

**7. Zur Theorie  
der Lichtabsorption in Metallen und Nichtleitern;  
von George Jaffé.**

A. Metalle.

Die Drudesche Theorie der optischen Erscheinungen in Metallen<sup>1)</sup> nimmt an, daß außer den quasielastisch gebundenen Ionen, welche man zur Erklärung der Dispersion und Absorption in anderen Stoffen heranzieht, in Metallen mindestens noch eine Art von frei beweglichen Ionen vorhanden ist. Von diesen „Leitungs“-Ionen wird weiter angenommen, daß sie bei ihrer Bewegung einen Reibungswiderstand erfahren, der proportional der Geschwindigkeit ist und bei den periodischen Bewegungen im Lichte — unabhängig von der Periode desselben — den gleichen Betrag hat wie bei konstanten Strömen. Diese letzte Annahme kann nur als provisorisch angesehen werden; denn, nimmt man den Widerstand, welchen die Ionen bei ihrer Bewegung erfahren, als durch Stöße erzeugt an (wie das ja auch die Drudesche Theorie der Leitfähigkeit tut), so läßt sich nicht von vornherein übersehen, wie sich der Widerstand ändert, wenn bei schnell periodischen Vorgängen die Periode der Bewegung vergleichbar wird mit der Zeit, welche im Mittel zwischen zwei Stößen vergeht. In der Tat hat Drude selbst Abweichungen, die sich zwischen seiner Theorie und der Erfahrung ergaben, auf die Unzulässigkeit der eben charakterisierten Annahme zurückgeführt.<sup>2)</sup>

Im folgenden soll die Annahme einer mit der Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft aufgegeben werden, und es soll die elektrische Strömung, die sich in einem Metall unter dem Einfluß einer periodischen elektrischen Kraft ausbildet,

1) P. Drude, Physikal. Zeitschr. 1. p. 161. 1900; Ann. d. Phys. 14. p. 936. 1904; Lehrbuch der Optik. 3. Aufl. p. 386.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 940. 944. 1904.

unter der Voraussetzung berechnet werden, daß die Reibung nur durch Stöße erzeugt wird. Diese Berechnung läßt sich mit Hilfe der Methode durchführen, welche Lorentz in seiner Elektronentheorie der Metalle ausgebildet hat<sup>1)</sup>; es sollen darum auch dieselben Voraussetzungen wie in der Lorentz'schen Theorie eingeführt werden.

Wir nehmen also an, daß in Metallen nur eine Art von frei beweglichen Ionen, nämlich Elektronen, vorhanden ist; die Elektronen sowohl, wie die Metallatome, sollen sich wie ideal elastische Kugeln verhalten und die Masse der Metallatome so groß sein, daß sie als unbeweglich angesehen werden dürfen. Ferner sollen die Zusammenstöße zwischen Elektronen vernachlässigt, also nur Stöße zwischen Elektronen und Atomen berücksichtigt werden.

Bezeichnet man nun mit  $e$  die Ladung eines Elektrons, mit  $\xi, \eta, \zeta$  seine Geschwindigkeitskomponenten — die Resultante heiße  $r$  — und nennt man

$$f(\xi, \eta, \zeta)$$

die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeiten, so bedeutet

$$(1) \quad J = e \int \xi f d\lambda$$

die elektrische Stromdichte in der  $x$ -Richtung, wenn unter  $d\lambda$  ein Element im „Geschwindigkeitsraum“ verstanden und die Integration über diesen ganzen Raum erstreckt wird.

Es ergibt sich nun die Aufgabe, die Funktion  $f$  und dann den Ausdruck (1) zu berechnen. Die Differentialgleichung, welcher die Funktion  $f$  zu genügen hat, ist von Lorentz in allgemeinsten Form aufgestellt worden, und zwar für den Fall, daß in der  $x$ -Richtung eine Kraft wirkt, welche den Elektronen eine Beschleunigung  $X$  erteilt. Diese Differentialgleichung lautet:

$$(2) \quad X \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t} = b - a,$$

und dabei sind  $b$  und  $a$  zwei Funktionen, welche den Einfluß

---

1) H. A. Lorentz, Versl. Akad. v. Wetensch. zu Amsterdam 13. p. 493. 1905; Arch. Néerl. (2) 10. p. 336. 1905; man vgl. H. A. Lorentz, The Theory of Electrons. B. G. Teubner, Leipzig 1909. Anhang 29.

der Stöße auf die Verteilung der Geschwindigkeiten darstellen. Betrachtet man nämlich diejenige Gruppe von Elektronen, welche zur Zeit  $t$  im Volumelement  $dS$  des Metalles und deren Geschwindigkeitspunkt im Element  $d\lambda$  des Geschwindigkeitsraumes liegt, so soll  $a dS d\lambda dt$  die Zahl der Stöße darstellen, welche die bezeichnete Gruppe von Elektronen während  $dt$  erfährt. Durch jeden dieser Stöße geht also der betreffenden Gruppe ein Elektron verloren. Ebenso bezeichnet  $b dS d\lambda dt$  die Zahl der Stöße, durch welche neue Elektronen während  $dt$  in die Gruppe gelangen. Lorentz berechnet nun die Funktionen  $a$  und  $b$  und sucht eine partikuläre Lösung der Fundamentalgleichung (2) für den Fall, daß  $X$  konstant ist und  $f$  nicht von  $y$  oder  $z$  abhängt. Die Berechnung von  $a$  und  $b$  bleibt nun bei dem hier behandelten Problem genau dieselbe, wie bei Lorentz; es soll nur  $X$  nicht als konstant, sondern als periodische Zeitfunktion eingeführt werden. Sucht man also wiederum nach einer Lösung für den Fall, daß  $f$  weder von  $y$  noch von  $z$  abhängt, so bleibt die aus (2) entstehende Gleichung die gleiche wie bei Lorentz, bis auf den einzigen Umstand, daß  $\partial f / \partial t$  nicht gleich 0 gesetzt werden darf. Man findet so

$$(3) \quad \begin{cases} n_1 R^2 r \int \{f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)\} \cos \vartheta d\omega \\ = X \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}; \end{cases}$$

dabei bedeutet  $n_1$  die Zahl der Atome pro ccm,  $R$  die Summe der Radien eines Atoms und eines Elektrons und  $\vartheta$  den Winkel zwischen der Zentrillinie im Moment des Stoßes und der Geschwindigkeit  $r$ . Findet der Stoß so statt, daß im Moment des Stoßes die Zentrillinie innerhalb des kleinen räumlichen Winkels  $d\omega$  liegt, so gehen die Geschwindigkeitskomponenten  $\xi, \eta, \zeta$  durch den Stoß in die Werte  $\xi', \eta', \zeta'$  über. Die Integration ist bei konstantem  $\xi, \eta, \zeta$  über alle Werte von  $d\omega$  zu erstrecken, und es bestehen die Verknüpfungsgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \xi' = \xi - 2r \cos \vartheta \cos f; & \eta' = \eta - 2r \cos \vartheta \cos g; \\ \zeta' = \zeta - 2r \cos \vartheta \cos h, \end{cases}$$

wo  $f, g, h$  die Winkel zwischen der Zentrillinie und den Achsen im Moment des Stoßes sind.

Wir machen nun mit Lorentz die weiteren Annahmen, daß bei Abwesenheit des periodischen elektrischen Feldes  $f$  mit dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz zusammenfällt, und daß die mittlere lebendige Kraft eines Elektrons den gleichen, der absoluten Temperatur proportionalen Wert  $\alpha T$  hat, wie ein Gasmolekül. Unter diesen Umständen wird

$$(5) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h r^2},$$

und die Konstanten  $A$  und  $h$  sind durch die Masse  $m$  der Elektronen, ihre Zahl pro ccm  $N$  und die Temperatur  $T$  bestimmt; nämlich

$$(6) \quad \begin{cases} N = A \sqrt{\frac{\pi^3}{h^3}} \\ h = \frac{3m}{4\alpha T}. \end{cases}$$

Für den Fall, daß ein elektrisches Feld vorhanden ist, setzen wir wiederum mit Lorentz:

$$(7) \quad f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-h r^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

wo  $A$  und  $h$  die gleiche Bedeutung haben sollen wie in (6). Daraus folgen für  $\varphi$  die Bedingungsgleichungen

$$(8) \quad \int \varphi d\lambda = 0; \quad \int \varphi r^2 d\lambda = 0.$$

Halten wir nun weiter an der Lorentz'schen Annahme fest, daß in (7) das Zusatzglied  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  so klein ist, daß es in den beiden ersten Gliedern auf der rechten Seite von (3) neben  $A \cdot e^{-h r^2}$  vernachlässigt werden darf, so ergibt sich aus (3) und (7)

$$(9) \quad \begin{cases} n_1 R^2 r \int \{\varphi(\xi', \eta', \zeta') - \varphi(\xi, \eta, \zeta)\} \cos \vartheta d\omega - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ = \left( -2hAX + \frac{dA}{dx} - r^2 A \frac{dh}{dx} \right) \xi \cdot e^{-h r^2}. \end{cases}$$

Ist nun  $X$  eine periodische Zeitfunktion

$$(10) \quad X = X_0 e^{i\nu t},$$

so versuchen wir, die Gleichung (9) durch den Ansatz

$$(11) \quad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \xi \cdot \chi(r) e^{i\nu t}$$

zu befriedigen. Dieser Ansatz genügt den Bedingungen (8); setzt man ihn in (9) ein, so bleibt die Integration unverändert

wie bei Lorentz bestehen, da nur der Faktor  $e^{i\nu t}$  vor das Integral tritt. Es ergibt sich also:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -(\pi n_1 R^2 \xi r \chi(r) + i\nu \xi \chi(r)) e^{i\nu t} \\ \left( -2hAX_o e^{i\nu t} + \frac{dA}{dx} - r^2 A \frac{dh}{dx} \right) \xi e^{-hr^2} \end{array} \right.$$

Aus dieser Gleichung fällt  $\xi$  heraus; (11) stellt also eine mögliche Lösung dar und  $\chi(r)$  bestimmt sich aus (12).

