei Variabeln x_1, x_2, x_3 abhängen. Setzt man dann $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$, $x_3 = u_3$, so kommen wir wieder auf die Wronskischen Determinanten in bezug auf x_1 bzw. x_2 bzw. x_3, also auf drei Bedingungen. Setzen wir aber $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$, $x_3 = u_2$, so erhalten wir für Π: $\Pi = \frac{\partial}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$, oder, wenn wir lieber u_0, u_1, u_2 wieder durch x_1, x_2, x_3 ersetzen,

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Für Δ entsteht dann

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

und daraus, da u_3 eine Unbestimmte ist, die folgenden Bedingungen

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir die Wronskischen Determinanten von f_1, f_2 in bezug auf x_1, x_2, x_3 bzw. durch W_1, W_2, W_3, so lauten die letzten Bedingungen

$$W_3 = 0, \qquad W_1 + x_3 W_2 = 0.$$

Setzen wir $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$, $x_3 = u_3$, so erhalten wir für unseren Prozeß in den x geschrieben

$$\Pi = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Und daraus folgt weiter für Δ

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + u_4 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{vmatrix} = x_2 W_1 + x_3 W_2 + u_4 W_3.$$

Und so entstehen die Bedingungen

$$x_2 W_1 + x_3 W_2 = 0, \qquad W_3 = 0.$$

Nehmen wir nun an, daß f_1, f_2 von n Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abhängen, und bezeichnen wir die Wronskischen Determinanten in bezug auf $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bzw. durch $W_1, W_2, \ldots, W_n$, so erhalten wir aus unserem Satz, wenn wir z. B.

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_3, \quad x_3 = u_5, \ldots$$

setzen, die n Bedingungen

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \ldots, W_n = 0. \tag{2}$$

Setzen wir aber z. B.

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \ldots, x_n = u_n,$$

so entstehen die zwei Bedingungen

$$x_2 W_1 + x_3 W_2 + \ldots + x_n W_{n-1} = 0, \quad W_n = 0. \tag{3}$$

Es ist nicht schwer, aus den Bedingungen (3) die Bedingungen (2) auch direkt abzuleiten, allerdings unter Heranziehung der Integrale der entsprechenden Differentialgleichungen. Man kann z. B. so schließen (wir beschränken uns der Kürze wegen auf analytische Funktionen):

Aus $W_n = 0$ folgt die Darstellung von f_1, f_2 in der Form

$$f_1 = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad f_2 = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Bezeichnen wir die Wronskischen Determinanten der Funktionen $\varphi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \varphi_2(x_1, \ldots, x_{n-1})$ bzw. durch $W_1', \ldots, W_{n-1}'$, so folgt aus der ersten der Gleichungen (3) einer bekannten Eigenschaft der Wronskischen Determinanten ($W_1 = \psi^2 W_1', \ldots, W_{n-1} = \psi^2 W_{n-1}'$) zufolge

$$x_2 W_1' + x_3 W_2' + \ldots + x_n W_{n-1}' = 0.$$

Da hier aber W_i' von x_n unabhängig sind, folgt $W_{n-1}' = 0$, daher auch $W_{n-1} = 0$, und so kann man weiter schließen.

Betrachten wir noch als ein anderes Beispiel den Fall von drei Funktionen f_1, f_2, f_3 von zwei Variabeln x_1, x_2. Setzen wir $x_1 = u_0, x_2 = u_1$, so entstehen aus Δ, wenn man nach Potenzprodukten der Unbestimmten u_2, u_3 entwickelt, fünf Bedingungsgleichungen, nämlich, in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$1.\ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = 0, \qquad 2.\ \ 2\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{pmatrix} = 0, \qquad 3.\ \ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

und die zwei weiteren, die aus 1. und 2. entstehen, wenn man in ihnen die Rollen von x_1 und x_2 vertauscht.

Genau dieselben Bedingungen ergeben sich, wenn man $x_1 = u_0$, $x_2 = u_1$ setzt. —

Um unsere Behauptungen über Δ zu beweisen, stellen wir vor Allem die folgende Tatsache auf:

Es sei Ω ein Gebiet, das in den Definitionsbereichen aller Funktionen f_i enthalten ist und von der Eigenschaft, daß mit jedem Punkt von Ω auch eine gewisse n-dimensionale Umgebung dieses Punktes in Ω liegt. Von den Funktionen f_i nehmen wir nur an, daß sie $(m-1)$-mal differentiierbar sind. Es sei nun Δ identisch gleich 0, solange (x_i) oder, was dasselbe ist, (u_{α_i}) das Gebiet Ω beschreibt, dagegen sei die Determinante

$$\Delta^{(m)} = \begin{vmatrix} f_1(u) & f_2(u) \dots & f_{m-1}(u) \\ \Pi f_1(u) & \Pi f_2(u) \dots & \Pi f_{m-1}(u) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi^{m-2} f_1(u) & \Pi^{m-2} f_2(u) & \Pi^{m-2} f_{m-1}(u) \end{vmatrix}$$

in keinem Punkte des Gebietes Ω identisch in den neu eingeführten von den u_{α_i} verschiedenen Unbestimmten u_i gleich 0. Dann besteht zwischen den Funktionen $f_i(x)$ eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten, die nicht sämtlich verschwinden:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_m f_m = 0,$$

und zwar identisch im ganzen Gebiet Ω.

