

Über die Primfunktionen in einer arithmetischen Progression.

Von

Heinrich Kornblum (†), stud. math. in Göttingen.

[Aus dem Nachlaß herausgegeben von E. Landau¹.]

§ 1.

Satz: p sei eine Primzahl. Es seien $A(x)$ und $M(x)$ ganze ganzzahlige Funktionen, von denen keine $\equiv 0 \pmod{p}$ ist, und die im Sinne von Dedekind²) \pmod{p} teilerfremd sind. Dann gibt es unendlich viele \pmod{p} inkongruente Primfunktionen $P(x)$, welche die Kongruenz

$$P \equiv A \pmod{p, M}$$

erfüllen; auch dann noch, wenn vorgeschrieben wird, daß der Koeffizient

¹) Verfasser, geboren in Wohlau am 23. August 1890, hatte vor dem Kriege selbständig die Entdeckung gemacht, daß Dirichlets klassischer Beweis des Satzes von den Primzahlen einer arithmetischen Progression (nebst den späteren elementaren Begründungen des Nichtverschwindens der bekannten Reihen) ein Analogon z. B. in der Theorie der Primfunktionen in Restklassen nach einem Doppelmodul p, M hat. Über dies selbstgewählte Thema hatte er seine Doktordissertation im wesentlichen schon fertiggestellt. Als Kriegsfreiwilliger fiel er im Oktober 1914 bei Poël-Capelle. Erst kürzlich erhielt ich aus seinem Nachlaß das (mir schon seit 1914 bekannte) Manuskript. Ich übergebe hiermit die schönsten und interessantesten Teile der Öffentlichkeit. Der Kornblumsche Ansatz zeichnet sich durch hohe Eleganz aus und zeigt, daß die Wissenschaft in ihm einen hoffnungsvollen Forscher verloren hat. Den Satz und Beweis des § 1 habe ich aus Kornblums Manuskript übernommen; einige Bemerkungen habe ich in Fußnoten angefügt. Den Satz und Beweis des § 2 hat er allerdings nur für $k=2$ gehabt; doch wäre die von mir hinzugefügte Ausdehnung auf beliebiges k wohl ohnehin bei gemeinsamer Besprechung in seiner Dissertation hinzugekommen, da alles unmittelbar mit seiner Methode herauskommt.

²) *Abriß einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus.* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 54 (1857), S. 1–26.

der höchsten Potenz in $P(x)$ einen vorgeschriebenen, zu p teilerfremden Rest $r \pmod p$ läßt.

Beweis: Es genügt, den Nachweis für primäre P zu führen, d. h. solche, deren höchster Koeffizient $\equiv 1 \pmod p$ ist. Denn dieser Wortlaut braucht ja bei gegebenem r nur auf $r_1 A(x)$ statt $A(x)$ angewendet zu werden, wo $rr_1 \equiv 1 \pmod p$ ist; aus $P_1 = r_1 A$ folgt ja $rP_1 = A$.

Auch der Modul M darf primär angenommen werden, da ja bei ihm eine beliebige zu p teilerfremde Zahl als Faktor willkürlich ist.

Ist $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Funktion $\equiv 0 \pmod p$, so bezeichne $[F]$ ihren Grad $\pmod p$, d. h. den Exponenten der höchsten Potenz, deren Koeffizient $\equiv 0 \pmod p$ ist. Alsdann darf $[M] = m > 0$ angenommen werden, da sonst die Behauptung trivial ist.