Führen wir nun die weitere Spezialisierung ein, daß im betrachteten Metall überall die gleiche Temperatur besteht (d. h.  $\frac{dA}{dx} = \frac{dh}{dx} = 0$ ), und definieren wir die „mittlere freie Weglänge“  $l$  durch die Gleichung

$$(13) \quad l = \frac{1}{\pi n_1 R^2},$$

so ergibt sich das Resultat:

$$(14) \quad \chi(r) = \frac{l}{r + i\nu l} 2hAX_o e^{-hr^2}.$$

Der elektrische Strom ist nun nach (1), (7), (11)

$$(15) \quad J = \varepsilon \int \xi^2 \chi(r) e^{i\nu t} d\lambda.$$

Ersetzt man hier  $\xi^2$  durch  $\frac{1}{3}r^2$ , sowie  $d\lambda$  durch  $4\pi r^2 dr$  und führt die elektrische Feldstärke  $E$  durch die Gleichung

$$(16) \quad X = \frac{\varepsilon E}{m}$$

ein, so ergibt (15) mit Hilfe von (14) (16) und (10)

$$(17) \quad J = \frac{8\pi s^2 l h A}{3m} E \int_0^\infty \frac{r^4 e^{-hr^2}}{r + i\nu l} dr.$$

Über die Ausführung der in (18) auftretenden Quadratur wird weiter unten das Nötige gesagt werden. Es sei hier nur erwähnt, daß der Faktor von  $E$  die Leitfähigkeit des Metalles als Funktion von  $\nu$  darstellt. Für unendlich langsame Schwingungen (d. h.  $\nu = 0$ ) liefert die Quadratur  $1/2h^2$  und der Faktor von (17) ergibt dann den Wert der Lorentz'schen Theorie:

$$(18) \quad \sigma = \frac{4\pi l A s^2}{3hm},$$

was nach (6) gleichbedeutend ist mit

$$(19) \quad \sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{\epsilon^2 l N u}{\alpha T},$$

wenn

$$(20) \quad \frac{m u^2}{2} = \alpha T$$

gesetzt wird,  $u$  also diejenige Geschwindigkeit bedeutet, deren Quadrat gleich dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat ist.

Ist  $\nu$  von  $O$  verschieden, so wird die Leitfähigkeit komplex, d. h. der elektrische Strom hat eine Phasenverschiebung gegen die Feldstärke; zugleich nimmt der absolute Betrag der Leitfähigkeit mit steigendem  $\nu$  dauernd ab und verschwindet für sehr große  $\nu$ . Phasenverschiebung und absoluter Betrag der Leitfähigkeit lassen sich auf Grund der unten ausgeführten Quadraturen einzeln berechnen; hier sollen zunächst nur die Folgerungen für das optische Verhalten der Metalle gezogen werden.

Betrachten wir also jetzt ebene Wellen, die sich in dem Metall nach der  $z$ -Richtung fortpflanzen und deren elektrischer Vektor in die  $x$ -Richtung fällt, so ist zu setzen:

$$(21) \quad E = E_0 e^{i\nu \left(t - \frac{nz}{c}\right)},$$

wo  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Äther und  $n$  den komplexen Brechungsindex des Metalles bedeutet. Um diesen letzteren zu bestimmen, verfahren wir in der bekannten Weise. Nach (21) wird

$$(22) \quad E = - \frac{i}{\nu} \frac{\partial E}{\partial t};$$

setzt man diesen Ausdruck in (17) ein und fügt dazu den Verschiebungsstrom im freien Äther  $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}$ , so wird die gesamte Stromdichte  $j_x$  in elektrostatischem Maße

$$(23) \quad j_x = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \left[ 1 - \frac{4\pi i}{\nu} \cdot \frac{8\pi \epsilon^2 l h A}{3m} \int_0^\infty \frac{r^4 e^{-hr^2}}{r + i\nu l} dr \right].$$

Hier stellt nun der Ausdruck in der Klammer das Quadrat des Brechungsindex  $n$  dar, für den Fall, daß außer den Leitungs-

elektronen keine weiteren Ionen vorhanden sind.<sup>1)</sup> Setzen wir also jetzt

$$(24) \quad n = n(1 - i\kappa),$$

wo  $n$  den reellen Brechungsindex und  $\kappa$  den Absorptionsindex bedeutet, so ergibt sich durch Scheidung des Reellen und Imaginären:

$$(25) \quad n^2(1 - \kappa^2) = 1 - 4\pi l \frac{8\pi e^2 l h A}{3m} \int_0^\infty \frac{r^4 e^{-hr^2}}{r^2 + \nu^2 l^2} dr,$$

$$(26) \quad n^2 \kappa = \frac{2\pi}{\nu} \frac{8\pi e^2 l h A}{3m} \int_0^\infty \frac{r^5 e^{-hr^2}}{r^2 + \nu^2 l^2} dr.$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich noch in eine andere Form bringen, wenn man den Ausdruck (18) für die Leitfähigkeit benutzt; es ergibt sich dann nach einfacher Umrechnung:

$$(27) \quad n^2(1 - \kappa^2) = 1 - 2\sqrt{\pi^3 h l^2} \cdot \sigma \cdot J_1$$

$$(28) \quad n^2 \kappa = \frac{2\pi}{\nu} \cdot \sigma \cdot J_2$$

mit der Bedeutung

$$(29) \quad J_1 = 4\sqrt{\frac{h^3}{\pi}} \int_0^\infty \frac{r^4 e^{-hr^2}}{r^2 + \nu^2 l^2} dr$$

$$(30) \quad J_2 = 2h^2 \int_0^\infty \frac{r^5 e^{-hr^2}}{r^2 + \nu^2 l^2} dr.$$

Um die Quadraturen auszuführen, sondern wir zunächst die echt gebrochenen Teile aus den Funktionen ab und finden

$$(31) \quad J_1 = 4\sqrt{\frac{h^3}{\pi}} \left\{ \int_0^\infty r^2 e^{-hr^2} dr - \nu^2 l^2 \int_0^\infty e^{-hr^2} dr + \nu^4 l^4 \int_0^\infty \frac{e^{-hr^2}}{r^2 + \nu^2 l^2} dr \right\}$$

$$(32) \quad J_2 = 2h^2 \left\{ \int_0^\infty r^3 e^{-hr^2} dr - \nu^2 l^2 \int_0^\infty r e^{-hr^2} dr + \nu^4 l^4 \int_0^\infty \frac{r e^{-hr^2}}{r^2 + \nu^2 l^2} dr \right\}.$$

1) Man vgl. z. B. P. Drude, Lehrbuch der Optik, Kap. V. 1.

Die ersten zwei Integrale jeder dieser zwei Formeln sind ohne weiteres ausführbar; die letzten können auf bekannte transzendente Funktionen zurückgeführt werden. Um dieses zu erreichen, gehen wir von dem Integral

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-hx^2} dx}{x + ia} = I_1 - i I_2 \\ I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x e^{-hx^2} dx}{x^2 + a^2} \\ I_2 = \int_0^{\infty} \frac{a e^{-hx^2} dx}{x^2 + a^2} \end{array} \right.$$

aus. Durch die Substitution

$$h(x^2 + a^2) = s$$

geht  $I_1$  in die Form über

$$(34) \quad \int_0^{\infty} \frac{x e^{-hx^2} dx}{x^2 + a^2} = -\frac{e^{ha^2}}{2} \int_{\infty}^{ha^2} \frac{e^{-s} ds}{s} = -\frac{e^{ha^2}}{2} Ei(-ha^2),$$

wo unter

$$(35) \quad Ei(x) = \int_x^{-x} \frac{e^{-u}}{u} du$$

der Integrallogarithmus verstanden ist.

Um  $I_2$  auszuwerten, berücksichtigen wir, daß in  $I_1$  der Integrandus eine ungerade Funktion von  $x$ , in  $I_2$  dagegen eine gerade Funktion ist; folglich ist

$$(36) \quad I' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-hx^2} dx}{x + ia} = -2i I_2.$$

Multipliziert man nun  $I'$  mit dem bekannten Integrale

$$(37) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hy^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{h}}$$

und führt Polarkoordinaten ein, so ergibt sich

$$(38) \quad I' \cdot \sqrt{\frac{\pi}{h}} = -2i \sqrt{\frac{\pi}{h}} I_2 = \int_0^{\pi} e^{-hr^2} r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r \cdot \cos \varphi + ia}.$$



Die Integration nach  $\varphi$  läßt sich mit Hilfe des Cauchy-  
schen Satzes in der komplexen Zahlenebene ausführen und  
liefert<sup>1)</sup>

$$(39) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r \cdot \cos \varphi + i a} = - \frac{2\pi i}{\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

Setzt man (39) in (38) ein und führt dann die Sub-  
stitution

$$(40) \quad h(r^2 + a^2) = \rho^2$$

aus, so liefert (38)

$$- 2 i \sqrt{\frac{\pi}{h}} I_2 = - \frac{2\pi i}{\sqrt{h}} \cdot e^{h a^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\rho^2} d\rho}{\sqrt{h a^2}}$$

oder

$$(41) \quad \int_0^{\infty} \frac{a e^{-h x^2} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2} e^{h a^2} (1 - \Phi(\sqrt{h} a^2)),$$

wo

$$(42) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

das Gausssche Fehlerintegral bedeutet.

Vermöge (34) und (41) sind nun auch die letzten Quadra-  
turen in (31) und (32) ausführbar, und man erhält schließlich

$$(43) \quad J_1 = 1 - 2 h v^2 l^2 + 2 \sqrt{\pi} h^3 v^3 l^3 \cdot e^{h v^2 l^2} (1 - \Phi(\sqrt{h} v^2 l^2))$$

$$(44) \quad J_2 = 1 - h v^2 l^2 - h^2 v^4 l^4 \cdot e^{h v^2 l^2} E i(-h v^2 l^2).$$

Setzt man nun diese Ausdrücke in (27) und (28) ein und  
substituiert zugleich die neue Variable

$$(45) \quad z = \sqrt{h} \cdot v \cdot l,$$

so ergibt sich nach einfacher Umrechnung

$$(46) \quad \Psi_1 = \frac{\nu(n^2(1-z^2)-1)}{\sigma \cdot 2\sqrt{\pi^3}} = -z + 2z^3 - 2\sqrt{\pi} z^4 e^{z^2} (1 - \Phi(z))$$

$$(47) \quad \Psi_2 = \frac{\nu \cdot h^2 \pi}{\sigma \cdot 2\pi} = 1 - z^2 - z^4 e^{z^2} E i(-z^2).$$

1) Die Formel (39) ergibt sich auch aus D. Bierens de Haan,  
Verhandl. d. Kon. Akad. te Amsterdam IV. 1858, Taf. 90, Formel (11)  
durch einen einfachen Grenzübergang.

Es ergibt sich also das einfache Resultat, daß die Ausdrücke  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$ , die aus den optischen Konstanten, der Periode  $\nu$  und der Leitfähigkeit  $\sigma$  gebildet sind, universelle Funktionen des einzigen Arguments  $z$  sind. Dieses Argument  $z$  hat nun eine anschauliche physikalische Bedeutung; nach (6) und (20) ist nämlich

$$(48) \quad \sqrt{h} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\nu},$$

$\sqrt{h} \cdot l$  ist also proportional der Zeit  $\tau_1$ , während welcher im Mittel eine freie Weglänge durchlaufen wird. Da nun  $\nu$  umgekehrt proportional der Dauer einer Lichtschwingung  $\tau_2$  ist, hängen also  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  nur von dem Verhältnis der beiden eben charakterisierten Zeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  ab, oder, wie sich das auch ausdrücken läßt, von dem Verhältnis der Zahl der Schwingungen zur Zahl der Stöße pro Sekunde. Mit dieser Aussage ist gleichzeitig die Abhängigkeit der optischen Konstanten von der Temperatur auf die Veränderung von  $\sigma$  und  $l$  mit der Temperatur zurückgeführt.