Da $\Delta^{(m)}$ nirgends in Ω verschwindet, so besitzt das Gleichungssystem

$$(4) \quad \begin{cases} C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_{m-1} f_{m-1} = f_m, \\ C_1 \Pi f_1 + C_2 \Pi f_2 + \dots + C_{m-1} \Pi f_{m-1} = \Pi f_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 \Pi^{m-2} f_1 + C_2 \Pi^{m-2} f_2 + \dots + C_{m-1} \Pi^{m-2} f_{m-1} = \Pi^{m-2} f_m \end{cases}$$

in jedem Punkte von Ω eine eindeutig bestimmte Lösung

$$C_1(u),\ C_2(u), \dots, C_{m-1}(u).$$

Die Funktionen $C_i(u)$ sind jedenfalls differentiierbar. In jedem Punkt von Ω werden sie zu vollständig bestimmten Funktionen der *neu eingeführten* Unbestimmten u. Aus $\Delta = 0$, $\Delta^{(m)} \neq 0$ folgt weiter

$$(5) \quad C_1 \Pi^{m-1} f_1 + C_2 \Pi^{m-1} f_2 + \dots + C_{m-1} \Pi^{m-1} f_{m-1} = \Pi^{m-1} f_m.$$

Wenden wir nun auf die Gleichungen (4) den Prozeß Π an, so folgt unter Benutzung von (4) und (5):

$$(6) \quad \begin{cases} (\Pi C_1) f_1 + (\Pi C_2) f_2 + \dots + (\Pi C_{m-1}) f_{m-1} = 0, \\ (\Pi C_1) \Pi f_1 + (\Pi C_2) \Pi f_2 + \dots + (\Pi C_{m-1}) \Pi f_{m-1} = 0, \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (\Pi C_1) \Pi^{m-2} f_1 + (\Pi C_2) \Pi^{m-2} f_2 + \dots + (\Pi C_{m-1}) \Pi^{m-2} f_{m-1} = 0. \end{cases}$$

Da aber $\Delta^{(n)}$ in jedem Punkte von Ω von 0 verschieden ist, so folgt hieraus

$$\Pi C_1 = 0,\ \Pi C_2 = 0, \ldots, \Pi C_{m-1} = 0.$$

Hieraus *folgt aber, daß alle C_i konstante Zahlen sind.* Denn es sei etwa u_k eine Variable, deren Index k möglichst groß ist, und von der irgend ein C, etwa C_i wirklich abhängt. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial C_i}{\partial u_0} + u_2 \frac{\partial C_i}{\partial u_0} + \ldots + u_{k+1} \frac{\partial C_i}{\partial u_k} = 0$$

folgt aber für $k > 0$, da in ihr u_{k+1} nur im Gliede $u_{k+1} \frac{\partial C_i}{\partial u_k}$ und nur linear vorkommt, daß $\frac{\partial C_i}{\partial u_k} = 0$ ist, entgegen der Annahme. Und wenn $k = 0$ wäre, würde sich ΠC_i nur auf $\frac{\partial C_i}{\partial u_0}$ reduzieren, was wiederum der Annahme widerspricht.

Aus der hiermit bewiesenen Tatsache folgern wir weiter:

Verschwindet Δ in Ω identisch, so gibt es in Ω wenigstens einen Punkt, in dessen Umgebung zwischen den f_i eine lineare Relation mit konstanten nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten besteht.

Ist $m = 1$, so ist die Behauptung selbstverständlich. Wir nehmen sie für alle kleineren m als bewiesen an. Dann können wir annehmen, daß $\Delta^{(m)}$ in Ω nicht identisch verschwindet, da sonst bereits zwischen $f_1, \ldots, f_{m-1}$ eine lineare Relation aufgestellt werden könnte. Dann aber gibt es in Ω wenigstens einen Punkt (x_i^0), in dem $\Delta^{(m)}$ nicht verschwindet. Da $\Delta^{(m)}$ stetig (weil differentiierbar) ist, so ist $\Delta^{(m)}$ auch in einer gewissen Umgebung von (x_i^0) von 0 verschieden, und die vorhin bewiesene Tatsache ist anwendbar.

Sind daher $f_1, \ldots, f_m$ analytische Funktionen, so folgt aus dem identischen Verschwinden von Δ stets die lineare Abhängigkeit der f_i.