Die zu M teilerfremden Restklassen $(\pmod{p, M})$, deren Anzahl h heiße³⁾, bilden nach Dedekind eine Abelsche Gruppe. Es sei χ ein beliebiger der h Charaktere dieser Gruppe. Es werde $\chi(F)$ für zu $M \pmod p$ teilerfremdes F als Charakter der Restklasse erklärt; für die übrigen F werde $\chi(F) = 0$ gesetzt:

Für jeden dieser h „Charaktere $\chi(F) \pmod{p, M}$ “ werde, wenn $s \equiv 1$ ist,

$$L(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(F)}{p^{|F|s}}$$

gesetzt, wo F in irgendeiner Reihenfolge ein vollständiges System $\pmod p$ inkongruenter primärer Funktionen durchläuft⁴⁾ (deren es nach Dedekind p^n zu jedem Grad $n \geq 0$ gibt). Die Reihe ist absolut konvergent, da für $n \geq 0, s > 1$

$$\sum_{|F|=n} \frac{|\chi(F)|}{p^{|F|s}} = \frac{1}{p^{ns}} \sum_{|F|=n} |\chi(F)| \leq \frac{1}{p^{ns}} p^n = \frac{1}{p^{n(s-1)}}$$

ist, so daß $L(s, \chi)$ die konvergente Majorante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n(s-1)}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}}$$

besitzt.

$L(s, \chi)$ ist offenbar, wenn die Glieder mit gleichem $[F]$ zusammengefaßt werden und

$$\sum_{|F|=n} \chi(F) = a_n$$

³⁾ Dedekinds Wertbestimmung von $h = \varphi(M)$ ist hier unerheblich.

⁴⁾ Dies sei stets die Bedeutung des Summationsbuchstabens in derartigen Summen.

gesetzt ist, eine Dirichletsche Reihe⁵⁾

$$L(s, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{ns}}.$$

Für jeden vom Hauptcharakter χ_0 verschiedenen Charakter χ läßt sich nun zeigen, daß diese Dirichletsche Reihe abbricht, indem

$$(1) \quad a_n = 0 \quad \text{für } n \geq m$$

ist. Da nämlich die Gesamtheit der mod p inkongruenten Funktionen R mit $[R] < m$, wenn die Funktion $R \equiv 0 \pmod{p}$ hinzugefügt wird, nach Dedekind alle p^m Restklassen $(\text{mod } p, M)$ und jede genau einmal repräsentiert, also

$$\sum_R \chi(R) = 0$$

ist, so genügt es festzustellen: Die Anzahl der mod p inkongruenten primären F , welche den Bedingungen

$$F \equiv R \pmod{p, M}, \quad [F] = n$$

genügen, ist bei jedem festen $n \geq m$ von R unabhängig. In der Tat ist in

$$F \equiv QM + R \pmod{p}$$

notwendig und hinreichend, daß $[Q] = n - m$ und Q primär ist, und die so gefundene Anzahl p^{n-m} ist wirklich von R frei.

Weil somit $L(s, \chi)$ für $\chi \neq \chi_0$ eine endliche Summe

$$L(s, \chi) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{ns}}$$

ist (also bei beliebigem s durch diese Summe erklärt werden kann), sind bei zu 1 abnehmendem s die drei Grenzwerte

$$(2) \quad \lim_{s=1} L(s, \chi) = L(1, \chi),$$

$$(3) \quad \lim_{s=1} L'(s, \chi) = L'(1, \chi),$$

$$(4) \quad \lim_{s=1} \frac{L(s, \chi) - L(1, \chi)}{s-1} = L'(1, \chi)$$

vorhanden⁶⁾.

⁵⁾ Natürlich geht $L(s, \chi)$, wenn $p^{-s} = y$ gesetzt wird, in eine gewöhnliche, mindestens für $|y| < \frac{1}{p}$ konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ über.

⁶⁾ Damit soll stets gesagt sein, daß der betreffende Ausdruck gegen einen endlichen Wert strebt.