Für die beiden Transzendenten  $Ei(z)$  und  $\Phi(z)$  liegen Entwicklungen für kleine und große Werte von  $z$ , sowie auch numerische Tafeln vor.<sup>1)</sup> Für kleine  $z$  ergibt sich

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = -z + 2z^3 - 2\sqrt{\pi} \cdot z^4 + \dots \\ \Psi_2 = 1 - z^2 - z^4 \left( 0,577216 + \ln z^2 \left( 1 + z^2 + \frac{z^4}{4} \right) \right) + \dots \end{array} \right\} z \text{ klein}$$

und für große  $z$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{3 \cdot 5}{2^2} \frac{1}{z^3} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3} \frac{1}{z^5} + \dots \\ \Psi_2 = \frac{2!}{z^2} - \frac{3!}{z^4} + \frac{4!}{z^6} - \dots \end{array} \right\} z \text{ groß}$$

Um die Vergleichung mit der Drudeschen Theorie durchzuführen, bringen wir die Drudeschen Formeln auf die analoge Form wie (46) (47). Unter der Annahme, daß nur eine Art von Leitungsionen und keine quasielastisch gebundenen

1) Man vgl. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909. p. 19 u. 31; für Werte von  $z$ , die größer als etwa 1,5 sind, müssen für  $\Phi(z)$  die genaueren Werte in der Tabelle bei E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung, B. G. Teubner, Leipzig 1903, benutzt werden.

Ionen vorhanden sind, ist nach Drude<sup>1)</sup> in unserer Bezeichnung

$$(51) \quad \begin{cases} n'^2 (1 - \kappa'^2) = 1 - 4\pi \frac{N}{r} \frac{\frac{m}{r \epsilon^2}}{1 + \frac{m^2 \nu^2}{r^2 \epsilon^4}} \\ n'^2 \kappa' = \frac{2\pi}{\nu} \frac{N}{r} \frac{1}{1 + \frac{m^2 \nu^2}{r^2 \epsilon^4}}, \end{cases}$$

dabei bedeutet  $r$  die konstant vorausgesetzte Reibungskonstante, also

$$(52) \quad \sigma = \frac{N}{r}$$

die Leitfähigkeit. Identifizieren wir (52) mit unserem Ausdruck (18) und berücksichtigen die erste Gleichung (6), so wird

$$(53) \quad \frac{m}{r \epsilon^2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sqrt{h} l,$$

und aus (51) ergeben sich die (46), (47) analogen Gleichungen

$$(54) \quad \begin{cases} \psi_1' = \frac{\nu (n'^2 (1 - \kappa'^2) - 1)}{\sigma \cdot 2\sqrt{\pi}^3} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \cdot z}{1 + \frac{16}{9 \cdot \pi} \cdot z^2} \\ \psi_2' = \frac{\nu \cdot n'^2 \kappa'}{\sigma \cdot 2\pi} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9 \cdot \pi} \cdot z^2} \end{cases}$$

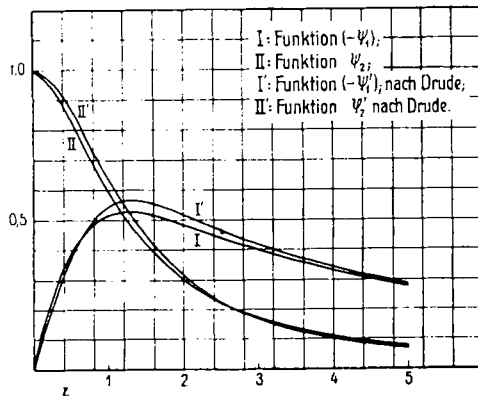


Fig. 1.

Der Verlauf der universellen Funktionen  $(-\psi_1)$  und  $\psi_2$  ist in der Fig. 1 durch die Kurven I und II dargestellt, ebenso der Verlauf von  $(-\psi_1')$  und  $\psi_2'$  in den Kurven I' und II'.

1) P. Drude, Lehrbuch d. Optik. 3. Aufl. p. 387, 388.

Wie man sieht, ergeben die Drudeschen Formeln nahezu denselben Verlauf, wie die hier aufgestellten, und es folgt daraus, daß die Annahme einer konstanten, der Geschwindigkeit proportionalen Reibungskraft Resultate liefert, die numerisch nur wenig von den Ergebnissen der hier gegebenen strengeren Theorie abweichen.

Dieses Resultat ist in erster Linie darum von Wichtigkeit, weil es nun nicht mehr zugänglich ist, die schon früher beobachteten Abweichungen zwischen der Drudeschen Theorie und der Erfahrung gerade auf den Umstand zurückzuführen, daß die Annahme einer konstanten Reibungskraft fehlerhaft sei. Die Abweichungen, um die es sich hier handelt, treten einerseits zutage in dem Verhalten des Reflexionsvermögens für ziemlich lange Wellen (etwa  $1-12 \mu$ ), andererseits in dem gesamten optischen Verhalten der Metalle im Gebiete sichtbaren Lichts.

Bedeutet  $R$  das Reflexionsvermögen der Metalle, so hat Drude<sup>1)</sup> aus den Formeln seiner Theorie (falls nur eine freie Elektronenart vorhanden und der Einfluß der Polarisationen nicht beträchtlich ist) gefolgert, daß sich für  $1 - R$  ein Wert ergibt, der „*kleiner* als der aus der Leitfähigkeit des Metalles allein berechnete Wert ist, und zwar um so mehr, je kleiner die Wellenlänge  $\lambda$  wird“. Die gleiche Folgerung läßt sich mit Leichtigkeit aus den Formeln (46) und (47) ziehen, doch soll davon abgesehen werden, da ja schon gesagt ist, daß diese Formeln sich numerisch nur unbedeutend von den Drudeschen unterscheiden. Die erwähnte Folgerung ist nun, wie schon Drude gezeigt hat und wie im folgenden näher ausgeführt werden soll (p. 1233 ff.), nicht im Einklang mit der Erfahrung. „Dieses ist meines Erachtens,“ führt Drude aus, „nur so zu erklären möglich, daß für alle Metalle bei kleineren  $\lambda$  das Verhältnis  $N/\tau$  nicht mehr nach (52) der normalen Leitfähigkeit entspricht, sondern daß es kleiner geworden ist, da  $\tau$  mit abnehmendem  $\lambda$  wachsen kann . . .“ Diese Erklärung ist durch die vorliegenden Berechnungen als hinfällig erwiesen; ein anderer Versuch, die Zunahme von  $1 - R$  mit abnehmendem  $\lambda$  zu erklären, wird weiter unten gegeben werden.

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 940 ff. 1904.

Was nun das optische Verhalten der Metalle im Gebiete sichtbaren Lichtes und im Ultraviolett betrifft, so ist bekannt, daß es sehr kompliziert ist und nicht durch die Annahme einer freien Elektronenart allein erklärt werden kann.<sup>1)</sup> Man muß vielmehr im allgemeinen mehrere gebundene Elektronenarten zur Erklärung mit heranziehen, und W. Meyer<sup>2)</sup> hat sich der Mühe unterzogen, Formeln aufzustellen, welche das komplizierte Verhalten der Metalle in befriedigender Weise wiedergeben. Nun hat sich aber bei diesen Berechnungen ein Widerspruch ergeben; Meyer berechnet nämlich aus den empirischen Konstanten seiner Dispersionsformeln auf zwei verschiedenen Wegen die Anzahl  $p_I$  bez.  $p_{II}$  der Leitungselektronen pro Atom, und diese Zahlen  $p_I$  und  $p_{II}$  ergeben sich bei allen Metallen (mit Ausnahme des Quecksilbers) sehr beträchtlich verschieden. Dieser Widerspruch ist nun schwerwiegender, als es auf den ersten Anblick erscheinen möchte; er hat nämlich zur Folge, daß die Meyerschen Formeln für lange Wellen nicht in den richtigen Grenzwert übergehen.

Die von Meyer seiner Rechnung zugrunde gelegten Drudeschen Formeln lauten nämlich in der von Voigt benutzten Schreibweise<sup>3)</sup>:

$$(55) \quad 2 n^2 \kappa = \frac{\rho_1 \nu_1' / \nu}{\nu^2 + \nu_1'^2} + \sum \frac{\rho \nu' \nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2},$$

$$(56) \quad n^2(1 - \kappa^2) = 1 - \frac{\rho_1}{\nu^2 + \nu_1'^2} + \sum \frac{\rho(\nu_0^2 - \nu^2)}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2}.$$

Hier beziehen sich die ersten Glieder auf die freien Elektronen und die Summen auf die verschiedenen gebundenen Elektronen; unter  $\nu_0$  sind die Eigenperioden der letzteren zu verstehen und unter  $\nu' = h/m$  die Quotienten aus dämpfender Kraft<sup>4)</sup> und Masse eines Elektrons. Die Konstanten  $\rho$  haben für jede Elektronenart die Bedeutung

$$(57) \quad \rho = \frac{4 \pi N e^2}{m}.$$

1) Man vgl. z. B. W. Voigt, *Magneto- und Elektrooptik*. p. 121. B. G. Teubner, Leipzig 1908.

2) W. Meyer *Ann. d. Phys.* 31. p. 1035. 1910.

3) W. Meyer, l. c. p. 1036, wo sich aber ein Druckfehler befindet, der hier im Text verbessert ist. Man vgl. auch Voigt (*Magneto- und Elektrooptik*) p. 108, Formel (19).

4) Es ist  $h$  bei Voigt (*Magneto- und Elektrooptik*) gleichbedeutend mit  $s^2 r$  bei Drude.

Für sehr lange Wellen, d. h. kleine  $\nu$ , können die Summen in (55) und (56) gegen die ersten Glieder vernachlässigt werden (wegen der allein übrigbleibenden Glieder  $\nu_0^4$  bzw.  $\nu_0^2$  in den Nennern) und die Formeln werden dann gleichbedeutend mit den Formeln (51). Läßt man nun in (55) und in der zweiten Gleichung (51)  $\nu$  gegen 0 konvergieren, so zeigt sich, daß  $\rho_1/\nu_1'$  proportional mit der elektrischen Leitfähigkeit  $N/r$  sein muß. Die beiden Konstanten  $\rho_1$  und  $\nu_1'$  dürfen also nicht als unabhängig voneinander angesehen werden, wenn die optischen Konstanten für lange Wellen in diejenigen Werte übergehen sollen, die ihnen auf Grund der Leitfähigkeit allein zukommen. Nun hat Meyer bei seinen Berechnungen  $\rho_1$  und  $\nu_1'$  als unabhängig voneinander angesehen<sup>1)</sup>, die Folge davon ist, daß sich für lange Wellen das Emissionsvermögen  $(1 - R)$  auf Grund der Meyerschen Formeln im Verhältnis  $\sqrt{p_{II}/p_I}$  zu groß gegen den aus der Leitfähigkeit berechneten Wert ergibt, also nicht im Einklang mit der Erfahrung ist.

