

Sopra un problema proposto da Dirichlet (*)

(del prof. E. B. CHRISTOFFEL, a Berlino).

I.

Da una comunicazione verbale, che debbo al sig. HEINE, ho appreso che DIRICHLET, verso l'anno 1840, o poco dopo, ha ripetutamente invocata l'attenzione dei suoi scolari d'allora sul problema delle temperature stazionarie, mettendo particolarmente in rilievo, come una specie di problemi che meritava d'essere studiata di preferenza per la sua difficoltà, la distribuzione delle temperature su quelle superficie piane, e in quegli spazii a tre dimensioni, che si ottengono togliendo via una figura finita in ogni senso da un piano infinito, o dallo spazio infinito.

Ogni problema di questa specie è visibilmente associato ad un altro problema determinato, del genere di quelli già trattati; ma mentre, per es., la determinazione delle temperature stazionarie sopra una superficie rettangolare F non offre alcuna difficoltà, il problema associato delle temperature stazionarie sulla superficie complementare F' è rimasto completamente inaccessibile ai metodi adoperati finqui. Lo stesso può dirsi di tutti gli altri problemi di questa specie, tranne di quelli che riguardano le figure complementari del circolo e della sfera; ed io credo quindi di poter fare assegnamento sull'interesse dei lettori di questi *Annali* esponendo, in connessione col mio precedente lavoro, i principii che possono servire di base alla soluzione del problema di DIRICHLET per la figura complementare F' di un poligono piano.

(*) Addizione alla Memoria inserita in questi *Annali*, tom. I (2^a serie), pag. 89.

Annali di Matematica, tomo IV.

Riflettendo che la superficie F' si estende all'infinito, e, adottando una generalizzazione indispensabile per ben penetrare nella quistione analitica, il problema dev'essere formulato come segue:

In ogni punto della superficie F' riferita alle coordinate rettangole x, y , la funzione U è monodroma e continua insieme colle sue derivate prime, che si annullano all'infinito. Sul contorno di questa superficie si ha

$$U = \psi(x, y)$$

e nell'interno di essa

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \phi(x, y);$$

con queste condizioni si deve determinare U in ogni punto ò di F' . Ponendo $\phi = 0$, si ha il problema proposto da DIRICHLET. Ma è per ogni riguardo preferibile, come ho già notato nel mio precedente lavoro, introdurre un termine indipendente, e ciò vale per tutte le equazioni differenziali lineari, sì ordinarie che parziali. La questione delle restrizioni che risultano per ϕ e ψ dalle restanti condizioni non è nel caso presente che di secondaria importanza.

Tenendo il debito conto di tutte le condizioni relative all'infinito, si riconosce facilmente che all'attuale problema si possono applicare tutti i principii stabiliti negli art. I-IV del mio precedente lavoro, nella supposizione d'una superficie F' d'estensione finita. Passo dunque senz'altro alla soluzione del problema seguente, al quale, come ho ivi dimostrato, il precedente può essere rinvocato.

È dato un altro piano riferito a coordinate rettangole X, Y , di cui E è la parte sulla quale $Y > 0$. Si deve rappresentare la superficie E sopra F' .

II.

Siano distese sui piani delle $Z = X + iY$ e $z = x + iy$ due superficie Φ, ϕ a un solo strato e semplicemente connesse. Affinchè queste superficie siano rappresentate l'una sull'altra per mezzo d'un'equazione fra Z e z , bisogna e basta che quest'equazione soddisfaccia alle condizioni seguenti:

1.° Ad un giro positivo intorno ad una delle due superficie deve corrispondere, in virtù di quest'equazione, un giro positivo intorno all'altra.

2.° Nell'interno delle due superficie, — ciò che non sempre sarebbe possibile sul loro contorno, — deve sussistere una perfetta eguaglianza degli angoli corrispondenti.

In luogo dell'eguaglianza degli angoli si può ancora prescrivere che ad ogni punto dell'una superficie corrisponda un unico punto dell'altra, variabile con continuità insieme col primo. Le condizioni a ciò necessarie e sufficienti sono le seguenti. Se Φ si estende all'infinito e se il punto infinitamente lontano di Φ viene rappresentato sopra ϕ da un punto a distanza finita, bisogna che in questo punto $\frac{dz}{dZ}$ diventi infinitesima come $\frac{a}{Z^2}$, dove a è una costante diversa da zero. Se ϕ si estende all'infinito e se il punto infinitamente lontano di ϕ viene rappresentato sopra Φ da un punto Γ a distanza finita, bisogna che in questo punto $\frac{dz}{dZ}$ diventi discontinua come $\frac{b}{(Z-\Gamma)^2}$, o più esattamente, che la differenza di queste due quantità resti continua in tal punto; b è parimenti una costante diversa da zero. In ogni altro punto di ϕ o di Φ la derivata $\frac{dz}{dZ}$ non deve diventare nè polidroma, nè nulla, nè infinita.