Für $s > 1$ und jedes χ ist ferner

$$(5) \quad L(s, \chi) = \prod_P \frac{1}{1 - \frac{\chi(P)}{p^{[P]s}}},$$

wo P in beliebiger Reihenfolge ein vollständiges System mod p inkongruenter primärer Primfunktionen durchläuft²⁾. Denn erstens genügt die Funktion

$$g(B) = \frac{\chi(B)}{p^{[B]s}}$$

wegen

$$\chi(B_1 B_2) = \chi(B_1) \chi(B_2), \quad [B_1 B_2] = [B_1] + [B_2]$$

dem Multiplikationsgesetz

$$g(B_1 B_2) = g(B_1) g(B_2);$$

zweitens sind nach Dedekind die primären $F \equiv 1$ eindeutig in Potenzprodukte inkongruenter primärer P mod p zerlegbar; drittens konvergiert das Produkt unbedingt, da

$$\sum_P \left| \frac{\chi(P)}{p^{[P]s}} \right| \leq \sum_F \frac{|\chi(F)|}{p^{[F]s}}$$

konvergiert.

Aus (5) folgt, wenn \prod_P' bedeutet, daß P nicht in $M \pmod{p}$ aufgeht,

$$L(s, \chi_0) = \prod_P' \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \prod_{P|M} \left(1 - \frac{1}{p^{[P]s}}\right) \prod_P \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}},$$

also, wegen

$$\prod_P \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \sum_F \frac{1}{p^{[F]s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{p^{ns}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}},$$

$$(6) \quad L(s, \chi_0) = \prod_{P|M} \left(1 - \frac{1}{p^{[P]s}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}};$$

bei zu 1 abnehmendem s ist also

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) L(s, \chi_0)$$

vorhanden, aber

$$(8) \quad -\frac{L'}{L}(s, \chi_0) \rightarrow \infty.$$

Aus (5) folgt ferner bei jedem χ für $s > 1$

$$(9) \quad L(s, \chi) = e^{\sum_{P,n} \frac{\chi(P^n)}{n p^{[P]ns}}},$$

²⁾ Dies sei stets die Bedeutung des Multiplikations- oder Summationsbuchstabens P .

wo in beliebiger Reihenfolge n die positiven ganzen Zahlen und P die mod p inkongruenten primären Primfunktionen durchläuft⁸⁾, also

$$(10) \quad -\frac{L'}{L}(s, \chi) = \log p \sum_{P, n} \frac{\chi(P^n) [P]}{p^{[P]ns}}.$$

Zur gegebenen Restklasse A (mod p, M) werde nun die inverse B bestimmt:

$$AB \equiv 1 \pmod{p, M}.$$

Dann ist, wenn (10) bei allen χ verwendet wird, für $s > 1$

$$\begin{aligned} -\sum_{\chi} \chi(B) \frac{L'}{L}(s, \chi) &= \log p \sum_{\chi} \chi(B) \sum_{P, n} \frac{\chi(P^n) [P]}{p^{[P]ns}} \\ &= \log p \sum_{P, n} \frac{[P]}{p^{[P]ns}} \sum_{\chi} \chi(BP^n), \end{aligned}$$

also nach den Fundamenteigenschaften der Charaktere

$$(11) \quad = h \log p \sum_{P^n \equiv A} \frac{[P]}{p^{[P]ns}}.$$

Wenn es also gelingt, für jedes $\chi \neq \chi_0$

$$(12) \quad L(1, \chi) \neq 0$$

zu zeigen, so folgt aus (11) nach (2), (3) und (8)

$$(13) \quad \sum_{P^n \equiv A} \frac{[P]}{p^{[P]ns}} \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist für $s > 1$

$$\sum_{\substack{P^n \equiv A \\ n > 1}} \frac{[P]}{p^{[P]ns}} < \sum_P [P] \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{[P]n}} = \sum_P \frac{[P]}{p^{[P]}(p^{[P]}-1)} < \sum_{n=1}^{\infty} p^n \frac{n}{p^n(p^n-1)},$$

also beschränkt. Aus (13) folgt daher

$$(14) \quad \sum_{P \equiv A} \frac{[P]}{p^{[P]s}} \rightarrow \infty,$$

also die Existenz unendlich vieler mod p inkongruenter primärer $P \equiv A$, q. e. d.