Zur Erklärung der Verschiedenheit von  $p_I$  und  $p_{II}$  äußert Meyer die Vermutung, daß eine Verschiedenheit der Dämpfungskonstanten  $\nu_1'$  bei Leitung und bei Schwingungen eine Rolle spielen könnte. Diese Erklärung ist nach den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit nicht statthaft.

Will man vielmehr Dispersionsformeln gewinnen, die nicht nur für das von Meyer berücksichtigte Gebiet, sondern auch für lange Wellen zulässig sind, so ist von vornherein an dem von der Theorie geforderten Zusammenhang zwischen  $\rho_1$  und  $\nu_1'$  festzuhalten. Der Widerspruch, zu denen die Meyerschen Rechnungen führen, wäre dann vermieden; ob es allerdings noch gelingen würde, mit derjenigen Zahl von Konstanten auszukommen, die Meyer benutzt hat, muß vorläufig dahingestellt bleiben; vermutlich werden weitere Eigenschwingungen im Ultraroten zu berücksichtigen sein, und darum scheint es angemessen, den Versuch einer solchen Berechnung zu verschieben, bis der Verlauf der optischen Konstanten  $n$  und  $\kappa$  im Ultraroten experimentell festgestellt ist.

1) W. Meyer berechnet allerdings nicht  $\rho_1$  und  $\nu_1'$ , sondern zwei Konstanten  $C_1 = \rho_1/4\pi^2 e^2$ ;  $\lambda_1' = 2\pi c/\nu_1'$ , die sich aus ihnen beim Übergang von den Perioden zu Wellenlängen ergeben; an der obigen Betrachtung ändert das aber nichts.

Wenn also auf Grund der vorgetragenen Theorie keine wesentliche Aufklärung über das optische Verhalten der Metalle für sichtbare und noch kürzere Wellen zu gewinnen, sondern nur eine bisher öfter versuchte Erklärung als unzulässig erwiesen ist, so gelangt man doch auf Grund einer einfachen Annahme zu einem bemerkenswerten Ergebnis über den Verlauf des Reflexionsvermögens. Die in Frage stehende Annahme betrifft den Wert der Dielektrizitätskonstante, und es soll angenommen werden, daß diese im ganzen betrachteten Gebiet klein gegen den Wert von  $n^2 \kappa$  ist.

Wir gehen von den Formeln (55) und (56) der Drudeschen Theorie aus und ersetzen nur die auf die freien Elektronen bezüglichen Glieder durch die Formeln (46) und (47). (Die Betrachtung ließe sich übrigens ganz analog mit den Drudeschen Formeln allein durchführen.) Es ergibt sich so

$$(58) \quad 2 n^2 \kappa = \frac{4 \pi \sigma}{\nu} \Psi^2 + \sum \frac{q \nu' \nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2} = 2 p.$$

$$(59) \quad n^2(1 - \kappa^2) = 1 + \frac{2 \sqrt{n^2 \sigma}}{\nu} \Psi_1 + \sum \frac{q(\nu_0^2 - \nu^2)}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2} = q.$$

Nach der Maxwell'schen Theorie muß nun  $q = n^2(1 - \kappa^2)$  gleich dem Produkt aus der Dielektrizitätskonstante in die magnetische Permeabilität sein<sup>1)</sup>; setzt man also letztere gleich 1, so stellt  $q$  die Dielektrizitätskonstante dar. Wie nun in der Maxwell'schen Theorie der Metallreflexion angenommen wird, daß  $q$  klein gegen  $4 \pi \sigma / \nu$  ist, so wollen wir jetzt das Reflexionsvermögen für denjenigen Bereich berechnen, in dem  $q$  als klein gegen  $4 \pi \sigma \Psi_2 / \nu$  angesehen werden darf.

Aus (58) und (59) ergibt sich genau wie in der Maxwell'schen Theorie

$$(60) \quad \begin{aligned} 2 n^2 &= \sqrt{\gamma^2 + 4 p^2} + q, \\ 2 n^2 \kappa^2 &= \sqrt{q^2 + 4 p^2} - q, \end{aligned}$$

oder unter der bereits ausgesprochenen Annahme

$$(61) \quad n = n \kappa = \sqrt{p}.$$

Also wird das Reflexionsvermögen

$$(62) \quad R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = \frac{2p - 2\sqrt{p} + 1}{2p + 2\sqrt{p} + 1};$$

1) Man vgl. Abraham, Theorie der Elektrizität. 4. Aufl. I. p. 285, wo  $\kappa$  gleichbedeutend mit dem hier benutzten  $n \kappa$  ist.

oder, da naturgemäß auch 1 gegen  $2p$  zu vernachlässigen ist,

$$(63) \quad R = 1 - \frac{2}{\sqrt{p}} = 1 - \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\nu} \Psi_2} + \frac{1}{2} \sum \frac{Q \nu' \nu}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu'^2 \nu^2}$$

Ist nun endlich noch die Summe unter dem Wurzelzeichen klein gegen das erste Glied, oder mit anderen Worten ist die Absorption durch Polarisationslektronen gering gegen die Absorption durch die Leitungselektronen, so erhält man das Ergebnis:

$$(64) \quad \frac{(1-R)}{2} \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\Psi_2}}$$

Während also nach der Maxwell'schen Theorie der Ausdruck auf der linken Seite für alle Metalle gleich der Einheit sein muß, ergibt er sich hier gleich einer universellen Funktion der Variablen  $z$ . Da  $\Psi_2$  stets kleiner als 1 ist, ergibt sich  $(1-R)$  stets größer als es sich auf Grund der Leitfähigkeit allein berechnet.

Es muß darauf hingewiesen werden, daß die der Gleichung (64) zugrunde liegenden Annahmen *nicht* erfüllt sein können, wenn nur eine Art von Leitungselektronen und gar keine quasielastisch gebundenen Ionen vorhanden sind; denn unter dieser Annahme zeigt  $(1-R)$ , wie schon erwähnt wurde, p. 1228), gerade das umgekehrte Verhalten. In der Tat ersieht man aus der Fig. 1, daß dann  $\Psi_1$  negative Werte von der gleichen Größenordnung wie  $\Psi_2$  hat, also die Bedingung  $n^2(1-x^2)$  klein gegen  $n^2x$  nicht zutreffen kann. Es müssen also noch andere Elektronenarten vorhanden sein, die einen positiven Beitrag zu  $n^2(1-x^2)$  liefern, ohne  $n^2x$  merklich zu beeinflussen (also schwach gedämpfte Eigenschwingungen im Gebiete kurzer Wellen?), wenn die Formel (64) Geltung haben soll.

Die Folgerungen, die sich aus den gemachten Annahmen ziehen lassen (vgl. Formel (60)), treffen für die Gebiete, in denen bisher die optischen Konstanten einzeln beobachtet sind, nirgends zu; inwieweit das im Ultraroten anders ist, darüber kann bis jetzt nur der experimentell festgestellte Verlauf (des Reflexionsvermögens für ultrarote Strahlen Aufschluß geben. Es stehen hierfür die Messungen von Hagen und Rubens<sup>1)</sup>

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 11. p. 873. 1903.



zur Verfügung. Führt man in (64) die von den genannten Autoren benutzten Einheiten ein ( $R$  in Prozenten,  $\lambda'$  in  $\mu$ , und den reziproken Widerstand  $\kappa_R$  eines Leiters von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt in Ohm), so wird daraus

$$(64) \quad \frac{(100 - R) \sqrt{\kappa_R \cdot \lambda'}}{36,5} = \frac{1}{\sqrt{\Psi_2}},$$

wobei nun das Argument von  $\Psi_2$

$$(65) \quad z = \frac{\sqrt{h} \cdot l \cdot 2\pi c}{\lambda' \cdot 10^{-4}}$$

zu setzen ist.

Für die von Hagen und Rubens untersuchten reinen Metalle (mit Ausnahme des Wismuts) sind die Werte der linken Seite von (64) aus den Beobachtungen entnommen und in den Figg. 2 u. 3 als Funktion von  $\lambda'$  aufgetragen. Da jedoch unbeträchtliche Beobachtungsfehler in  $R$  schon sehr

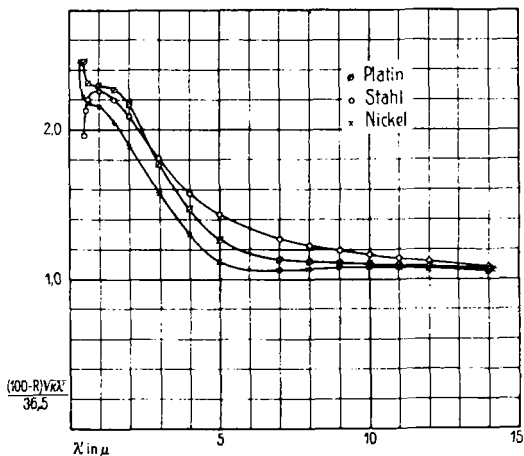


Fig. 2.

große Fehler in  $(1 - R)$  bedingen und so das entstehende Bild verwischen können, wurden die Beobachtungen nicht unmittelbar benutzt, sondern es wurden durch die Mittelwerte<sup>1)</sup> der Beobachtungen aus Tab. 1 bei Hagen und Rubens zunächst

1) Die Ergebnisse der durch Kathodenzerstäubung hergestellten Spiegel sind dabei nach dem eigenen Vorgange der Autoren nicht mit berücksichtigt worden.

glatte Kurven gelegt und aus diesen die in den Figuren eingetragenen Punkte entnommen. Außerdem sind die Kurven noch bis in das Gebiet sichtbaren, bzw. ultravioletten Lichts fortgesetzt; bei Nickel, Stahl und Platin wurden dabei die älteren Messungen von Hagen und Rubens<sup>1)</sup>, bei Silber und Kupfer die Werte von Minor<sup>2)</sup> und bei Gold diejenigen von Meyer<sup>3)</sup> verwendet.

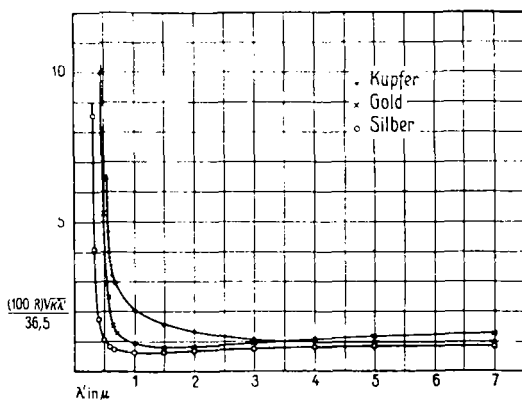


Fig. 3.