Prendiamo per Φ il mezzo piano E e per ϕ una delle due superficie F , F' . Il contorno di ϕ è formato in ambedue i casi del poligono P , che separa F da F' ; indichiamo con z_1, z_2, \dots, z_n i vertici di P , presi nell'ordine in cui sono percorsi durante un giro positivo intorno ad F , e con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gli angoli corrispondenti a questi vertici e rivolti verso l'interno della superficie F .

Siano ora a_1, a_2, \dots, a_n quei punti dell'asse delle X che nella rappresentazione di E sopra la superficie F vengono rappresentati dai vertici di P . Poichè ad un giro positivo intorno ad F corrisponde un giro positivo intorno ad E , le quantità a si presentano in quest'ultimo giro nell'ordine $a_1 a_2 \dots a_n a_1 a_2 \dots$, talchè per es. se il punto infinitamente lontano di E viene rappresentato sul lato $z_p z_{p+1}$ di P , si ha

$$a_{p+1} < a_{p+2} < \dots < a_n < a_1 < a_2 < \dots < a_p.$$

Ciò posto, dall'art. V della mia precedente Memoria si ricava, per la rap-

presentazione di E sopra F , la formola

$$f(Z) \frac{dz}{dZ} = \chi,$$

dove il fattore

$$f(Z) = (a_1 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} (a_2 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \dots (a_n - Z)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}}$$

è scelto in modo che durante un giro positivo intorno ad E il suo argomento decresca di tanto, di quanto cresce l'argomento di dz durante un giro simultaneo intorno ad F . Conseguentemente lungo l'asse delle X , dove $dZ = dX$, l'argomento di χ , ovvero la parte imaginaria di $\log \chi$, è costante; dal ch  nel luogo citato si   dedotto che la stessa quantit  χ   costante. Indicandola con α si ha cos , per la rappresentazione di E sopra F , l'equazione

$$f(Z) dz = \alpha dZ.$$

III.

Per conseguire, rispetto alla superficie complementare F' , lo stesso intento che per mezzo del fattore $f(Z)$ si   raggiunto rispetto alla superficie F , bisogna innanzi tutto surrogare gli angoli λ , che ora diventano angoli esterni, con $2\pi - \lambda$, con ch  l'esponente $\frac{\pi - \lambda}{\pi}$ diventa $\frac{\lambda - \pi}{\pi}$, mutando solo il segno. Ma ci  non basta; poich  essendosi, insieme col giro positivo intorno a P , invertita la successione dei vertici, la stessa cosa ha luogo per i punti dell'asse delle X in cui questi sono rappresentati. Quindi le quantit  reali a_1, a_2, \dots, a_n devono essere surrogate da altre a'_1, a'_2, \dots, a'_n che in un giro positivo intorno ad E devono succedersi nell'ordine $a'_n, a'_{n-1}, \dots, a'_2, a'_1, a'_n$. Indicando con $g(Z)$ il valore reciproco dell'espressione in cui si converte per tal modo $f(Z)$, ci  ponendo

$$(a'_1 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} (a'_2 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \dots (a'_n - Z)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}} = g(Z),$$

si ottiene cos , per la rappresentazione di E sopra F' , l'equazione

$$\frac{1}{g(Z)} \frac{dz'}{dZ} = \chi,$$

dove i punti di F' sono designati con z' , e dove χ deve soddisfare alle seguenti condizioni:

1.° Lungo l'asse delle X è costante la parte imaginaria di $\log \chi$.

Inoltre siccome il punto infinitamente lontano di E viene rappresentato sul contorno di F' , cioè in un punto a distanza finita, bisogna che in questo punto la derivata $\frac{dz'}{dZ}$ diventi infinitesima come $\frac{a}{Z^2}$, e quindi, poichè $g(Z)$ diventa nello stesso punto infinita del secondo ordine, bisogna che χ diventi infinitesima del quarto: dunque

2.° Nel punto infinitamente lontano di E la quantità $\chi \cdot Z^4$ resta finita e diversa da zero.