Beweis von (12) für komplexe Charaktere: Aus (9) folgt durch Multiplikation über alle χ

$$(15) \quad \prod_{\chi} L(s, \chi) = e^{h \sum_{P^n \equiv 1} \frac{1}{n p^{[P]ns}}} \geq 1.$$

⁸⁾ Diese Bedeutung habe $\sum_{P, n}$ stets in der Folge.

Wäre nun für einen komplexen Charakter $L(1, \chi_1) = 0$, so wäre auch für den konjugierten $L(1, \bar{\chi}_1) = 0$, also nach (4)

$$\frac{L(s, \chi_1)}{s-1} \rightarrow L'(1, \chi_1), \quad \frac{L(s, \bar{\chi}_1)}{s-1} \rightarrow L'(1, \bar{\chi}_1),$$

folglich wegen (2) und der Existenz des Grenzwertes (7)

$$\prod_{\chi} L(s, \chi) = (s-1) \cdot (s-1) L(s, \chi_0) \cdot \frac{L(s, \chi_1)}{s-1} \cdot \frac{L(s, \bar{\chi}_1)}{s-1} \cdot \prod_{\chi \neq \chi_0, \chi_1, \bar{\chi}_1} L(s, \chi) \rightarrow 0,$$

entgegen (15).

Beweis von (12) für reelle Charaktere: χ sei reell und $\neq \chi_0$. Es werde für primäres N

$$f(N) = \sum_{D|N} \chi(D)$$

gesetzt, wo D ein System mod p inkongruenter primärer Teiler von N durchläuft. Dann ist erstens $f(1) = 1$; zweitens für mod p teilerfremde N_1 und N_2

$$f(N_1 N_2) = \sum_{D|N_1 N_2} \chi(D) = \sum_{\substack{D_1|N_1 \\ D_2|N_2}} \chi(D_1 D_2) = \sum_{D_1|N_1} \chi(D_1) \cdot \sum_{D_2|N_2} \chi(D_2) = f(N_1) f(N_2),$$

also für $N \equiv 1$, wenn $N \equiv \prod_{P|N} P^l$ die Zerlegung in Potenzen inkongruenter primärer P ist,

$$f(N) = \prod_{P|N} f(P^l);$$

drittens, je nachdem $\chi(P) = 0, 1$ oder -1 ist,

$$f(P^l) = 1 + \chi(P) + \dots + \chi(P^l) = \begin{cases} 1 + 0 + \dots + 0 & = 1, \\ 1 + 1 + \dots + 1 & = l + 1, \\ 1 - 1 + \dots + (-1)^l & = \frac{1 + (-1)^l}{2}, \end{cases}$$

also stets $f(P^l) \geq 0$ und für gerades l sogar $f(P^l) \geq 1$. Daher ist stets $f(N) \geq 0$ und für $N \equiv Q^2$ sogar $f(N) \geq 1$.

Es werde nun für ganzes $z > 0$

$$G(z) = \sum_{\substack{N \leq z \\ [N]}} \frac{f(N)}{p^{\frac{z}{2}}}$$

gesetzt. Dann ist einerseits

$$G(z) \geq \sum_{[Q] \leq \frac{z}{2}} \frac{f(Q^2)}{p^{[Q]}} \geq \sum_{[Q] \leq \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{[Q]}} = \sum_{0 \leq n \leq \frac{z}{2}} \frac{p^n}{p^n} = \sum_{0 \leq n \leq \frac{z}{2}} 1 > \frac{z}{2},$$

also

$$(16) \quad G(z) \rightarrow \infty$$

bei unbegrenzt wachsendem z .