Die Kurven zeigen alle ein charakteristisches, starkes Ansteigen mit abnehmender Wellenlänge, bei Silber und Gold geht dem Anstieg eine langsamere Abnahme voraus. (Ein ähnliches Verhalten wie Silber und Gold, nur mit einem viel weniger ausgebildeten Anstieg in der Gegend von  $1-2 \mu$  zeigen auch die von Hagen und Rubens untersuchten Legierungen, mit Ausnahme des Magnesiums).

Treffen nun die Voraussetzungen der Gleichung (64) zu, so müssen alle beobachteten Kurven durch Änderung des Abszissenmaßstabes mit der theoretischen Kurve  $1/\sqrt{\Psi_2}$  zur Deckung gebracht werden können, wenn diese als Funktion von  $1/z$  aufgetragen wird. Wie sich aus Fig. 4 ergibt, in der die theoretische Kurve ausgezogen ist, gelingt das für Platin, Stahl und Nickel in befriedigender Weise; für Kupfer ergeben

1) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. p. 1. 1902.

2) R. S. Minor, Ann. d. Phys. 10. p. 581. 1903.

3) W. Meyer, l. c.

sich bereits beträchtliche Abweichungen und für Silber und Gold ist eine Übereinstimmung überhaupt nicht mehr zu erzielen. Das liegt an dem Auftreten des bereits erwähnten Minimums, welches die einfache Formel (64) nicht wiedergibt.

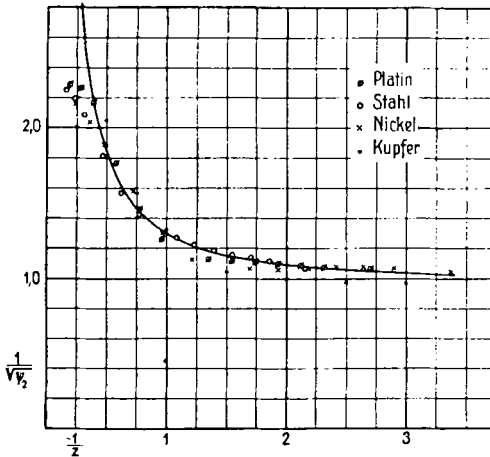


Fig. 4.

Es ist möglich, mit Hilfe der vollständigeren Formel (63) bei Annahme einer einzigen weiteren Elektronenart auch für Silber und Gold einen sehr viel besseren Anschluß an die Beobachtungen zu gewinnen, doch soll davon aus zwei Gründen abgesehen werden. Erstens ist  $(1 - R)$  gerade bei Gold und Silber so klein, daß man wohl nicht aus *Reflexionsbeobachtungen* mit Sicherheit auf den genauen Verlauf der Kurven schließen kann; zweitens sind die Voraussetzungen der Formeln (64) bzw. (63) bei Gold, Silber und Kupfer fraglos nicht erfüllt. Es wurde nämlich vorausgesetzt, daß in dem Gebiet der Anwendbarkeit  $n^2(1 - \kappa^2)$  klein gegen  $n^2\kappa$  sein soll; nun erfolgt der Anstieg der Kurven in Fig. 3 im wesentlichen im Gebiet sichtbaren Lichtes, und da ist die genannte Voraussetzung nach den bei Meyer<sup>1)</sup> mitgeteilten Zahlen durchaus nicht zutreffend. Dagegen ist bei Stahl, Nickel und Platin schon für  $\lambda' = 0,630$  die Forderung näherungsweise erfüllt und dürfte darum im

1) W. Meyer, l. c., p. 1042. 1043. 1045.

Gebiete  $2-5 \mu$ , in dem der Hauptanstieg liegt, a fortiori erfüllt sein.<sup>1)</sup> Demgemäß beginnen auch die Abweichungen der empirischen Kurven von der theoretischen bei  $1-2 \mu$ .

Infolge der Übereinstimmung der Beobachtungen mit der Formel (64') in einem beträchtlichen Wellenlängenbereich ist es nun möglich, die mittlere freie Weglänge der Elektronen und ihre Zahl pro ccm einzeln zu ermitteln. Bedeutet nämlich  $q'$  den Faktor, mit dem man die Wellenlängen für ein bestimmtes Metall multiplizieren muß, um die empirische Kurve auf die theoretische zu reduzieren, so hat man nach (65)

$$q' \cdot \lambda' = \frac{\lambda' \cdot 10^{-4}}{\sqrt{h \cdot l \cdot 2\pi c}},$$

oder wegen Gleichung (48):

$$(66) \quad l = \frac{10^{-4}}{2\pi c q'} \sqrt{\frac{2}{3}} u.$$

Nun ist  $u$  in bekannter Weise aus der Gaskonstante, der Konstante des Faradayschen Gesetzes und dem Quotienten  $\epsilon/m$  für Kathodenstrahlen berechenbar<sup>2)</sup>, also kann  $l$  nach (66) ermittelt werden. Setzt man  $T = 291$  und demgemäß  $u = 1,183 \cdot 10^7$ , so ergeben sich die in Tab. I angegebenen Werte für  $l$ . Mit Hilfe von  $l$  läßt sich dann aus der Formel (19) für die Leitfähigkeit die Elektronenzahl  $N$  bestimmen. Es ist nämlich nach (19) und (20)

$$(67) \quad N = \sigma \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{u}{l} \frac{m}{\epsilon^2};$$

setzt man hier  $\epsilon = 4,67 \cdot 10^{-10}$ ,  $\epsilon/m = 5,31 \cdot 10^{17}$  und benutzt die von Hagen und Rubens gegebenen Leitfähigkeitswerte  $\kappa_R$ , wobei

$$\sigma = c^2 \cdot 10^{-5} \cdot \kappa_R$$

ist, so findet man

$$(68) \quad N = 4,66 \cdot 10^{14} \cdot \frac{\kappa_R}{l}.$$

Bei der letzten Berechnung ist der absolute Wert der Elementarladung benutzt worden; man kann, ohne von dieser

1) W. Meyer, l. c., p. 1038. 1039. 1044.

2) Man vgl. z. B. K. Baedeker, Die elektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern. p. 7. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1911.

Konstante Gebrauch zu machen, die Anzahl  $p$  der Elektronen pro Atom nach dem Vorgang von Drude bestimmen. Bedeutet nämlich  $A$  das Atomgewicht des Metalles,  $d$  seine Dichte und  $H$  die absolute Masse eines Atoms Wasserstoff, so gilt die Beziehung<sup>1)</sup>

$$(69) \quad N \epsilon = p \cdot \frac{d}{A} \cdot \frac{e}{H},$$

also aus (67) und (69):

$$(70) \quad p = \sigma \sqrt{\frac{3\pi}{8}} \frac{u}{l} \frac{m}{\epsilon} \frac{A}{d} \frac{H}{e}.$$

Das Verhältnis von Ladung zu Masse für ein Wasserstoffatom ist aus der Elektrolyse bekannt,  $e/H = 9647 \cdot 3 \cdot 10^{10}$  elst. Einh., so daß  $p$  nach (70) berechnet werden kann. Die in der angegebenen Weise bestimmten Werte von  $N$  und  $p$  sind in die Tab. I eingetragen. Die Werte für Kupfer sind eingeklammert, weil sie aus den oben auseinandergesetzten Gründen nicht als zuverlässig gelten können.

Tabelle I.

	$q'$	$l \cdot 10^9$	$\alpha_R$	$\alpha'$	$N \cdot 10^{-23}$	$p$
Stahl	0,154	3,33	5,02	—	0,70	0,81
Platin	0,193	2,66	9,24	—	1,62	2,37
Nickel	0,241	2,13	8,5	—	1,86	2,00
Kupfer	[0,500]	[1,03]	57,2	—	[25,9]	[29,8]
Aluminium	0,0846	6,06	31,2	—	2,40	3,88
Palladium	0,126	4,08	9,35	—	1,07	1,53
Cadmium	0,108	4,76	13,2	52,8	1,29	2,72
Zink	0,187	2,75	16,4	49,0	2,78	4,11
Wolfram	0,280	1,83	15,9	8,83	4,05	6,66
Molybdän	0,298	1,72	15,9	5,02	4,31	7,60

Das Reflexionsvermögen bis zu Wellenlängen von  $12 \mu$  ist für eine beträchtliche Zahl von Metallen von Coblenz<sup>2)</sup> durch relative Messungen festgestellt worden. Die Werte von  $(1 - R)\sqrt{\lambda}$ , welche sich aus diesen Messungen ergeben, zeigen mit alleiniger Ausnahme des Zinns den charakteristischen Anstieg mit abnehmender Wellenlänge, jedoch konvergieren sie

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 14. p. 937. 1904.

2) W. W. Coblenz, Bulletin of the Bureau of Standards 2. p. 472. 1907 und 7. p. 198. 1911.

für sehr lange Wellen nicht immer gegen den durch die Leitfähigkeit bedingten Wert. Das hat seinen Grund darin, daß einerseits die Absolutwerte des Reflexionsvermögens nach den eigenen Angaben von Coblenz weniger genau bestimmt sind, als bei Hagen und Rubens, und daß andererseits die Leitfähigkeiten für die untersuchten Metallproben nicht genügend zuverlässig bekannt sind. Trotzdem lassen sich auch die

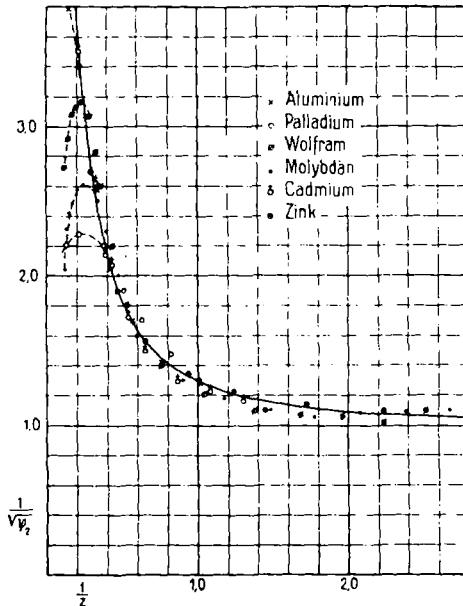


Fig. 5.

Coblenz'schen Messungen auf die theoretische Kurve reduzieren, wenn man nicht nur  $l$ , sondern — wo es nötig ist — auch die Leitfähigkeiten aus den Reflexionsversuchen bestimmt. In dieser Weise sind die Versuche an Aluminium, Palladium, Cadmium, Zink, Wolfram und Molybdän verwertet und einzelne Punkte, die sich aus den geglätteten Kurven ergeben, in Fig. 5 eingetragen worden.