Für nicht analytische Funktionen braucht dieser Satz aber nicht unter allen Umständen richtig zu sein, ebenso wie im Falle der Funktionen einer Variabel. Für den Fall einer Variabel sind jedoch von Peano, M. Bôcher und D. R. Curtiss[1]) verschiedene ergänzende Bedingungen aufgestellt, unter denen man aus dem identischen Verschwinden der Wronskischen Determinante in einem Intervall auf die lineare Abhängigkeit der Funktionen in diesem Intervall schließen kann. Viele dieser Bedingungen lassen sich ohne weiteres auch auf unseren Fall übertragen, wenn man nur jede Differentiation durch die Anwendung des Π-Prozesses ersetzt. So gilt z. B. der Satz, daß die Bedingung $\Delta \equiv 0$ hinreichend ist, wenn in keinem Punkt

[1]) Vgl. die Literaturangaben in der Abhandlung von Curtiss, Math. Ann. Bd. 65 (1908), S. 282.

von Ω alle m Determinanten $\Delta^{(i)}$ zugleich verschwinden. — Unter $\Delta^{(i)}$ verstehen wir eine ganz analog wie Δ, aber für $f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1}, \ldots, f_m$ gebildete Determinante. — Über Ω müssen wir dabei voraussetzen, daß mit jedem Punkte von Ω auch seine gewisse Umgebung zu Ω gehört und daß zwei beliebige Punkte von Ω durch einen Polygonzug mit endlich vielen Ecken verbunden werden können, dessen sämtliche Punkte wiederum in Ω liegen.

Daß aber das identische Verschwinden von Δ für die Existenz einer identischen linearen Relation mit konstanten nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten

$$c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m = 0$$

notwendig ist, ist klar. Denn ist etwa $c_1 \neq 0$, so multiplizieren wir die erste Spalte in Δ mit c_1 und addieren zu ihr die resp. mit $c_2, \ldots, c_m$ multiplizierten weiteren Spalten von Δ. Dann ergibt sich, da Π ein linearer additiver Prozeß ist, daß alle Elemente der ersten Spalte in $c_1 \Delta$ identisch verschwinden. —

Unser Beweis beruht hauptsächlich auf der Eigenschaft des Prozesses Π, daß die Anwendung dieses Prozesses auf irgendeine Funktion dann und nur dann identisch 0 ergibt, wenn diese Funktion eine Konstante (in bezug auf die Variabeln u_i) ist. — Aus dieser Eigenschaft folgt z. B., daß man die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine differentiierbare Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine Konstante ist, in zwei folgenden Bedingungsgleichungen zusammenfassen kann:

$$(7) \qquad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

die also mit den Gleichungen

$$(7') \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

äquivalent sind. Man kann diese Äquivalenz auch wie folgt direkt zeigen: Man wende auf die erste der Gleichungen (7) den Prozeß $\frac{\partial}{\partial x_n}$, auf die zweite den Prozeß

$$(8) \qquad x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$$

und subtrahiere die Resultate voneinander. Dann entsteht

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Man wende nun auf diese letzte Gleichung den Prozeß (8) und subtrahiere von der nach x_{n-1} differentiierten ersten Gleichung (7). Dann folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}} = 0.$$

Und so kann man weiter schließen.

Nun kann man den Prozeß Π auf sehr viele Weisen abändern, so daß er die hier für uns in Betracht kommende Eigenschaft behält. Sind z. B. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ unendlich viele von 0 verschiedene Konstanten, so hat auch der Prozeß

$$c_1 u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} + c_2 u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + c_3 u_3 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots \tag{9}$$

die Eigenschaft, daß seine Anwendung auf irgendeine Funktion dann und nur dann 0 ergibt, wenn diese Funktion konstant in bezug auf die u ist. Und dieselbe Eigenschaft besitzt der allgemeinere Prozeß:

$$\varphi_1(u_1)\frac{\partial}{\partial u_0} + \varphi_2(u_2)\frac{\partial}{\partial u_2} + \varphi_3(u_3)\frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots, \tag{10}$$

wo $\varphi_1(u_1)$, $\varphi_2(u_2), \ldots$ beliebige hinreichend oft differentiierbare Funktionen sind, von denen keine in irgendeinem Intervall konstant ist. Daher können wir in unserer Determinante Δ den Prozeß Π durch irgendeinen Prozeß von der Form (9) oder allgemeiner von der Form (10) ersetzen, und unsere Sätze bleiben, wie eine kleine Modifikation des Beweises zeigt, gültig. So können wir durch geeignete Wahl der Funktionen $\varphi(u)$ unseren Bedingungen immer neue und neue Formen geben.

Zum Schlusse sei noch kurz erwähnt, daß unsere obige Bemerkung über die Äquivalenz der Bedingungen (7) und (7′) dazu angewandt werden kann, die Bedingungen für den Rang der Funktionalmatrix in eine kleinere Anzahl von Bedingungen zusammenzufassen. Es seien z. B. $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ zwei differentiierbare Funktionen und es sei z. B. wenigstens eine der Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ in der Umgebung eines Punktes P von 0 verschieden. Dann lassen sich die Bedingungen dafür, daß der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, & \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

in der Umgebung von P gleich 1 ist, einfach wie folgt schreiben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0, \quad x_3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix} + \ldots + x_n \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Und ganz analog lassen sich die Bedingungen im Falle beliebig vieler Funktionen und beliebigen Ranges zusammenfassen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1918.)