Andererseits ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{\substack{D|N \\ [N] \leq z}} \frac{\sum' \chi(D)}{p^{\frac{[N]}{2}}} = \sum_{[D] + [E] < z} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2} + \frac{[E]}{2}}} \\ &= \sum_{[D] \leq \frac{z}{2}} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leq z - [D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} + \sum_{[E] \leq \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \sum_{[D] \leq z - [E]} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} - \sum_{[E] \leq \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \sum_{[D] \leq \frac{z}{2}} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \\ &= \sum_{[D] < \frac{z}{2}} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leq z - [D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} + \sum_{[E] < \frac{z}{2}} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \sum_{\frac{z}{2} < [D] \leq z - [E]} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}}. \end{aligned}$$

Für $z \geq 2m$ verschwindet nach (1) die zweite Doppelsumme, und, soweit $[D] \geq m$ ist, der betreffende Bestandteil der ersten Doppelsumme; daher ist für $z \geq 2m$

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{[D] < m} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leq z - [D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}} \quad *) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} \sum_{q=0}^{z-n} \frac{p^q}{p^{\frac{q}{2}}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} \sum_{q=0}^{z-n} p^{\frac{q}{2}} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} \frac{p^{\frac{z-n+1}{2}} - 1}{p^{\frac{1}{2}} - 1} = \frac{p^{\frac{z+1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}} - 1} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{p^{\frac{n}{2}}} + c \\ (17) \quad &= p^{\frac{z}{2}} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}-1} L(1, \chi) + c. \end{aligned}$$

Wäre nun $L(1, \chi) = 0$, so wäre nach (17) für $z \geq 2m$

$$G(z) = c,$$

gegen (16) ¹⁰⁾.

⁹⁾ Anmerkung des Herausgebers: Diese Identität ist (sogar für $z \geq m$) auch ohne die vorangegangene Transformation von $G(z)$ sofort daraus abzulesen, daß

$$G(z) = \sum_{[D] \leq z} \frac{\chi(D)}{p^{\frac{[D]}{2}}} \sum_{[E] \leq z - [D]} \frac{1}{p^{\frac{[E]}{2}}}$$

ist und (1) gilt.

¹⁰⁾ Anmerkung des Herausgebers: Verf. hat sich bei der Wahl seines $G(z)$ etwas zu genau an das bekannte Paradigma angeschlossen; einfacher ist es hier, statt $G(z)$ die Funktion

$$H(z) = \sum_{[N] \leq z} f(N)$$

§ 2.

Satz: Unter den Voraussetzungen des Satzes aus § 1 gibt es sogar unendlich viele mod p inkongruente Primfunktionen $P \equiv A \pmod{p, M}$ mit mod p vorgeschriebenem, zu p teilerfremdem höchstem Koeffizienten und $[P] \equiv l \pmod{k}$, wo $k > 1$ und l vorgeschriebene ganze Zahlen sind.

Beweis: Es darf wieder P primär vorgeschrieben und M primär angenommen werden; auch $m > 0$ vorausgesetzt werden, da es nach Dedekind zu jedem Grad > 0 mindestens eine Primfunktion gibt¹¹⁾.

Offenbar genügt es, für jede von 1 verschiedene k -te Einheitswurzel η die Existenz von

$$(18) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{P \equiv A} \frac{\eta^{[P]s}}{p^{[P]s}}$$

nachzuweisen. Denn hieraus folgt nach (14), wenn \sum_{η} über alle k -ten Einheitswurzeln (einschl. 1) erstreckt wird,

zu betrachten. Einerseits ist

$$H(z) \geq \sum_{|Q| < \frac{z}{2}} f(Q^2) \geq \sum_{0 < n < \frac{z}{2}} p^n \rightarrow \infty.$$

andererseits für $z > m$

$$H(z) = \sum_{|D| \leq z} \chi(D) \sum_{|E| < z - |D|} 1 = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \sum_{q=0}^{z-n} p^q = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \frac{p^{z-n+1} - 1}{p-1} = \frac{p^{z+1}}{p-1} L(1, \chi) + c_1,$$

also (12) bewiesen.