Wie man sieht, ist der Anschluß an die theoretische Kurve wiederum sehr befriedigend. Die für die Reduktion benutzten Werte von  $q'$  finden sich in Tab. I, außerdem auch die der Umrechnung zugrunde gelegten Leitfähigkeiten  $\kappa'$ , wo diese

von den anderweitig bestimmten Werten  $\kappa_R$  abweichen. Für Zink und Cadmium ist der Unterschied zwischen den beiden Werten sehr erheblich, es muß aber betont werden, daß schon ein Fehler von wenigen Prozenten im Absolutwert des Reflexionsvermögens diesen Unterschied erklären würde. Die Werte von  $\kappa'$  sind darum auch weniger für die in Betracht kommende Leitfähigkeit, als für den Fehler im Reflexionsvermögen maßgebend. Demgemäß wurde auch für die Berechnung von  $N$  bzw.  $p$  die wahre Leitfähigkeit  $\kappa_R$  zugrunde gelegt. Unter diesen Umständen können bei Zink, Cadmium und wohl auch Wolfram und Molybdän die gefundenen Werte für  $l$  und  $N$  (bzw.  $p$ ) nur der Größenordnung nach als richtig angesehen werden. Immerhin ist es von Wichtigkeit, daß Formel (64) die Änderung des Reflexionsvermögens mit der Wellenlänge für eine ganze Gruppe von Metallen und einen beträchtlichen Bereich von Wellenlängen richtig wiedergibt.

Von den übrigen Metallen, die Coblenz untersucht hat, zeigen auch Rhodium, Vanadium, Iridium, Magnesium und Chrom die charakteristische Aufbiegung der Kurven, wenn auch weniger ausgeprägt, als die bisher besprochenen Metalle; Kobalt und Tantal schließen sich in ihrem Verhalten mehr der Gruppe Kupfer, Silber, Gold an und nur Zinn macht, wie schon erwähnt, eine Ausnahme (die Größe  $(1 - R)\sqrt{\lambda}$  ergibt sich ziemlich unabhängig von der Wellenlänge), was aber wohl auf mangelhafte Beschaffenheit des Zinnspiegels zurückzuführen ist.

Die Werte, die sich für die mittlere freie Weglänge nach der hier angegebenen Berechnungsart ergeben haben, sind wesentlich kleiner als diejenigen, welche Patterson<sup>1)</sup> aus der Widerstandsänderung der Metalle im Magnetfelde berechnet hat, doch wird man den aus den Weglängen und Leitfähigkeiten berechneten Werten von  $N$  und  $p$  eine gewisse Wahrscheinlichkeit nicht absprechen können. Dafür spricht schon, daß Meyer in dem einen Fall, in dem seine Rechnungen zu keinem Widerspruch führen, d. h. bei Quecksilber, die analogen Werte  $p_I = 2,13$ , bzw.  $p_{II} = 2,19$  gefunden hat. Es sei noch darauf hingewiesen, daß für diejenigen Metalle, bei denen die

1) J. Patterson, Phil. Mag. (6) 3. p. 655. 1902.

Beziehung (64) zutrifft, die Beobachtung des Reflexionsvermögens als Funktion der Wellenlänge bei verschiedenen Temperaturen die Abhängigkeit der Größen  $N$  und  $l$  von der Temperatur liefern würde. Daß für sehr lange Wellen die Temperaturabhängigkeit des Emissionsvermögens durch diejenige des elektrischen Widerstandes allein bestimmt ist, haben ja schon Hagen und Rubens nachgewiesen.

#### B. Nichtleiter.

Auch in der Theorie der Lichtausbreitung in nichtleitenden Substanzen ist die Absorption meistens (so in den Theorien von Helmholtz, Drude und Voigt) auf eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft zurückgeführt worden. Dieser phänomenologischen Betrachtungsweise stehen die Theorien von Lorentz<sup>1)</sup> und Planck<sup>2)</sup> gegenüber, in denen die Dämpfung eine physikalische Deutung erfährt. In der Planckschen Theorie wird die Dämpfung auf die eigene Ausstrahlung der von der Lichtbewegung ergriffenen Elektronen zurückgeführt; es ist bekannt, daß man auf diesem Wege zu dem Werte der Lichtzerstreuung gelangt, wie sie durch das Rayleighsche Gesetz gegeben ist, daß aber die daraus resultierende Schwächung viel zu gering ist, um die experimentell festgestellten Werte zu erklären. In der Lorentzschen Theorie handelt es sich dagegen um einen wirklichen Übergang von Strahlungs- in Wärmeenergie. Lorentz nimmt nämlich an, daß die Schwingungen der Elektronen zwar ungedämpft erfolgen, daß aber von Zeit zu Zeit die — aus der Lichtwelle stammende — Schwingungsenergie der Elektronen durch die von der Wärmebewegung herrührenden Stöße vernichtet, d. h. in ungeordnete Wärmebewegung übergeführt wird. Neuerdings hat Voigt<sup>3)</sup> außer der Wirkung der Stöße noch den Einfluß der thermischen Translation auf die Dämpfung berücksichtigt.

Die Lorentzsche Stoßtheorie hat durch neuere Messungen von Füchtbauer und Hofmann<sup>4)</sup> eine kräftige Stütze er-

1) H. A. Lorentz, *Amsterd. Proc.* p. 506, 555. 1898/99; p. 591. 1906.

2) M. Planck, *Berl. Ber.* p. 470. 1902; p. 480. 1903; p. 382. 1905.

3) W. Voigt, *Münchner Ber.* p. 603. 1912.

4) Chr. Füchtbauer u. W. Hofmann, *Ann.d. Phys.* 43. p. 96. 1914.



halten. Füchtbauer hatte nämlich aus der Lorentzschen Theorie gefolgert<sup>1)</sup>, daß bei leuchtenden Dämpfen auch durch den Zusatz eines neutralen Gases die Dämpfung zunehmen muß. Es ergab sich nun bei den erwähnten Messungen, daß in guter Annäherung die Breite des Halbwertsintervalls einer Absorptionslinie dem Druck direkt proportional, und die stärkste Absorption dem Druck umgekehrt proportional war, wie die Theorie es verlangt. Allerdings zeigte die Form der Absorptionskurve noch systematische Abweichungen von dem theoretischen Verlauf; auch erwies sich die Zahl der optisch wirksamen Stöße als 20—32 mal größer als die Zahl der aus der Gastheorie berechneten Zusammenstöße, so daß diese beiden Punkte noch der Aufklärung bedürfen.

Wir wollen uns hier ganz auf den Boden der Lorentzschen Auffassung stellen und nur zeigen, daß man durch andere Führung der Rechnung für gewisse Fälle zu einem neuen Ergebnis gelangen kann. Um die Vergleichung der phänomenologischen Dämpfung mit der Wirkung der Stöße durchzuführen, berechnet Lorentz den Mittelwert der Verschiebung  $\xi$ , welche ein quasielastisch gebundenes Elektron unter dem Einfluß einer periodischen elektrischen Kraft annimmt. Bezeichnet man mit

$$(1) \quad -h \frac{d\xi}{dt}, \quad -h \frac{d\eta}{dt}, \quad -h \frac{d\zeta}{dt}$$

die Größe der phänomenologischen Dämpfung, mit  $\tau$  die Zeit, während welcher im Mittel die Schwingungen ungestört verlaufen, so ergibt sich (mit Vernachlässigung eines Gliedes von der Ordnung  $1/\tau^2$ )

$$(2) \quad \frac{h}{m} = \frac{2}{\tau},$$

wo  $m$  wieder die Masse des Elektrons bedeutet.

Hier soll die Vergleichung in der Weise durchgeführt werden, daß die im Mittel während  $\tau$  aufgenommene Energie berechnet wird. Es sei

$$(3) \quad m \frac{d^2\xi}{dt^2} = \varepsilon E \cos(\nu t + \psi) - f\xi$$

die Bewegungsgleichung des Elektrons, wobei  $f$  die quasi-

1) Chr. Füchtbauer, Phys. Zeitschr. 12. p. 722. 1911.

elastische Kraft ist, die mit der Eigenperiode  $\nu_0$  in der Beziehung steht:

$$(4') \quad f = m \cdot \nu_0^2.$$

Wir nehmen an, daß zur Zeit  $t = 0$  sowohl  $\xi$ , wie  $d\xi/dt$  verschwindet; dann lautet das Integral von (3')

$$(5') \quad \xi = \frac{\varepsilon E}{m(\nu_0^2 - \nu^2)} \left\{ \cos(\nu t + \psi) - \cos \psi \cos \nu_0 t + \frac{\nu}{\nu_0} \sin \psi \sin \nu_0 t \right\}.$$

Folglich wird die während der Zeit 0 bis  $\vartheta$  aufgenommene Energie

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \int_0^{\vartheta} \varepsilon E \cos(\nu t + \psi) \cdot \frac{d\xi}{dt} dt = \frac{\varepsilon^2 E^2}{m(\nu_0^2 - \nu^2)} \left[ \frac{\cos^2(\nu \vartheta + \psi)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos^2 \psi}{2} + \nu_0 \cos^2 \psi B_1 - \nu \sin^2 \psi B_2 - \nu_0 \cos \psi \sin \psi B_3 \right. \\ &\quad \left. + \nu \cos \psi \sin \psi B_4 \right]; \end{aligned} \right.$$

dabei wurde gesetzt:

$$(7') \quad \left\{ \begin{aligned} B_1 &= \frac{\sin^2 \frac{\nu_0 + \nu}{2} \vartheta}{\nu_0 + \nu} + \frac{\sin^2 \frac{\nu_0 - \nu}{2} \vartheta}{\nu_0 - \nu}, \\ B_2 &= \frac{\sin^2 \frac{\nu_0 + \nu}{2} \vartheta}{\nu_0 + \nu} - \frac{\sin^2 \frac{\nu_0 - \nu}{2} \vartheta}{\nu_0 - \nu}, \\ B_3 &= \frac{\sin(\nu_0 - \nu) \vartheta}{2(\nu_0 - \nu)} - \frac{\sin(\nu_0 + \nu) \vartheta}{2(\nu_0 + \nu)}, \\ B_4 &= \frac{\sin(\nu_0 - \nu) \vartheta}{2(\nu_0 - \nu)} + \frac{\sin(\nu_0 + \nu) \vartheta}{2(\nu_0 + \nu)}. \end{aligned} \right.$$

Da nun für alle gleich langen Zeiten  $\vartheta$  jeder Wert der Phase  $\psi$  zu Beginn der Zeit  $\vartheta$  gleich wahrscheinlich ist, muß zunächst der Mittelwert von  $A$  über alle Werte von  $\psi$  gebildet werden. Es ergibt sich so:

$$(8') \quad \bar{A} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A d\psi = \frac{\varepsilon^2 E^2}{m(\nu_0^2 - \nu^2)} \left[ \frac{\nu_0 B_1}{2} - \frac{\nu B_2}{2} \right].$$

Bildet man nun noch den Mittelwert über alle Zeiten  $\vartheta$ , wobei wieder  $\tau$  die mittlere Zeit der ungestörten Energieaufnahme sein soll, so findet man

$$(9') \quad \bar{A} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} \bar{A} d\vartheta = \frac{\varepsilon^2 E^2}{2m} \left[ \frac{\nu_0^2 + \nu^2 + \frac{1}{\tau^2}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{2}{\tau^2}(\nu_0^2 + \nu^2) + \frac{1}{\tau^4}} \right].$$