Ora se $\Gamma = A + iB$ è quel punto di E nel quale viene rappresentato il punto infinitamente lontano di F' , si ha in esso

$$\chi \cdot g(Z) = \frac{dz'}{dZ} = \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

e poichè $g(Z)$ è monodroma, continua e diversa da zero in Γ , si deve avere in questo punto

$$\chi = \frac{c}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{d}{Z-\Gamma} + \text{funz. cont.}$$

Di qui segue che in prossimità di Γ dev'essere

$$\left[\frac{c}{(Z-\Gamma)^2} + \frac{d}{Z-\Gamma} + \text{funz. cont.} \right] \left[g(\Gamma) + g'(\Gamma)(Z-\Gamma) + \dots \right] = \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

al chè è necessario e sufficiente che sia $d \cdot g(\Gamma) + c \cdot g'(\Gamma) = 0$. Dunque

3.° Nel punto Γ di E la funzione χ diventa discontinua come

$$c \left[\frac{1}{(Z-\Gamma)^2} - \frac{g'(\Gamma)}{g(\Gamma)} \frac{1}{Z-\Gamma} \right].$$

E dopo ciò finalmente:

4.° In ogni altro punto di E la funzione χ è monodroma, continua e diversa da zero.

È facile formare un'espressione che soddisfaccia alle condizioni trovate per χ . Indicando con $\Gamma' = A - iB$ il punto conjugato di Γ e ponendo

$$\phi(Z) = (Z-\Gamma)(Z-\Gamma') = (Z-A)^2 + B^2,$$

l'espressione

$$\psi = \frac{1}{\varphi^2}$$

soddisfa manifestamente alle condizioni 1, 2 e 4. In prossimità di Γ si ha

$$\psi = \frac{1}{(\Gamma - \Gamma)^2} \left[\frac{1}{(Z - \Gamma)^2} - \frac{2}{\varphi'(\Gamma)} \frac{1}{Z - \Gamma} \right] + \text{funz. cont.};$$

quindi assoggettando Γ alla condizione

$$\frac{2}{\varphi'(\Gamma)} = \frac{g'(\Gamma)}{g(\Gamma)},$$

la funzione ψ acquista tutte le proprietà volute per χ , epperò non resta che esaminare se, oltre ψ , possano esistere altre funzioni dotate delle stesse proprietà.

Ora dall'espressione di ψ e dalle condizioni per χ emerge che il quoziente $\frac{\chi}{\psi}$ è monodromo, continuo e diverso da zero in ogni punto di E , epperò che il suo logaritmo è monodromo e continuo. Inoltre sul contorno di E la parte imaginaria di $\log \frac{\psi}{\chi}$ è costante, epperò essa è tale anche su tutta la superficie E , donde segue che lo stesso ha luogo per la parte reale e quindi finalmente per la stessa quantità $\frac{\chi}{\psi}$. Abbiamo dunque in generale $\chi = \beta\psi$, indicando con β una costante, e possiamo così formulare il seguente teorema:

La rappresentazione di E nei punti z e z' del poligono F e della superficie complementare F' è data dalle equazioni:

$$\begin{aligned} dz &= \alpha (a_1 - Z)^{\frac{\lambda_1 - \pi}{\pi}} (a_2 - Z)^{\frac{\lambda_2 - \pi}{\pi}} \dots (a_n - Z)^{\frac{\lambda_n - \pi}{\pi}} dZ, \\ dz' &= \beta (a'_1 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_1}{\pi}} (a'_2 - Z)^{\frac{\pi - \lambda_2}{\pi}} \dots (a'_n - Z)^{\frac{\pi - \lambda_n}{\pi}} \frac{dZ}{[\varphi(Z)]^2}, \\ \phi(Z) &= (Z - A)^2 + B^2, \end{aligned}$$

dove le quantità costanti reali A e B sono determinate dalla condizione che la quantità

$$\frac{2}{\varphi'(Z)} - \frac{g'(Z)}{g(Z)}$$

si annulli insieme con $\phi(Z)$, riservando in ambedue i casi le opportune determinazioni circa i parametri e circa il significato delle potenze fratte.

Che l'espressione

$$\frac{2}{\phi'(Z)} - \frac{g'(Z)}{g(Z)} = \frac{1}{Z-A} - \sum \frac{\pi-\lambda}{\pi} \frac{1}{Z-a'}$$

debba annullarsi non solo per $Z=\Gamma$, ma anche per $Z=\Gamma'$, risulta dalla circostanza che all'infuori di Z essa non contiene che quantità reali.