¹¹⁾ Anmerkung des Herausgebers: Übrigens läßt sich die von Dedekind durch Betrachtung von $x^{p^n} - x$ erhaltene Bestimmung $\frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^d$ für die Anzahl $\psi(n)$ der mod p inkongruenten primären Primfunktionen n -ten Grades, d. h. die gleichbedeutende Gleichung $p^n = \sum_{d|n} d \psi(d)$ direkt aus der Identität

$$\prod_{d=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^{ds}} \right)^{\psi(d)} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}} \quad (s > 1)$$

ablesen; denn dieselbe besagt

$$\begin{aligned} - \sum_{d=1}^{\infty} \psi(d) \log \left(1 - \frac{1}{p^{ds}} \right) &= - \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right), \\ \sum_{d, g=1}^{\infty} \frac{\psi(d)}{g p^{dgs}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n p^{ns}}, \\ p^n &= n \sum_{d|n} \frac{\psi(d)}{g} = \sum_{d|n} d \psi(d). \end{aligned}$$

$$(19) \quad \sum_{\eta} \eta^{-l} \sum_{P \equiv A} \frac{\eta^{[P]} \chi^{[P]}}{p^{[P]s}} \rightarrow \infty,$$

und die linke Seite von (19) ist

$$= \sum_{P \equiv A} \frac{[P]}{p^{[P]s}} \sum_{\eta} \eta^{[P]-l} = k \sum_{\substack{P \equiv A \\ [P] \equiv l \pmod{k}}} \frac{[P]}{p^{[P]s}}.$$

Für jedes χ und jede k -te Einheitswurzel η werde auf der Strecke $s > 1$

$$L(s, \chi, \eta) = \sum_F \frac{\eta^{[F]} \chi^{(F)}}{p^{[F]s}}$$

gesetzt. Für $\eta = 1$ ist dies das $L(s, \chi)$ des § 1. Für $\eta \neq 1$ ergibt sich parallel zu den Entwicklungen des § 1 das folgende.

Nach (1) ist für $\chi \neq \chi_0$

$$L(s, \chi, \eta) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\eta^n \alpha_n}{p^{ns}},$$

also bei zu 1 abnehmendem s

$$(20) \quad \begin{aligned} L(s, \chi, \eta) &\rightarrow L(1, \chi, \eta), \\ L'(s, \chi, \eta) &\rightarrow L'(1, \chi, \eta), \\ \frac{L(s, \chi, \eta) - L(1, \chi, \eta)}{s-1} &\rightarrow L'(1, \chi, \eta). \end{aligned}$$

Für $s > 1$ und jedes χ ist

$$L(s, \chi, \eta) = \prod_P \frac{1}{1 - \frac{\eta^{[P]} \chi^{(P)}}{p^{[P]s}}}.$$

Für $s > 1$ ist

$$L(s, \chi_0, \eta) = \prod_{P|M} \left(1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}\right) \prod_P \frac{1}{1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}},$$

also, wegen

$$\prod_P \frac{1}{1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}} = \sum_F \frac{\eta^{[F]}}{p^{[F]s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n p^n}{p^{ns}} = \frac{1}{1 - \frac{\eta}{p^{s-1}}},$$

$$(21) \quad L(s, \chi_0, \eta) = \prod_{P|M} \left(1 - \frac{\eta^{[P]}}{p^{[P]s}}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\eta}{p^{s-1}}},$$

folglich $\lim_{s=1} L(s, \chi_0, \eta)$ vorhanden und $\neq 0$; ebenso ist $\lim_{s=1} L'(s, \chi_0, \eta)$

vorhanden und somit auch $\lim_{s=1} \frac{L'}{L}(s, \chi_0, \eta)$.