Würde andererseits die Dämpfungskraft (1') wirken, so lautete die Bewegungsgleichung

$$(10') \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \varepsilon E \cos(\nu t + \psi) - f \xi - h \frac{d\xi}{dt},$$

und das Integral für den stationären Zustand wäre:

$$(11') \quad \begin{cases} \xi = \frac{\varepsilon E}{\sqrt{m^2(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 h^2}} \cos(\nu t + \psi - \varphi) \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\nu h}{m(\nu_0^2 - \nu^2)}. \end{cases}$$

Die während der Zeit 0 bis  $\vartheta$  durch Reibung verlorene Energie wird also dann

$$(12') \quad \begin{cases} E = \int_0^{\vartheta} h \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 dt = \frac{h \nu^2 \varepsilon^2 E^2}{m^2(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \nu^2 h^2} \cdot \frac{1}{\nu} \left[ \frac{\nu \vartheta + \psi - \varphi}{2} - \frac{\psi - \varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(\nu \vartheta + \psi - \varphi) + \frac{1}{4} \sin 2(\psi - \varphi) \right]. \end{cases}$$

Hier ist nun für  $\psi$ , also auch für  $\psi - \varphi$  jeder Wert gleich wahrscheinlich; bildet man also wie oben den Mittelwert über alle  $(\psi - \varphi)$  und alle  $\vartheta$ , so ergibt sich

$$(13') \quad \bar{E} = \frac{\nu^2 \varepsilon^2 E^2 \cdot h \tau}{2 m^2 (\nu_0^2 - \nu^2)^2 + 2 \nu^2 h^2}.$$

Aus dem Vergleich von (9') mit (13') ergibt sich der Wert der Dämpfungskonstanten  $h$ , welchem die Wirkung der Stöße äquivalent ist. Wir betrachten zwei spezielle Fälle. Es sei erstens  $\nu$  erheblich von  $\nu_0$  verschieden und die Dämpfung so schwach, daß  $(h/m)^2$  bez.  $(1/\tau)^2$  neben  $(\nu_0^2 - \nu^2)$  vernachlässigt werden darf; dann ergibt sich

$$(14') \quad \frac{h}{m} = \frac{1}{\tau} \frac{\nu_0^2 + \nu^2}{\nu^2}.$$

Es werde zweitens nur die unmittelbare Nachbarschaft der Eigenschwingung betrachtet, also

$$\nu = \nu_0 + \mu$$

gesetzt, und es sei wiederum die Dämpfung so schwach, daß die Quotienten  $h/m \cdot \nu_0$ ,  $1/\tau \cdot \nu_0$ ,  $\mu/\nu_0$  neben 1 vernachlässigt werden können. Man findet dann

$$(15') \quad \frac{h}{m} = \frac{2}{\tau}$$

in Übereinstimmung mit (2').

Während also die hier durchgeführte Rechnung für die unmittelbare Umgebung einer schmalen Absorptionslinie das gleiche Resultat liefert, wie es Lorentz abgeleitet hat, trifft das für Gebiete außerhalb einer Absorptionslinie nicht mehr zu. Nun ist es an sich nicht verwunderlich, daß die Mittelwertbildung über den linearen Ausdruck (die Verschiebung  $\xi$ ) einen anderen Wert liefert, als die Mittelwertbildung über den quadratischen Ausdruck (die Energie), aber es ist doch merkwürdig, daß (14') unter Umständen sehr verschieden von (15') sein kann.

Will man zu den Absorptionskoeffizienten übergehen, so braucht man nur die Werte (14') bez. (15') in die bekannten Formeln einzuführen; man kann aber auch direkt von der Formel (9') zu dem Ausdruck für den Absorptionskoeffizienten gelangen. Bedeutet nämlich  $E$  wie oben die Amplitude der elektrischen Feldstärke in der Lichtwelle, so ist bei schwacher Absorption, die wir voraussetzen wollen,  $nE$  die Amplitude der magnetischen Feldstärke, wenn  $n$  den reellen Brechungsindex darstellt. Ferner kann bei schwacher Absorption die Phasenverschiebung der magnetischen Feldstärke gegen die elektrische vernachlässigt werden, und die Energie, welche im Mittel während der Zeit  $dt$  auf eine zur Strahlungsrichtung  $z$  senkrechte Flächeneinheit fällt, wird nach dem Poynting'schen Satz:

$$(16') \quad J = \frac{c}{4\pi} \frac{n E^2}{2} dt.$$

Während derselben Zeit  $dt$  wird in einer Schicht von der Dicke  $dz$  der Energiebetrag

$$(17') \quad -dJ = \frac{\bar{A} N dx dt}{\tau}$$

absorbiert, wenn  $N$  Elektronen pro Kubikzentimeter vorhanden sind, deren jedes im Mittel in der Zeit  $\tau$  den Energiebetrag  $\bar{A}$

aufnimmt. Aus (16') und (17') ergibt sich unter Berücksichtigung von (9'):

$$(18') \quad \begin{cases} J = J_0 e^{-\alpha z}, \\ \alpha = \frac{4 \pi \epsilon^2 N}{m} \cdot \frac{1}{c n \tau} \left[ \frac{\nu_0^2 + \nu^2 + \frac{1}{\tau^2}}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2 + \frac{2}{\tau^2}(\nu_0^2 + \nu^2) + \frac{1}{\tau^4}} \right]. \end{cases}$$

Aus dieser Ableitungsweise ergibt sich zugleich, daß es gerechtfertigt ist, die im Mittel während der Zeit  $\tau$  aufgenommene Energie der Berechnung der Dämpfungskonstanten zugrunde zu legen.

Betrachten wir nun wieder die beiden oben auf p. 1243, 1244 charakterisierten Spezialfälle und berücksichtigen die dort angegebenen Größenbeziehungen, so ergibt sich bei schwacher Dämpfung außerhalb einer Absorptionsbande

$$(19') \quad \alpha = \frac{4 \pi \epsilon^2 N}{m} \cdot \frac{1}{c n} \frac{\nu_0 + \nu^2}{(\nu_0^2 - \nu^2)^2},$$

und für eine schmale Absorptionslinie

$$(20') \quad \alpha = \frac{4 \pi \epsilon^2 N}{m} \cdot \frac{1}{c n} \frac{\frac{2}{\tau}}{4 \mu^2 + \frac{4}{\tau^2}}.$$

In der letzten Formel kann man nun noch, wenn die Änderung des Brechungsindex  $n$  im Gebiet des Absorptionsstreifens als kleine Größe betrachtet wird (was mit der Annahme schwacher Absorption übereinstimmt<sup>1)</sup>),  $n$  durch den konstanten Wert  $n_0$  ersetzen; führt man ferner nach Formel (57) p. 1229 die Größe  $\rho$  ein und berücksichtigt, daß der Koeffizient  $\alpha$  der Gleichung (18') mit dem von Voigt benutzten  $n \kappa$  in der Beziehung steht

$$n \kappa = \frac{c \alpha}{2 \nu},$$

so ergibt sich aus (20') mit dem angegebenen Genauigkeitsgrade

$$(21') \quad n \kappa = \frac{\rho \cdot \frac{2}{\tau}}{2 n_0 \nu_0 \left( 4 \mu^2 + \frac{4}{\tau^2} \right)}.$$

1) Man vgl. W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, p. 113.

Dieser Ausdruck ist in völliger Übereinstimmung mit demjenigen, der sich unter den gleichen Einschränkungen aus der Voigtschen Theorie ergibt, wenn die Lorentzsche Beziehung (15') statt hat.<sup>1)</sup> Es bleiben also auch alle Folgerungen bestehen, welche insbesondere Füchtbauer und Hofmann an sie geknüpft haben.

Dagegen stellt (19') eine neue Beziehung dar. Sie ergibt sich natürlich auch, wenn man den Wert (14') für die Dämpfungskonstante in die bekannten Formeln für den Absorptionskoeffizienten einführt.<sup>2)</sup> Die Voraussetzungen, welche zur Ableitung von Formel (19') führten, dürften am ehesten bei Gasen zutreffen. Beschränkt man sich demgemäß auf solche, setzt also  $n = 1$ , und nimmt weiter an, daß nur eine Eigenschwingung vorhanden ist, die so weit im Ultravioletten liegt, daß man  $\nu^2$  neben  $\nu_0^2$  vernachlässigen kann, so ergibt sich

$$(22') \quad \alpha = \frac{\rho}{c \tau \nu_0^2}.$$

Der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  der Gleichung (18') wird also unabhängig von der Periode und proportional dem Quadrat des Drucks, da  $\rho$  der Teichenzahl  $N$  proportional und  $\tau$  dem Druck umgekehrt proportional ist, wenn  $\tau$  durch die Stöße zwischen den Gasmolekülen bestimmt wird. Direkte Beobachtungen über die Absorption von Gasen im Gebiete normaler Dispersion weit außerhalb von Absorptionsbanden liegen wohl noch nicht vor, doch findet die soeben gefolgerte Unabhängigkeit der Lichtabsorption von der Wellenlänge eine Bestätigung in den Beobachtungen über die Lichtabsorption der Atmosphäre.

Bezeichnet man mit  $J_h$  die Intensität des Sonnenlichtes im Zenit in der Höhe  $h$  über dem Erdboden, also insbesondere mit  $J_\infty$  die Intensität außerhalb der Atmosphäre, so nennt man  $J_h/J_\infty$  den Transmissionskoeffizienten der Atmo-

1) Man vgl. W. Voigt, Magneto- u. Elektrooptik, p. 112, Formel (29).

2) Z. B. W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik p. 108, Formel (19), wenn darin wie oben  $(\nu \nu')^2$  neben  $(\nu_0^2 - \nu^2)^2$  vernachlässigt wird.

sphäre für die Höhe  $h$ , und es hat sich ergeben, daß dieser sich in der Form

$$(23') \quad \frac{J_h}{J_\infty} = e^{-c_h}$$

darstellen läßt, wo

$$(24') \quad c_h = \beta_h \cdot \lambda^{-4} + \gamma_h,$$

und  $\beta_h$  und  $\gamma_h$  für jede Höhe konstant sind. Das erste,  $\lambda^{-4}$  proportionale Glied findet seine Deutung in der schon oben erwähnten Rayleighschen Streuung, und zwar erfolgt diese — wie der numerische Betrag von  $\beta$  lehrt — an den Luftmolekülen selbst.<sup>1)</sup> Das zweite Glied  $\gamma_h$  wurde bisher hinzugefügt, um den Ergebnissen der Beobachtung Rechnung zu tragen, und King hat darum in seiner ausgedehnten theoretischen Untersuchung über den Gegenstand angenommen, daß in jedem Volumelement der Atmosphäre ein von der Wellenlänge unabhängiger, dem Druck proportionaler Bruchteil der Strahlungsenergie in Wärmebewegung umgesetzt wird. Durch die hier gegebenen Betrachtungen findet also auch das zweite Glied in (24') seine theoretische Deutung. Es muß hervorgehoben werden, daß eine von der Periode unabhängige Dämpfungskonstante, wie sie die Lorentzsche Theorie in Formel (2) liefert, zu einem Gesetz von der Form

$$c_h = \beta_h \cdot \lambda^{-4} + \gamma_h \cdot \lambda^{-2}$$

führen würde, und mit dieser Formel lassen sich die Beobachtungen über die atmosphärische Absorption nicht in Einklang bringen.