Se la condizione per Γ si pone sotto la forma

$$\sum (\pi-\lambda) \frac{\Gamma'-a'}{\Gamma-a'} = 0,$$

si può facilmente rilevarne il significato geometrico. Si immagini uno qualunque dei poligoni Π , che possono essere costruiti coi valori assoluti dei numeri

$$\pi-\lambda_1, \quad \pi-\lambda_2, \dots \quad \pi-\lambda_n$$

assunti in ordine qualsivoglia come lunghezze dei lati, e si scelga come positiva la direzione di un giro arbitrario intorno al medesimo. Ciò posto, considerando la direzione di un lato come eguale a quella di un giro positivo o di un giro negativo intorno a Π , secondo che il corrispondente numero $\pi-\lambda$ è positivo o negativo, l'equazione precedente prescrive che i raggi $a'_1\Gamma$, $a'_2\Gamma, \dots a'_n\Gamma$ siano paralleli alle bisettrici degli angoli che l'asse positivo delle X fa colle direzioni dei lati $\pi-\lambda_1, \pi-\lambda_2, \dots, \pi-\lambda_n$.

IV.

Se supponiamo che gli angoli di F abbiamo rapporti razionali, le derivate $\frac{dz}{dZ}$ e $\frac{dz'}{dZ}$ sono funzioni algebriche di Z , la cui classe comune può essere facilmente determinata in ciascun caso particolare. Sia infatti T la superficie ad N strati che rappresenta il modo di diramazione di queste funzioni, e di cui E è un mezzo strato. Primieramente si vede che z è un integrale di prima specie coordinato a questa superficie. Rispetto a z' convien riflettere che nel punto Γ di E si ha

$$\frac{dz'}{dZ} = \frac{b}{(Z-\Gamma)^2} + \text{funz. cont.},$$

ora la condizione mediante la quale venne rimosso da questo sviluppo il termine contenente $\frac{1}{Z-\Gamma}$, e quindi esclusa una diramazione logaritmica di z' , non sussiste per il solo punto Γ di E , ma venendo soddisfatta anche da $Z=\Gamma'$ ed essendo inoltre razionale, dà luogo allo stesso risultato per tutti i punti di T in cui Z è $=\Gamma$, oppure $=\Gamma'$. Conseguentemente $\frac{dz'}{dZ}$ diventa in tutti questi punti discontinua, come nel suddetto punto Γ di E , e poichè z' rimane continua in tutti gli altri punti di T , ne risulta che z' è la somma di $2N$ integrali di seconda specie, ciascuno dei quali ha la sua discontinuità in uno dei detti punti.

Quindi se F è, per esempio, un rettangolo, z diventa un integrale ellittico di prima specie e z' la somma di quattro integrali ellittici di seconda specie, secondo la classificazione di RIEMANN.

V.

Indicando ora con x'_o, y'_o le coordinate di un punto o di F' , cui corrisponda in E il punto Z_o , con Z'_o il conjugato di Z_o e ponendo inoltre $z' = x' + iy'$, dai teoremi degli articoli I e IV della citata Memoria, immediatamente applicabili al caso presente, si deduce il seguente valore di U nel punto o :

$$U_o = \frac{1}{2\pi} \left[\int \psi(x', y') \frac{2 Y_o dX}{(X - X_o)^2 + Y_o^2} + \right. \\ \left. + \int \phi(x', y') \cdot \log \operatorname{mod} \left(\frac{Z - Z_o}{Z - Z'_o} \right) \cdot \operatorname{mod} \left(\frac{dz'}{dZ} \right)^2 \cdot dX dY \right],$$

dove il secondo integrale si deve estendere a tutti gli elementi $dX dY$ della superficie E , il primo a tutti gli elementi dX del suo contorno. Questa equazione si ottiene senza difficoltà dalla formola finale dell'art. I, facendo uso delle formole (b) e (c) dell'art. IV, ed osservando, in quanto alla trasformazione dell'elemento di superficie dF' , che nella rappresentazione sopra E i suoi lati vengono amplificati nel rapporto di $\operatorname{mod} \cdot dz'$ a $\operatorname{mod} \cdot dZ$.

In virtù di quest'equazione, valevole anche per la superficie F , e dei risultati dell'art. III, il problema di DIRICHLET è risoluto per tutte le super-

ficie F, F' terminate da poligoni, fin dove un tal problema è suscettibile di soluzione senza che vengano mutati i termini della quistione. Se si volesse andar più oltre e prescrivere che U_0 sia espresso in funzione di x'_0, y'_0 ed i parametri a (od a' rispettivamente), in funzione dei lati del poligono P , bisognerebbe esprimere Z in funzione di z (o di z' rispettivamente), e una tale espressione, se si vuole che sia valida incondizionatamente, può essere ottenuta soltanto per le quattro superficie F menzionate nell'art. VI del mio precedente lavoro, e per nessuna superficie complementare. In base a ciò non deve far meraviglia che i metodi anteriori, conducendo sempre ad espressioni di tal natura, non potessero dare alcun risultato, fuorchè nei quattro casi d'eccezione.

Berlino, aprile 1870.