Für $s > 1$ ist

$$(22) \quad L(s, \chi, \eta) = e^{\sum_{P,n} \frac{\eta^{[P]n} \chi(P^n)}{np^{[P]ns}}},$$

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi, \eta) = \log p \sum_{P,n} \frac{\eta^{[P]n} \chi(P^n)[P]}{p^{[P]ns}},$$

$$-\sum_{\chi} \chi(B) \frac{L'}{L}(s, \chi, \eta) = h \log p \sum_{P^n} \frac{\eta^{[P]n} [P]}{p^{[P]ns}}.$$

Wenn also für jedes $\chi \neq \chi_0$

$$(23) \quad L(1, \chi, \eta) \neq 0$$

gezeigt werden kann, so existiert

$$\lim_{s \rightarrow 1} \sum_{P^n=A} \frac{\eta^{[P]n} [P]}{p^{[P]ns}},$$

also der Grenzwert (18).

Beweis von (23) für reelles $\chi \neq \chi_0$ mit $\eta \neq -1$ und für komplexes χ : Es werde

$$\eta = e^{\varphi i} \quad (0 < \varphi < 2\pi)$$

gesetzt. Es werde ferner für zu $M \pmod{p}$ teilerfremdes F

$$\chi(F) = e^{\omega(F)i} \quad (0 \leq \omega < 2\pi)$$

gesetzt. Dann ist für diese F der Charakter

$$\chi^2(F) = e^{2\omega(F)i}.$$

$L(s, \chi^2, \eta^2)$ hat für zu 1 abnehmendes s nach den gefundenen Eigenschaften von $L(s, \chi)$ und $L(s, \chi, \eta)$ einen Limes (da nicht zugleich $\chi^2 = \chi_0$ und $\eta^2 = 1$ ist). Für $s > 1$ ist nun, wenn in \sum' die $P \mid M$ fehlen,

$$|L(s, \chi, \eta)| = e^{\Re \sum_{P,n} \frac{\eta^{[P]n} \chi(P^n)}{np^{[P]ns}}} = e^{\sum_{P,n} \frac{\cos n(\omega(P) + [P]\varphi)}{np^{[P]ns}}},$$

$$|L(s, \chi^2, \eta^2)| = e^{\sum_{P,n} \frac{\cos 2n(\omega(P) + [P]\varphi)}{np^{[P]ns}}}$$

Andererseits ist

$$e^{\sum_{P,n} \frac{1}{np^{[P]ns}}} \leq e^{\sum_{P,n} \frac{1}{np^{[P]ns}}} = \prod_P \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{[P]s}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s - 1}}.$$

Da nun für reelle ϑ

$$3 + 4 \cos \vartheta + 2 \cos 2\vartheta = (1 + 2 \cos \vartheta)^2 \geq 0$$

ist, ergibt sich für $s > 1$

$$1 \leq e^{\sum_{P, n} \frac{3 + 4 \cos n(\omega(P) + [P]\varphi) + 2 \cos 2n(\omega(P) + [P]\varphi)}{np^{[P]n s}}} \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s-1}}} \right)^3 |L(s, \chi, \eta)|^4 |L(s, \chi^2, \eta^2)|^2,$$

also für $1 < s < 2$ bei passender Wahl eines von s freien positiven γ

$$1 < \frac{\gamma}{(s-1)^3} |L(s, \chi, \eta)|^4 |L(s, \chi^2, \eta^2)|^2,$$

$$|L(s, \chi, \eta)| > \frac{(s-1)^{\frac{3}{2}}}{\gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{|L(s, \chi^2, \eta^2)|}},$$

$$\left| \frac{L(s, \chi, \eta)}{s-1} \right| > \frac{1}{(s-1)^{\frac{1}{2}} \gamma^{\frac{1}{2}} \sqrt{|L(s, \chi^2, \eta^2)|}}.$$

Bei zu 1 abnehmendem s ist also

$$\left| \frac{L(s, \chi, \eta)}{s-1} \right| \rightarrow \infty,$$

was im Falle $L(1, \chi, \eta) = 0$ mit (20) in Widerspruch steht.