Die von King aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte lassen sich nun auch dazu verwenden, den absoluten Betrag von  $\alpha$  für Luft von Atmosphärendruck und daraus dann mit Hilfe der Dispersionsdaten den in Betracht kommenden Wert von  $\tau$  zu bestimmen. Die Zahlen von King müssen jedoch noch einer Umrechnung unterzogen werden, da King — wie schon erwähnt —  $\alpha$  dem Druck proportional setzt, während es nach (22') dem Quadrat des Druckes proportional zu setzen ist.

1) L. V. King, Philos. Trans. A. 212. p. 375. 1912.

Man hat demnach für die Höhe  $h$  über dem Erdboden

$$(25') \quad \alpha_h = \frac{p_0}{c \nu_0^2} \cdot e^{-\frac{2h}{H}} = \alpha_0 e^{-\frac{2h}{H}},$$

wo sich der Index Null auf die Erdoberfläche bezieht, und  $H = 7,988 \cdot 10^5$  die Höhe der homogenen Atmosphäre bedeutet. Es ist wohl für die vorliegenden Zwecke unbedenklich, das einfache Exponentialgesetz für den Druckgradienten anzunehmen, da ja die Absorption nur in den untersten Schichten merklich in Betracht kommt und für diese das genannte Gesetz genügend genau erfüllt ist.<sup>1)</sup>

Gemäß (25') ist der Energieverlust in einer Schicht von der Höhe  $dh$

$$dJ = \alpha_h J dh = \alpha_0 J e^{-\frac{2h}{H}} dh,$$

oder integriert

$$(26') \quad \frac{J_h}{J_\infty} = e^{-\gamma_h},$$

wo nun

$$(27') \quad \gamma_h = \frac{H}{2} \alpha_0 e^{-\frac{2h}{H}}$$

der Anteil von (24') ist, der auf wahrer Energieabsorption beruht. Da nun

$$p_h = p_0 e^{-\frac{h}{H}}$$

ist, ergibt sich aus (27')

$$(28') \quad \alpha_0 = \frac{2 \gamma_h}{H} \left( \frac{p_0}{p_h} \right)^2.$$

Die Größe  $\gamma_h$  ist aus den Beobachtungen bekannt, und daraus berechnet sich vermöge (28') der Wert  $\alpha_0$  für Atmosphärendruck. Da King direkte Proportionalität von  $\alpha$  mit dem

---

1) Die Kingschen Entwicklungen sind unabhängig von der speziellen Form des Druckgradientengesetzes, gelten aber nur, wenn die Absorption in jedem Volumelement der dort herrschenden Dichte proportional ist.



Druck annimmt, berechnet sich bei ihm  $\alpha_0$  durch die analoge Gleichung<sup>1)</sup>

$$(29') \quad \alpha_0 = \frac{\gamma_h}{H} \frac{p_0}{p_h}.$$

Infolgedessen ist der von King berechnete Wert von  $\alpha_0$  noch mit  $2 p_0/p_h$  zu multiplizieren. Nun findet King aus den Abbotschen Beobachtungen für die beiden höchsten Stationen, für welche ein Staubgehalt der Atmosphäre nicht mehr in Betracht kommt, nämlich Mount Wilson ( $h = 1780$  m;  $p = 617$  mm Hg) und Mount Whitney ( $h = 4420$  m;  $p = 446,7$  mm Hg) den übereinstimmenden Wert  $\alpha_0 = 4,0 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>-1</sup>. Folglich lauten die umgerechneten Werte  $\alpha_0 = 9,9 \cdot 10^{-8}$  für Mount Wilson, und  $\alpha_0 = 13,6 \cdot 10^{-8}$  für Mount Whitney. Die Werte stimmen nicht mehr untereinander überein, weil die geraden Linien in den Diagrammen bei King so gelegt sind, daß dem Gesetz  $\alpha_0/\alpha_h = p_0/p_h$  genügt wird; man kann, ohne den Beobachtungen Zwang anzutun, die Geraden auch so legen, daß die Berechnung nach (28') übereinstimmende Werte liefert. Zieht man auch noch die Beobachtungen für Potsdam ( $h = 100$  m) und Washington ( $h = 10$  m) heran, so wird sogar die Übereinstimmung besser als bei King, so daß man dem Staub nur mehr einen geringeren Einfluß einzuräumen braucht.<sup>2)</sup>

1) King schreibt  $\gamma \cdot p_h/p_0$  für das  $\gamma_h$  der Gleichung (24'). (Man vgl. Formel (76)); infolgedessen lautet (29') bei King:  $\gamma = \alpha_0 H$  (cf. p. 394 vor Formel (73)).

2) *Anm. bei der Korrektur.* Die Arbeit von F. E. Fowle (Astrophys. Journ. 38. p. 392. 1913) war dem Verfasser leider entgangen. Nach Fowle ist der Koeffizient  $\gamma_h$  der Gleichung (24') nur auf die Anwesenheit von Wasserdampf zurückzuführen und würde für trockene Luft verschwinden. Es muß wohl vorläufig dahingestellt bleiben, in wie weit diese Auffassung in Strenge zutrifft. E. Kron (Ann. d. Phys. 45. p. 377. 1914) findet zwar in seiner soeben erschienenen Arbeit eine vollständige Übereinstimmung seiner Potsdamer Beobachtungen mit der Fowleschen Auffassung; aber es folgt aus den am Schluß der Kronschen Arbeit mitgeteilten Rechnungen, daß diese Übereinstimmung für die Abbotschen Beobachtungen gerade auf der höchsten Station nicht mehr statt hat. Bei letzteren müßte nämlich ein *negativer* Wasserdampfgehalt der Luft angenommen werden, um Übereinstimmung mit den Fowleschen Zahlen zu erzielen. — Jedenfalls ergibt die im Text mitgeteilte Rechnung eine obere Grenze für die dämpfende Wirkung der Stöße.

Für die vorliegenden Zwecke folgern wir aus den Beobachtungen bei staubfreier Luft:

$$(30) \quad \alpha_0 = 1,18 \cdot 10^{-7} \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Um nun von  $\alpha_0$  zu dem Werte von  $\tau$  zu gelangen, bedürfen wir nach (22') noch der Kenntnis von  $\rho_0$  und  $\nu_0$ . Beide Konstanten gewinnen wir aus den Dispersionsbeobachtungen, da ja die Dispersionsformel in der Voigtschen Schreibweise lautet<sup>1)</sup>

$$n - 1 = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\nu_0^2 - \nu^2}.$$

Nun ist nach den Beobachtungen von C. und M. Cuthbertson<sup>2)</sup> für Luft von Atmosphärendruck

$$n - 1 = \frac{4 \pi^2 \cdot 4,6463 \cdot 10^{27}}{4 \pi^2 \cdot 16125 \cdot 10^{27} - \nu^2},$$

woraus sich ergibt

$$(31') \quad \rho_0 = 3,66 \cdot 10^{29}; \quad \nu_0 = 2,52 \cdot 10^{16}.$$

Mit Hilfe dieser Werte und (30') findet man aus (22')

$$(32') \quad \tau = 1,6 \cdot 10^{-7}.$$

Dieser Wert ist sehr viel kleiner, als die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen, die für Luft von Atmosphärendruck von der Größenordnung  $10^{-10}$  ist. Es ist auffallend, daß sich nach dem Befund von Füchtbauer die Dämpfung in einer Absorptionslinie *stärker* ergibt, als aus der Zahl der gaskinetischen Stöße folgen würde, während hier gerade das Umgekehrte vorliegt. Jedenfalls ist letzteres einfacher zu erklären, da man nur anzunehmen braucht, daß bei jedem Stoße nur ein kleiner Bruchteil der Schwingungsenergie in Energie der ungeordneten Bewegung umgesetzt wird; es kann auch sehr wohl sein, daß auf Grund einer anderen Annahme über den Verlauf des Druckgradienten die numerischen Verhältnisse sich noch einigermaßen verschieben. Immerhin

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, p. 109 Formel (20).

2) C. u. M. Cuthbertson, Proc. Roy. Soc. 83. p. 151. 1909.

erscheint es von Wichtigkeit, daß sich die beobachtete Unabhängigkeit der Lichtabsorption von der Wellenlänge auf Grund der Annahme erklären läßt, daß für jeden Druck die Energie der Strahlung im Mittel während einer ganz bestimmten Zeit  $\tau$  ungestört aufgenommen wird.

#### Zusammenfassung.

##### A. Metalle.

Die Lorentzsche Theorie der metallischen Leitfähigkeit wurde auf den Fall schnell veränderlicher, periodischer Felder ausgedehnt. Aus der erhaltenen Formel für die Leitfähigkeit wurden die optischen Konstanten abgeleitet.

Es ergibt sich, daß zwei Ausdrücke, welche für das optische Verhalten charakteristisch sind (Formel (46) und (47)) universelle Funktionen eines einzigen Arguments sind; dieses Argument ist dem Verhältnis der Zahl der Schwingungen zur Zahl der Stöße pro Sekunde proportional.

Die aufgestellten Formeln zeigen numerisch nur unbedeutliche Abweichungen von denen der Drudeschen Theorie, welche eine konstante, der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft annimmt.

Unter der Annahme, daß die Dielektrizitätskonstante keine erheblichen Werte annimmt, wurde eine Formel für die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von der Wellenlänge aufgestellt.

Diese Formel ist in quantitativer Übereinstimmung mit den Beobachtungen an der Mehrzahl der untersuchten Metalle. Infolge dieser Übereinstimmung lassen sich die Anzahl und die mittlere freie Weglänge der Elektronen einzeln bestimmen.

##### B. Nichtleiter.

Die Vergleichung der mit der Geschwindigkeit proportionalen „phänomenologischen“ Dämpfung mit der von Lorentz betrachteten dämpfenden Wirkung von Molekularstößen wurde auf eine neue Weise durchgeführt und daraus der Wert des Absorptionskoeffizienten — bei schwacher Absorption — abgeleitet.

Das Ergebnis stimmt nur im Bereich einer schmalen Absorptionslinie mit der Lorentzschen Rechnung überein; für

Gebiete außerhalb der Absorptionslinien ergibt sich die Dämpfung abhängig von der Schwingungszahl.

Für Gase mit nur einer ultravioletten Eigenschwingung ergibt sich daraus der Absorptionskoeffizient (auf die Längeneinheit bezogen) unabhängig von der Schwingungszahl. Diese Folgerung ist in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Beobachtungen über atmosphärische Lichtabsorption.

Leipzig, im September 1914.

(Eingegangen 17. September 1914.)

---