Beweis von (23) für reelles $\chi \neq \chi_0$ mit $\eta = -1$: Es werde

$$f(N) = \sum_{D|N} (-1)^{|D|} \chi(D)$$

gesetzt. Dann ergibt sich wie in § 1

$$f(N) \geq 0, \quad f(Q^2) \geq 1.$$

Es werde nun für $z > 0$

$$H(z) = \sum_{[N] \leq z} f(N)$$

gesetzt¹³⁾. Dann ist einerseits

$$H(z) \geq \sum_{[Q] \leq \frac{z}{2}} f(Q^2) \geq \sum_{0 \leq n \leq \frac{z}{2}} p^n \rightarrow \infty,$$

andererseits für $z \geq m$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{[D] \leq z} (-1)^{|D|} \chi(D) \sum_{[E] \leq z-[D]} 1 = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n a_n \sum_{q=0}^{z-n} p^q = \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n a_n \frac{p^{z-n+1} - 1}{p-1} \\ &= \frac{p^{z+1}}{p-1} L(1, \chi, \eta) + c_2, \end{aligned}$$

also (23) wahr.

¹³⁾ Anmerkung des Herausgebers: Ich weiche hier vom Kornblumschen Text (der wieder $G(z)$ einführt) ab, indem ich gleich die Vereinfachung der Anm. 10 anbringe.

Anhang des Herausgebers.

Wenn man einen Satz¹³⁾ von mir über Dirichletsche Reihen mit Koeffizienten ≥ 0 heranzieht, so läßt sich in § 1 und § 2 das Nichtverschwinden aller $L(1, \chi, \eta)$ für $\chi \neq \chi_0$, $\eta \neq 1$ und für $\eta \neq 1$ mit einem Schlage folgendermaßen begründen. Aus (9) und (22) folgt durch Multiplikation über alle kh Paare η, χ für $s > 1$

$$\Lambda(s) = \prod_{\eta} \prod_{\chi} L(s, \chi, \eta) = \prod_{\eta} e^{\sum_{P^n} \frac{\eta^{|P|^n}}{n p^{|P|^n s}}} = e^{\sum_{P^n} \frac{kh}{n} \sum_{\substack{1 \\ 0 \pmod{k}}} \frac{1}{n p^{|P|^n s}}} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^s},$$

wo die b_q rational und ≥ 0 sind. Andererseits sind die b_q ganze algebraische Zahlen, da dies von jedem Koeffizienten der Dirichletschen Reihen $L(s, \chi, \eta)$ gilt. Die b_q sind also ganze rationale Zahlen ≥ 0 . Unendlich viele darunter sind > 0 ; denn irgendein $\text{mod } p$ nicht in M aufgehendes P nebst $n = kh$ liefert $P^n \equiv 1 \pmod{p, M}$, $[P]n \equiv 0 \pmod{k}$, und dies Glied der Dirichletschen Reihe im Exponenten hat schon die Existenz unendlich vieler positiver b_q zur Folge. Daher divergiert $\sum_{q=1}^{\infty} b_q$.

Wäre nun ein $L(1, \chi, \eta) = 0$, so würde $\Lambda(s)$ in $s = 1$ regulär sein. Nach (6) und (21) ist aber $\Lambda(s)$ für $0 \leq s < 1$ gewiß regulär. $\sum_{q=1}^{\infty} b_q$ müßte also nach dem in Anm. 13 genannten Satz konvergieren.

Berlin, den 9. April 1919.

¹³⁾ „ $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^s}$, wo $b_q \geq 0$ ist, konvergiere für $s > \alpha$, und es sei die für $\sigma > \alpha$ durch

die Reihe dargestellte Funktion für $\beta \leq s \leq \alpha$ regulär. Dann konvergiert $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_q}{q^{\beta}}$.“

Natürlich genügt hier wegen der Substitution $p^{-s} = y$ auch der ältere Vivantische Satz über Potenzreihen.

(Eingegangen am 10. April 1919.)